

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 166-249 (2010)

УДК 519.626.1

MSC 49N05

**ОПТИМАЛЬНОЕ И КВАЗИОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ
РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ
СИСТЕМАМИ**

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

ABSTRACT. A numerical method of solving the problem on minimization of consumption resources for dynamic systems is proposed. The method is based on developing finite control translating a linear system in the fixed time from an initial state to a desired final state and allowing the structure of resource consumption optimal control to be calculated. The technique is given for an initial approximation to be specified an iterative algorithm of calculating the optimal control is considered. The system of linear algebraic equations is obtained that relates the increments of initial conditions for an adjoint system to the increments of phase coordinates about a given final state. A calculating algorithm is offered. The calculating process with sequence of the controls is proved to converge to the resource consumption optimal control. The radius of local convergence is found, its quadratic rate being determined. The results of modeling and calculating are presented. The method is generalized to disturbed dynamic systems. The features of real-time control are considered. An approximate method of solving the problem on minimization of resource consumption is proposed, estimation of closeness between the approximate and the optimal solutions being obtained with the technique to reduce their discrepancy. One more iterative algorithm using an approximate solution as initial one is considered for the problem in question to be solved.

ALEKSANDROV, V.M., RESOURCE CONSUMPTION OPTIMAL AND QUASI-OPTIMAL CONTROLS FOR DYNAMIC SYSTEMS .

© 2010 АЛЕКСАНДРОВ В.М.

Работа поддержана РФФИ (проект № 10-01-00035) и СОРАН (проект № 85).

Поступила 7 июля 2010 г., опубликована 31 августа 2010 г.

Keywords: optimal control, finite control, quasi-optimal control, resource consumption, linear system, phase trajectory, switching moment, adjoint system, variation, iteration, convergence, disturbance, real time, approximal solution, estimation of closeness.

1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление по различным критериям качества представляет значительный теоретический и практический интерес [1]. Одной из актуальных является задача минимизации расхода ресурсов. Сформулированная первоначально как задача минимизации расхода топлива она рассматривалась многими как отечественными так и зарубежными авторами [2]–[11]. Так как аналитическое решение задачи в общем случае невозможно, то предложены различные численные методы ее решения, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [12]–[17]. Большие вычислительные затраты не позволяют реализовать в реальном времени оптимальное по расходу ресурсов управление многими объектами и технологическими процессами и приводят к необходимости разработки новых численных методов, учитывающих специфику решаемой задачи и обладающих малой вычислительной трудоемкостью.

В работе предлагается новый численный метод решения задачи минимизации расхода ресурсов. Метод основан на оригинальном способе формирования финитного управления из начальных условий управляемой системы [18]. Финитное управление представляет чередующуюся последовательность разнополярных воздействий, величины которых пропорциональны начальным условиям, взятыми с некоторыми весовыми коэффициентами. Это управление формируется с использованием принципа максимума Понтрягина [1]. Финитное управление переводит линейную систему из любого начального состояния в требуемое конечное состояние (начало координат) за заданное (фиксированное) время. При этом моменты переключений остаются фиксированными, а изменяются лишь величины управляющих воздействий, что обеспечивает простую техническую реализацию. Простота реализации является важным достоинством этого управления. Структура финитного управления позволяет определить структуру искомого оптимального по расходу ресурсов управления и задать хорошее начальное приближение [19]. Найдена связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями фазовых координат от начала координат в конечный момент времени. Для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению моментов переключений с помощью сопряженной системы. Получена зависимость между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий сопряженной системы. В результате итерационный процесс вычисления оптимального по расходу ресурсов управления сводится к последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию матричного дифференциального уравнения на интервалах перемещения моментов переключений (раздел 3). Доказана сходимость итерационного процесса вычисления оптимального по расходу ресурсов управления для любых начальных условий,

принадлежащих области управляемости. Найден радиус локальной сходимости, которая имеет квадратичную скорость сходимости (раздел 4). Приведен по шагам итерационный алгоритм вычисления оптимального по расходу ресурсов управления (раздел 5) и результаты моделирования и численных расчетов (раздел 6). Дано обобщение метода вычисления оптимального по расходу ресурсов управления на динамические системы с возмущениями. Возмущения предполагаются непрерывными, ограниченными и известными функциями (раздел 7). Если возмущения, действующие на объект, заранее не известны, то в разделе 8 приведен алгоритм периодического вычисления их средних значений (за время между измерениями фазовых координат) в процессе сопровождения фазовой траектории движения объекта. В реальном времени формируется позиционно-программное управление по минимуму расхода ресурсов.

Итерационные методы вычисления оптимального управления требуют затрат времени на вычисления, что не позволяет реализовать управление быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами. Поэтому актуальна проблема построения простых в реализации, но близких к оптимальным алгоритмов управления динамическими системами. В разделе 9 предложен простой метод приближенного решения задачи минимизации расхода ресурсов. Найдена область начальных условий, для которой не нарушаются ограничения на управление. Получены некоторые оценки близости приближенного решения к точному (оптимальному) решению задачи на минимум расхода ресурсов. Показано, что различие между приближенным и оптимальным управлениями уменьшаются с увеличением порядка управляемой динамической системы, при увеличении заданного времени перевода системы и по мере приближения начальных условий к граничным значениям. Дан способ деления области начальных условий на k подобластей, позволяющий дополнительно уменьшать различие между приближенным и оптимальным управлениями более чем в k раз.

В разделе 10 предложен еще один численный метод нахождения оптимального по расходу ресурсов управления, основанный на задании в качестве начального приближения – приближенного решения задачи. Для начального приближения не требуется соблюдения ограничения на управление. Суть метода состоит в постепенном выравнивании величин управляющих воздействий до предельно-допустимых значений, именно с которыми и формируется оптимальное по расходу ресурсов управление.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V, \quad (2.1)$$

где x - n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ -непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u - m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и

подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) полностью управляема, т.е

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат ограниченным управлением (2.2), т.е x_0 принадлежит области управляемости V . Здесь $\Phi(t, t_0)$ - фундаментальная матрица решений уравнения (2.1); * - знак транспонирования.

Задача 1. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (2.4)$$

Здесь T_0 - время оптимального по быстрдействию перевода системы.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

3.1. Формирование финитного управления. Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения на компоненты вектора управления, зависящие от начальных условий

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.1)$$

где N_{ij} - некоторые весовые коэффициенты. Для принятого начального условия ограничение (3.1) имеет вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.2)$$

Для нахождения оптимального по быстрдействию управления при ограничении (3.2) воспользуемся принципом максимума [1]. Образует функцию Понтрягина

$H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\psi(t)$:

$$\begin{aligned} H(\psi(t), x(t), u(t), t) &= \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \\ \dot{\psi} &= -A^*(t)\psi. \end{aligned}$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей

функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t). \quad (3.3)$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления формируются по алгоритму:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} |x_i(t_0)| \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

где $[B_j(t)]^*$ - транспонированный j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$. Пусть $x_i(t_0) = x_i^+(t_0) > 0$. Тогда (3.4) можно записать так:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} x_i^+(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.5)$$

где $\psi^{(i)}(t)$ - решение сопряженной системы, соответствующее положительному значению $x_i(t_0)$. Если $x_i(t_0) = -x_i^+(t_0) < 0$, то

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} x_i^+(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \tilde{\psi}^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

где $\tilde{\psi}^{(i)}(t)$ - решение сопряженной системы, соответствующее симметричной точке $[-x_i^+(t_0)]$. В силу симметрии относительно начала координат многообразий переключений имеем $\tilde{\psi}^{(i)}(t) = -\psi^{(i)}(t)$. Запишем теперь (3.6) так:

$$u_j^{(i)}(t) = -N_{ij} x_i^+(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.7)$$

Объединим (3.7) и (3.5) для произвольного по знаку значения $x_i(t_0)$. Получим

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij} x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t), \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.8)$$

Выпишем решение уравнения (2.1) в конечный момент времени $t = t_k$ для рассматриваемого случая начальных условий, когда лишь i -я компонента отлична от нуля. Имеем

$$x^{(i)}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) x^{(i)}(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^{(i)}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.9)$$

Обозначим через $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0)$ i -й вектор-столбец фундаментальной матрицы решений $\Phi(t_k, t_0)$. Тогда $\Phi(t_k, t_0) x^{(i)}(t_0) = \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) x_i(t_0)$. Подставив в (3.9) это выражение, управление (3.8), конечное условие $x^{(i)}(t_k) = 0$ и учитывая, что по определению $x_i(t_0) \neq 0$ и есть скалярная величина, получим основное уравнение, связывающее моменты переключений управления с параметрами управляемой системы

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \text{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.10)$$

Подставив в (3.10) решение сопряженной системы $\psi^{(i)}(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0)$, получим систему из n *трансцендентных* уравнений с n неизвестными, которыми являются начальные условия $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0) \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.11)$$

Решив (3.11), найдем $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$, и, следовательно, моменты переключений управления (3.8). Из (3.11) непосредственно следует, что начальные условия сопряженной системы, и следовательно, моменты переключений управления (3.8) *не зависят* от значений $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$.

В случае постоянных матриц A и B получаем следующее уравнение, связывающее моменты переключений управления (3.8) с матрицами A, B и коэффициентами N_{ij} :

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T e^{A(T-\tau)} B_j N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j]^* \psi^{(i)}(\tau) \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.11')$$

Из (3.11') непосредственно следует, что моменты переключений не зависят от начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, начального момента t_0 и постоянны. В результате доказана

Теорема 1. *Моменты переключений конечного управления (3.8), сформированного из начального условия i -й фазовой координаты, не зависят от значения $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$.*

В случае постоянных матриц A и B моменты переключений не зависят от начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, начального момента t_0 и постоянны.

Сохраним это важное свойство, но другим способом сформируем конечное управление, при котором существенно уменьшается вычислительная трудоемкость.

Зафиксируем моменты переключений управления. Тогда весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$ а r_j - число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Число интервалов устанавливается следующим образом. Зададим произвольно $(n-1)$ моментов переключений ν_j^p , $p = 1, l_j$; $\sum_{j=1}^m l_j = n-1$ для компонент вектора управления. В эти моменты функция переключений равна нулю

$$[B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \psi(t_0) = 0, \quad p = 1, l_j; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n-1. \quad (3.12)$$

Пронормируем решение сопряженной системы, полагая $|\psi_\alpha(t_0)| = 1$, где α любое значение из $i = \overline{1, n}$. Получим систему из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений

$$[B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \widehat{\psi}(t_0) = 0, \quad p = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n - 1. \quad (3.13)$$

относительно $(n - 1)$ начальных условий $\widehat{\psi}_i(t_0)$ нормированной сопряженной системы. Зная начальное условие $\widehat{\psi}(t_0)$, находим *все* остальные моменты переключений компонент вектора управления на интервале $[t_0, t_k]$ (если они существуют).

Финитное управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.14)$$

где $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$. В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (3.14), сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.15)$$

Суммарное управление (3.15) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (2.1) из любого начального состояния $x(t_0)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$. Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$ связаны с параметрами управляемой системы (2.1) следующим аналогичным (3.11) уравнением

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \text{sign}[B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.16)$$

Введем обозначение $\widehat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \text{sign}[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)$. Число параметров \widehat{N}_{ij}^p может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем неизвестными коэффициенты \widehat{N}_{ij}^p , $j = \overline{1, m}; p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах полагаем $\widehat{N}_{ij}^{p+1} = -\widehat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда $\widehat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{k_j}$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$.

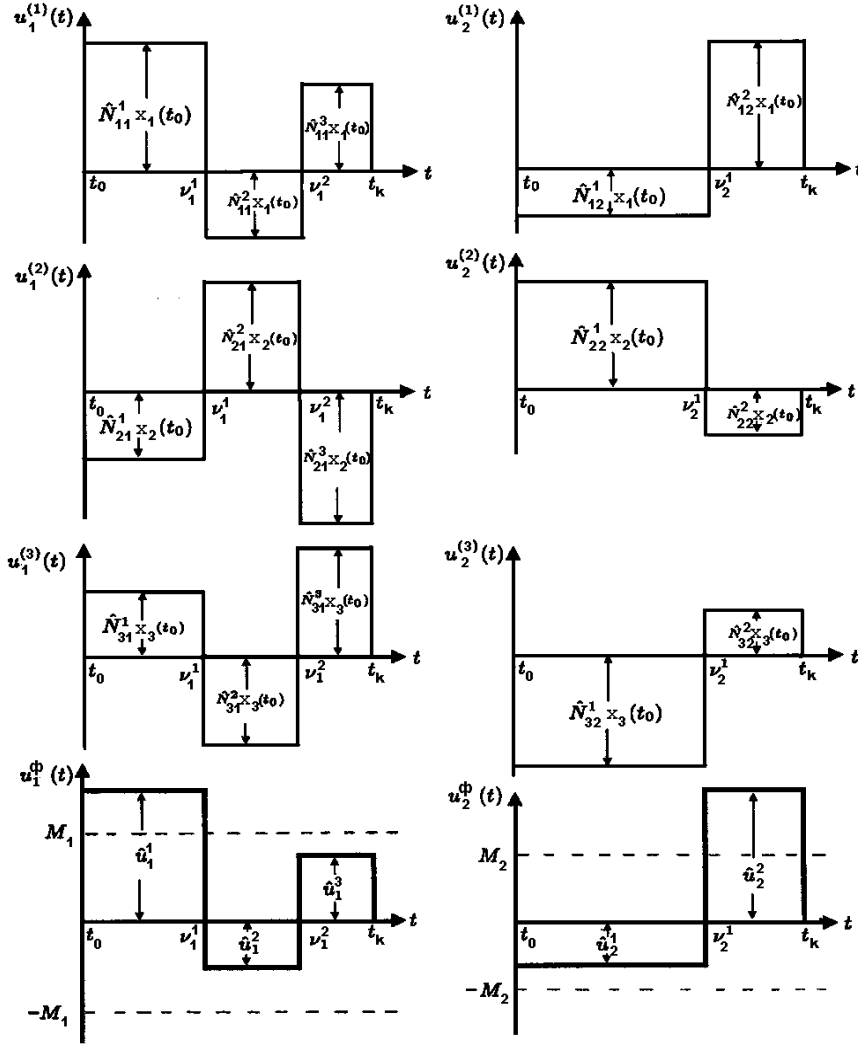


Рис. 1. Формирование финитного управления

В результате получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов \hat{N}_{ij}^p :

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) d\tau \right\} + \quad (3.17)$$

$$+\Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (3.17) и находим весовые коэффициенты. Финитное

управление (3.15) с учетом принятых обозначений формируется по простому алгоритму

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (3.18)$$

На Рис. 1 приведена качественная картина формирования двух компонент финитного управления для системы третьего порядка. Каждая компонента вектора управления образуется суммированием трех составляющих $u_j^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$. Каждая из составляющих принимает на интервалах знакопостоянства различные значения, пропорциональные начальному условию соответствующей фазовой координаты.

3.2. Выравнивание величин финитного управления. Произведем выравнивание величин финитного управления. Это приводит к тому, что для величин финитного управления справедливо выражение $|u_j^\Phi| = \eta M_j$, где η – некоторый искомый параметр. Теперь финитное управление $u^\Phi(t)$, переводящее систему (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$, определяется так: $u_j^\Phi(t) = \eta M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$. Параметр $\eta > 0$ показывает насколько следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ не за минимальное, а за заданное время T . Если $\eta \leq 1$, то решение задачи на минимум расхода ресурсов существует. При $\eta = 1$ решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстрогодействия и $T = T_0$. Если $\eta > 1$, то решения задачи не существует.

Выравнивание величин финитного управления достигается изменением моментов переключений ν_j^p на соответствующие значения $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$. Изменение моментов переключений на $\Delta \nu_j^p$ вызывает следующие отклонения фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$:

$$\Delta \widehat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1} + \Delta \nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p + \Delta \nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \eta M_j \text{sign}[B_j(\tau)]^* \psi(\tau) d\tau, \quad (3.19)$$

где $\nu_j^0 = t_0$, $\nu_j^{r_j} = t_k$. Так как t_0 и t_k фиксированы, то $\Delta \nu_j^0 = 0$ и $\Delta \nu_j^{r_j} = 0$.

Выражение (3.19) при малых $\Delta \nu_j^p$ можно приближенно записать так, используя обозначение $S_j(p) = \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$; $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$:

$$\Delta \widehat{x}(t_k) \cong 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \eta M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p. \quad (3.20)$$

Отклонения управляющих параметров $\Delta u_j(p) = \eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0)$ от выравненных значений вызывают следующее отклонение фазовых координат

в конечный момент времени $t = t_k$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[\eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau, \quad (3.21)$$

Должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \hat{x}(t_k) + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (3.20) и (3.21), получим уравнение, связывающее отклонения $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ и параметр η с параметрами управляемой системы. Число отклонений моментов переключений может быть больше, чем $(n - 1)$. Выше отмечалось, что не все моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ являются независимыми переменными. Выбрав произвольно $(n - 1)$ моментов переключений управления, с помощью сопряженной системы определяем все остальные моменты переключений (если они существуют). Поэтому необходимо установить связь между отклонениями $\Delta \nu_j^p$ и отклонениями нормированной сопряженной системы. Такая связь была найдена [18]:

$$\Delta \nu_j^p \cong \left\{ \left[B_j(\nu_j^p) \right]^* A^*(\nu_j^p) - \left[\dot{B}_j(\nu_j^p) \right]^* \left[\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) \right]^* \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} \times \quad (3.22)$$

$$\times \left[B_j(\nu_j^p) \right]^* \left[\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) \right]^* \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Запишем (3.22) в компактном виде $\Delta \nu_j^p \cong L(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$ и подставим в (3.20). В результате получим уравнение, связывающее отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы с отклонениями величин управляющих воздействий

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \eta M_j S_j(p) L(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0) +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[\eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (3.23)$$

Получили систему из n уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n - 1)$ значений $\Delta \hat{\psi}_i(t_0)$ и параметр η . Разделим на η обе части уравнения (3.23) и получим систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных, которыми являются $(n - 1)$ значений $\Delta \hat{\psi}_i(t_0)$ и параметр $1/\eta$:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) L(\nu_j^p) \Delta \hat{\psi}(t_0) - \quad (3.24)$$

$$- \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0.$$

Из-за приближенности выражений (3.20) и (3.22) решение системы (3.24) осуществляется итерационным путем. По формуле (3.22) находим $\Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p =$

$\overline{1, r_j - 1}$. Если $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| \leq \rho(t_k - t_0)$, то находим новые значения моментов переключений $\nu_j^{p,s+1} = \nu_j^{p,s} + \Delta \nu_j^{p,s}$ и новое начальное условие нормированной сопряженной системы $\hat{\psi}^{s+1}(t_0) = \hat{\psi}^s(t_0) + \Delta \hat{\psi}^s(t_0)$, где s - номер итерации, а ρ задано ($0 < \rho < 1$) и характеризует предельно допустимое отклонение, при котором сохраняется сходимость вычислительного процесса. Для новых значений моментов переключений вычисляем, решая (3.17), новые весовые коэффициенты, вновь формируем финитное управление (3.18) и снова решаем (3.24) и т.д. Процесс вычислений заканчивается, когда $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| \leq \epsilon_0$, где ϵ_0 задано ($0 < \epsilon_0 < 1$) и характеризует требуемую точность выравнивания величин финитного управления.

Если $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| > \rho(t_k - t_0)$, то ограничиваем максимальное отклонение этим предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p| = \rho(t_k - t_0)$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в μ раз, т.е. полагаем $\Delta \tilde{\nu}_j^p = \mu \Delta \nu_j^p$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$; $\tilde{\Delta} \hat{\psi}(t_0) = \mu \Delta \hat{\psi}(t_0)$, где $\mu = \frac{\rho(t_k - t_0)}{\max_{j,p} |\Delta \nu_j^p|}$. Здесь $\Delta \nu_j^p$, $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ - вычисленные значения из уравнений (3.22) и (3.24) соответственно; $\Delta \tilde{\nu}_j^p$, $\tilde{\Delta} \hat{\psi}(t_0)$ - значения отклонений, которые принимаются для последующих вычислений в итерационном процессе.

Финитное управление $u_j^\Phi(t) = \eta M_j S_j(p)$, $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$; $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ дает информацию, необходимую для решения задачи на минимум расхода ресурсов:

- получаем последовательность управляющих воздействий, знаки и число (r_j) интервалов знакопостоянства для каждой компоненты. Действительно, при $\eta = 1$ когда $T = T_0$ решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстрогодействия. При $\eta < 1$ ($T > T_0$) появляются участки "выключения" управления, за счет которых и происходит экономия ресурсов. При этом структура финитного управления отличается от оптимального по расходу ресурсов управления, однако последовательность кусочно-постоянных воздействий, знаки и число перемен знаков для каждой компоненты сохраняются;
- моменты переключений финитного управления используются для начального приближенного задания моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления;
- если $\eta > 1$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует. Для существования решения необходимо увеличить M_j либо T . Увеличение M_j приводит к существованию решения, если система (2.1) полностью управляема, т.е. выполняется условие (2.3). Увеличение T для неустойчивых систем приводит к существованию решения, если только $x_0 \in V$.

3.3. Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления.

Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления при ограничении (2.2) образуем функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad (3.25)$$

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u_j(t) = \begin{cases} M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1. \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.26)$$

Соотношение (3.26) можно записать более компактно:

$$u_j(t) = M_j \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (3.27)$$

Оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \quad (3.28)$$

где $t_j^{2r_j-1} = t_k$. На Рис. 2 качественно показаны: структура финитного управления $u_j^\Phi(t)$; структура оптимального по расходу ресурсов управления $u_j^{opt}(t)$; функция переключения $[B_j(t)]^* \psi(t)$.

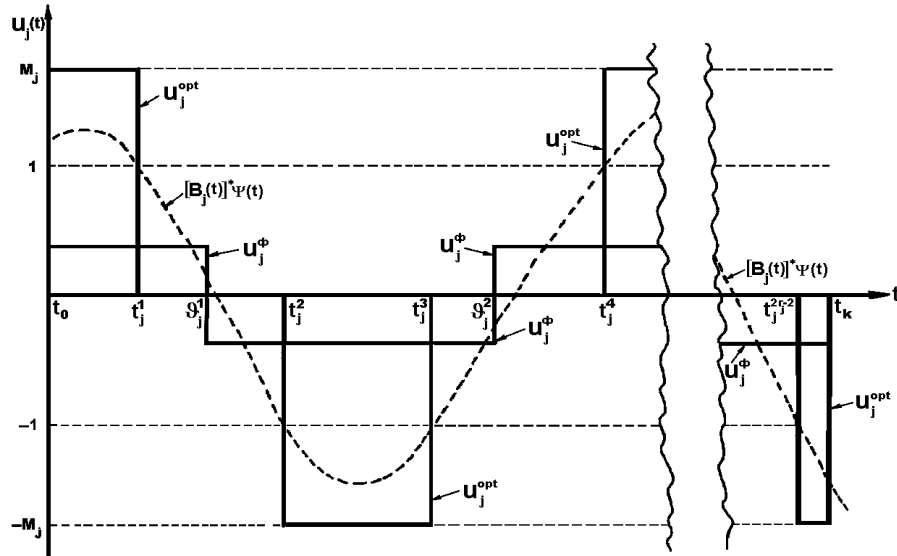


Рис. 2. Структуры финитного и оптимального управлений

Пусть t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$) – α -й момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора управления. Задавая произвольно n моментов переключений управления, можно определить начальное условие $\psi(t_0)$ для сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, а с помощью решения $\psi(t)$ найти все моменты переключений компонент вектора управления на заданном интервале $[t_0, t_k]$, соответствующие этим n заданным моментам. Выбор же "хорошего" начального приближения улучшает сходимость, а главное, уменьшает время, затрачиваемое на интегрирование, и следовательно уменьшает время нахождения оптимального управления и вычислительную трудоемкость метода. Моменты переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$; $j = \overline{1, m}$) для начального приближения искомого управления на минимум расхода ресурсов целесообразно задавать через моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ финитного управления. Первый момент t_j^1 выключения и последний момент $t_j^{2(r_j-1)}$ включения управления зададим по следующим формулам

$$t_j^1 = t_0 + \frac{1}{2}(\nu_j^1 - t_0)\eta(1 + \eta^2), \quad t_j^{2(r_j-1)} = t_k - \frac{1}{2}(t_k - \nu_j^{(r_j-1)})\eta(1 + \eta^2), \quad (3.29)$$

а остальные моменты переключений зададим так:

$$t_j^{2p-1} = \nu_j^p - \frac{1}{2}(\nu_j^p - \nu_j^{p-1}) \left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2) \right], \quad t_j^{2p} = \nu_j^p + \frac{1}{2}(\nu_j^{p+1} - \nu_j^p) \left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2) \right],$$

$$p = \overline{1, r_j - 1}.$$

В этом случае, если $\eta = 1$, то финитное управление должно совпадать с оптимальным по расходу ресурсов управлением, что и отражают формулы (3.29). Если $\eta \rightarrow 0$, то интервалы, на которых управление, минимизирующее расход

ресурсов, отлично от нуля, должны стремиться к нулю, что и следует из (3.29). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, где $E(\cdot)$ – целая часть числа.

При $t = t_j^\alpha$ имеем $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Зная $u^\Phi(t)$, легко определить знаки функции переключения на каждом p -м интервале постоянства через первый интервал

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = (-1)^{p-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0). \quad (3.30)$$

Запишем решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ так:

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0). \quad (3.31)$$

Подставляя (3.31) и соотношение $p = E(\alpha/2 + 1)$ в (3.30), получим для вычисления $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0) = 0, \quad (3.32)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n.$$

Зная начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (3.31) находим все t_j^α , для которых выполняется (3.32). Таким образом, задав n моментов переключений, находим с помощью функции переключений соответствующие им все остальные моменты переключений.

3.4. Отклонение фазовой траектории от начала координат. Пусть заданы все приближенные значения моментов переключений $t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Управляемая система (2.1) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} d\tau. \quad (3.33)$$

Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

3.5. Вариация моментов переключений управления. Изменение t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ и принимают значения $u_j^p(t) = M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \quad (3.34)$$

Если Δt_j^α достаточно малы (а это, как показано ниже, всегда достижимо), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (3.35)$$

3.6. Уравнение баланса отклонений. Отклонения фазовых координат (3.33), порождаемые неточным заданием моментов переключений, должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т.е. должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (3.33) и (3.35), получим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Покажем, что решение системы линейных алгебраических уравнений (3.36) существует. Для этого необходимо доказать невырожденность матрицы $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha)$.

Справедлива запись $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) = \Phi(t_k, t_j^\alpha) B(t_j^\alpha), j = \overline{1, m}$. Для автономной системы матрица фундаментальных решений имеет вид $\Phi(t_k, t_0) = e^{A(t_k-t_0)}$, а условие полной управляемости (2.3) записывается так [1]:

$$\text{rank} \left[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right] = n. \quad (2.3')$$

Разложим матрицу $e^{A(t_k-t_0)}$ в ряд Тейлора [25]. Получим

$$e^{A(t_k-t_0)} = E + A(t_k-t_0) + A^2(t_k-t_0)^2 + A^3(t_k-t_0)^3 + \dots$$

В результате имеем

$$\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) = B + AB(t_k-t_j^\alpha) + A^2B(t_k-t_j^\alpha)^2 + A^3B(t_k-t_j^\alpha)^3 + \dots$$

Так как условие полной управляемости (2.3) в постановке задачи предполагается выполненным, то, следовательно, ранг рассматриваемой матрицы максимален и равен n

$$\text{rank} \left[\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) \right] = n,$$

т.е. матрица невырождена и решение системы линейных алгебраических уравнений существует.

Таким образом, для невырожденности матриц неоднородных систем линейных алгебраических уравнений, которые рассматриваются в данной работе,

необходимо выполнение условия полной управляемости. В постановке задачи предполагается выполнение этого необходимого условия (см. (2.3)).

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ в (3.36) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

3.7. Связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Для j -й компоненты вектора управления функция переключений принимает значения (± 1) в моменты $t = t_j^\alpha$, т.е. справедливо уравнение (3.32).

Изменим $\psi(t_0)$ на $\Delta \psi(t_0)$. Это порождает изменение t_j^α на Δt_j^α :

$$[B_j(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha, t_0)]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad (3.37)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\left[B_j(t_j^\alpha) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{dB_j(t_j^\alpha)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{d\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)}{dt} \right]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (3.38)$$

Здесь $\overline{\Delta t_j^\alpha}$ – диагональная матрица $(n \times n)$ с элементом Δt_j^α на диагонали. Отметим, что $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\widehat{\Phi}(t, t_0)]^*$, где $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ – фундаментальная матрица решения сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)$, которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (3.39)$$

Запишем (3.38), учитывая (3.39), в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ & - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 + \\ & + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\ & - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 - \\ & - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (3.32), получим приближенное уравнение, связывающее Δt_j^α и $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\} \Delta t_j^\alpha + \\ & + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Из (3.40) находим приближенное соотношение, посредством которого каждое Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ выражается через $\Delta\psi(t_0)$:

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha \cong & \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta\psi(t_0) \right\}^{-1} \\ & j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Запишем соотношение (3.41) в компактном виде

$$\Delta t_j^\alpha \cong \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (3.42)$$

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (3.41) имеет простой вид благодаря матрицам размера $(1 \times n)$ и $(n \times 1)$.

3.8. Основное уравнение. Подставив (3.42) в (3.36), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta\psi(t_0) + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Решив (3.43), находим $\Delta\psi(t_0)$. По формуле (3.41) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (2.1). Приближенность выражений (3.35) и (3.41) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить "малы" или "велики" отклонения $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения момента переключения по сравнению с заданным временем управления. Если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, где γ задано ($0 < \gamma \ll 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и гарантируется сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю

часть отклонения $\Delta\widehat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (3.44)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j,\alpha} |\Delta\widetilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т.е. полагаем

$$\Delta\widetilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta\widetilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta\psi(t_0). \quad (3.45)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α - вычисленные значения из уравнений (3.43) и (3.41) соответственно; $\Delta\widetilde{\psi}(t_0)$, $\Delta\widetilde{t}_j^\alpha$ - значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОГО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Докажем сходимость итерационного процесса вычислений и сходимость последовательности управлений к оптимальному по расходу ресурсов управлению.

Теорема 2. *Существуют такие значения $\Delta\psi^*$, что если начальное значение $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то $\|\Delta\psi^{s+1}(t_0)\| < \|\Delta\psi^s(t_0)\|$, $s = 0, 1, 2, 3, \dots$ и итерационный процесс вычислений начальных условий сопряженной системы сходится к искомому оптимальному значению $\psi_{\text{опт}}(t_0)$ с любой наперед заданной точностью, т.е. $\|\psi^{s+1}(t_0) - \psi^s(t_0)\| < \epsilon_*$, $s = r, r+1, r+2, \dots$, где $s = r$ - номер итерации, а ϵ_* - сколь угодно малое число ($0 < \epsilon_* < 1$). При этом последовательность управлений сходится к оптимальному по расходу ресурсов управлению.*

Доказательство. Отклонения фазовых координат при вариации моментов переключений определяются выражением (3.34). Так как подинтегральная функция непрерывна, то на основании теоремы о среднем имеем

$$\Delta\widetilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha + \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha, \quad (4.1)$$

$$0 < \mu_j^\alpha < 1.$$

Применив теорему Лагранжа о конечном приращении, выражение (4.1) представим так

$$\Delta\widetilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \left[\Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \mu_j^\alpha (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \times \right. \\ \left. \times \frac{d}{dt} \left\{ \Phi(t_k, t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) \right\} (\Delta t_j^\alpha)^2 \right], \quad (4.2)$$

$$0 < \Theta_j^\alpha < 1, \quad 0 < \mu_j^\alpha < 1.$$

Введем обозначения

$$\Delta t_j^\alpha = \delta t_j^\alpha + \sigma t_j^\alpha. \quad (4.3)$$

Здесь: Δt_j^α – точные (истинные), а δt_j^α – вычисленные значения отклонений; σt_j^α – ошибки (погрешности) вычисления отклонений. Уравнение (3.35) становится *точным* для *вычисленных* значений δt_j^α :

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \delta t_j^\alpha = \Delta \tilde{x}(t_k). \quad (4.4)$$

Подставив (4.3) в (4.2) и, учитывая (4.4), получим уравнение, связывающее погрешности вычисления σt_j^α с точными значениями Δt_j^α :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \sigma t_j^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^\alpha (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \times \\ & \times \frac{d}{dt} \left\{ \Phi(t_k, t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha + \Theta_j^\alpha \mu_j^\alpha \Delta t_j^\alpha) \right\} (\Delta t_j^\alpha)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для доказательства сходимости вычислительного процесса важно следующее положение: *погрешность (ошибка) σt_j^α , полученная на s -й итерации, является точным (истинным) значением отклонения на $(s+1)$ -й итерации, т.е.*

$$\sigma t_j^{\alpha, s} = \Delta t_j^{\alpha, s+1}. \quad (4.6)$$

Подставив (4.6) в (4.5), получим выражение, связывающее отклонения Δt_j^α на s -й и $(s+1)$ -й итерациях:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s}) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^{\alpha, s+1} = - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^{\alpha, s} (-1)^{\alpha-1} \times \\ & \times M_j S_j(p) \frac{d}{dt} \left\{ \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) \right\} (\Delta t_j^{\alpha, s})^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Подставим (3.41) в (4.7) и получим систему из n уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i^{s+1}(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s}) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \left\{ \left\{ [B_j(t_j^{\alpha, s})]^* A^*(t_j^{\alpha, s}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha, s})]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^* \psi^s(t_0) \right\}^{-1} [B_j(t_j^{\alpha, s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^* \Delta \psi^{s+1}(t_0) = \\ & = - \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \mu_j^{\alpha, s} (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \frac{d}{dt} \left\{ \Phi(t_k, t_j^{\alpha, s} + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) B_j(t_j^{\alpha, s} + \right. \\ & \left. + \Theta_j^{\alpha, s} \mu_j^{\alpha, s} \Delta t_j^{\alpha, s}) \right\} \left\{ \left\{ [B_j(t_j^{\alpha, s})]^* A^*(t_j^{\alpha, s}) - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha, s})]^* \right\} \times \right. \\ & \left. \times [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^* \psi^s(t_0) \right\}^{-1} [B_j(t_j^{\alpha, s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^* \Delta \psi^s(t_0) \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Система (4.8) связывает отклонения $\Delta \psi(t_0)$ на s -й и $(s+1)$ -й итерациях и может быть представлена в следующем компактном виде

$$\Delta \psi^{s+1}(t_0) = D(\cdot) \Delta \vec{\psi}^s(t_0) \Delta \psi^s(t_0). \quad (4.9)$$

Здесь $\Delta\bar{\psi}^s(t_0)$ – диагональная матрица $(n \times n)$ с элементами вектор-столбца $\Delta\psi^s(t_0)$ на диагонали; $D(\cdot)$ – матрица размера $(n \times n)$, определяемая из (4.8).

Процесс вычислений сходится с любой наперед заданной точностью, если выполняется следующее достаточное условие

$$\|\Delta\psi^{s+1}(t_0)\| < \|\Delta\psi^s(t_0)\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.10)$$

Из (4.9) непосредственно следует, что в силу *квадратичной* зависимости для любой конечной матрицы $D(\cdot)$ всегда найдутся такие значения $\Delta\psi^*$, что если $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то выполняется условие сходимости вычислительного процесса (4.10). Величины отклонений $\Delta\psi^0(t_0)$ *выбираются* по нашему усмотрению. Действительно, задавая параметр γ и ограничивая максимальное отклонение по условию $\max_{j,\alpha} |\Delta t_j^\alpha| = \gamma T$, тем самым ограничиваем максимальное отклонение предельно допустимым значением, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз (3.45), где ξ определяется из выражения (3.44). Такое ограничение означает, что в уравнении баланса отклонений (3.36) компенсируется отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по *частям*, последовательно беря на каждой итерации лишь ξ часть отклонения, т.е. фактически решаем уравнение $\Delta\hat{x}(t_k) + \xi\Delta\hat{x}(t_k) = 0$. Если параметр γ задан таким, что $\|\Delta\psi^0(t_0)\| < \|\Delta\psi^*\|$, то выполняется условие сходимости (4.10) и всегда найдется такая итерация $s = r$, начиная с которой нормы отклонений $\|\Delta\psi^s(t_0)\|$, $s = r, r + 1, r + 2, \dots$ не превышают любого сколь угодно малого наперед заданного числа ϵ_* ($0 < \epsilon_* \ll 1$), т.е. $\|\Delta\psi^s(t_0)\| \leq \epsilon_*$, $s = r, r + 1, r + 2, \dots$ Из (4.9) непосредственно также следует, что скорость убывания квадратичная. Таким образом, итерационный процесс вычислений начальных условий сопряженной системы сходится к искомому оптимальному значению $\psi_{opt}(t_0)$ с любой наперед заданной точностью, а последовательность управлений сходится к оптимальному по расходу ресурсов управлению. Действительно, вычисленное управление переводит управляемую систему (2.1) в требуемое конечное состояние и удовлетворяет необходимому условию оптимальности - принципу максимума.

Оптимальное управление может быть единственным и неединственным. Оптимальное управление линейной системой единственно, если: 1) начало координат области управления является ее внутренней точкой; 2) выполнено условие общности положения [1]. При принятых ограничениях (2.2) на управляющие параметры начало координат области управления является ее внутренней точкой. Первое условие выполнено. Условие общности положения при рассматриваемых параллелепипедных ограничениях (2.2) адекватно условию покомпонентной полной управляемости. Так в случае автономной системы для каждой компоненты должно выполняться условие

$$\text{rank} \left[B_j, AB_j, A^2B_j, \dots, A^{n-1}B_j \right] = n \quad \forall j = \overline{1, m}. \quad (4.11)$$

В данной работе предполагается выполнение менее жесткого условия полной управляемости (2.3), т.е. достаточно выполнения условия управляемости хотя бы для одной компоненты. В случае скалярного управления условия общности

положения и полной управляемости совпадают. Тогда в силу единственности оптимального управления следует, что последовательность управлений сходится с заданной точностью к оптимальному по расходу ресурсов управлению. В случае векторного управления, если оптимальное управление неединственно, то последовательность управлений сходится к одному из оптимальных управлений.

Теорема доказана.

Следствие 1. Из (4.9) непосредственно следует, что *локальная* сходимость имеет *квадратичную скорость сходимости*.

Следствие 2. Радиус локальной сходимости равен $R_{cx} = \|\Delta\psi^*\|$.

Следствие 3. Так как согласно (4.6) $\Delta\psi^{s+1}(t_0) = \sigma\psi^s(t_0)$, то из (4.10) следует адекватное ему условие сходимости

$$\|\sigma\psi^s(t_0)\| < \|\Delta\psi^s(t_0)\|, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

т.е. норма ошибки должна быть меньше нормы самого отклонения (его истинного значения).

5. ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПО РАСХОДУ РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЯ

Шаг 1. Задаем на интервале $t \in [t_0, t_k]$ произвольно $(n-1)$ моментов переключений для всех компонент вектора управления. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.13) и вычисляем нормированное начальное условие $\widehat{\psi}(t_0)$. Находим с помощью функции переключения $[B_j(t)]^*[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*\widehat{\psi}(t_0)$ все остальные моменты переключений (всего $r_j - 1$ для j компоненты, если они существуют). Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Решаем системы линейных алгебраических уравнений (3.17) и находим весовые коэффициенты \widehat{N}_{ij}^p , $i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$. Формируем финитное управление (3.18). Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.24) и находим отклонение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ начального условия нормированной сопряженной системы и параметр η . Вычисляем по формуле (3.22) отклонения $\Delta\nu_j^p$, $j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j - 1}$ моментов переключений финитного управления. Проверяем выполнение условия: $\max_{j,p} |\Delta\nu_j^p| \leq \rho(t_k - t_0)$. Если это условие выполняется, то суммируем отклонения $\Delta\nu_j^p$ с моментами переключений $\Delta\nu_j^p$, а отклонение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ с начальным условием $\widehat{\psi}(t_0)$ нормированной сопряженной системы и переходим к шагу 2. Процесс вычислений заканчивается, когда $\max_{j,p} |\Delta\nu_j^p| \leq \epsilon_0$. Если $\eta < 1$, переходим к шагу 4. Если $\eta = 1$, то найденное финитное управление совпадает с оптимальным по расходу ресурсов управлением. Процесс вычислений закончен. Если $\eta > 1$, то решения задачи не существует. Останов.

Если $\max_{j,p} |\Delta\nu_j^p| > \rho(t_k - t_0)$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j,p} |\Delta\nu_j^p| = \rho(t_k - t_0)$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в μ раз, т.е. полагаем $\Delta\widetilde{\nu}_j^p = \mu\Delta\nu_j^p$, $j =$

$\overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$; $\widetilde{\Delta}\widehat{\psi}(t_0) = \mu\Delta\widehat{\psi}(t_0)$, где $\mu = \frac{\rho(t_k - t_0)}{\max|\Delta\nu_j^p|}$. Суммируем ограниченные отклонения $\Delta\widetilde{\nu}_j^p$ с моментами переключений ν_j^p , а $\widetilde{\Delta}\widehat{\psi}(t_0)$ с $\widehat{\psi}(t_0)$ и переходим к шагу 1.

Шаг 4. По формулам (3.29) задаем начальные приближенные значения моментов включения и выключения $t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ оптимального по расходу ресурсов управления. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.32) и находим начальное условие $\psi(t_0)$ сопряженной системы. Переходим к шагу 5.

Шаг 5. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.43) и находим отклонение $\Delta\psi(t_0)$ начального условия сопряженной системы. По формуле (3.41) вычисляем отклонения $\Delta t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов выключения и включения управления. Если $\max_{j,p} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, находим уточненные значения моментов переключений $t_j^{\alpha, s+1} = t_j^{\alpha, s} + \Delta t_j^{\alpha, s}$. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.32) и находим начальное условие $\psi(t_0)$ сопряженной системы. Вычисляем из (3.33) отклонение фазовой траектории от начала координат для новых вычисленных моментов переключений и возвращаемся к шагу 5. Итерационный процесс вычислений заканчивается, если $\|\Delta\widehat{x}(t_k)\| \leq \epsilon$, где ϵ — заданная погрешность перевода системы (2.1) в начало координат ($0 < \epsilon \ll 1$).

Если $\max_{j,p} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то значения отклонений находим по формулам (3.45). Суммируем $\Delta\widetilde{t}_j^\alpha$ с t_j^α и полученные значения принимаем в качестве новых моментов включения и выключения управления. Решаем систему линейных алгебраических уравнений (3.32) и находим начальное условие $\psi(t_0)$ сопряженной системы и возвращаемся к шагу 5. Итерационный процесс вычислений заканчивается, если $\|\Delta\widehat{x}(t_k)\| \leq \epsilon$, где ϵ — заданная погрешность перевода системы (2.1) в начало координат ($0 < \epsilon \ll 1$).

6. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, & x_3(t_0) &= x_{30}, \\ \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu, \quad |u| \leq M, & x_4(t_0) &= x_{40}. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Принимаем следующими значения коэффициентов: $a_{41} = -2.9684$; $a_{42} = -5.84$; $a_{43} = -6.33$; $a_{44} = -3.4$; $b = 4$, а ограничение на управление $M = 5$. Собственные значения матрицы A при этих численных значениях коэффициентов комплексно-сопряженные: $\lambda_{1,2} = -0.784 \pm i 0.986$; $\lambda_{3,4} = -0.916 \pm i 1.016$. Начальное условие принимаем следующим: $x(t_0) = (0, 0, 1, 0)$. Время оптимального по быстродействию перевода системы (6.1) из начального состояния в

нулевое конечное состояние (начало координат) $T_0 = 1.51726$. Амплитуда финитного управления, переводящего за время $T = 3$ систему (6.1) из заданного начального состояния в начало координат, составляет $|u_{\text{ф}}| = 0.9645$. Последовательность знаков финитного управления $(-, +, -, +)$ и управление переключается в моменты: $\nu_1 = 1.158832$; $\nu_2 = 2.132279$; $\nu_3 = 2.765493$. Параметр $\eta = 0.1929$. По формулам (3.29) находим начальные приближения для искомым моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления: $t_1^0 = 0.11592$; $t_2^0 = 1.59687$; $t_3^0 = 1.69424$; $t_4^0 = 2.41722$; $t_5^0 = 2.48056$; $t_6^0 = 2.97654$.

В табл.1 приведены вычисленные на каждой итерации (s) значения моментов переключений t_i , $i = \overline{1, 6}$ искомого оптимального по расходу ресурсов управления и норма $\|x(t_k)\|$ системы (6.1) в конечный момент $t_k = T$ для полученных и приведенных в таблице моментов переключения управления $u(t)$. Для достижения сходимости вычислительного процесса принимаем в (3.44) $\gamma = 0.025$.

Т а б л и ц а 1.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.115917	1.596869	1.694242	2.417216			4.047921
1	0.120218	1.526775	1.619242	2.427996			4.018467
2	0.124846	1.454924	1.544242	2.437084	2.991115		3.832912
3	0.121064	1.497714	1.560373	2.512084	2.953380		3.154588
4	0.125928	1.531660	1.577227	2.587084	2.907201		2.359014
5	0.140404	1.553004	1.591281	2.662084	2.844508		1.393839
6	0.166539	1.537159	1.580752	2.712341	2.735017		0.348273
7	0.169165	1.479735	1.524301	2.640531	2.658461		0.265335
8	0.172048	1.422729	1.468678	2.567129	2.581859	2.980972	0.158963
9	0.171838	1.428079	1.474343	2.570303	2.593576	2.989051	0.004552
10	0.171844	1,427926	1,474182	2,570006	2.593457	2.988829	0.000007

В табл.2 приведены на каждой итерации начальные условия сопряженной системы $\psi_i(0)$, $i = \overline{1, 4}$. Вычислив первые четыре момента переключения t_i , $i = \overline{1, 4}$, находим из (3.32) начальные условия и с помощью решения (3.31) сопряженной системы на интервале $t \in [t_4, T]$ находим t_5 и t_6 , для которых выполняется уравнение (3.32), т.е. находим с помощью функции переключения соответствующие четырем заданным все остальные моменты переключений. Для оптимального управления расход ресурсов составляет $J_{opt} = 0.252722$.

Т а б л и ц а 2.

s	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$	$\psi_3(0)$	$\psi_4(0)$
0	-0.989073	-1.709174	-1.052279	-0.269059
1	-1.249572	-1.971567	-1.148001	-0.277870
2	-1.496480	-2.221274	-1.239124	-0.286746
3	-1.446337	-2.160197	-1.213519	-0.283641
4	-1.415513	-2.126707	-1.202174	-0.283664
5	-1.409530	-2.126949	-1.207605	-0.287122
6	-1.480155	-2.219777	-1.254164	-0.297222
7	-1.624635	-2.377509	-1.316165	-0.304509
8	-1.789717	-2.554941	-1.384849	-0.312694
9	-1.772568	-2.536736	-1.377902	-0.311881
10	-1.773048	-2.537248	-1.378097	-0.311904

Число итераций может быть значительно сокращено (в два раза), если использовать для вычисления начальных условий не первые четыре значения моментов переключений, а первый, второй, четвертый, шестой моменты переключений. В табл.3 приведены значения моментов переключений и нормы на каждой из пяти итераций. Параметр $\gamma = 0.025$.

Т а б л и ц а 3.

s	t_1^*	t_2^*	t_3	t_4^*	t_5	t_6^*	$\ x(t_k)\ $
0	0.11592	1.59687	1.69424	2.41722	2.48056	2.97654	2.213307
1	0.123764	1.278745	1.555060	2.464066	2.664151	2.978915	1.511033
2	0.140632	1.353745	1.512237	2.513937	2.629567	2.982225	0.766001
3	0.168863	1.430134	1.468756	2.569527	2.591510	2.987759	0.065713
4	0.171854	1.427938	1.474189	2.570020	2.593460	2.988837	0.000211
5	0.171844	1.427926	1.474182	2.570005	2.593459	2.988828	0.000007

t_i^* – моменты переключений, используемые для вычисления $\psi_i(0)$, $i = \overline{1,4}$.

В табл.4 приведены на каждой итерации начальные условия сопряженной системы $\psi_i(0)$, $i = \overline{1,4}$. Вычислив моменты переключений, находим из (3.32) начальные условия сопряженной системы, используя первый, второй, четвертый и шестой моменты переключений управления.

Т а б л и ц а 4.

s	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$	$\psi_3(0)$	$\psi_4(0)$
0	-1.830615	-2.553431	-1.355867	-0.294471
1	-1.785214	-2.509776	-1.342261	-0.295532
2	-1.765447	-2.501983	-1.347657	-0.300626
3	-1.771531	-2.532866	-1.374699	-0.310770
4	-1.773041	-2.537249	-1.378104	-0.311907
5	-1.773049	-2.537248	-1.378098	-0.311904

На рис. 2 качественно показаны функция переключений и финитное управление, последовательность знаков которого позволяет определить последовательность знаков оптимального по расходу ресурсов управления, т.е. по структуре финитного управления определяется структура оптимального по расходу ресурсов управления. С помощью формул (3.29), использующих моменты переключений ($\nu_j^p, j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$) финитного управления, находим *приближенные* значения моментов переключений ($t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$) оптимального по расходу ресурсов управления. Число моментов переключений оптимального управления (для $n \geq 3$) больше числа начальных условий сопряженной системы $\psi_i(t_0), i = \overline{1, n}$. Выбираем (произвольно) n моментов переключений и находим, решая систему (3.32), соответствующие этим выбранным моментам переключений начальные условия сопряженной системы. Однако в силу приближенного и произвольного задания моментов переключений функция переключений не проходит (в общем случае) через остальные (приближенно заданные) моменты переключений. Другими словами, уравнение (3.32) выполняется только для n выбранных моментов переключений и не выполняется для остальных $[(2r_j - 1) - n]$ моментов переключений. Однако согласно принципа максимума Л.С. Понтрягина функция переключений для оптимального управления должна проходить через *все* моменты переключений и переводить управляемую систему в требуемое конечное состояние (начало координат). В табл.1 показан процесс вычислений и приведены вычисленные на каждой итерации значения моментов переключений *допустимых* управлений, сходящихся за десять итераций к оптимальному управлению. Последовательность допустимых управлений принимает значения $(-M, 0, +M, 0, -M, 0, +M)$ и сходится к ϵ -оптимальному управлению, где $\epsilon < 10^{-5}$.

Если выбрать не четыре первых моментов переключений, то функция переключений пройдет именно через эти выбранные моменты, но не пройдет через остальные моменты переключений и процесс вычислений оптимального управления будет происходить по другому. Так в табл. 3 показан процесс вычислений оптимального управления, если первоначально взяты из приближенных значений первый, второй, четвертый и шестой моменты переключений. За пять итераций находится оптимальное управление с той же точностью. В табл. 2 и табл. 4 приведены итерационные процессы вычислений начальных

условий сопряженной системы. И хотя они начинаются с различных значений, но сходятся к одним и тем же конечным значениям (искмым оптимальным значениям).

Число итераций может быть еще уменьшено, а главное, можно исключить весьма трудоемкую (по затратам времени) операцию определения моментов переключений с помощью решения сопряженной системы (т.е. на основе функции переключения). Следует, однако, подчеркнуть, что в этом случае получаем *приближенное* решение задачи.

В табл. 5 приведены моменты переключений и норма в конечный момент *приближенного* решения задачи минимизации расхода ресурсов. На каждой итерации новое начальное условие сопряженной системы находится не на основе решения системы линейных алгебраических уравнений (3.32), а путем простого суммирования $\psi^{s+1}(0) = \psi^s(0) + \Delta\psi^s(0)$, где s – номер итерации. Из-за приближенности соотношений (3.35) и (3.41) вычисляется не точное, а приближенное значение начального условия сопряженной системы и ошибка *накапливается* на каждой итерации вычислительного процесса. Другим важным фактором является то, что начальные значения моментов переключений t_i^0 , $i = \overline{1, r}$ задаются по приближенным формулам (3.29). Полученные значения моментов переключений хотя и доставляют приближенное решение задачи минимизации расхода ресурсов, но не удовлетворяют первому необходимому условию оптимальности, т.е. не все (r) моменты переключений управления, а только n , задаются с помощью функции переключения $B^*(t)\psi(t)$. Точнее, функция переключений проходит только через n заданных (выбранных) моментов переключений, но не проходит через остальные $(r-n)$ моменты переключений.

Т а б л и ц а 5.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.11592	1.59687	1.69424	2.41722	2.48056	2.97654	0.422866
1	0.143764	1.886277	1.931184	2.632754	2.686348	2.974346	0.097441
2	0.155434	1.897536	1.948945	2.637629	2.690547	2.974081	0.000963
3	0.155433	1.896020	1.947556	2.636989	2.689992	2.974089	0.000006

Расход ресурсов при приближенном решении составляет $J_{\text{пр}} = 0.285885$. Расход ресурсов при оптимальном управлении равен $J_{\text{опт}} = 0.252722$, что на 11,6 процента меньше, чем при приближенном решении.

В табл. 6 приведены значения начальных условий сопряженной системы, вычисляемые по условию $\psi^{s+1}(0) = \psi^s(0) + \Delta\psi^s(0)$. Для нахождения $\psi^s(0)$ вначале используются первые четыре момента переключения управления.

Т а б л и ц а 6.

s	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$	$\psi_3(0)$	$\psi_4(0)$
0	-0.989072	-1.709174	-1.052279	-0.269059
1	-0.495568	-1.173191	-0.851077	-0.255834
2	-0.470225	-1.145414	-0.839999	-0.255045
3	-0.473738	-1.149434	-0.841704	-0.255225

Следует отметить, что если использовать первые четыре найденных моментов переключений (см. табл.5 при $s=3$) для вычисления начальных условий сопряженной системы, то получаем следующие начальные условия: $\psi_1(0) = -0.555110$; $\psi_2(0) = -1.214856$; $\psi_3(0) = -0.852813$; $\psi_4(0) = -0.253270$. Погрешность перевода системы (6.1) в начало координат с использованием этих начальных условий и только первых четырех моментов переключений управления (см. табл.5 при $s=3$) составляет $\|x(t_k)\| = 0.397664$. Именно это уменьшение погрешности перевода системы (6.1) в начало координат позволяет организовать комбинированный метод вычисления оптимального по расходу ресурсов управления: вначале найти приближенное решение задачи минимизации, а затем перейти к нахождению точного решения, используя полученное приближенное решение в качестве начального приближения.

В табл.7 приведены значения моментов переключений и нормы системы (6.1) при вычислении оптимального по расходу ресурсов управления, переводящего систему из другого начального состояния $x(0) = (1, 1, 1, 1)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за время $T = 3$. Время оптимального по быстрдействию перевода системы (6.1) из начального состояния в нулевое конечное состояние (начало координат) $T_0 = 2.801093$. Амплитуда финитного управления, переводящего за время $T = 3$ систему (6.1) из заданного начального состояния в начало координат, составляет $|u_{\text{ф}}| = 3.9175$. Последовательность знаков финитного управления $(-, +, -, +)$ и управление переключается в моменты: $\nu_1 = 1.077378$; $\nu_2 = 2.084829$; $\nu_3 = 2.748122$. Параметр $\eta = 0.7835$. По формулам (3.29) находим начальные приближения для искомым моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления: $t_1^0 = 0.68122$; $t_2^0 = 1.26260$; $t_3^0 = 1.89960$; $t_4^0 = 2.20678$; $t_5^0 = 2.62617$; $t_6^0 = 2.84074$. Для этих приближенных значений моментов переключений норма в конечный момент составляет $\|x(t_k)\| = 0.692308$. Принято $\gamma = 0.025$.

Т а б л и ц а 7.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.68122	1.26260	1.89960	2.20678	2.62617	2.84074	0.692308
1	0.706108	1.209172	1.824604	2.254164	—	—	5.820348
2	0.678927	1.283315	1.791136	2.329164	2.723969	2.902554	0.911684
3	0.676881	1.328990	1.766444	2.382650	2.663511	2.883796	0.206462
4	0.684567	1.320625	1.761866	2.373216	2.651878	2.874285	0.021372
5	0.685389	1.319414	1.761861	2.371133	2.651558	2.873043	0.000004

В табл.8 приведены на каждой итерации начальные условия сопряженной системы $\psi_i(0)$, $i = \overline{1,4}$. Вычислив моменты переключений, находим из (3.32) начальные условия сопряженной системы, используя первые четыре значения моментов переключений управления.

Т а б л и ц а 8.

s	$\psi_1(0)$	$\psi_2(0)$	$\psi_3(0)$	$\psi_4(0)$
0	-2.180322	-3.897095	-2.425835	-0.640997
1	-4.209785	-6.395941	-3.634977	-0.901445
2	-3.575476	-5.451506	-3.108930	-0.774593
3	-3.424200	-5.222714	-2.981262	-0.745055
4	-3.568057	-5.423176	-3.088021	-0.770421
5	-3.582403	-5.443801	-3.099243	-0.773126

7. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО РАСХОДУ РЕСУРСОВ УПРАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

Управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F(t), \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V, \quad (7.1)$$

где x - n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ -непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u - m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям (2.2); $F(t)$ — n -мерный вектор кусочно-непрерывного возмущения, компоненты которого ограничены по условиям:

$$\left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau \right)_i \right| + \left| \left(\Phi(t_k, t_0) x(t_0) \right)_i \right| \leq \left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) M(\tau) d\tau \right)_i \right| \quad (7.2)$$

$$\forall i = \overline{1, n},$$

Здесь $\Phi(t, t_0)$ - фундаментальная матрица решений уравнения (2.1); $M(t)$ - максимальное управляющее воздействие. Физический смысл этих ограничений следующий. Отклонение на заданном интервале времени каждой фазовой координаты, порожденное *максимальным* допустимым управлением $u(t)$,

должно быть больше (либо равно) суммарного отклонения в конечный момент каждой фазовой координаты, вызванного действием возмущения и свободного движения системы. Свободное движение порождается начальным условием и для неустойчивых систем отклонения фазовых координат в конечный момент могут быть значительными. При увеличении максимальных значений управлений (т. е. предельных значений $M_j, j = \overline{1, m}$) увеличиваются возмущения, для которых возможен перевод системы, и увеличивается область начальных условий, из которой возможен перевод системы в начало координат.

Предполагается, что система (7.1) без возмущения $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ полностью управляема (т.е. выполнено условие (2.3)) и переводима в начало координат ограниченным управлением, т.е. x_0 принадлежит области управляемости V .

Задача 2. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (7.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau.$$

Здесь T_0 - время оптимального по быстрдействию перевода системы (7.1).

Следует отметить, что вычислительная процедура во многом аналогична вышеизложенной, однако полученные соотношения отличаются из-за наличия в системе возмущения [20].

7.1. Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления.

Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления образуем функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\psi(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u + \psi^* F(t),$$

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим условиям:

$$u_j(t) = \begin{cases} M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \\ -M_j & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1. \end{cases} \quad j = \overline{1, m}. \quad (7.3)$$

Соотношение (7.3) можно записать более компактно:

$$u_j(t) = M_j \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (7.4)$$

Оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \pm M_j, \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

где $t_j^0 = t_0$, а $t_j^{2r_j-1} = t_k$.

Пусть t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$) – α -й момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора управления. Задавая произвольно n моментов переключений управления, можно определить начальное условие $\psi(t_0)$ для сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, а с помощью решения $\psi(t)$ найти все моменты переключений компонент вектора управления на заданном интервале $[t_0, t_k]$, соответствующие этим n заданным моментам. Выбор "хорошего" начального приближения улучшает сходимость, а главное, уменьшает время, затрачиваемое на интегрирование, и следовательно уменьшает время нахождения оптимального управления и вычислительную трудоемкость метода.

Моменты переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$; $j = \overline{1, m}$) для начального приближения искомого управления на минимум расхода ресурсов целесообразно задавать через моменты переключений ν_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ финитного управления. Первый момент t_j^1 выключения и последний момент $t_j^{2(r_j-1)}$ включения управления зададим по следующим формулам

$$t_j^1 = \frac{1}{2}(\nu_j^1 - t_0)\eta(1 + \eta^2) + t_0, \quad t_j^{2(r_j-1)} = t_k - \frac{1}{2}(t_k - \nu_j^{(r_j-1)})\eta(1 + \eta^2), \quad (7.5)$$

а остальные моменты переключений зададим так:

$$t_j^{2p-1} = \nu_j^p - \frac{1}{2}(\nu_j^p - \nu_j^{p-1})\left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2)\right], \quad t_j^{2p} = \nu_j^p + \frac{1}{2}(\nu_j^{p+1} - \nu_j^p)\left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2)\right],$$

$$p = \overline{1, r_j - 1}.$$

В этом случае, если $\eta = 1$, то финитное управление должно совпадать с оптимальным по расходу ресурсов управлением, что и отражают формулы (7.5). Если $\eta \rightarrow 0$, то интервалы, на которых управление, минимизирующее расход ресурсов, отлично от нуля, должны стремиться к нулю, что и следует из (7.5). Параметры p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, $\alpha = 1, 2, 3, \dots$, где $E(\cdot)$ – целая часть числа.

При $t = t_j^\alpha$ имеем $[B_j(t_j^\alpha)]^*\psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Зная $u^\Phi(t)$, легко определить знаки функции переключения на каждом p -м интервале постоянства через первый интервал

$$[B_j(t_j^\alpha)]^*\psi(t_j^\alpha) = (-1)^{p-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0). \quad (7.6)$$

Запишем решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ так:

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*\psi(t_0). \quad (7.7)$$

Подставляя (7.7) и соотношение $p = E(\alpha/2 + 1)$ в (7.6), получим для вычисления $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^*[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*\psi(t_0) - (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0) = 0, \quad (7.8)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n.$$

Зная начальное условие $\psi(t_0)$, с помощью решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (7.7) находим все t_j^α , для которых выполняется уравнение (7.8). Итак, задав n моментов переключений, находим с помощью функции переключений соответствующие им все остальные моменты переключений.

7.2. Отклонение фазовой траектории от начала координат. Пусть заданы все приближенные значения моментов переключений $t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Управляемая система (7.1) переводится в некоторую точку фазового пространства, которая отклоняется от начала координат на величину

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t_k) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} d\tau + \\ & + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Это отклонение должно быть скомпенсировано соответствующим изменением моментов переключений управления.

7.3. Вариация моментов переключений управления. Изменение t_j^α на величину $\Delta t_j^\alpha, \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ вызывает следующее отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$ для кусочно-постоянного управления $u_j^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha, j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ и принимают значения $u_j^p(t) = M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} = M_j S_j(p), t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau. \quad (7.10)$$

Если Δt_j^α достаточно малы, то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (7.11)$$

7.4. Уравнение баланса отклонений. Отклонения фазовых координат (7.11), порождаемые неточным заданием моментов переключений и действием возмущения F , должны быть скомпенсированы соответствующим изменением моментов переключений, т.е. должно выполняться уравнение баланса отклонений: $\Delta \tilde{x}(t_k) + \Delta \hat{x}(t_k) = 0$. Подставив в это уравнение выражения (7.9) и (7.11),

получим систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0 \quad (7.12)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ в (7.12) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

Такая связь была выше найдена (3.41):

$$\Delta t_j^\alpha \cong \left\{ \left[B_j(t_j^\alpha) \right]^* A^*(t_j^\alpha) - \left[\dot{B}_j(t_j^\alpha) \right]^* \right\} \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) \right]^* \psi(t_0) \right\}^{-1} \left[B_j(t_j^\alpha) \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) \right]^* \Delta \psi(t_0),$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

и представлена в компактном виде (3.42):

$$\Delta t_j^\alpha \cong \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.$$

7.5. Основное уравнение. Подставив (3.42) в (7.12), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \mathcal{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_0) + \Phi(t_k, t_0) x(t_0) + \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \quad (7.13)$$

Решив (7.13), находим $\Delta \psi(t_0)$. По формуле (3.41) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить в конечный момент отклонение от начала координат фазовой траектории движения системы (7.1). Приближенность выражений (7.11) и (3.41) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Отклонение $\Delta \hat{x}(t_k)$ может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу

линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить "малы" или "велики" отклонения $\Delta\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения моментов переключений по сравнению с длительностью процесса управления. Если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T$, где γ задано ($0 < \gamma \ll 1$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и обеспечивается сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение $\Delta\hat{x}(t_k)$ не сразу полностью, а по *частям*, беря лишь ξ -ю часть отклонения $\Delta\hat{x}(t_k)$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (7.14)$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j, \alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т.е. полагает

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0). \quad (7.15)$$

Здесь $\Delta\psi(t_0)$, Δt_j^α - вычисленные значения из уравнений (7.13) и (3.41) соответственно; $\Delta \tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta \tilde{t}_j^\alpha$ - значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости.

7.6. Моделирование и численные расчеты. В табл. 9 приведены результаты вычислений оптимального по расходу ресурсов управления при действии на систему (6.1) возмущения $F = (0.94, 0, 0, 0)^*$. Величина возмущения является максимальной (предельной), при которой еще возможен перевод системы (6.1) из заданного начального состояния $x(t_0) = (0, 0, 1, 0)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за время $T = t_k - t_0 = 3$.

Нетрудно видеть, что структура управления стремится к структуре финитного управления с предельно-допустимым значением управляющего воздействия. Другими словами интервалы, на которых управление равно нулю, стремятся к нулю. На рис. За приведена структура оптимального по расходу ресурсов управления для данного случая.

Таким образом, возмущение "препятствует" переводу системы в начало координат. Чтобы увеличить максимальное возмущение, с которым еще возможен перевод системы в начало координат, необходимо увеличить время перевода T .

Т а б л и ц а 9.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.11592	1.59687	1.69424	2.41722	2.48056	2.97654	2.492873
1	0.124143	1.526591	1.619242	2.426326			4.639833
2	0.132370	1.454570	1.544242	2.433867	2.991103		4.614959
4	0.282370	1.497328	1.566618	2.462353	2.925832		3.547214
7	0.507369	1.489073	1.596378	2.427180	2.790916		2.305107
10	0.732370	1.457730	1.670250	2.348023	2.709834	2.910184	0.853450
13	0.957370	1.407862	1.802841	2.247823	2.703401	2.837913	0.243607
16	1.169513	1.285382	1.975374	2.091858	2.736910	2.771965	0.025738
19	1.209836	1.244983	2.015908	2.051258	2.749075	2.759772	0.000066
20	1.210084	1.244735	2.016158	2.051009	2.749151	2.759696	0.000006

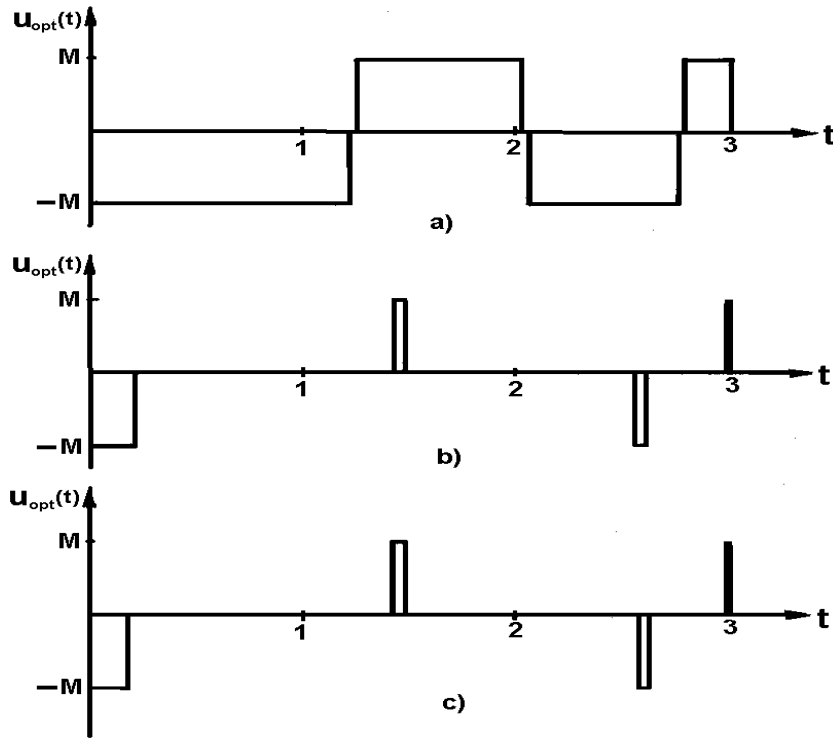


Рис. 3. Структуры оптимальных по расходу ресурсов управлений при действии на систему возмущений

В табл. 10 приведены результаты вычислений оптимального по расходу ресурсов управления для тех же начальных условий, но при $T = 3, 5$. Максимально возможное возмущение в этом случае увеличивается и составляет

$F = (1.43; 0; 0; 0)$. Структура оптимального управления в этом случае также практически не содержит интервалов с нулевым управлением.

Т а б л и ц а 10.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.08412	1.93997	2.00638	2.86173	2.90347	3.48416	3.693284
1	0.093787	1.857242	1.918875	2.868612			5.126516
5	0.365186	1.838926	1.827124	2.874569	3.199005	3.483463	3.153352
10	0.401073	1.172076	1.622522	2.333007	2.456782		4.254782
15	0.506406	1.500916	1.643249	3.150484			5.272870
20	0.844629	1.766733	1.806108	2.556527	3.150378	3.306659	3.872744
25	1.282129	1.852905	2.097821	2.623768	3.168391	3.298326	1.187983
30	1.632939	1.710756	2.398241	2.472899	3.230537	3.250081	0.004134
32	1.641610	1.702088	2.406568	2.464559	3.232723	3.247882	0.000002

Возможно, что возмущение, наоборот, "способствует" переводу системы в заданное конечное состояние. В табл. 11 приведены результаты вычисления оптимального по расходу ресурсов управления при переводе за время $T = 3$ системы (6.1) из начального состояния $x(t_0) = (0, 0, 1, 0)$ в начало координат и действию на систему максимального (предельного) возмущения $F = (0; 0; 0.16; 0)$.

Т а б л и ц а 11.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.11592	1.59687	1.69424	2.41722	2.48056	2.97654	0.511324
1	0.120450	1.527006	1.619242	2.427866			4.197027
2	0.125267	1.455357	1.544242	2.436791			4.169346
3	0.127787	1.503238	1.556807	2.511791	2.945691		3.183503
4	0.140962	1.542249	1.569205	2.586791	2.894151		2.302505
5	0.164492	1.563467	1.574682	2.651797	2.826623		1.336063
6	0.183825	1.548043	1.557012	2.662988	2.759203		0.749815
7	0.192792	1.504308	1.514929	2.620190	2.686360		0.482995
8	0.197670	1.451326	1.464481	2.556255	2.610478		0.346601
9	0.200634	1.450473	1.460112	2.555221	2.600759	2.983096	0.002116
10	0.200628	1.450391	1.460028	2.555065	2.600706	2.982995	0.000007

Нетрудно видеть, что теперь, наоборот, интервалы, на которых управление ненулевое, стремятся к нулю (кроме первого интервала). На рис. 3б приведена структура оптимального по расходу ресурсов управления для данного начального условия и возмущения. Здесь же для сравнения приведена структура оптимального управления при отсутствии возмущений (рис. 3с), взятая из табл. 1 при $s=10$.

Чтобы увеличить максимально возможное возмущение, при котором еще возможен перевод системы в начало координат, необходимо наоборот уменьшить время T . В табл. 12 приведены результаты вычислений для этого начального условия $x(t_0) = (0, 0, 1, 0)$ при $T = 2$. Максимальное возмущение, при котором еще возможен перевод системы в требуемое конечное состояние, увеличивается и составляет $F = (0; 0; 0.29; 0)$. Структура оптимального управления принципиально не отличается от приведенной на рис. 3б.

Т а б л и ц а 12.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.23628	0.89292	1.13702	1.51256	1.67834	1.94006	0.733069
1	0.243057	0.855015	1.087016	1.533563			5.159146
2	0.251169	0.812727	1.037016	1.551580			5.086595
3	0.260870	0.766471	0.987016	1.567219			5.014823
4	0.293951	0.816471	0.965620	1.594366	1.734815	1.965764	0.542268
5	0.311661	0.829012	0.958987	1.595470	1.715199	1.952562	0.018384
6	0.312267	0.828139	0.958954	1.593571	1.714772	1.951329	0.000032
7	0.312270	0.828135	0.958957	1.593565	1.714773	1.951326	0.000002

8. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

8.1. Постановка задачи. Пусть управляемый объект описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V. \quad (8.1)$$

Здесь x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям (2.2):

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (8.2)$$

F — n -мерный вектор непрерывного возмущения, компоненты которого ограничены по условиям (7.2):

$$\left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F d\tau \right)_i \right| + \left| \left(\Phi(t_k, t_0) x(t_0) \right)_i \right| \leq \left| \left(\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) M(\tau) d\tau \right)_i \right| \quad \forall i = \overline{1, n}.$$

Возмущения, действующие на объект, вызываются различными причинами. Это могут быть внешние неконтролируемые детерминированные воздействия, различного рода нелинейности, неучтенные при линеаризации, параметрические возмущения, вызванные несоответствием параметров модели и объекта либо различием размерности математического описания модели и объекта и т. д.

Предполагается, что линейная модель объекта без возмущения F

$$\dot{x}_M = A(t)x_M + B(t)u, \quad x_M(t_0) = x_0, \quad x_0 \in V \quad (8.3)$$

полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n \quad (8.4)$$

и переводима ограниченным управлением (8.2) из заданного начального условия $x_M(t_0) = x_0$ в начало координат $x_M(t_k) = 0$, т.е. x_0 принадлежит области управляемости V .

Наряду с (8.3) будем рассматривать также более общую модель объекта с возмущением

$$\dot{x}'_M = A(t)x'_M + B(t)u + F_i, \quad x'_M(t_i) = x(t_i), \quad t \in [t_i, t_k^{(i)}], \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.5)$$

где $F_0 \equiv 0$ и (8.5) при $i = 0$ совпадает с (8.3).

Вычисление оптимального управления в реальном времени требует введения нового класса ограничений – ограничения на время вычисления оптимального управления

$$\min_{j \in [1, m]} (\nu_j^1 - t_0) \geq h. \quad (8.6)$$

Здесь: ν_j^1 – первый момент переключения j компоненты вектора управления; h – время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления.

Задача 3. Найти в реальном времени в процессе сопровождения фазовой траектории движения системы (8.1) допустимое управление $u^\circ(t)$, переводящее за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T > T_0$) систему (8.1) с возмущением F из заданного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (8.7)$$

Здесь T_0 – время оптимального по быстродействию перевода системы.

Замечание 1. В работе находится оптимальное по расходу ресурсов управление системой (8.1) в процессе её движения и сопровождения фазовой траектории. Вычисляется программное оптимальное по расходу ресурсов управление для периодически измеряемых и обновляемых значений координат фазовой траектории, отстоящих друг от друга на время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления. Периодически вычисляются и средние (за время между измерениями фазовых координат) значения возмущений, которые учитываются при нахождении программного оптимального управления. Таким образом, при сопровождении фазовой траектории движения системы периодически обновляются значения фазовых координат и возмущений. Период обновления равен времени, которое необходимо для вычисления программного оптимального по быстродействию управления. В результате формируется позиционно - программное управление, которое стремится к позиционному управлению, если время вычисления стремится к нулю.

Замечание 2. При синтезе управление формируется как функция фазовых координат, т. е. $u_{sint} = u(x)$. При программном управлении оно реализуется

как функция времени, т. е. $u_{pr} = u(t)$. В случае позиционно - программного управление формируется как функция текущих дискретных значений фазовых координат $x(t_i)$ так и времени t , т. е. $u_{ppr} = u(x(t_i), t)$. Если время вычисления программного управления стремится к нулю, то u_{ppr} стремится к u_{sint} .

Замечание 3. Задачи оптимального управления рассматриваются при наличии различных ограничений, что приводит к различным структурам оптимальных управлений. Введение в теорию оптимального управления и рассмотрение временных процессов, в частности вычисление оптимального управления в реальном времени, приводит к появлению нового типа ограничения – ограничения по времени. Нарушение ограничения (8.6) не ведет к потере работоспособности алгоритма управления, но приводит к структуре оптимального управления, отличной от традиционного программного оптимального по расходу ресурсов управления в задаче с фиксированным левым концом.

Замечание 4. В формулировке задачи 3 указано условие $T > T_0$. Такое неравенство вызвано следующим. Если возмущение $F_0 \equiv 0$, то необходимым условием существования решения задачи является условие $T \geq T_0$. Если $T = T_0$, то оптимальное по быстродействию управление является и оптимальным по расходу ресурсов управлением. Если $F \neq 0$, то возможны, как показано выше в параграфе 7.6, два случая: 1) возмущение "препятствует" переводу системы; 2) возмущение "способствует" переводу системы. В первом случае при $T = T_0$ и $F \neq 0$ перевод системы в начало координат *невозможен*. Для возможности перевода системы должно выполняться следующее необходимое условие: $T > T_0$. Во втором случае (возмущение "способствует" переводу) при $T = T_0$ и $F \neq 0$ возможен перевод системы в начало координат. Однако какой сценарий будет реализован в случае *неизвестного* возмущения, т.е. будет ли возмущение "препятствовать" или "способствовать" переводу системы, какова структура и величина возмущения заранее не известно. Но решение задачи должно существовать как для первого так и для второго типа возмущений. Поэтому принимается мажорирующее необходимое условие $T > T_0$.

Решение задачи состоит из ряда этапов, включающих решение следующих подзадач:

- Определение оптимального по расходу ресурсов управления $u^\circ(t_0)$ в начальный момент времени $t = t_0$;
- Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления системой без возмущения;
- Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления системой с возмущением;
- Сопровождение фазовой траектории движения объекта и коррекция оптимального управления .

Решение двух первых подзадач рассмотрено выше. Рассмотрим решение двух следующих подзадач.

8.2. Вычисление оптимального по расходу ресурсов управления системой с возмущением. Найдено оптимальное по расходу ресурсов управление, переводящее линейную систему без возмущения (8.3) из заданного начального состояния $x_M(t_0) = x_0$ в требуемое конечное состояние (начало координат). Управляемый объект (8.1) за время вычисления $h_1 = t_1 - t_0$ управлением $u^\circ(t) = u^\circ(t_0)$, $t \in [t_0, t_1]$ и возмущением F переводится в некоторое состояние $x(t_1)$. Без возмущения линейная система (8.3) переходит в состояние $x_M(t_1) = x_{MO}$, отличное от $x(t_1)$. На рис. 4 приведены оптимальные фазовые траектории движения объекта и модели: 1 – фазовая траектория движения объекта; 2, 3, 4, ... - фазовые траектории движения модели.

В результате приходим к следующей задаче.

Задача 4. Вычислено оптимальное по расходу ресурсов управление, переводящее линейную систему без возмущения (8.3) из начального состояния $x_M(t_1) = x_{MO}$ в начало координат $x_M(t_k) = 0$.

Требуется найти оптимальное по расходу ресурсов управление, переводящее за время $T^{(1)} = t_k - t_1$ линейную систему (8.5) с возмущением F_1 из начального состояния $x'_M(t_1) = x(t_1)$ в начало координат $x'_M(t_k) = 0$.

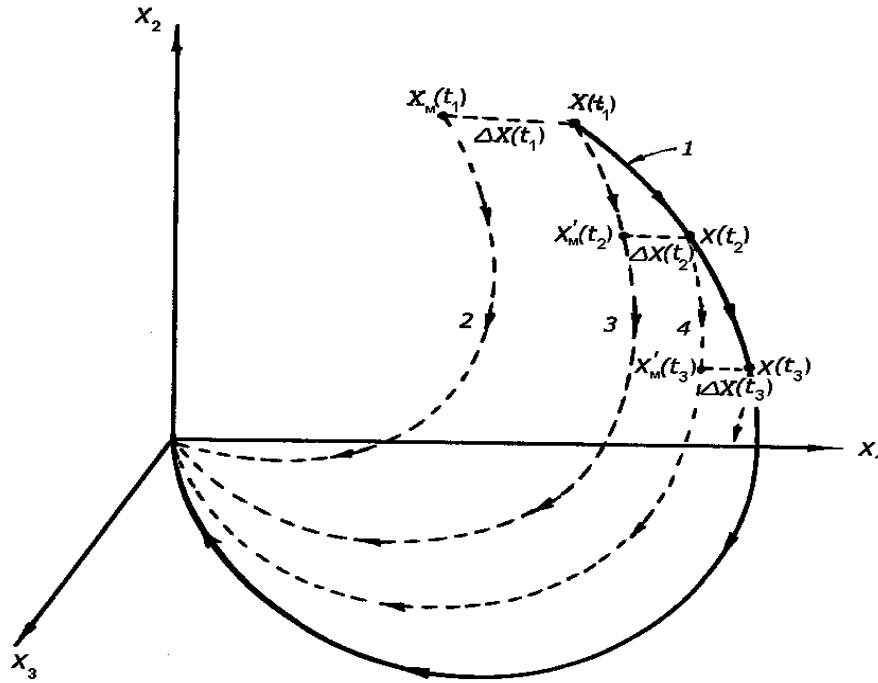


Рис. 4. Фазовые траектории движения объекта и модели

8.3. Определение возмущения F_i . Так как F – переменное возмущение, то его необходимо *периодически* вычислять в процессе движения системы (8.1). Возмущение F , действующее на систему, вызывает на интервале $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, 3, \dots$, отклонение фазовой траектории на величину

$$\Delta x(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau. \quad (8.8)$$

Для определения возмущения измерим в момент $t = t_i$ значения фазовых координат объекта (8.1) и вычислим $x_M(t_i)$ для модели объекта (8.3) при *одинаковых* управлениях. Тогда

$$x(t_i) - x_M(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau. \quad (8.9)$$

Если F непрерывная ограниченная функция (что предполагается в постановке основной задачи), то справедливо

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau = \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right] F_i, \quad (8.10)$$

где F_i – среднее значение возмущения на интервале $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Из (8.9) имеем

$$F_i = \left[\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right]^{-1} \left[x(t_i) - x_M(t_i) \right]. \quad (8.11)$$

В постановке задачи 3 указано, что F это n -мерный вектор непрерывного *ограниченного* возмущения, действующего на управляемую систему. Компоненты вектора управления ограничены по условию (2.2). Поэтому *ограниченное* управление не может перевести систему в требуемое конечное состояние при действии *неограниченного* возмущения. Компоненты вектора возмущения должны быть ограничены, но это ограничение носит весьма специфический характер. Отклонение по *каждой* фазовой координате, порождаемое максимальным допустимым управлением $u(t)$ за фиксированный интервал времени $T = (t_k - t_0)$ должно быть больше (либо равно) отклонения каждой фазовой координаты, порождаемого действием возмущения F и свободного движения системы. Это отражает неравенство (7.2), в левой части которого содержатся два слагаемых. Слагаемое от свободного движения $\Phi(t_k, t_0)x(t_0)$ зависит от начального условия $x(t_0)$ и в случае неустойчивой линейной системы (8.1) *всегда* найдутся такие $x(t_0)$, что даже при $F_0 \equiv 0$ нарушается ограничение (7.2). Это означает, что для неустойчивых систем перевод в начало координат возможен лишь из ограниченной области начальных условий, которую принято называть областью управляемости [1]. Это необходимое условие существования решения задачи минимизации расхода ресурсов указано в постановке задачи 1: $x_0 \in V$, где V – область управляемости. Однако этого условия еще недостаточно. Для любого $x_0 \in V$ всегда найдется такое предельно допустимое F , для которого

нарушается ограничение (7.2). Так в разделе 7 при численном моделировании (параграф 7.6) найдены предельно допустимые возмущения, при которых еще возможен перевод системы за заданное время T . Показано также, что с изменением T изменяются и предельно допустимые значения F .

Здесь уместно отметить все необходимые условия существования решения задачи минимизации расхода ресурсов при действии возмущений. Их четыре: 1) начальное условие должно принадлежать области управляемости, т.е. $x_0 \in V$; 2) должно выполняться условие полной управляемости системы (2.3); 3) заданное время перевода системы должно быть больше времени оптимального по быстродействию управления, т.е. $T > T_0$; 4) возмущение должно быть ограничено, т.е. должно выполняться условие (7.2). Все вместе четыре необходимых условия образуют достаточное условие разрешимости задачи минимизации расхода ресурсов.

8.4 Вариация моментов переключений управления. Для линейной системы оптимальное по расходу ресурсов управление задается выражением

$$u_j^{\circ}(t) = M_j \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (8.12)$$

где $[B_j(t)]^*$ – транспонированный j -й столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad (8.13)$$

имеющее следующий вид: $\psi(t) = \hat{\Phi}(t, t_0)\psi(t_0)$. Здесь $\hat{\Phi}(t, t_0)$ – фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (8.13), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = I, \quad (8.14)$$

где I – единичная матрица. Фундаментальная матрица $\Phi(t, t_0)$ решений прямой системы (8.1) связана с фундаментальной матрицей $\hat{\Phi}(t, t_0)$ решений сопряженной системы (8.13) соотношением $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$. Поэтому для уменьшения объема вычислений целесообразно не вычислять обратную матрицу, а использовать выражение $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\hat{\Phi}(t, t_0)]^*$.

Выражение (8.12) можно записать так

$$u_j(t) = M_j S_j(p), \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad t \in [t_j^{2p-1}, t_j^{2p}], \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \quad (8.15)$$

где $t_j^0 = t_0$, $t_j^{2r_j-1} = t_k$. Здесь $S_j(p) = \pm 1$ – знак управления на p -м интервале знакопостоянства управления; t_j^α – α -й момент переключения (включения или выключения) j -й компоненты вектора управления.

Выпишем решение уравнения (8.3) в конечный момент $t = t_k$ при известном оптимальном по расходу ресурсов управлении $u^{\circ}(t)$, $t \in [t_1, t_k]$, переводящем

систему из начального состояния $x_m(t_1)$ в начало координат $x(t_k) = 0$

$$\Phi(t_k, t_1)x_m(t_1) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau = 0. \quad (8.16)$$

Выпишем решение уравнения (8.5) для $i = 1$ с тем же известным оптимальным управлением $u^\circ(t)$, $t \in [t_1, t_k]$, но при другом начальном условии $x'_m(t_1) = [x_m(t_1) + \Delta x(t_1)]$ и при наличии возмущения F_1 :

$$\begin{aligned} x'_m(t_k) = & \Phi(t_k, t_1)[x_m(t_1) + \Delta x(t_1)] + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ & + \int_{t_1}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F_1 d\tau, \end{aligned} \quad (8.17)$$

где $\Delta x(t_1) = x(t_1) - x_m(t_1)$.

Изменим моменты переключений t_j^α на величины Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ так, чтобы система (8.5) переводилась в начало координат. С учетом (8.16) получим

$$\begin{aligned} \Phi(t_k, t_1)\Delta x(t_1) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau + \\ + \int_{t_1}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F_1 d\tau = 0. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Здесь p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$, где $E(\cdot)$ — целая часть числа (\cdot) .

Из (8.18) в предположении малости отклонений Δt_j^α получим следующее приближенное уравнение, связывающее отклонения Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ с отклонениями в конечный момент фазовых координат, вызванными изменением начального условия на $\Delta x(t_1)$ и действием возмущения F_1 :

$$\begin{aligned} \Phi(t_k, t_1)\Delta x(t_1) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \\ + \int_{t_1}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F_1 d\tau = 0. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению числа и расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. Отклонения моментов переключений связаны с отклонениями начальных условий сопряженной системы следующим приближенным соотношением

(3.41):

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha \cong & \left\{ \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_1)]^* \psi(t_1) \right\}^{-1} \times \\ & \times [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_1)]^* \Delta \psi(t_1), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Соотношение (8.20) компактно запишем так:

$$\Delta t_j^\alpha \cong \mathfrak{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_1), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (8.21)$$

Подставив (8.21) в (8.19), получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными значениями $\Delta \psi(t_1)$:

$$\begin{aligned} \Phi(t_k, t_1) \Delta x(t_1) + \int_{t_1}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) F_1 d\tau + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} \times \\ \times M_j S_j(p) \mathfrak{L}(t_j^\alpha) \Delta \psi(t_1) = 0. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Решив (8.22), находим $\Delta \psi(t_1)$. По формуле (8.20) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы обеспечить перевод системы (8.1) из начального состояния $x(t_1)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ с минимальным расходом ресурсов. Приближенность выражений (8.19) и (8.20) приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Отклонение фазовых координат может быть значительным и для его компенсации необходимы большие отклонения моментов переключений Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, что может привести к расходимости вычислительного процесса. Определить "мало" или "велико" отклонение $\Delta \psi(t_1)$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительного процесса по величине максимального отклонения момента переключения по сравнению с длительностью соответствующего интервала включения управления. Если

$$\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma T, \quad 0 < \gamma \ll 1, \quad (8.23)$$

(где γ задано, а p и α связаны соотношением $p = E(\alpha/2 + 1)$), то отклонения моментов переключений достаточно малы и обеспечивается сходимость вычислительного процесса. В противном случае компенсируем отклонение фазовых координат не сразу полностью, а по *частям*, беря лишь ξ -ю часть отклонения, полагая

$$\xi = \frac{\gamma T}{\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \quad (8.24)$$

Таким образом, если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma T$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma T$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т.е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}; \quad \Delta \tilde{\psi}(t_1) = \xi \Delta \psi(t_1). \quad (8.25)$$

Здесь $\Delta\psi(t_1)$, Δt_j^α – вычисленные значения из уравнений (8.22) и (8.20) соответственно; $\Delta\tilde{\psi}(t_1)$, $\Delta\tilde{t}_j^\alpha$ – значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых начальных условий из области управляемости.

8.5. Сопровождение фазовой траектории движения объекта и коррекция оптимального управления . За время $h_2 = t_2 - t_1$ вычисления оптимального управления для линейной системы (8.5) с возмущением F_1 , переводимой из точки $x(t_1)$, фазовая траектория объекта (8.1) под действием вычисленного к моменту времени $t = t_1$ оптимального по расходу ресурсов управления и (неизвестного, переменного в общем случае) возмущения F перейдет в точку $x(t_2)$. Возникает задача сопровождения фазовой траектории движения объекта и коррекции оптимального управления.

Задача 5. *Вычислено оптимальное по расходу ресурсов управление, переводящее фазовое состояние системы (8.5) с возмущением F_{i-1} из начальной точки $x'_m(t_i)$ в начало координат $x'_m(t_k) = 0$.*

Требуется найти оптимальное по расходу ресурсов управление, переводящее за время $T^{(i)} = t_k - t_i$ фазовое состояние системы (8.5) с другим возмущением F_i из другой начальной точки $[x'_m(t_i) + \Delta x(t_i)]$ в начало координат $x'_m(t_k) = 0$.

Основное уравнение связи отклонений. Основное отличие от предыдущего раздела состоит в том, что рассматривается движение с различными возмущениями и различными начальными условиями. Прделав аналогичные выкладки, получим следующее основное уравнение, связывающее отклонение начального условия $\Delta\psi(t_i)$ с отклонениями фазовых координат в конечный момент времени

$$\Phi(t_k, t_i)\Delta x(t_1) + \left[\int_{t_i}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) d\tau \right] (F_i - F_{i-1}) + \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} \times \\ \times M_j S_j(p) \mathcal{L} \Delta\psi(t_i) = 0. \tag{8.26}$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (8.26), находим $\Delta\psi(t_i)$. Вычисляем по формуле (8.20) Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Проверяем выполнение условия (8.23). Если (8.23) выполняется, то находим значения $\psi(t_i) + \Delta\psi(t_i)$; $t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha$. Если (8.23) не выполняется, то компенсируем отклонения фазовых координат по частям.

9. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА МИНИМУМ РАСХОДА РЕСУРСОВ

Задача минимизации расхода ресурсов представляет значительный теоретический и практический интерес, однако аналитическое решение задачи для

сложных динамических систем невозможно. Поэтому отечественными и зарубежными специалистами разработано множество итерационных методов вычисления оптимального управления, каждый из которых обладает определенными достоинствами, но все имеют один существенный недостаток — большой объем вычислений и, как следствие, значительные затраты времени на вычисления. Это приводит к запаздыванию в управлении и не позволяет использовать их для управления в реальном времени быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами. Поэтому актуальна проблема построения простых в реализации, но близких к оптимальным алгоритмов управления динамическими системами.

Для линейной системы с фиксированным временем перевода и ограниченным управлением предлагается простой метод приближенного решения задачи на минимум расхода ресурсов, суть которого состоит в следующем. Из наиболее удаленных от начала координат точек, расположенных на фазовых осях и принадлежащих ограниченной области начальных условий (граничных точек), находятся оптимальные по расходу ресурсов управления и запоминаются моменты переключений. Формируются n "осевых" квазиоптимальных управлений: моменты переключений принимаются равными моментам переключений оптимального управления для граничной точки на этой i -й оси, а амплитуда управления прямо пропорциональна начальному условию на этой оси. Доказано, что моменты переключений квазиоптимального управления не зависят от начальных условий (и постоянны в случае постоянных параметров управляемой системы). Это обеспечивает простую реализацию квазиоптимального управления. Моменты переключений находятся *предварительно* до начала процесса управления и запоминаются в управляющем устройстве. Суммарное управление по всем фазовым осям (в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем) переводит линейную систему из любой начальной точки фазового пространства, принадлежащей области управляемости, в начало координат за фиксированное время и приближенно минимизирует расход ресурсов. Приведены некоторые оценки близости квазиоптимального по расходу ресурсов управления к оптимальному управлению. Найдена область начальных условий, для которой не нарушаются ограничения на компоненты вектора управления. Предложен простой способ разбиения совокупностью гиперплоскостей ограниченной области начальных условий на ряд подобластей со своими различными значениями моментов переключений и весовых коэффициентов в каждой подобласти, что еще более уменьшает различие между квазиоптимальным и оптимальным управлениями. Аппроксимирующая конструкция дает приближенное решение задачи на минимум расхода ресурсов. Сложность реализации квазиоптимального управления практически не увеличивается с ростом порядка управляемой системы и числа управляющих параметров. Управление формируется в реальном времени для систем высокого порядка, что позволяет управлять быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами. Показано, что различие между квазиоптимальным

и оптимальным управлениями уменьшается с ростом порядка управляемой системы. Поэтому применение квазиоптимального управления наиболее эффективно для сложных динамических систем высокого порядка, именно для которых нахождение оптимального управления сопряжено с наибольшими трудностями.

9.1. Постановка задачи Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (9.1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размера $n \times n$ и $n \times m$ соответственно; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.2)$$

Предполагается, что система (9.1) полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (9.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий D ; V — область управляемости.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (9.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ ($T \geq T_0$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (9.4)$$

Здесь T_0 — время оптимального по быстрдействию управления.

9.2. Приближенное решение задачи. Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления, минимизирующего расход ресурсов, из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения, зависящие от начальных условий, и ограничим компоненты вектора управления по условию

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.5)$$

где N_{ij} — весовые коэффициенты. Для рассматриваемого начального условия ограничение (9.5) принимает вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.6)$$

Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления воспользуемся принципом максимума Понтрягина. Образует функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выпишем сопряженную систему $\psi(t)$:

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad (9.7)$$

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(x(t), \psi(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(x(t), \psi(t), u, t).$$

Функция $H(x(t), \psi(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}. \\ -N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1. \end{cases} \quad (9.8)$$

Здесь $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й столбец матрицы $B(t)$. Соотношение (9.8) можно записать более компактно:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}|x_i(t_0)| \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (9.9)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть $x_i(t_0) = x_i^+(t_0) > 0$. Тогда (9.9) можно записать так

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)|) \right] \right\}, \quad (9.10)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Здесь $\psi^{(i)}(t)$ — решение сопряженной системы из (9.7), соответствующее положительному значению $x_i(t_0)$. Если $x_i(t_0) = -x_i^+(t_0) < 0$, то

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i^+(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \hat{\psi}^{(i)}(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \hat{\psi}^{(i)}(t)|) \right] \right\}, \quad (9.11)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m},$$

где $\hat{\psi}^{(i)}(t)$ — решение сопряженной системы, соответствующее симметричной точке $[-x_i^+(t_0)]$. В силу симметрии относительно начала координат многообразий переключений имеем $\hat{\psi}^{(i)}(t) = -\psi^{(i)}(t)$. Запишем теперь (9.11) так

$$u_j^{(i)}(t) = -N_{ij}x_i^+(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)|) \right] \right\} \quad (9.12)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Объединим (9.12) и (9.10) для произвольного значения $x_i(t_0)$. Получим

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}x_i(t_0) \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)|) \right] \right\}, \quad (9.13)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

Выпишем решение уравнения (9.1) в конечный момент t_k для выбранного вектора начальных условий, когда лишь i -я компонента отлична от нуля. Имеем

$$x^{(i)}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x^{(i)}(t_0) + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^{(i)}(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.14)$$

Обозначим через $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0)$ i -й вектор-столбец фундаментальной матрицы решений $\Phi(t_k, t_0)$. Тогда $\Phi(t_k, t_0)x^{(i)}(t_0) = \Gamma^{(i)}(t_k, t_0)x_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$. Подставим в (9.14) это выражение, управление (9.13) и конечное условие $x^{(i)}(t_k) = 0$. Получим

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) \left[1 - \operatorname{sign} \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - |[B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau)| \right) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) x_i(t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.15)$$

Так как по определению $x_i(t_0) \neq 0$ и есть скалярная величина, из (9.15) получаем *основное* уравнение, связывающее моменты переключений управления с параметрами системы:

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau) \left[1 - \operatorname{sign} \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - |[B_j(\tau)]^* \psi^{(i)}(\tau)| \right) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.16)$$

Подставив в (9.16) решение сопряженной системы $\psi^{(i)}(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0)$, получим систему из n трансцендентных уравнений с n неизвестными, которыми являются начальные условия $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$:

$$\sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0) \left[1 - \operatorname{sign} \left(1 - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - |[B_j(\tau)]^* [\Phi^{-1}(\tau, t_0)]^* \psi^{(i)}(t_0)| \right) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0 \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.17)$$

Решив (9.17), найдем $\psi_{\xi}^{(i)}(t_0)$, $\xi = \overline{1, n}$ и, следовательно, моменты переключений управления (9.13). Из (9.17) непосредственно следует, что начальные условия сопряженной системы и моменты переключений управления (9.13) *не зависят от значения* $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$.

В случае постоянных матриц A и B уравнения (9.1) из (9.17) получаем следующее основное уравнение, связывающее моменты переключений с матрицами

A , B и коэффициентами N_{ij} :

$$\sum_{j=1}^m \int_0^T e^{A(T-\tau)} B_j N_{ij} \operatorname{sign} \left\{ [B_j]^* e^{-A^* \tau} \psi^{(i)}(t_0) \left[1 - \operatorname{sign} \left(1 - \left| [B_j]^* e^{-A^* \tau} \psi^{(i)}(t_0) \right| \right) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(T) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.18)$$

Из (9.18) непосредственно следует, что в случае постоянных матриц A и B начальные условия $\psi^{(i)}(t_0)$ и, следовательно, моменты переключений квазиоптимального управления (9.13) не зависят от начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, начального момента времени t_0 и постоянны. В результате доказана

Теорема 3. *Начальные условия сопряженной системы $\psi^{(i)}(t_0)$ и, следовательно, моменты переключений квазиоптимального по расходу ресурсов управления (9.13), сформированного из начального условия i -й фазовой координаты, не зависят от значения $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$. В случае постоянных матриц A и B системы (9.1) начальные условия сопряженной системы и моменты переключений квазиоптимального управления не зависят от начального условия $x_i(t_0) \forall i = \overline{1, n}$, начального момента t_0 и постоянны.*

Управление (9.13) переводит систему (9.1) в начало координат за фиксированное время $T = t_k - t_0$ для любого начального условия $x_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и минимизирует расход ресурсов при ограничении (9.6). Амплитуда управления пропорциональна начальному условию $x_i(t_0)$ и согласно (9.2) не должна превышать предельно-допустимого значения M_j , $j = \overline{1, m}$. Это требование выполняется, если весовые коэффициенты N_{ij} выбираются из условия

$$N_{ij} |x_i(t_0)|_{\max} = M_j, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.19)$$

где $|x_i(t_0)|_{\max}$ — максимальное значение i -й фазовой координаты из ограниченной области D начальных условий $x_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих, сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij} x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t) \left[1 - \operatorname{sign} \left(1 - |[B_j(t)]^* \psi^{(i)}(t)| \right) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.20)$$

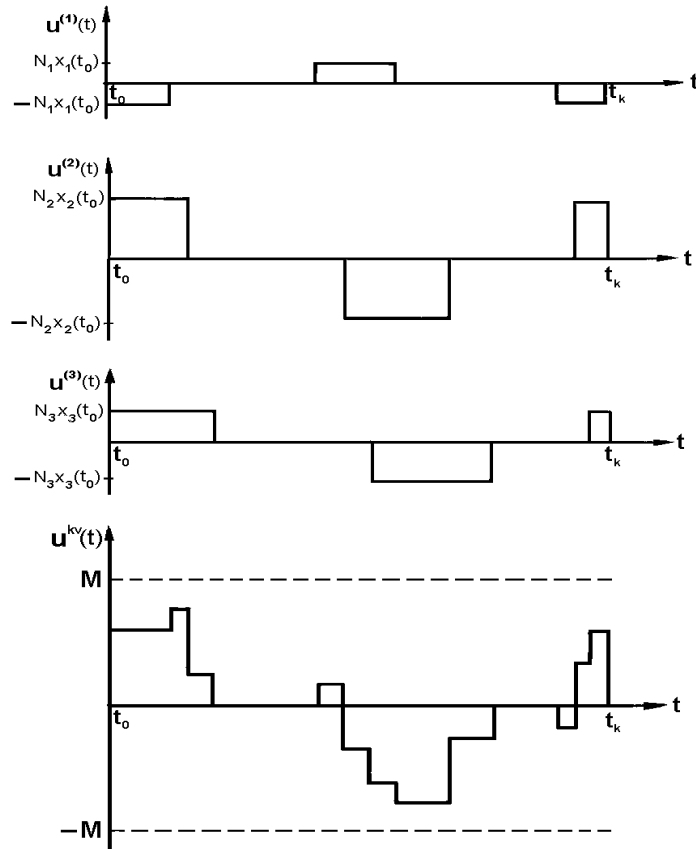


Рис. 5. Формирование квазиоптимального по расходу ресурсов управления

Суммарное управление в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (9.1) из *любого* начального состояния $x(t_0) \in D$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время T и минимизирует расход ресурсов при ограничениях (9.5). Управление (9.20) в общем случае произвольных начальных условий уже может и не быть оптимальным. Поэтому это управление названо квазиоптимальным [18]. Независимость моментов переключений от начальных условий и их постоянство в случае постоянных матриц A и B существенно упрощает техническую реализацию управления. Весовые коэффициенты и моменты переключений вычисляются *предварительно* до начала процесса управления, что делает возможным управление быстропротекающими процессами. Сложность реализации квазиоптимального управления практически не увеличивается с ростом порядка управляемой системы и числа управляющих параметров.

На рис. 5 приведена качественная картина формирования скалярного квазиоптимального по расходу ресурсов управления для системы третьего порядка. Управление образуется суммированием трех составляющих $u^{(i)}$, $i = \overline{1, 3}$, каждая из которых имеет свои значения моментов переключений и свое значение весового коэффициента N_i , $i = \overline{1, 3}$. С изменением начальных условий

$x_i(t_0), i = \overline{1, 3}$ изменяются только величины составляющих управлений, а моменты переключений остаются неизменными.

Следует отметить, что рассмотренный метод независимого формирования управления по каждой фазовой координате позволяет формировать управление и из части фазовых координат и решать задачи не только по переводу в точку, но и на многообразии.

9.3. Допустимая область начальных условий. Управляемую систему (9.1) можно перевести за фиксированное время T без нарушения ограничения (9.2) лишь из ограниченной области начальных условий. Нетрудно видеть, что для оптимального по быстрдействию управления эта область совпадает с областью достижимости D_T за время T . Однако для квазиоптимального управления эта область начальных условий Y меньше D_T и выделяется следующим образом. На фазовых осях имеем $2n$ граничных точек $\pm(x_i)_{\max} \in D$. Проведем через n различных граничных точек, принадлежащих различным фазовым осям, гиперплоскости, каждая из которых описывается одним из нижеследующих уравнений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm(x_i)_{\max}} - 1 = 0. \quad (9.21)$$

Число гиперплоскостей, которые проходят через $2n$ граничных точек, равно 2^n . Совокупность гиперплоскостей (9.21), ограничивающих часть фазового пространства, может быть описана векторным уравнением

$$Px(t_0) - I = 0.$$

Здесь $x(t_0)$ — n -мерный вектор начального состояния; I — вектор-столбец размерности 2^n , составленный из единичных элементов; P — матрица размерности $2^n \times n$, составленная из 2^n комбинаций различных значений $\frac{1}{\pm(x_i)_{\max}}$ по n в каждой строке:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{(x_1)_{\max}} & \frac{1}{(x_2)_{\max}} & \frac{1}{(x_3)_{\max}} & \cdots & \frac{1}{(x_n)_{\max}} \\ \frac{1}{-(x_1)_{\max}} & \frac{1}{(x_2)_{\max}} & \frac{1}{(x_3)_{\max}} & \cdots & \frac{1}{(x_n)_{\max}} \\ \frac{1}{-(x_1)_{\max}} & \frac{1}{-(x_2)_{\max}} & \frac{1}{(x_3)_{\max}} & \cdots & \frac{1}{(x_n)_{\max}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{-(x_1)_{\max}} & \frac{1}{-(x_2)_{\max}} & \frac{1}{-(x_3)_{\max}} & \cdots & \frac{1}{-(x_n)_{\max}} \end{bmatrix}$$

Если выполнено условие

$$Px(t_0) - I \leq 0 \quad (9.22)$$

для всех 2^n линейных неравенств, то точка $x(t_0)$ лежит внутри (либо на границе в случае равенства) фазового пространства, ограниченного гиперплоскостями (9.21). Нетрудно видеть, что (9.22) выделяет многогранник, вписанный в множество D и имеющий с ним $2n$ общих точек.

Процедуру выделения множества Y можно существенно упростить. Нет необходимости в одновременном рассмотрении всех 2^n линейных неравенств (9.22). Так как

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm(x_i)_{\max}} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{(x_i)_{\max}} \right|,$$

то *достаточно* рассмотреть предельное соотношение, которое имеет место при *любом* расположении начальной точки в фазовом пространстве

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{(x_i)_{\max}} \right| - 1 \leq 0. \quad (9.23)$$

Если (9.23) выполняется, то $x(t_0) \in Y$ и управление (9.20) не превышает предельно-допустимого значения (9.2).

Лемма 1. *Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление (9.20), сформированное с различными моментами переключений составляющих, для любой точки $x(t_0) \in Y$ удовлетворяет ограничению $|u_j| \leq M_j$, $j = \overline{1, m}$ (9.2).*

Доказательство. Весовые коэффициенты $N_{ij} > 0$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$ выбираются из условий (9.19), из которых следует, что

$$|x_i(t_0)|_{\max} = M_j / N_{ij}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.24)$$

По *построению* граничная точка на каждой оси и есть максимальное (по модулю) начальное условие, т.е. $|x_i|_{\max} = |x_i(t_0)|_{\max}$. Подставим в (9.23) выражение (9.24). Получим неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_{ij}|x_i(t_0)|}{M_j} - 1 \leq 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.25)$$

которое представим так:

$$\sum_{i=1}^n N_{ij}|x_i(t_0)| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.26)$$

Квазиоптимальное управление (9.20) имеет вид

$$u_j^{\text{kv}}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij} x_i(t_0) \text{sign}(\cdot), \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.27)$$

где $\text{sign}(\cdot)$ принимает значения $(\pm 1, 0)$. Тогда для *любого* момента времени $t \in [t_0, t_k]$, учитывая, что $N_{ij} > 0$, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, справедливо

$$|u_j^{\text{kv}}| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij}|x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (9.28)$$

Теперь (9.28) можно, учитывая (9.26), записать так

$$|u_j^{\text{kv}}| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.29)$$

т.е. каждая компонента квазиоптимального по расходу ресурсов управления не превышает предельно-допустимого значения.

Лемма доказана.

Теперь очевидно, что должно выполняться условие $D \subseteq Y$, чтобы для любой начальной точки $x(t_0) \in D$ не нарушалось ограничение (9.2) при формировании квазиоптимального управления.

9.4. Некоторые оценки близости квазиоптимального управления к оптимальному по расходу ресурсов управлению. Естественно возникает вопрос о близости квазиоптимального управления к оптимальному. Близость понимается в смысле близости функционалов, а не самих управлений. К сожалению, дать оценки близости в случае произвольных матриц A и B не представляется возможным, так как не существует аналитического решения задачи на минимум расхода ресурсов. Однако можно получить простые оценки близости в случае нулевых собственных значений матрицы A при $n \leq 4$ и одномерного управления и показать эффективность предлагаемого алгоритма. Полученные оценки представляют не только теоретический, но и практический интерес, так как при малых отклонениях от начала координат движение системы с любыми собственными значениями стремится к движению системы с нулевыми собственными значениями. Действительно известно [22], [23], что любую полностью управляемую систему можно привести к канонической форме с матрицей Фробениуса. Необходимым и достаточным условием, при котором система произвольного вида всегда может быть приведена к канонической форме, является условие полной управляемости. В случае скалярного управления полностью управляемая система приводится к каноническому виду единственным способом, что впервые установлено в [24]. Если $\sum_i |a_{ij}x_i| \ll |bu|$, то движение системы с любыми собственными значениями матрицы A стремится к движению системы с нулевыми собственными значениями. А это условие выполняется всегда по крайней мере при малых отклонениях от начала координат.

Рассмотрим значения функционалов последовательно для систем второго, третьего и четвертого порядков. Для системы второго порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = bu$$

значение функционала при переводе в начало координат из точки $x^{(1)}(t_0) = (x_1(t_0), 0)$, расположенной на оси x_1 , при квазиоптимальном управлении с ограничением $|u| \leq N_1|x_1(t_0)|$ определяется выражением

$$J_{kv}^{(1)} = N_1|x_1(t_0)| \left\{ T - \left[T^2 - 4(bN_1)^{-1} \right]^{1/2} \right\},$$

где T — заданное время перевода системы. При оптимальном управлении с ограничением $|u| \leq M$ значение функционала при переходе из той же точки на оси x_1 в начало координат определяется выражением

$$J_{opt}^{(1)} = M \left\{ T - \left[T^2 - 4|x_1(t_0)|(bM)^{-1} \right]^{1/2} \right\}.$$

Аналогичным образом находим значения функционалов при переходе в начало координат из точки $x^{(2)}(t_0) = (0, x_2(t_0))$, расположенной на оси x_2 , при квазиоптимальном и оптимальном управлениях:

$$J_{\text{kv}}^{(2)} = N_2 |x_2(t_0)| \left\{ T - \left[\left(T - (bN_2)^{-1} \right)^2 - 2(bN_2)^{-2} \right]^{1/2} \right\},$$

$$J_{\text{opt}}^{(2)} = M \left\{ T - \left[\left(T - |x_2(t_0)|(bM)^{-1} \right)^2 - 2x_2^2(t_0)(bM)^{-2} \right]^{1/2} \right\}.$$

Чтобы сравнивать значения функционалов, полагаем

$$N_i |x_i(t_0)|_{\text{max}} = M, \quad |x_i(t_0)| = \xi_i |x_i(t_0)|_{\text{max}},$$

$$\xi_i \in [0, 1], \quad i = \overline{1, n}; \quad T = \mu T_{\text{kv}}, \quad \mu \geq 1. \quad (9.30)$$

Здесь ξ_i — коэффициент, показывающий, какую часть от максимального составляет текущее начальное условие; μ — коэффициент, характеризующий во сколько раз заданное время больше времени квазиоптимального по быстродействию перевода системы. Для рассматриваемой системы имеем следующие простые выражения для времени квазиоптимального по быстродействию процесса перевода из точек на оси x_1 и x_2 соответственно:

$$T_{\text{kv}}^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{bN_1}}, \quad T_{\text{kv}}^{(2)} = \frac{1 + \sqrt{2}}{bN_2}.$$

Время квазиоптимального перевода равно времени оптимального по быстродействию перевода системы в начало координат из граничной точки $|x_i(t_0)|_{\text{max}}$, $i = \overline{1, n}$. Различие заключается в том, что время квазиоптимального перевода из любой точки на оси в начало координат остается постоянным и равным значению для граничной точки, а время оптимального по быстродействию перевода зависит от положения точки на оси.

С учетом введенных обозначений получаем следующие выражения для отношения функционалов

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(1)}}{J_{\text{opt}}^{(1)}} = \xi_1 \frac{\mu - (\mu^2 - 1)^{1/2}}{\mu - (\mu^2 - \xi_1)^{1/2}},$$

если начальная точка находится на оси x_1 и

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(2)}}{J_{\text{opt}}^{(2)}} = \xi_2 \frac{1 - \left\{ \left[1 - \mu^{-1}(1 + \sqrt{2})^{-1} \right]^2 - 2 \left[\mu(1 + \sqrt{2}) \right]^{-2} \right\}^{1/2}}{1 - \left\{ \left[1 - \xi_2 \mu^{-1}(1 + \sqrt{2})^{-1} \right]^2 - 2 \xi_2^2 \left[\mu(1 + \sqrt{2}) \right]^{-2} \right\}^{1/2}},$$

если начальная точка расположена на оси x_2 .

На рис. 6а приведены зависимости $J_{\text{kv}}^{(1)}/J_{\text{opt}}^{(1)}$ для ряда значений μ . Различие между квазиоптимальным и оптимальным процессами тем меньше, чем больше $|x_1(t_0)|$ (т.е. ξ_1) и чем больше заданное время T (т.е. μ). При $|x_1(t_0)| = |x_1(t_0)|_{\text{max}}$ квазиоптимальное управление совпадает с оптимальным. Среднее

значение функционала при квазиоптимальном управлении больше: на 3,7 процента для $\mu = 2$; на 1,5 процента для $\mu = 3$; на 0,8 процента для $\mu = 4$. На рис. 6г приведены зависимости $J_{kv}^{(2)}/J_{opt}^{(2)}$ для $\mu = 2, 3, 4$. Сохраняются прежние тенденции. Среднее значение функционала при квазиоптимальном управлении больше: на 13,6 процента для $\mu = 2$; на 8 процентов для $\mu = 3$; на 5,6 процента для $\mu = 4$.

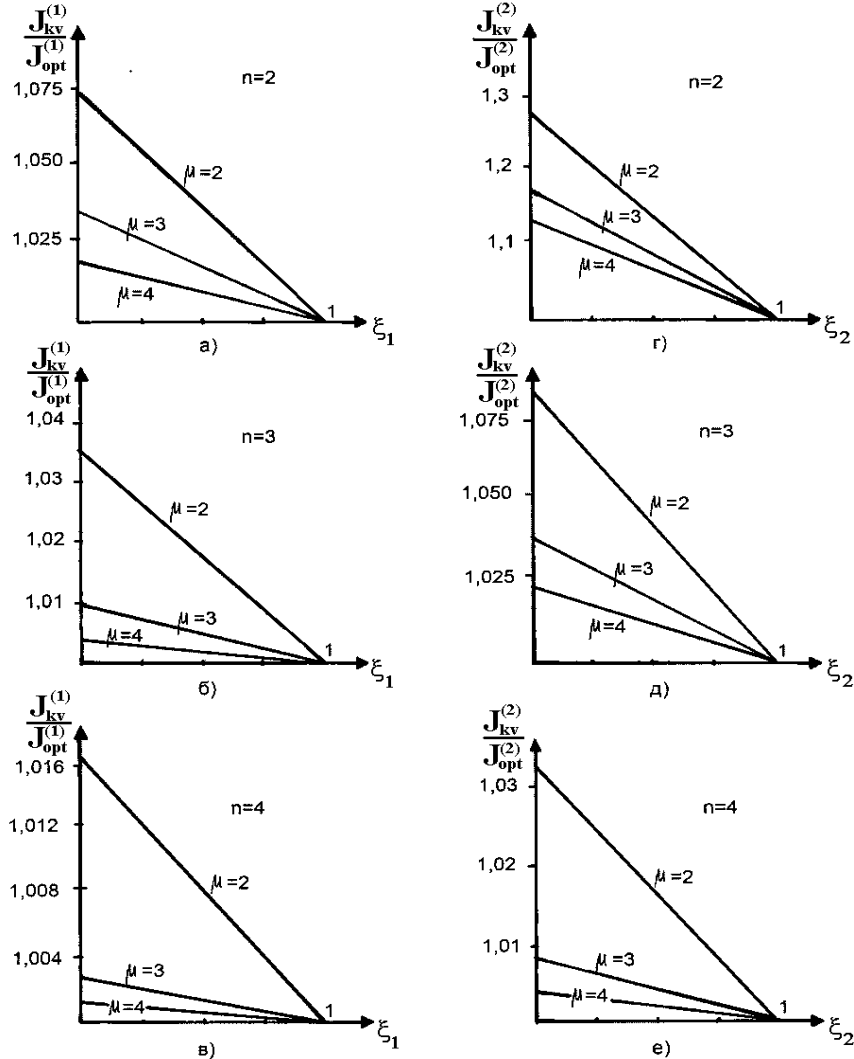


Рис. 6. Зависимости J_{kv}/J_{opt} для различных фазовых координат систем второго, третьего и четвертого порядков

Для системы третьего порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = bu$$

значения функционалов (расходов ресурсов) при переходе из точки $x^{(1)}(t_0) = (x_1(t_0), 0, 0)$, расположенной на оси x_1 , в начало координат при квазиоптимальном и оптимальном управлениях соответственно равны

$$J_{\text{kv}}^{(1)} = N_1 |x_1(t_0)| \left\{ T - \left[T^2 - 32(bN_1 T)^{-1} \right]^{1/2} \right\},$$

$$J_{\text{opt}}^{(1)} = M \left\{ T - \left[T^2 - 32|x_1(t_0)|(bMT)^{-1} \right]^{1/2} \right\}.$$

Используя обозначения (9.30) и соотношение $T_{\text{kv}}^{(1)} = \sqrt[3]{32/bN_1}$, связывающее весовой коэффициент N_1 с временем квазиоптимального по быстрдействию процесса, получаем

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(1)}}{J_{\text{opt}}^{(1)}} = \xi_1 \frac{1 - (1 - \mu^{-3})^{1/2}}{1 - (1 - \xi_1 \mu^{-3})^{1/2}}.$$

На рис. 6б приведены зависимости $J_{\text{kv}}^{(1)}/J_{\text{opt}}^{(1)}$ для ряда значений μ . Для системы третьего порядка это отношение меньше, чем для системы второго порядка при одинаковых ξ_1 и μ . Среднее значение функционала для квазиоптимального управления больше: на 1,7 процента для $\mu = 2$; на 0,47 процента для $\mu = 3$; на 0,19 процента для $\mu = 4$.

При переходе из точки $x^{(2)}(t_0) = (0, x_2(t_0), 0)$, расположенной на оси x_2 , значения функционалов при квазиоптимальном и оптимальном управлениях соответственно равны

$$J_{\text{kv}}^{(2)} = N_2 |x_2(t_0)| \left\{ T - \left[T^2 - 16(bN_2)^{-1} \left(1 + (bN_2 T^2)^{-1} \right) \right]^{1/2} \right\},$$

$$J_{\text{opt}}^{(2)} = M \left\{ T - \left[T^2 - 16(bM)^{-1} \left(|x_2(t_0)| + x_2^2(t_0)(bMT^2)^{-1} \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Подставляя (9.30) и соотношение $T_{\text{kv}}^{(2)} = 2\sqrt{(2 + \sqrt{5})(bN_2)^{-1}}$, получаем

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(2)}}{J_{\text{opt}}^{(2)}} = \xi_2 \frac{(\mu k_2)^2 - \left[(\mu k_2)^4 - 16 \left(1 + (\mu k_2)^2 \right) \right]^{1/2}}{(\mu k_2)^2 - \left[(\mu k_2)^4 - 16 \xi_2 \left(\xi_2 + (\mu k_2)^2 \right) \right]^{1/2}}, \quad k_2 = 2\sqrt{2 + \sqrt{5}}.$$

На рис. 6д приведены зависимости $J_{\text{kv}}^{(2)}/J_{\text{opt}}^{(2)}$ для $\mu = 2, 3, 4$. И для второй фазовой координаты отношение $J_{\text{kv}}^{(2)}/J_{\text{opt}}^{(2)}$ для системы третьего порядка меньше чем для системы второго порядка при одинаковых значениях ξ_2 и μ . Перерасход ресурсов при квазиоптимальном управлении в среднем составляет: 4,3 процента для $\mu = 2$; 1,7 процента для $\mu = 3$; 0,96 процента для $\mu = 4$.

При переходе из точки $x^{(3)}(t_0) = (0, 0, x_3(t_0))$, расположенной на оси x_3 , значения функционалов при квазиоптимальном и оптимальном управлениях

соответственно равны

$$J_{\text{kv}}^{(3)} = N_3 |x_3(t_0)| \left\{ T - \left[\left(T - (bN_3)^{-1} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(T - (bN_3)^{-1} \right)^{-2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left((bN_3)^{-4} + 6T^2 (bN_3)^{-2} - 4T (bN_3)^{-3} \right) \right]^{1/2} \right\}, \\ J_{\text{opt}}^{(3)} = M \left\{ T - \left[\left(T - |x_3(t_0)| (bM)^{-1} \right)^2 - \frac{4}{3} \left(T - |x_3(t_0)| (bM)^{-1} \right)^{-2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(6T^2 x_3^2(t_0) (bM)^{-2} + x_3^4(t_0) (bM)^{-4} - 4T |x_3(t_0)|^3 (bM)^{-3} \right) \right]^{1/2} \right\}.$$

Подставляя (9.30) и соотношение $T_{\text{kv}}^{(3)} = k_3/bN_3$, $k_3 = 4, 3902$, получаем

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(3)}}{J_{\text{opt}}^{(3)}} = \frac{\xi_3 \left[\mu k_3 - \sqrt{(\mu k_3 - 1)^2 - \frac{4}{3} (\mu k_3 - 1)^{-2} [6(\mu k_3)^2 + 1 - 4\mu k_3]} \right]}{\mu k_3 - \sqrt{(\mu k_3 - \xi_3)^2 - \frac{4}{3} \xi_3^2 (\mu k_3 - \xi_3)^{-2} [6(\mu k_3)^2 + \xi_3^2 - 4\xi_3 \mu k_3]}}.$$

Из этого выражения находим, что перерасход ресурсов при квазиоптимальном управлении в среднем составляет для всего диапазона $[0, x_3(t_0)_{\text{max}}]$ начальных условий 1,292; 1,175; 1,126 раза для $\mu = 2; 3; 4$ соответственно.

Для системы четвертого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = x_4, \quad \dot{x}_4 = bu$$

значение функционалов при переводе системы из начальной точки $x^{(1)}(t_0) = (x_1(t_0), 0, 0, 0)$, расположенной на оси x_1 , в начало координат при квазиоптимальном и оптимальном управлениях соответственно равны

$$J_{\text{kv}}^{(1)} = N_1 |x_1(t_0)| \left[T - \left(T^2 - 384/bN_1 T^2 \right)^{1/2} \right], \\ J_{\text{opt}}^{(1)} = M \left[T - \left(T^2 - 384 |x_1(t_0)| / bMT^2 \right)^{1/2} \right].$$

Подставляя (9.30) и выражение для времени квазиоптимального по быстродействию управления $T_{\text{kv}}^{(1)} = (384/bN_1)^{1/4}$, получаем

$$\frac{J_{\text{kv}}^{(1)}}{J_{\text{opt}}^{(1)}} = \xi_1 \frac{\mu - [\mu^2 - 1/\mu^2]^{1/2}}{\mu - [\mu^2 - \xi_1/\mu^2]^{1/2}}.$$

На рис. 6в приведены зависимости $J_{\text{kv}}^{(1)}/J_{\text{opt}}^{(1)}$ для $\mu = 2, 3, 4$. Перерасход ресурсов меньше, чем для систем третьего и второго порядков при одинаковых ξ_1 и μ . Среднее значение функционала при квазиоптимальном управлении больше, чем при оптимальном: на 0,8 процента для $\mu = 2$; на 0,15 процента для $\mu = 3$; на 0,05 процента для $\mu = 4$.

При переходе из точки $x^{(2)}(t_0) = (0, x_2(t_0), 0, 0)$ в начало координат значения функционалов при квазиоптимальном и оптимальном управлениях соответственно равны

$$J_{kv}^{(2)} = N_2|x_2(t_0)| \left\{ T - \left[T^2 - 384/26N_2T - 3072/3b^2N_2^2T^4 \right]^{1/2} \right\},$$

$$J_{opt}^{(2)} = M \left\{ T - \left[T^2 - 384|x_2(t_0)|26bMT - 3072x_2^2(t_0)/3b^2M^2T^4 \right]^{1/2} \right\}.$$

Подставляя (9.30) и выражение для времени квазиоптимального по быстродействию управления $T_{kv}^{(2)} = \sqrt[3]{(1 + \sqrt{10}/3)384/4bN_2}$, получаем следующее выражение для отношения функционалов:

$$\frac{J_{kv}^{(2)}}{J_{opt}^{(2)}} = \xi_2 \frac{\mu - \left[\mu^2 - 2/\mu(1 + \frac{\sqrt{10}}{3}) - 1/36\mu^4(1 + \frac{\sqrt{10}}{3})^2 \right]^{1/2}}{\mu - \left[\mu^2 - 2\xi_2/\mu(1 + \frac{\sqrt{10}}{3}) - \xi_2^2/36\mu^4(1 + \frac{\sqrt{10}}{3})^2 \right]^{1/2}}.$$

На рис. 6е приведены эти зависимости для ряда значений μ . Перерасход ресурсов при квазиоптимальном управлении составляет 1.8 процента для $\mu = 2$; 0.5 процента для $\mu = 3$ и 0.2 процента для $\mu = 4$.

На рис. 7 приведены зависимости J_{kv}/J_{opt} для средних значений функционалов рассматриваемых систем второго, третьего и четвертого порядка. Из приведенных соотношений непосредственно следует, что с увеличением порядка управляемой системы расход ресурсов увеличивается. При этом различие между квазиоптимальным и оптимальным управлениями уменьшается по мере увеличения заданного времени (т.е. μ), начальных условий (т.е. ξ_i) и порядка управляемой системы (т.е. n). Следовательно, чем выше порядок управляемой системы, тем эффективнее применение квазиоптимального управления. А именно для систем высокого порядка нахождение оптимального управления сопряжено с наибольшими трудностями и требует большого объема вычислений. Это приводит к значительному запаздыванию в управлении, которое ухудшает качество управления (точность перевода) и может вообще привести к потере работоспособности системы управления. Запаздывание делает невозможным управление быстродействующими объектами.

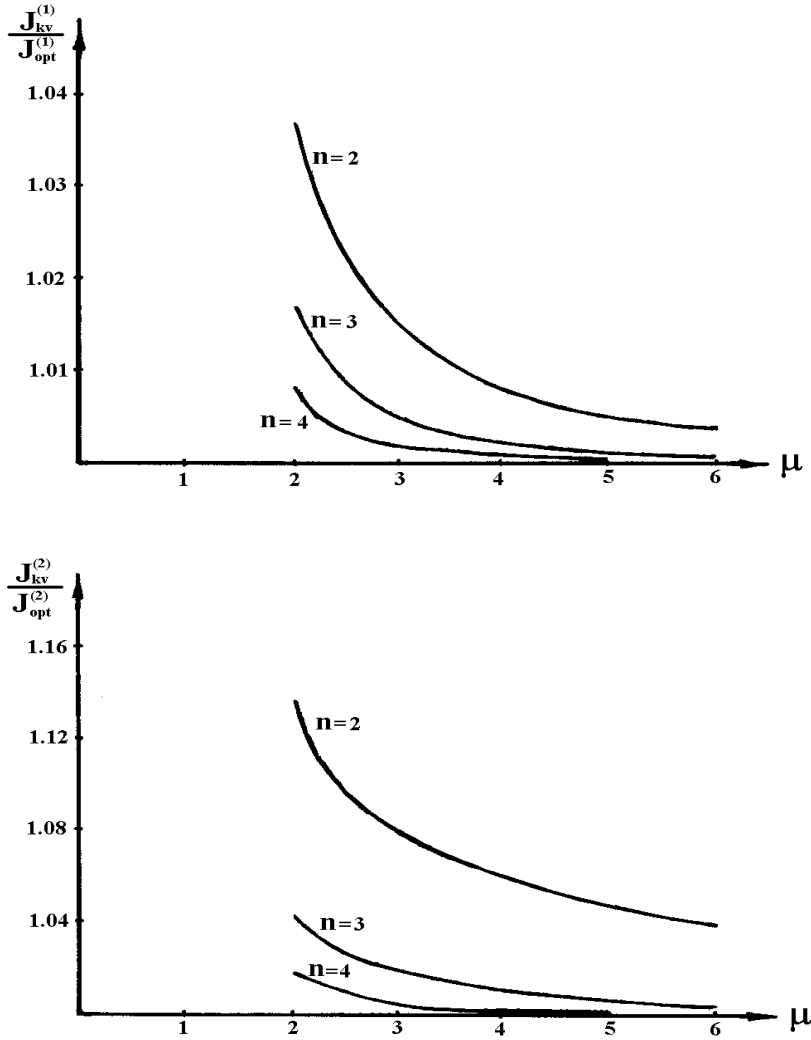


Рис. 7. Зависимости J_{kv}/J_{opt} для средних значений функционалов

9.5. Приближение квазиоптимального управления к оптимальному по расходу ресурсов управлению. Дальнейшее уменьшение различия между квазиоптимальным и оптимальным управлениями достигается путем деления области D начальных условий на ряд подобластей со своими значениями весовых коэффициентов N_{ij}^s и моментов переключений квазиоптимального управления в каждой подобласти. Удовлетворить ограничению (9.2) и одновременно уменьшить различие в функционалах можно следующим образом. Разобьем область начальных условий D на k подобластей Y_s , $s = \overline{1, k}$ с различными значениями весовых коэффициентов N_{ij}^s и моментов переключений для каждой подобласти. При этом время перевода из любой фазовой точки в начало координат фиксировано и равно заданному значению T . Коэффициенты

N_{ij}^s выбираются из условия максимального приближения квазиоптимальных процессов к оптимальным. Близость понимается в смысле близости функционалов, а не самих управлений.

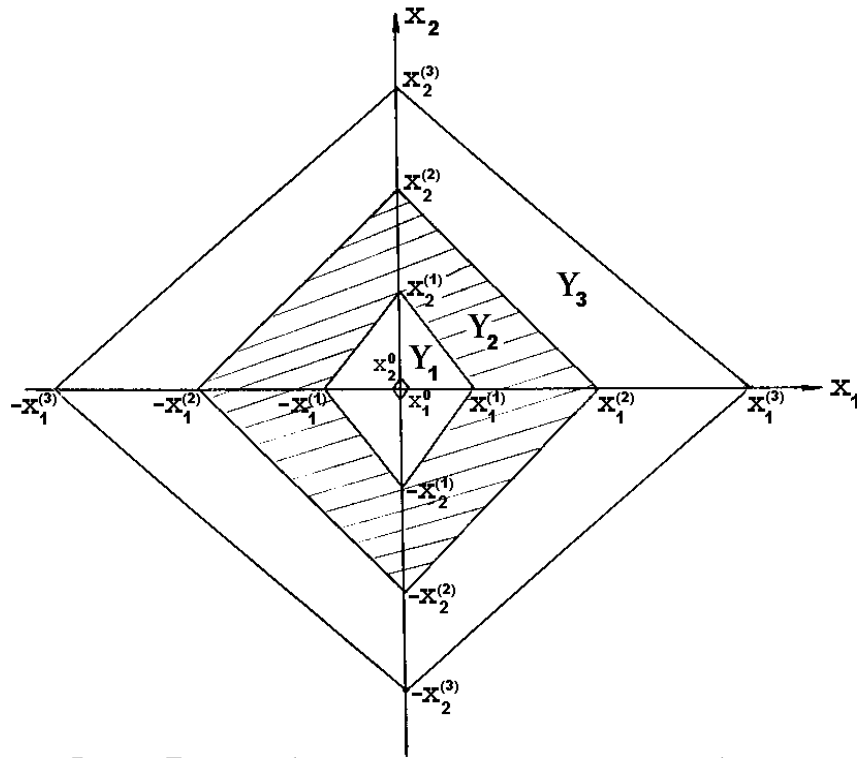


Рис. 8. Деление области начальных условий на подобласти

Весьма просто такое разбиение осуществить совокупностью гиперплоскостей, каждая из которых описывается одним из нижеследующих уравнений при фиксированном s :

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm x_i^{(s)}} - 1 = 0, \quad s = \overline{1, k}. \tag{9.31}$$

Здесь $x_i^{(s)}$ — точки на фазовых осях, переход из которых в начало координат происходит с оптимальным по расходу ресурсов управлением за фиксированное время T . Оптимальное управление вычисляется *предварительно* до начала процесса управления. Моменты переключений запоминаются в управляющем устройстве. Значения весовых коэффициентов N_{ij}^s находятся из условия $N_{ij}^s |x_i^{(s)}| = M_j, j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}; s = \overline{1, k}$. В результате для системы n -го порядка имеем на осях $2nk$ граничных точек, для которых квазиоптимальное управление совпадает с оптимальным.

На рис. 8 показано деление области начальных условий на ряд подобластей; $x_i^0, i = \overline{1, n}$ — значения ε -окрестности начала координат.

Число гиперплоскостей, которые проходят через $2n$ граничных точек при фиксированном s , равно 2^n . Совокупность неравенств (9.22) образует замкнутое выпуклое множество. Подмножество Y_s со своими значениями весовых коэффициентов N_{ij}^s и моментов переключений квазиоптимального управления (9.20) выделяется следующим образом:

$$Y_s = \left\{ x(t_0) : \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm x_i^{(s)}} - 1 \right)_{\alpha} \leq 0 \quad \alpha = \overline{1, 2^n}; \exists \alpha \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm x_i^{(s-1)}} - 1 \right)_{\alpha} > 0 \right\},$$

где α — номер гиперповерхности.

Если $x(t_0) \in Y_s$, то квазиоптимальное управление для *всех* точек этого подмножества формируется по алгоритму

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^s x_i(t_0) \text{sign}\{[B_j(t)]^* \psi^{(is)}(t) [1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi^{(is)}(t)|)]\}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (9.32)$$

где $\psi^{(is)}(t)$ определяет моменты переключений компонент вектора квазиоптимального управления для s -го подмножества.

Процедуру выделения подмножества Y_s , которому принадлежит точка $x(t_0)$, и, следовательно, весовых коэффициентов N_{ij}^s и моментов переключений, с которыми формируется управление (9.32), можно существенно упростить. Достаточно рассмотреть предельное соотношение

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s)}} \right| - 1 \leq 0, \quad s = \overline{1, k}. \quad (9.33)$$

Минимальное значение s , при котором выполняется (9.33), и определяет подмножество Y_s , принадлежность к которому теперь задается так:

$$Y_s = \left\{ x(t_0) : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s)}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s-1)}} \right| - 1 > 0 \right\}.$$

Если для произвольно выбранного s выполняются соотношения

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s)}} \right| - 1 < 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s-1)}} \right| - 1 \leq 0,$$

то это является условием уменьшения s . Если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s)}} \right| - 1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s-1)}} \right| - 1 > 0,$$

то это является условием увеличения s . Процесс заканчивается, если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s)}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_i^{(s-1)}} \right| - 1 > 0. \quad (9.34)$$

Так целенаправленно происходит выбор s и, следовательно, N_{ij}^s и моментов переключений, с которыми происходит формирование квазиоптимального управления. Число необходимых делений определяется заданной областью начальных условий и допустимым различием в функционалах квазиоптимального и оптимального управлений.

Нетрудно видеть, что каждый раз выделяется многогранник, для вершин которого квазиоптимальное управление совпадает с оптимальным. В результате для системы n порядка имеем $2nk$ граничных точек, для которых квазиоптимальное управление совпадает с оптимальным. Поэтому такая конструкция является аппроксимирующей и дает приближенное решение задачи на минимум расхода ресурсов.

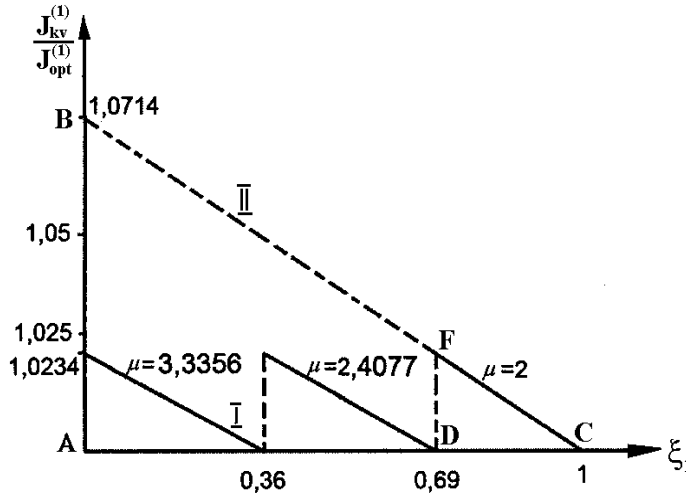


Рис. 9. Зависимости J_{kv}/J_{opt} при делении области начальных условий на три подобласти

На рис. 9 приведена зависимость $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ (пилообразная кусочно-ломанная кривая I с переменной величиной наклона) для системы второго порядка $\dot{x}_2 = x_2$, $\dot{x}_2 = bu$ и начальной фазовой точки, расположенной на оси x_1 . Область начальных условий разбита на три подобласти при первоначальном значении $\mu = 2$. Здесь же для сравнения показана зависимость $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ (пунктирная кривая II) без деления области (см. рис. 8а для $\mu = 2$). Деление области начальных условий на три подобласти приводит к уменьшению максимального значения отношения функционалов $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ в 3.05 раза.

Лемма 2. Деление ограниченной области начальных условий $x(t_0) \in D$ на k подобластей с различными в каждой подобласти значениями весовых коэффициентов N_{ij}^s , $s = \overline{1, k}$ и моментов переключений составляющих квазиоптимального по расходу ресурсов управления приводит к уменьшению максимального значения отношения функционалов $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)} \forall i = \overline{1, n}$ более чем в k раз.

Доказательство. Анализ приведенных выше зависимостей $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$ показывает, что они являются слабо вогнутыми кривыми. Деление области начальных условий на k подобластей приводит к тому, что зависимости $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$ становятся кусочно-непрерывными функциями, которые могут быть аппроксимированы кусочно-ломанными линиями с переменной величиной наклона.

Аппроксимация тем точнее, чем больше число делений, т.е. k . Из подобия прямоугольных треугольников ABC и CDF (см. рис. 8) следует, что $AB/DF = AC/CD$. Здесь $AB = J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)} = J(1)$ – максимальное значение отношения функционалов $J_{kv}^{(1)}$ и $J_{opt}^{(1)}$ без деления области; $DF = J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)} = J(k)$ – максимальное значение отношения функционалов при делении области на k подобластей; $AC = 1$ (т.е. $\xi_i = 1$); CD – отрезок интервала $[0,1]$ при делении области на k подобластей. При *равномерном* делении (на каждой фазовой оси) интервала $[0, |x_{i|_{max}}]$ граничными точками $x_i^{(s)}$, $i = \overline{1, n}$; $s = \overline{1, k}$ имеем $CD = 1/k$. В этом случае $J(1)/J(k) = k$. Это означает, что равномерное деление приводит к уменьшению максимальных значений $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$ в k раз.

Однако равномерное деление граничными точками отрезка $[0, |x_{i|_{max}}]$, $i = \overline{1, n}$ не дает *равных* максимальных значений $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$. Максимальный эффект достигается при *неравномерном* делении отрезка $[0, |x_{i|_{max}}]$ граничными точками $x_i^{(s)}$, $s = \overline{1, k}$. Действительно, наклон прямых (к горизонтальной оси) при кусочно-ломанной аппроксимации *уменьшается* с уменьшением $\xi_i \forall i = \overline{1, n}$, так как для каждой новой граничной точки, расположенной ближе к началу координат чем предыдущая точка, время оптимального, и следовательно, квазиоптимального по быстродействию перевода (T_{kv}) меньше и, следовательно, отношение $\mu = T/T_{kv}$ больше. Из полученных зависимостей $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$, приведенных на рис. 5, следует, что чем больше μ , тем меньше наклон (кусочно-ломанной линии) к горизонтальной оси. Из этого в свою очередь следует, что $CD < 1/k$ и, следовательно, $J(1)/J(k) > k$.

Лемма доказана.

Из рис. 9 видно, что при делении отрезка $[0, |x_1|_{max}]$ на три части для достижения *равных* максимальных значений $J(3) = 1,0234$ должно быть *неравномерное* деление отрезка $[0, |x_1|_{max}]$ граничными точками: $|x_1^{(1)}| = 0.36|x_1|_{max}$, $|x_1^{(2)}| = 0.69|x_1|_{max}$.

Приведенный пример показывает, что деление является эффективным способом приближения квазиоптимального управления к оптимальному. Деление области на k подобластей приводит к дополнительному уменьшению различия между квазиоптимальным и оптимальным управлениями более чем в k раз. *Это позволяет оценить необходимое число делений области для достижения заданного различия между приближенным и точным решениями.*

На рис. 10 приведены зависимости $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ (пилообразные кривые с переменным наклоном) для систем второго и третьего порядка и начальной точки, расположенной на оси x_1 , при первоначальном значении $\mu = T/T_{opt} = 2$ и делении области начальных условий на две, три и четыре подобласти. Здесь же для наглядности на каждом графике приведена зависимость $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ без деления на подобласти (пунктирная кривая). Видно, что для системы второго порядка деление области начальных условий на две подобласти приводит к уменьшению максимального значения в отношениях функционалов в 2.04 раза, разделении на три подобласти приводит к уменьшению этого значения в 3.05 раза, а деление на четыре подобласти – к уменьшению в 4.08 раза.

И для системы третьего порядка максимальное значение в отношениях функционалов уменьшается в 2.01, 3.04 и 4.07 раза при делении области начальных условий на две, три и четыре подобласти соответственно.

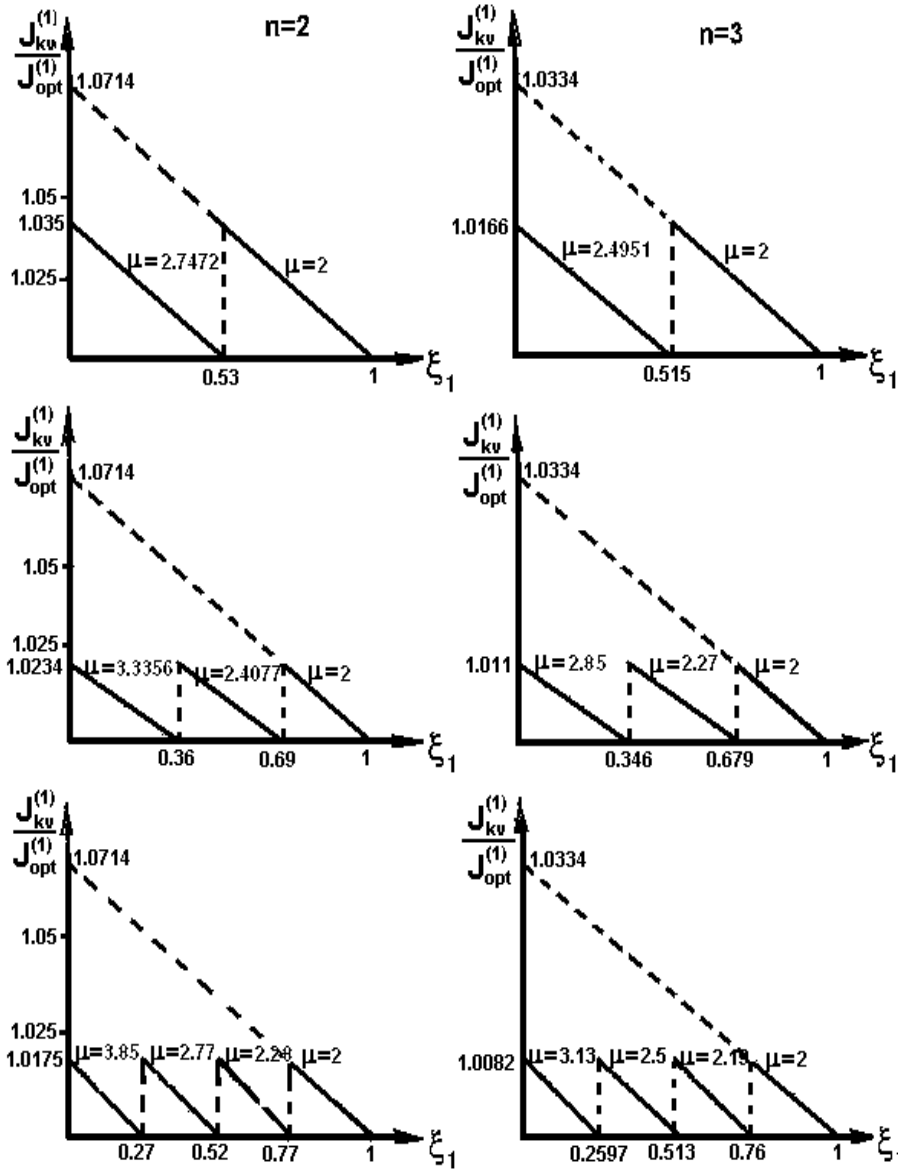


Рис. 10. Зависимости $J_{kv}^{(1)}/J_{opt}^{(1)}$ при делении области начальных условий на две, три и четыре подобласти для систем второго и третьего порядков

В табл. 13 приведены максимальные значения $J_{kv}^{(i)}/J_{opt}^{(i)}$ для систем второго, третьего и четвертого порядков при $k = 1, 2, 3, 4$.

Т а б л и ц а 13.

k	$n = 2$		$n = 3$			$n = 4$	
	x_1	x_2	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2
1	1.0714	1.2708	1.0334	1.0841	1.6321	1.0161	1.0360
2	1.0350	1.1273	1.0166	1.0412	1.2775	1.0080	1.0178
3	1.0234	1.0831	1.0110	1.0273	1.1770	1.0054	1.0118
4	1.0175	1.0617	1.0082	1.0204	1.1303	1.0040	1.0089

Сложность реализации квазиоптимального управления для систем с постоянными параметрами практически не увеличивается с ростом порядка управляемой системы и числа управляющих параметров. Моменты переключений и весовые коэффициенты для каждой подобласти Y_s , $s = \overline{1, k}$ вычисляются *предварительно* до начала процесса управления и устанавливаются в управляющем устройстве. Реализация особенно упрощается в случае постоянных матриц $A(t) = A$, $B(t) = B$, так как в этом случае моменты переключений не зависят от начальных условий, начального момента t_0 и постоянны. *Поэтому применение квазиоптимального управления наиболее эффективно для сложных динамических систем высокого порядка, именно для которых нахождение оптимального управления сопряжено с наибольшими трудностями.*

Полученное приближенное решение может быть использовано и в качестве начального приближения для итерационной процедуры нахождения оптимального по расходу ресурсов управления. Задание хорошего начального приближения улучшает сходимость итерационного процесса, а главное, уменьшает число необходимых итераций и вычислительную трудоемкость итерационного метода. При задании *начального приближения* нет необходимости в выполнении ограничения на управление. Это позволяет сформировать квазиоптимальное управление с *одинаковыми* моментами переключений составляющих и получить более удобную форму начального приближения для итерационного процесса вычисления оптимального по расходу ресурсов управления, которое рассматривается в следующем разделе.

10. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НА МИНИМУМ РАСХОДА РЕСУРСОВ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В работе предлагается для линейных систем другой численный метод нахождения оптимального по расходу ресурсов управления. Рассмотрен простой алгоритм формирования квазиоптимального по расходу ресурсов управления, переводящего систему из заданного начального состояния в начало координат за фиксированное время. Квазиоптимальное управление используется в качестве начального приближения в итерационной процедуре вычисления оптимального управления. Суть метода состоит в *постепенном* выравнивании амплитуд квазиоптимального управления до предельных значений и сведении

последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному путем соответствующего изменения моментов переключений управления. Установлена связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Получена система линейных алгебраических уравнений, приближенно связывающая отклонения начальных условий сопряженной системы с отклонениями амплитуд квазиоптимального управления от предельных значений. В результате задача нахождения оптимального управления сводится к последовательности решений систем линейных алгебраических уравнений и интегрированию дифференциальных уравнений на интервалах перемещения моментов переключений управления.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

10.1. Перевод системы за фиксированное время. В постановке задачи предполагается, что заданное время больше времени оптимального по быстродействию перевода системы, т.е. $T \geq T_0$. Поэтому прежде всего необходимо проверить, выполняется ли это *необходимое* условие. С этой целью следует решить промежуточную задачу: найти допустимое управление $u^\Phi(t)$, переводящее систему (2.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$.

Оптимальное по быстродействию управление формируется по алгоритму [1]:

$$u_j(t) = M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t). \quad (10.1)$$

Здесь $[B_j(t)]^*$ — транспонированный j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$. Финитное управление $u^\Phi(t)$, переводящее систему (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$, определяется так

$$u_j^\Phi(t) = \eta M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad (10.2)$$

где параметр $\eta > 0$ показывает во сколько раз следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы (2.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_k) = 0$ не за минимальное, а за заданное время T . В [21] рассмотрена итерационная процедура нахождения оптимального по быстродействию управления. Укажем на те изменения, которые необходимо сделать для нахождения решения задачи по переводу системы за фиксированное время:

- 1) заменить \hat{u}_j^p на $\eta M_j S_j(p)$, а $\hat{u}_j(p+1)$ заменить на $\eta M_j S_j(p+1)$ и учесть, что $S_j(p+1) = -S_j(p)$;
- 2) подставить ηM_j вместо M_j ;
- 3) исключить слагаемое с Δt_k , так как момент времени t_k фиксирован, и следовательно, $\Delta t_k = 0$.

В результате получаем уравнение, связывающее приращения начальных условий нормированной сопряженной системы с приращениями величин управляющих воздействий

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) B_j(\nu_j^p) \eta M_j S_j(p) \left\{ \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) - \right. \right. \\
& \left. \left. - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \right\} [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \widehat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} [B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \Delta \widehat{\psi}(t_0) + \quad (10.3) \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi \left[\eta M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Получили систему из n уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ значение $\Delta \widehat{\psi}_i(t_0)$ и параметр η . Разделим на η обе части уравнения (10.3) и получим систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных, которыми являются $(n-1)$ значение $\Delta \widehat{\psi}_i(t_0)$ и параметр $1/\eta$:

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \left\{ \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) - \right. \right. \\
& \left. \left. - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \right\} [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \widehat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} [B_j(\nu_j^p)]^* [\Phi^{-1}(\nu_j^p, t_0)]^* \Delta \widehat{\psi}(t_0) - \\
& - \frac{1}{\eta} \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) d\tau + \\
& \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi M_j S_j(p) d\tau = 0.
\end{aligned}$$

В остальном процесс нахождения финитного управления аналогичен итерационной процедуре [21].

Если искомый параметр $\eta \leq 1$, то решение задачи на минимум расхода ресурсов существует. Если $\eta > 1$, то решения не существует.

Нахождение финитного управления $u^\Phi(t)$ дает информацию, необходимую для решения задачи на минимум расхода ресурсов:

1. Получаем последовательность управляющих воздействий и число (r_j) интервалов знакопостоянства для каждой компоненты. Действительно, при $\eta = 1$ когда $T = T_0$ решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстрогодействия. При $\eta < 1$ ($T > T_0$) появляются участки "выключения" управления, за счет которых и происходит экономия ресурсов. При этом структура финитного управления отличается от структуры управления, минимизирующего расход ресурсов, однако последовательность кусочно-постоянных воздействий и число перемен знака для каждой компоненты сохраняется.

2. Если $\eta > 1$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует. Для существования решения необходимо увеличить M_j либо T . Увеличение $M_j, j = \overline{1, m}$ всегда приводит к решению задачи (если система (2.1)

полностью управляема, т.е. выполняется условие (2.3)), но сопряжено с увеличением управляющих воздействий. Увеличение T для неустойчивых систем не приводит к решению задачи, если $x_0 \notin V$. Действительно, для неустойчивых систем с ограниченным управлением переход в начало координат возможен лишь из области управляемости V . Если $x_0 \notin V$, то даже за бесконечное время невозможен перевод системы в начало координат. Однако на практике время T задается зачастую произвольно, без учета возможностей системы. Поэтому увеличение T позволяет во многих случаях получить решение задачи. Отношение $\mu = T/T_0$ (при $T/T_0 > 1$) характеризует запас по времени и определяет экономию ресурсов. Чем больше μ , тем меньше расход ресурсов. Однако скорость, с которой происходит уменьшение расхода ресурсов, уменьшается с ростом μ (см. рис. 6 раздела 9). Поэтому целесообразно принимать μ не более $\mu \approx 4$.

3. Моменты переключений финитного управления используются для задания начального приближения моментов переключений оптимального по расходу ресурсов управления.

10.2. Формирование квазиоптимального по расходу ресурсов управления. Предположим, что вектор начальных условий $x^{(i)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0), 0, \dots, 0)$ содержит только одну ненулевую компоненту $x_i(t_0)$. Рассмотрим алгоритм формирования управления из начального условия i -й фазовой координаты.

Введем в рассмотрение переменные ограничения на компоненты вектора управления, зависящие от начальных условий

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad N_{ij} > 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (10.4)$$

где N_{ij} - некоторые весовые коэффициенты, выбор которых рассмотрен ниже. Для принятого начального условия ограничение (10.4) имеет вид

$$|u_j| \leq N_{ij} |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.5)$$

Для нахождения оптимального по расходу ресурсов управления при ограничении (10.5) воспользуемся принципом максимума. Образует функцию Понтрягина $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ и выищем сопряженную систему $\dot{\psi}(t)$:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = - \sum_{j=1}^m |u_j| + \psi^* A(t)x + \psi^* B(t)u, \quad \dot{\psi} = -A^*(t)\psi.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\psi(t)$, соответствующей функциям $x(t)$ и $u(t)$, что для любого $t \in [t_0, t_k]$ функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума:

$$H(\psi(t), x(t), u(t), t) = \sup_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u, t).$$

Функция $H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ максимальна, если компоненты вектора управления удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_j^{(i)}(t) = \begin{cases} N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \geq 1, \\ 0 & \text{при } 1 > [B_j(t)]^* \psi(t) > -1, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}. \\ -N_{ij}|x_i(t_0)| & \text{при } [B_j(t)]^* \psi(t) \leq -1, \end{cases} \quad (10.6)$$

Соотношение (10.6) можно записать более компактно:

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}|x_i(t_0)| \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (10.7)$$

$$i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, m}.$$

В предыдущем разделе (раздел 9) была доказана независимость моментов переключений от начальных условий, что обеспечивает простую реализацию управления, и найдена допустимая область начальных условий, для которой не нарушаются предельные ограничения на управления. Последнее важно при управлении объектами, но не важно при задании начального приближения. В этом случае более важна форма начального приближения, допускающая преобразование последовательности квазиоптимальных управлений в оптимальное по расходу ресурсов управление.

Сохраним это важное свойство независимости моментов переключений от начальных условий, но другим способом сформируем квазиоптимальное управление.

Зафиксируем моменты переключений управления. Тогда весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$ а r_j - число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Оно известно после нахождения финитного управления. Известно и число переключений $\alpha^j = 2(r_j - 1)$, $j = \overline{1, m}$ для каждой компоненты вектора управления.

Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений формируется по алгоритму

$$u_j^{(i)}(t) = N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (10.8)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

В общем случае, когда вектор начальных условий $x(t_0)$ содержит все (либо часть) ненулевые компоненты, компоненты вектора управления образуются суммированием составляющих (10.8), сформированных из начальных условий каждой фазовой координаты:

$$u_j^{\text{kv}}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad (10.9)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p].$$

Суммарное управление (10.9) в силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем переводит систему (2.1) из любого начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за фиксированное время $T = t_k - t_0$ и минимизирует расход ресурсов при переменных ограничениях

$$|u_j| \leq \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)|, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}; \quad t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]. \quad (10.10)$$

10.3. Определение весовых коэффициентов для квазиоптимального управления. Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ связаны с параметрами управляемой системы следующим уравнением:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) N_{ij}^p \operatorname{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(\tau)]^* \psi(\tau)|) \right] \right\} d\tau + \Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (10.11)$$

Введем обозначение

$$\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \operatorname{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \operatorname{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}. \quad (10.12)$$

Учитывая, что $\Gamma^{(i)}(t_k, t_0) = \Phi(t_k, t_0) I_i$, где I_i - i -й вектор-столбец единичной матрицы, а $\Phi(t_k, t_0)$ невырождена, систему уравнений (10.11) представим, используя обозначение (10.12), следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (10.13)$$

где t_j^α - α -й момент переключения j -й компоненты вектора управления. Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление формируется с учетом введенных обозначений по алгоритму

$$u_j^{kv}(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}], \quad p = \overline{1, r_j}, \quad (10.14)$$

$$u_j^{kv}(t) \equiv 0, \quad t \in (t_j^{2p-1}, t_j^{2p}), \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

Пусть определены все моменты переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, включая и конечный момент $t_j^{2r_j-1} = t_k$. Параметры p и α связаны соотношением

$$p = E\{\alpha/2 + 1\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (10.15)$$

где $E\{\cdot\}$ -целая часть числа. Так как $\sum_{j=1}^m 2r_j - 1 \geq n$, то число параметров \hat{N}_{ij}^p может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем

неизвестными коэффициенты \hat{N}_{ij}^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах полагаем $\hat{N}_{ij}^{p+1} = -\hat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда

$$\hat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j}, \quad p = \overline{k_j, r_j - 1}.$$

В результате из (10.13) получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов \hat{N}_{ij}^p

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \hat{N}_{ij}^{k_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0,$$

$$i = \overline{1, n}. \quad (10.16)$$

Итак, задав произвольно моменты переключений, решаем системы линейных алгебраических уравнений (10.16) и находим весовые коэффициенты. Формируем по формуле (10.14) квазиоптимальное управление.

10.4. Определение начальных условий сопряженной системы. Оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j^0(t) = M_j \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.17)$$

На рис. 11 качественно показаны: структура финитного управления $u^\Phi(t)$; структура квазиоптимального по расходу ресурсов управления $u_j^{\text{kv}}(t)$; функция переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$ для квазиоптимального управления при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений. Отличие от рис. 2 состоит в том, что вначале (первоначально) величины управления не принимают соответствующие предельно-допустимые значения $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$, а могут быть как больше так и меньше их. И только в конце итерационного процесса управляющие воздействия принимают предельно-допустимые значения. Таким образом, в итерационном процессе изменяются одновременно как величины управляющих воздействий, так и моменты их переключений. В величинах амплитуд квазиоптимального управления содержится информация о моментах переключений искомого оптимального по расходу ресурсов управления.

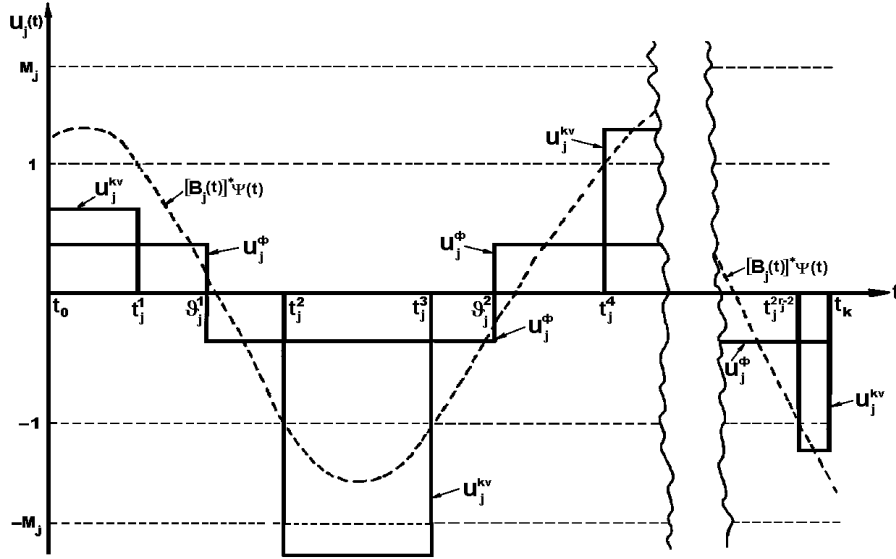


Рис. 11. Структуры финитного и квазиоптимального управлений

Пусть t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$; $j = \overline{1, m}$) – α -й момент переключения j -й компоненты вектора управления. Задавая произвольно n моментов переключений управления, можно определить начальное условие $\psi(t_0)$ для сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, а с помощью решения $\psi(t)$ найти все моменты переключений компонент вектора управления на заданном интервале $[t_0, t_k]$, соответствующие этим n заданным моментам. Выбор же "хорошего" начального приближения улучшает сходимость, а главное, уменьшает время, затрачиваемое на интегрирование, и следовательно уменьшает время нахождения оптимального управления и вычислительную трудоемкость метода. Моменты переключений t_j^α ($\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$; $j = \overline{1, m}$) для начального приближения искомого управления на минимум расхода ресурсов целесообразно задавать через моменты переключений ν_j^p финитного управления. Первый момент t_j^1 выключения и последний момент $t_j^{2(r_j-1)}$ включения управления зададим так:

$$t_j^1 = \frac{1}{2}(\nu_j^1 - t_0)\eta(1 + \eta^2) + t_0, \quad t_j^{2(r_j-1)} = t_k - \frac{1}{2}(t_k - \nu_j^{(r_j-1)})\eta(1 + \eta^2), \quad (10.18)$$

а остальные моменты переключений зададим так:

$$t_j^{2p-1} = \nu_j^p - \frac{1}{2}(\nu_j^p - \nu_j^{p-1})\left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2)\right], \quad t_j^{2p} = \nu_j^p + \frac{1}{2}(\nu_j^{p+1} - \nu_j^p)\left[1 - \frac{1}{2}\eta(1 + \eta^2)\right],$$

$$p = \overline{1, r_j - 1}.$$

В этом случае, если $|u_j^\phi| = M_j$, то финитное управление должно совпадать с оптимальным управлением по расходу ресурсов, что и отражают формулы

(10.18). Если $|u_j^\Phi|/M_j \rightarrow 0$, то интервалы, на которых управление, минимизирующее расход ресурсов, отлично от нуля, должны стремиться к нулю, что и следует из (10.18).

Функция переключений $[B_j(t)]^* \psi(t)$ обращается в нуль в некоторые моменты времени, а при $t = t_j^\alpha$ имеем $[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1$. Зная $u^\Phi(t)$, легко определить знак на первом интервале постоянства квазиоптимального управления по расходу ресурсов: $\text{sign } u(t_0) = \text{sign } u^\Phi(t_0)$. Следовательно, можно определить знаки функции переключения на каждом p -м интервале постоянства через первый интервал

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = (-1)^{p-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0). \quad (10.19)$$

Связь между параметрами p и α выражается формулой (10.15). Запишем решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ так:

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0). \quad (10.20)$$

Подставляя (10.20) и (10.15) в (10.19), получим относительно $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ систему из n линейных алгебраических уравнений:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} = 0, \quad (10.21)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, l_j}; \quad \sum_{j=1}^m l_j = n.$$

Подчеркнем, что нет необходимости в аналитическом определении значений $[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*$. Последние находятся в заданные моменты $t = t_j^\alpha$ при численном решении матричного уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (10.22)$$

Нетрудно показать, что $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$. Отсюда $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\hat{\Phi}(t, t_0)]^*$ и исключается трудоемкая операция обращения матрицы. Отметим, что матрица $\Phi^{-1}(t, t_0)$ используется при вычислении весовых коэффициентов, так что дополнительной является лишь операция транспонирования.

10.5. Вариация величин управляющих воздействий. Моменты переключений t_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ управляющих параметров $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ находятся из решения на интервале $[t_0, t_k]$ уравнений

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.23)$$

Зная начальное условие $\psi(t_0)$, из решения на интервале $[t_0, t_k]$ сопряженной системы (10.20) находим все t_j^α , для которых выполняется (10.23). Другими словами, задав n моментов переключений, находим с помощью сопряженной системы соответствующие им все остальные моменты переключений.

Найдем отклонения фазовых координат, порожденные отклонениями величин управляющих воздействий квазиоптимального управления от оптимального. Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму (10.9), а оптимальное – (10.17). Отклонения квазиоптимального управления от оптимального равны

$$\Delta u_j(t) = \left[M_j - \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)| \right] \text{sign} \left\{ [B_j(t)]^* \psi(t) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \right] \right\}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_k$, вызванное отклонениями управляющих параметров, равно

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t_k) = & \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[M_j - \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)| \right] \times \\ & \times \text{sign} \left\{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) \left[1 - \text{sign}(1 - |[B_j(\tau)]^* \psi(\tau)|) \right] \right\} d\tau. \end{aligned} \tag{10.24}$$

Выражение (10.24) представим в ином виде, более удобном для вычислений. Квазиоптимальное управление (10.9) принимает значения $\left\{ \pm \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), 0 \right\}$, а оптимальное – $\left\{ \pm M_j, 0 \right\}$. На рис. 12 показаны j -я компонента квазиоптимального по расходу ресурсов управления и ее отклонения Δu_j^p от соответствующих предельных значений оптимального управления.

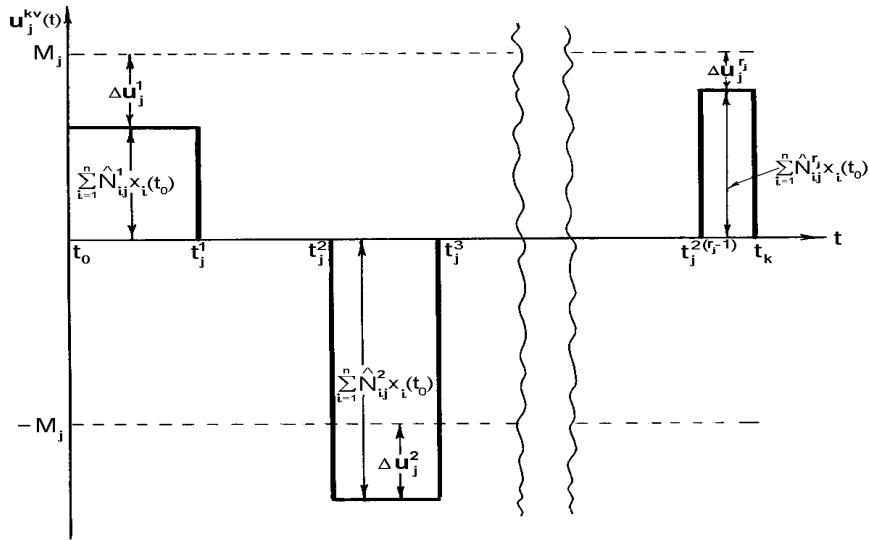


Рис. 12. Отклонения управляющего параметра от предельных значений

Учитывая, что на интервалах с нулевым управлением $\Delta u(t) \equiv 0$, выражение (10.24) запишем так:

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) \left[M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (10.25)$$

Итак, на p -м интервале

$$\Delta u_j^p = M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (10.26)$$

Для обеспечения *сходимости* вычислительного процесса будем брать лишь ξ -ю часть отклонения (10.26): $\Delta \hat{u}_j^p = \xi \Delta u_j^p$, $0 < \xi \leq 1$. В результате управление будет стремиться теперь не к $\pm M_j$, а к некоторой промежуточной величине

$$\hat{u}_j^p = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) + \xi \left[M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right], \quad j = \overline{1, m}. \quad (10.27)$$

В этом случае отклонение фазовых координат, порожденное отклонениями $\xi \Delta u_j^p$, равно

$$\begin{aligned} \Delta \hat{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0) \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi \left[M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (10.28)$$

10.6. Вариация моментов переключений управления. Изменение t_j^α , на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, вызывает следующие отклонения фазовых координат в конечный момент времени t_k для кусочно-постоянного управления $u^p(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = t_j^\alpha$, $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ и принимают значения $u_j^p(t) = M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} = M_j S_j(p)$, $t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}]$, $p = \overline{1, r_j}$:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \int_{t_j^\alpha}^{t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) d\tau, \quad (10.29)$$

где p и α связаны соотношением (10.15).

Если Δt_j^α достаточно малы (а для выполнения этого условия и вводится параметр ξ), то получаем приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю Δt_j^α

$$\Delta \tilde{x}(t_k) \cong \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi(t_k, t_j^\alpha) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha. \quad (10.30)$$

10.7. Уравнение баланса отклонений. Отклонения фазовых координат, вызванные изменениями величин управляющих воздействий, должны быть скомпенсированы отклонениями фазовых координат, вызванными изменениями моментов переключений, т.е. справедливо уравнение баланса отклонений

$$\Delta \hat{x}(t_k) + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (10.31)$$

Подставив в (10.31) выражения (10.28) и (10.30) и учитывая невырожденность матрицы $\Phi(t_k, t_0)$, получаем систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \Delta t_j^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \times \\ \times \xi \left[M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (10.32)$$

Число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ в (10.32) может быть больше числа уравнений, однако только n из них являются независимыми переменными. Выше отмечалось, что с помощью сопряженной системы заданием n моментов переключений однозначно задаются все остальные моменты переключений на интервале $[t_0, t_k]$. Поэтому для нахождения оптимального управления необходимо перейти к определению расположения моментов переключений с помощью сопряженной системы. С этой целью установим связь между отклонениями Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$; $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ моментов переключений и отклонениями $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ начальных условий сопряженной системы. Число последних равно n . В результате получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными.

10.8. Связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий сопряженной системы. Для j -й компоненты вектора управления функция переключений принимает значения (± 1) в моменты $t = t_j^\alpha$, т.е. справедливо уравнение (10.23).

Изменим $\psi(t_0)$ на $\Delta \psi(t_0)$. Это порождает изменение t_j^α на Δt_j^α :

$$\begin{aligned} [B_j(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha + \Delta t_j^\alpha, t_0)]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} = 0, \\ j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (10.33)$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\begin{aligned} \left[B_j(t_j^\alpha) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{dB_j(t_j^\alpha)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) + \overline{\Delta t_j^\alpha} \frac{d\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)}{dt} \right]^* (\psi(t_0) + \Delta \psi(t_0)) - \\ - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} \cong 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Здесь $\overline{\Delta t_j^\alpha}$ – диагональная матрица $(n \times n)$ с элементом Δt_j^α на диагонали. Запишем (10.34), учитывая (10.22), в следующем виде:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha -$$

$$\begin{aligned}
& -[B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 + \\
& \quad + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) + [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - \\
& - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) \Delta t_j^\alpha - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) (\Delta t_j^\alpha)^2 - \\
& \quad - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} \cong 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.
\end{aligned}$$

Пренебрегая величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (10.23), получим приближенное уравнение, связывающее Δt_j^α и $\Delta \psi(t_0)$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \right\} \Delta t_j^\alpha + \\
& + [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) \cong 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (10.35)
\end{aligned}$$

Из (10.35) находим приближенное соотношение, посредством которого каждое Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$ выражается через $\Delta \psi(t_0)$:

$$\begin{aligned}
\Delta t_j^\alpha \cong & \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Big\}^{-1} \times \quad (10.36) \\
& \times [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}.
\end{aligned}$$

10.9. Основное уравнение. Подставив (10.36) в (10.32), получим основную систему из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) B_j(t_j^\alpha) (-1)^{\alpha-1} M_j S_j(p) \left\{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - \right. \\
& \left. - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \right\} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \Big\}^{-1} [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) + \quad (10.37) \\
& + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi \left[M_j \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0.
\end{aligned}$$

Решив (10.37), находим $\Delta \psi(t_0)$. По формуле (10.36) вычисляем отклонения Δt_j^α , на которые следует изменить каждый из моментов переключений, чтобы уменьшить различие между квазиоптимальным и оптимальным управлениями. Приближенность полученных соотношений приводит к итерационной процедуре нахождения оптимального управления. Рассогласования Δu_j^p , $j = \overline{1, m}; p = \overline{1, r_j}$ могут быть значительными и для их компенсации необходимы большие отклонения Δt_j^α , $j = \overline{1, m}; \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. В силу линеаризации и приближенности полученных соотношений возможна расходимость вычислительного процесса. Оценить "малы" или "велики" отклонения $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$ и гарантируется ли сходимость вычислительного процесса весьма сложно. Более просто судить о сходимости вычислительной процедуры по величине максимального отклонения моментов переключений. Если $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| \leq \gamma(t_k - t_0)$, где $0 < \gamma \ll 1$ и задано, то отклонения моментов переключений достаточно малы и обеспечивается сходимость вычислительного процесса. В противном случае

компенсируем отклонения Δu_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$ не сразу полностью, а по частям, беря лишь ξ -ю часть отклонений Δu_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, полагая

$$\xi = \frac{\gamma(t_k - t_0)}{\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha|}. \tag{10.38}$$

Таким образом, если окажется, что $\max_{j, \alpha} |\Delta t_j^\alpha| > \gamma(t_k - t_0)$, то ограничиваем максимальное отклонение предельным значением, т.е. принимаем $\max_{j, \alpha} |\Delta \tilde{t}_j^\alpha| = \gamma(t_k - t_0)$, а остальные отклонения пропорционально уменьшаем в ξ раз, т.е. полагаем

$$\Delta \tilde{t}_j^\alpha = \xi \Delta t_j^\alpha, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}, \quad \Delta \tilde{\psi}(t_0) = \xi \Delta \psi(t_0).$$

Здесь $\Delta \psi(t_0)$, Δt_j^α - вычисленные значения из уравнений (10.37) и (10.36) соответственно; $\Delta \tilde{\psi}(t_0)$, $\Delta \tilde{t}_j^\alpha$ - значения отклонений, которые реально принимаются для последующих расчетов. Такой подход обеспечивает сходимость итерационного вычислительного процесса для любых отклонений Δu_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j}$, т.е. обеспечивает сходимость из области управляемости для любых начальных условий.

10.10. Моделирование и численные расчеты. Представляет интерес сравнение результатов вычислений по предлагаемому алгоритму с результатами вычислений по вышерассмотренному алгоритму для одних и тех же начальных условий и начальных приближений. В табл. 14 приведены результаты вычислений приближенного решения задачи минимизации расхода ресурсов при переводе системы (6.1) из начального состояния $x(t_0) = (0, 0, 1, 0)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за время $T = 3$. Начальные точки переключений управления прежние и имеют следующие значения: $t_1^0 = 0.11592$; $t_2^0 = 1.59687$; $t_3^0 = 1.69424$; $t_4^0 = 2.41722$; $t_5^0 = 2.48056$; $t_6^0 = 2.97654$. Погрешность перевода системы (6.1) в конечную точку (начало координат) с этими моментами переключений для управления, принимающего на ненулевых интервалах предельные значения $u = \pm M$, составляет $\|x(t_k)\| = 0.422866$, что свидетельствует о задании хорошего начального приближения. Начальные условия сопряженной системы вначале определяются по первым четырем моментам переключений и имеют следующие значения: $\psi_1(0) = -0.989073$; $\psi_2(0) = -1.709174$; $\psi_3(0) = -1.052279$; $\psi_4(0) = -0.269059$. Затем вычисляются так: $\psi^{s+1}(0) = \psi^s(0) + \Delta \psi^s(0)$.

Т а б л и ц а 14.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
0	0.11592	1.59687	1.69424	2.41722	2.48056	2.97654	0.422866
1	0.143764	1.886277	1.931184	2.632754	2.686349	2.974346	0.279368
2	0.155434	1.897537	1.948945	2.637629	2.690547	2.974081	0.107229
3	0.155434	1.896020	1.947556	2.636988	2.689992	2.974089	0.000976
4	0.155434	1.896021	1.947558	2.636989	2.689993	2.974089	0.000006

Расход ресурсов при приближенном решении составляет $J = 0.285886$. Расход ресурсов при оптимальном управлении равен $J = 0.252722$, что на 11,6 процента меньше, чем при приближенном решении.

Следует отметить, что найдено точно такое же допустимое управление (см. табл. 5) с точно таким же расходом ресурсов. В табл. 15 приведены результаты вычислений допустимого (квазиоптимального) управления. Приведены значения амплитуд квазиоптимального управления на ненулевых интервалах управления: $u_{kv}^{(1)}$ $t \in [t_0, t_1]$; $u_{kv}^{(2)}$ $t \in [t_2, t_3]$; $u_{kv}^{(3)}$ $t \in [t_4, t_5]$; $u_{kv}^{(4)}$ $t \in [t_6, t_k]$.

Т а б л и ц а 15.

s	$u_{kv}^{(1)}$	$u_{kv}^{(2)}$	$u_{kv}^{(3)}$	$u_{kv}^{(4)}$
1	-7.19	2.50	-2.39	2.12
2	-5.42	5.60	-4.74	4.82
3	-5.00	5.02	-5.02	5.02
4	-5.00	5.00	-5.00	5.00

В табл. 16 приведены результаты вычислений приближенного решения задачи минимизации расхода ресурсов при переводе системы (6.1) из другого начального состояния $x(t_0) = (1, 1, 1, 1)$ в начало координат $x(t_k) = 0$ за время $T = 4$. Начальные точки переключений управления имеют следующие значения: $t_1^0 = 0.19140$; $t_2^0 = 2.13608$; $t_3^0 = 2.30535$; $t_4^0 = 3.24339$; $t_5^0 = 3.34042$; $t_6^0 = 3.96050$. Погрешность перевода системы (6.1) в конечную точку (начало координат) с этими моментами переключений для управления, принимающего на ненулевых интервалах предельные значения $u = \pm M$, составляет $\|x(t_k)\| = 0.752560$, что свидетельствует о задании хорошего начального приближения. Начальное условие сопряженной системы вначале определяются по первым четырем моментам переключений и имеет следующее значения: $\psi_1(0) = -0.575987$; $\psi_2(0) = -1.177888$; $\psi_3(0) = -0.813445$; $\psi_4(0) = -0.249128$. Затем вычисляется так: $\psi^{s+1}(0) = \psi^s(0) + \Delta\psi^s(0)$. В конце вычислительного процесса имеем: $\psi_1(0) = -0.585410$; $\psi_2(0) = -1.190626$; $\psi_3(0) = -0.820092$; $\psi_4(0) = -0.249943$. , в то время как оптимальное значение, доставляющее минимум расхода ресурсов, следующее: $\psi_1(0) = -0.584109$; $\psi_2(0) = -1.195224$; $\psi_3(0) = -0.825395$; $\psi_4(0) = -0.254199$.

Т а б л и ц а 16.

s	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	$\ x(t_k)\ $
1	0.386960	2.084115	2.227929	3.098059	3.155743	3.986952	1.216352
2	0.360809	2.122769	2.264654	3.168749	3.232292	3.978360	0.270804
3	0.359970	2.124006	2.265622	3.171103	3.234934	3.977799	0.012141
4	0.359969	2.124009	2.265624	3.171108	3.234939	3.977798	0.000034
5	0.359969	2.124009	2.265625	3.171108	3.234939	3.977799	0.000015

Моменты переключений полученного приближенного решения совпадают с моментами переключений допустимого управления с предельными значениями управления и дают следующее значение расхода ресурсов (значение функционала): $J_{\text{пр}} = 0.587619$. Расход ресурсов при оптимальном управлении $J_{\text{орт}} = 0.556103$, что лишь на 5.36 процента меньше, чем при приближенном решении.

Следует подчеркнуть, что нахождение оптимального управления сопряжено со значительными вычислительными затратами, так как требует вычисления всех моментов переключений с помощью функции переключений, требует ограничения максимальной величины допустимого изменения моментов переключений и значительного числа итераций. Нахождение приближенного решения не требует вычисления точного значения начального условия сопряженной системы, введения ограничения на допустимую величину изменения моментов переключений и достаточно, как правило, трех-четырех простых итераций.

В табл. 17 приведены результаты вычислений допустимого (квазиоптимального) управления. Приведены значения амплитуд квазиоптимального управления на ненулевых интервалах управления: $u_{kv}^{(1)} t \in [t_0, t_1]$; $u_{kv}^{(2)} t \in [t_2, t_3]$; $u_{kv}^{(3)} t \in [t_4, t_5]$; $u_{kv}^{(4)} t \in [t_6, t_k]$.

Т а б л и ц а 17.

s	$u_{kv}^{(1)}$	$u_{kv}^{(2)}$	$u_{kv}^{(3)}$	$u_{kv}^{(4)}$
1	-9.62	3.62	-2.99	3.00
2	-4.77	5.17	-5.57	7.60
3	-4.99	5.00	-5.02	5.11
4	-5.00	5.00	-5.00	5.00
5	-5.00	5.00	-5.00	5.00

Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление (допустимое управление) переводит линейную систему в требуемое конечное состояние (начало координат), удовлетворяет ограничению на управление и незначительно превышает расход ресурсов по сравнению с оптимальным управлением.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваемый метод вычисления оптимального по расходу ресурсов управления основан на оригинальном способе формирования финитного управления по начальным условиям управляемой системы. Финитное управление обладает рядом важных свойств, которые используются для нахождения оптимального управления. Во-первых, финитное управление переводит управляемую систему в требуемое конечное состояние (начало координат). Во-вторых, финитное управление формируется с использованием сопряженной системы, т.е. с использованием первого необходимого условия оптимальности в классическом вариационном исчислении (уравнения Эйлера - Лагранжа). Поэтому структура

финитного управления позволяет определить структуру искомого оптимального управления: 1) определить знаки и величины управляющих воздействий для каждой компоненты вектора управления на первом и на каждом последующем интервале постоянства; 2) определить число $2(r_j - 1)$ моментов "включения" и "выключения" управления для каждой j -й компоненты; 3) задать "хорошее" начальное приближение $(t_j^{\alpha,0})$, используя моменты переключений (ν_j^p) финитного управления, чем достигается быстрая сходимость и малая вычислительная трудоемкость метода. Следует также отметить, что финитное управление реализуется весьма просто, что обеспечивает малые вычислительные затраты.

В постановке задачи предполагается, что заданное время больше либо равно времени оптимального по быстродействию управления, так как только в этом случае существует решение задачи на минимум расхода ресурсов. Однако на практике заранее не известно, выполнено ли это необходимое условие, так как его выполнение означает, что имеется решение задачи оптимального быстродействия для заданных начальных условий. Формирование финитного управления позволяет и одновременно проверить выполнение этого необходимого условия. Если параметр $\eta > 1$, то решения задачи не существует. Если $\eta \leq 1$, то решение существует.

Основные вычислительные затраты вызваны интегрированием систем дифференциальных уравнений. Поэтому трудоемкость вычислительных методов принято оценивать по затратам на интегрирование (числу решений задач Коши). В рассматриваемом методе нет необходимости в многократном решении задач Коши, которое ведет к большим вычислительным затратам. Достаточно решить задачу Коши один раз и далее интегрировать системы дифференциальных уравнений лишь на перемещения моментов переключений. Затраты на интегрирование в этом случае определяются (при монотонной сходимости, которая достигается при малых отклонениях) суммарными отклонениями первоначально заданных моментов переключений (начальных приближений) от точных значений моментов переключений и не зависят от количества итераций.

Дано обобщение метода вычисления оптимального по расходу ресурсов управления на динамические системы с возмущениями. Возмущения предполагаются непрерывными, ограниченными и известными функциями. Если возмущения, действующие на объект, заранее не известны, то приведен алгоритм периодического вычисления их средних значений (за время между измерениями фазовых координат) в процессе сопровождения фазовой траектории движения объекта. В реальном времени формируется позиционно-программное управление, минимизирующее расход ресурсов.

Для линейных систем с ограниченным управлением и фиксированным временем перевода предложен простой метод приближенного решения задачи на минимум расхода ресурсов. Для максимальных значений $|x_i(t_0)|_{\max}$, $i = \overline{1, n}$ из ограниченной области начальных условий D , принадлежащей области управляемости V , находятся оптимальные по расходу ресурсов управления. Формируются n "осевых" квазиоптимальных управлений: моменты переключений

(для каждой компоненты) принимаются равными моментам переключений оптимального управления для граничной точки на i -й оси, а величина управления пропорциональна начальному условию $x_i(t_0)$, взятому с некоторым весом N_{ij} . Весовые коэффициенты для каждой компоненты квазиоптимального управления различны и находятся из простого условия $N_{ij}|x_i(t_0)|_{\max} = M_j$, $j = \overline{1, m}$. Доказана независимость моментов переключений от начальных условий и их постоянство для систем с постоянными параметрами, что обеспечивает простую техническую реализацию квазиоптимального управления. В силу справедливости принципа суперпозиции для линейных систем суммарное управление по всем осям переводит линейную систему из любой начальной точки фазового пространства, принадлежащей области управляемости, в начало координат за заданное время T и приближенно минимизирует расход ресурсов. Получены некоторые оценки близости, из которых следует, что с увеличением порядка управляемой системы расход ресурсов увеличивается. При этом различие между квазиоптимальным и оптимальным управлениями уменьшается по мере увеличения заданного времени, начальных условий и порядка управляемой системы. Чем выше порядок управляемой системы, тем эффективнее применение квазиоптимального управления. А именно для систем высокого порядка нахождение оптимального управления сопряжено с наибольшими трудностями и требует большого объема вычислений. Это приводит к значительному запаздыванию в управлении, которое ухудшает качество управления и может вообще привести к потере работоспособности системы управления. Запаздывание делает невозможным оптимальное управление в реальном времени быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами. Простота реализации квазиоптимального управления позволяет в реальном времени управлять быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами.

Найдена область начальных условий, для которой не нарушаются ограничения на управления. Предложен простой способ разбиения области начальных условий совокупностью гиперплоскостей на подобласти со своими значениями моментов переключений и весовых коэффициентов в каждой подобласти. Показано, что разбиение является эффективным способом приближения квазиоптимального управления к оптимальному. Деление области на k подобластей приводит к уменьшению различия между квазиоптимальным и оптимальным управлениями более чем в k раз. Это позволяет оценить число необходимых разбиений для достижения требуемой близости квазиоптимального управления к оптимальному по расходу ресурсов управлению.

Полученное приближенное решение может быть использовано и в качестве хорошего начального приближения в итерационной процедуре вычисления оптимального по расходу ресурсов управления. Задание хорошего начального

приближения улучшает сходимость итерационного процесса, а главное, уменьшает число необходимых итераций и вычислительную трудоемкость итерационного метода. При задании *начального приближения* нет необходимости в выполнении ограничения на управление. Это позволяет сформировать квазиоптимальное управление с одинаковыми моментами переключений составляющих и получить более удобную форму начального приближения для итерационного процесса вычисления оптимального по расходу ресурсов управления.

Рассмотрен простой алгоритм формирования квазиоптимального по расходу ресурсов управления переводящего линейную систему из любого начального состояния в требуемое конечное состояние (начало координат). Квазиоптимальное управление используется в качестве начального приближения в итерационной процедуре вычисления оптимального по расходу ресурсов управления. Суть метода состоит в *постепенном* выравнивании амплитуд квазиоптимального управления до предельных значений и сведении последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному управлению путем соответствующего изменения моментов переключений управления. Получена система линейных алгебраических уравнений, приближенно связывающая отклонения начальных условий сопряженной системы с отклонениями амплитуд квазиоптимального управления от предельных значений. В результате задача нахождения оптимального по расходу ресурсов управления сводится к интегрированию дифференциальных уравнений на интервалах перемещения моментов переключений и к решению систем линейных алгебраических уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., *Математическая теория оптимальных процессов*, М.: Наука, 1976. 392 с.
- [2] Атанс М., Фалб П., *Оптимальное управление. М.: Машиностроение*, 1968.
- [3] Ragab, M.Z., *Time Fuel Optimal Decoupling Control Problem*, Adv.Model. Simul. **22**: 2 (1990), 1–16.
- [4] Redmond, J., Silverberg, L. Fuel, *Consumption in Optimal Control*, J.Guid. Control Dyn. **15**: 2 (1992), 424–430.
- [5] Singh, T., *Fuel/Time Optimal Control of the Benchmark Problem*, J.Guid. Control Dyn. **18**: 6 (1995), 1225–1231.
- [6] Sachs, G., Dinkelmann, M., *Reduction of Coolant Fuel Losses in Hypersonic Flight by Optimal Trajectory Control*, J. Guid. Control Dyn. **19**: 6 (1996), 1278–1284.
- [7] Иванов В.А., Кожевников С.А., *Одна задача синтеза оптимального по «расходу топлива» управления линейными объектами второго порядка с производными управления*, Известия РАН. Теория и системы управления, 4 (1996), 77–83.
- [8] Dewell, L.D., Speyer, J.L., *Fuel-Optimal Periodic Control and Regulation in Constrained Hypersonic Flight*, J.Guid. Control Dyn. **20**: 5 (1997), 923–932.
- [9] Liu, S.W., Singh, T., *Fuel/Time Optimal Control of Spacecraft Maneuvers*, J.Guid. Control Dyn. **20**: 2 (1997), 394–397.
- [10] Александров В.М., *Приближенное решение линейной задачи на минимум расхода ресурсов*, Ж. вычис. матем. и матем. физики, **39**: 3 (1999), 418–430.
- [11] Шевченко Г.В., *Метод нахождения оптимального по минимуму расхода ресурсов управления для объектов специального вида*, Автометрия, **42**: 2 (2006), 49–67.

- [12] Крылов И.А., Черноусько Ф.Л., *О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **2**: 6 (1962), 1132–1139.
- [13] Гиндес В.Б., *Один метод последовательных приближений для решения линейных задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **10**: 1 (1970), 216–223.
- [14] Федоренко Р.П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, М.: Наука, 1978.
- [15] Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б., *Вычислительные и приближенные методы оптимального управления*, Математический анализ. М.; **14** (1977), 101–166.
- [16] Любушин А.А., *О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **22**: 1 (1982), 30–35.
- [17] Грачев Н.И., Евтушенко Ю.Г., *Библиотека программ для решения задач оптимального управления*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., **19**: 2 (1979), 367–387.
- [18] Александров В.М., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Проблемы кибернетики, **41** (1984), 143–206.
- [19] Александров В.М., *Численный метод решения линейной задачи минимизации расхода ресурсов*, Сибирский журнал вычислительной математики, **12**: 3 (2009), 247–267.
- [20] Александров В.М., *Оптимальное по расходу ресурсов управление возмущенными динамическими системами*, Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **10**: 2 (2010), 3–24.
- [21] Александров В.М., *Оптимальное по быстродействию позиционно-программное управление линейными динамическими системами*, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 385–439.
- [22] Андреев Ю.Н., *Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными системами (обзор зарубежной литературы)*, Автоматика и телемеханика, **3** (1977), 5–50.
- [23] Смирнов Е.Я., *Некоторые задачи математической теории управления*, Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
- [24] Kalman, R.E., *Mathematical description of linear dynamical systems*, SIAM J. Control, **1** (1963), 152–192.
- [25] Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, М.:Наука, 1966.

Владимир Михайлович Александров
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: vladalex@math.nsc.ru