S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 250–254 (2010) УДК 517.93
Краткие сообщения MSC 34C + 34D

АСИМПТОТИЧЕСКИ МЕДЛЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. В. ИВАНОВ

Abstract. Using the concept of an asymptotically slow functions we give a full description of the intrinsic properties of asymptotically stable motions of smooth autonomous systems.

Keywords: asymptotically slow functions, Poisson free motions, attracted motions, Lyapunov stability, asymptotically stable motions

Наша задача в этой заметке — дать полное описание *внутренних* свойств асимптотически устойчивых движений гладких автономных систем. Точнее говоря, вопрос ставится так. Пусть на неотрицательной вещественной полупрямой задана функция, принимающая значения в некотором конечномерном пространстве. Мы хотим выяснить, какими свойствами она должна обладать, чтобы в какой-либо области этого пространства нашлась гладкая автономная система, для которой наша функция служила бы асимптотически устойчивым ее решением. Исчерпывающий ответ на этот вопрос опирается на предлагаемое здесь понятие асимптотически медленной функции.

1. Пусть D означает открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим гладкое отображение $f : D \to \mathbb{R}^n$. Систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x). \qquad (*)$$

мы будем называть просто *автономной системой*. Здесь и в дальнейшем под «гладкостью» нам удобно понимать гладкость бесконечного порядка. Говоря о решении $x = x(t)$ нашей системы, мы всегда предполагаем, что оно определено для всех достаточно малых значений $t \geq 0$. Если же решение *может* быть продолжено на всю полупрямую $t \geq 0$, учитывая единственность продолжения,

---

Ivanov, V. V., Asymptotically slow motions of autonomous systems.

Представлена В. М. Гордиенко 3 сентября 2010 г., опубликована 8 сентября 2010 г.

гарантированную гладкостью системы, мы будем позволять себе говорить о нем так, как будто оно уже *определено* для всех $t \geq 0$.

Пусть функция $x = x(t)$ представляет собой решение системы $(*)$, определенное для всех $t \geq 0$. Точку $x_* \in D$ называют его *ω-предельной точкой*, если найдется такая последовательность $t_k \geq 0$, что $t_k \to +\infty$ и $x(t_k) \to x_*$ при $k \to \infty$. Если на траектории, а точнее среди точек $x(t)$, где $t \geq 0$, нет ω-предельных, о решении иногда говорят, что оно неустойчиво в смысле Пуассона. Мы будем называть такое решение *свободным по Пуассону*.

Дифференцируемую функцию $x = x(t)$, определенную для всех $t \geq 0$ и принимающую значения в пространстве $\mathbb{R}^n$, назовем *регулярной*, если она взаимно однозначна, обратное к ней отображение непрерывно, а ее производная $\dot{x}(t)$ в каждой точке $t \geq 0$ отлична от нуля.

Предложение 1. *Решение автономной системы свободно по Пуассону в том и только том случае, если оно регулярно.*

Доказательство. Свободное по Пуассону решение автономной системы не может быть ни стационарным, ни периодическим. Это значит, благодаря «теореме единственности», что оно представляет собой взаимно однозначную функцию с отличной от нуля производной. Что касается обратного к этой функции отображения, то его непрерывность, очевидно, эквивалентна отсутствию у решения ω-предельных точек на его траектории. Предложение доказано.

Будем называть *движением* всякую функцию, определенную на неотрицательной полупрямой и принимающую значения в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если такая функция служит решением какой-нибудь автономной системы, действующей в некоторой области этого пространства, мы скажем, что движение «реализуется как решение автономной системы».

Теорема 1. *Гладкое движение реализуемо в виде свободного по Пуассону решения автономной системы тогда и только тогда, когда оно регулярно.*

Необходимость указанного здесь условия регулярности уже установлена в приведенном только что предложении. Для доказательства его достаточности требуется определенный анализ дифференциально-геометрических свойств траектории регулярного движения, который мы вынуждены здесь опустить. Но заметим, что он приводит к выводу о возможности построения специальной трубчатой окрестности этой траектории, внутри которой можно организовать движение так, чтобы все точки от одного «ортогонального» ее сечения к другому проходили за общее для них время. Эта особенность нашей конструкции позволяет описать в терминах «внутренних» свойств и другие интересующие нас классы движений автономных систем.

2. Пусть решение $x = x(t)$ системы $(*)$ снова определено при всех $t \geq 0$. Его считают *устойчивым по Ляпунову*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что любое решение системы $y = y(t)$, для которого $|y(0) - x(0)| < \delta$, определено и удовлетворяет оценке $|y(t) - x(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geq 0$.

Предложение 2. *Каждое решение автономной системы, устойчивое в смысле Ляпунова, равномерно непрерывно.*

Доказательство. Пусть речь идет о решении $x = x(t)$ системы $(*)$, определенном при всех $t \geq 0$. В силу автономности системы для всякого $s \geq 0$ функция $x(t + s)$ также служит ее решением, но «начинающимся» при $t = 0$ в точке $x(s)$. Если $\varepsilon > 0$, то мы найдем для него то самое $\delta > 0$, о котором говорится в определении устойчивости по Ляпунову. Вслед за ним найдем такое $\sigma > 0$, что $|x(s) - x(0)| < \delta$, если $0 \le s < \sigma$. Тогда для любого такого s и для всех $t \ge 0$ выполняется неравенство $|x(t+s) - x(t)| < \varepsilon$. Предложение доказано.

Теорема 2. *Регулярное движение может быть реализовано как устойчивое по Ляпунову решение автономной системы в том и только том случае, когда оно равномерно непрерывно.*

Необходимость условия равномерной непрерывности доказана в предыдущем предложении. Что касается регулярности, то она, разумеется, необязательна для устойчивого по Ляпунову движения. Но если движение, все же, свободно по Пуассону, применима конструкция, о которой говорилось при обсуждении первой теоремы. Благодаря упомянутой при этом «синхронности» системы, включающей наше движение, оно оказывается устойчивым в смысле Ляпунова каждый раз, как только оно равномерно непрерывно.

3. Функцию $x = x(t)$, определенную для всех $t \ge 0$ и принимающую значения в пространстве $\mathbb{R}^n$, назовем *асимптотически медленной*, если

$$\lim_{t\to+\infty}[x(t+s) - x(t)] = 0,$$

какой бы ни взять сдвиг $s \ge 0$. Первое наше замечание об этих функциях очевидно и полезно в равной степени.

Предложение 3. *Если ограничиться достаточно малыми сдвигами, мы получим эквивалентное определение асимптотически медленной функции.*

Решение $x = x(t)$ автономной системы $(*)$, определенное для всех $t \ge 0$, назовем *притягивающим*, если всякое решение $y = y(t)$ той же системы, которое начинается в точке $y(0)$, расположенной недалеко от $x(0)$, также определено для всех $t \ge 0$ и $y(t) - x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Предложение 4. *Каждое притягивающее решение автономной системы представляет собой асимптотически медленную функцию.*

Доказательство. Пусть δ означает «радиус притяжения» решения $x = x(t)$ системы $(*)$. Повторяя знакомые нам аргументы, еще раз подчеркнем, что функция $y(t) = x(t+s)$, каким бы ни было $s \ge 0$, также служит решением этой системы. Оно «начинается» при $t = 0$ в точке $y(0) = x(s)$, которая находится на расстоянии от $x(0)$ меньшем δ, если s достаточно мало, а тогда $x(t+s) - x(t) = y(t) - x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Согласно предыдущему предложению этого достаточно, чтобы решение $x(t)$ входило в класс асимптотически медленных функций. Предложение доказано.

Предложение 5. *Каждая ω-предельная точка асимптотически медленного решения автономной системы служит точкой покоя этой системы.*

Доказательство. Пусть x_* означает ω-предельную точку асимптотически медленного решения $x = x(t)$ системы $(*)$, а числа $t_k \ge 0$ таковы, что $t_k \to +\infty$ и $x(t_k) \to x_*$ при $k \to \infty$. Рассмотрим решение $x_*(s)$ той же системы, равное x_* при $s = 0$. Оно определено по крайней мере для всех достаточно малых значений $s \ge 0$. Для каждого номера k и всех $s \ge 0$ положим также $x_k(s) := x(t_k+s)$. Таким образом, если $k \to \infty$, то $x(t_k + s) - x(t_k) \to 0$, а значит, $x_k(s) \to x_*$. Но функция $x_k(s)$ в силу автономности системы $(*)$ служит ее решением, причем $x_k(0) = x(t_k)$. Поскольку при этом $x(t_k) \to x_*$, то $x_k(s) \to x_*(s)$ для всякого s, для которого решение $x_*(s)$ определено. Итак, $x_*(s) = x_*$ для всех таких s, так что x_* — точка покоя системы. Предложение доказано.

Это замечательное утверждение фактически содержится в работе [1], где говорится о более специальных движениях, но на самом деле их специфика не ипользуется в доказательстве в полной мере. Теперь мы видим, что если какая-то ω-предельная точка асимптотически медленного движения системы попадает на его траекторию, на самом деле «движения» нет.

Предложение 6. *Если асимптотически медленное решение автономной системы не сводится к стационарному, оно свободно по Пуассону.*

Устойчивое по Ляпунову притягивающее решение, как известно, называют *асимптотически устойчивым.* Оказывается, если ограничить фазовое пространство системы до траектории решения, то притягивающее решение, как ни вызывающе это звучит, автоматически будет устойчивым по Ляпунову, а значит, асимптотически устойчивым. Фактически то же самое, но только в терминах теории функций и немного полнее, выражает

Предложение 7. *Если асимптотически медленная функция непрерывна, она и равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть асимптотически медленная функция $x(t)$, где $t \geq 0$, непрерывна. Фиксируем число $\varepsilon > 0$ и для каждого номера $k \geq 1$ составим множество F_k из тех $s > 0$, для которых $|x(t+s)-x(t)| \leq \varepsilon/2$ всякий раз, когда $t \geq k$. Очевидно, эти множества замкнуты относительно полуоси $(0, +\infty)$, а их объединение совпадает с ней. По теореме Бэра о категориях какое-то из множеств F_k имеет внутреннюю точку, так что содержит в себе все числа s из некоторого интервала $s_0 - \delta < s < s_0 + \delta$, где $s_0 > 0$ и $0 < \delta < s_0$.

Возьмем теперь два числа $t', t'' \geq k + s_0$, для которых $|t'' - t'| < \delta$. Запишем t' в виде $t + s_0$. Тогда $t \geq k$ и $t'' = t + s$, где $|s - s_0| < \delta$. Таким образом, $|x(t'') - x(t)| \leq \varepsilon/2$ и $|x(t') - x(t)| \leq \varepsilon/2$, откуда $|x(t'') - x(t')| \leq \varepsilon$. Если нужно, легко уменьшить δ настолько, что последнее неравенство будет верно уже для всех $t', t'' \geq 0$, для которых $|t'' - t'|$ меньше нового δ. Предложение доказано.

Теорема 3. *Гладкое движение, отличное от стационарного, может быть притягивающим решением автономной системы тогда и только тогда, когда оно представляет собой регулярную и асимптотически медленную функцию. В этом же и только в этом случае движение может быть реализовано как асимптотически устойчивое решение подходящей автономной системы.*

Например, если движение регулярно и его скорость стремится к нулю, оно может служить асимптотически устойчивым решением автономной системы. Можно надеяться, что последняя теорема уже естественна для читателя.

Автор признателен Е. П. Волокитину и В. М. Чересизу за их активный и вдохновляющий интерес к его случайному исследованию. Работа выполнена в рамках междисциплинарного интеграционного проекта №107, поддержанного Сибирским отделением Российской академии наук.

Список литературы

[1] О. В. Дружинина, *Методы анализа устойчивости и динамической прочности траекторий нелинейных дифференциальных систем*, 2008, ВЦ РАН, Москва, 200 с.

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru