S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 255–274 (2010) УДК 517.51
MSC 42A30

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК НАИЛУЧШЕГО M–ЧЛЕННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССА БЕСОВА

Г. А. АКИШЕВ

Abstract. The anisotropic Lebesgue space of periodic functions is considered in this paper. The exact estimate of the $M-$ term of approximation function O.V. Besov's classes in the space Lebesgue with anisotropic metric is obtained in the paper.

Keywords: Lebesgue space, Besov's classes, anisotropic metric

В статье установлен точный порядок наилучшего M-членного приближения класса Бесова в пространстве Лебега со смешанной нормой.

Пусть $\bar{x} = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$, $I^m = [0, 2\pi)^m$, $m \in \mathbb{N}-$ множество натуральных чисел. Через $L_{\bar{p}}(\mathbb{R}^m)$ обозначим пространство измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$ определенных на $\mathbb{R}^m$, имеющих 2π – период по каждой переменной для которых

$$\|f\|_{\bar{p}} = \left[\int_0^{2\pi}\left[\cdots\left[\int_0^{2\pi}|f(\bar{x})|^{p_1}dx_1\right]^{\frac{p_2}{p_1}}\cdots\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}dx_m\right]^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$ (см [1],стр. 128, [2], стр. 54).

$\overset{\circ}{L}_{\overline{p}}(I^m)$ - множество всех функций $f \in L_{\overline{p}}(I^m)$ таких, что

$$\int_0^{2\pi} f(\overline{x})\,dx_j = 0, \quad \forall j = 1, ..., m.$$

Akishev, G.A., On the exact estimations of the best $M-$terms approximation of the Besov class.

Поступила 20 декабря 2009 г., опубликована 14 сентября 2010 г.

Числовая последовательность $\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m} \in l_{\bar{p}}$ – если

$$\|\{a_{\bar{n}}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}\|_{l_{\bar{p}}} = \left\{\sum_{n_m=-\infty}^{\infty}\left[...\left\{\sum_{n_1=-\infty}^{\infty}|a_{\bar{n}}|^{p_1}\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}...\right]^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}\right\}^{\frac{1}{p_m}} < +\infty,$$

где $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $1 \le p_j < +\infty$, $j = 1, ..., m$.

Пусть даны векторы $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $1 \le \theta_j, p_j < +\infty$, $r_j > 0$, $j = 1, ..., m$. . Рассмотрим класс Бесова (см. [2])

$$B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}} = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}_{\overline{p}}(\mathbb{R}^m) : \|f\|_{B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}} = \|f\|_{\overline{p}} + \left\| \left\{ 2^{\langle \overline{s},\overline{r}\rangle} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\overline{s}\in\mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\overline{\theta}}} \le 1 \right\}.$$

Здесь и в дальнейшем

$$\delta_{\overline{s}}(f, \overline{x}) = \sum_{\overline{n}\in\rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n},\overline{x}\rangle},$$

где $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j x_j$, $\rho(\bar{s}) = \{\bar{k} = (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}, j = 1, ..., m\}$, $a_{\bar{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \bar{n},\bar{x}\rangle}\}_{\bar{n}\in\mathbb{Z}^m}$.

Пусть X, Y – нормированные пространства $2\pi-$ периодических функций многих переменных. Для функции $f \in X$ наилучшим M – членным приближением называется величина (см. [3],[4],[5])

$$e_M(f)_X = \inf_{\bar{k}^j, b_j} \|f - \sum_{j=1}^{M} b_j e^{i\langle \bar{k}^j,\bar{x}\rangle}\|_X,$$

где $\{\bar{k}^j\}_{j=1}^{M}$ – система векторов $\bar{k}^j = (k^j_1, ..., k^j_m)$ с целочисленными координатами, b_j – произвольные коэффициенты.

Если $F \subset X$ – некоторый функциональный класс, то положим

$$e_M(F)_Y = \sup_{f\in F} e_M(f)_Y.$$

В случае $X = L_2$ величина $e_M(f)_{L_2}$ для функции одной переменной впервые была введена С. Б. Стечкиным [3] при формулировке критетрия абсолютной сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам. Оценки порядка величины $e_M(F)_X$ исследовали Р.С. Исмагилов [4], В.Е. Майоров [5] при $X = L_p$ (одномерный случай), Э.С. Белинский [6] многомерный случай когда $Y = L_q(\mathbb{R}^m), X = L_p(\mathbb{R}^m), F = W^r_p$ В.Н. Темляков [7] $Y = L_q(\mathbb{R}^m), F = H^r_p$, А.С. Романюк [8], [9], Р. Девор и В.Н. Темляков [10], В.Н. Темляков [11] при $Y = L_q(\mathbb{R}^m), F = B^r_{p,\theta}$, Б.С. Кашин, В.Н. Темляков [12] $(X = L_1)$. Отметим, что в случае $X = L_2$ оценка величины $e_M(f)_X$ по ортонормированным системам установил Б.С. Кашин [13]. Точные порядки $e_M(F)_X$ для классов Никольского – Бесова обобщенной гладкости получил Д.Б. Базарханов [14]. Результаты последних лет в этом направлении приведены в [15], [16].

В частности известна

Теорема (А.С. Романюк [8]). Пусть $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\quad 0 < r_1 = ... = r_\nu < r_{\nu+1} \le ... \le r_m$, $\quad 1 \le p \le 2 < q < +\infty$, $1 \le \theta \le +\infty$. Тогда

$$1) \quad e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\left(r_1+\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)} (\log M)^{(\nu-1)\left(r_1-\frac{1}{p}+\frac{1}{2}\right)+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta}\right)_+}$$

если $r_1 > \frac{1}{p}$.

2) Если $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} < r_1 < \frac{1}{p}$, то

$$e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\frac{q}{2}\left(r_1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}(\log M)^{(q-1)(\nu-1)\quad r_1-\frac{1}{p}+\frac{q'}{q}\frac{1}{\theta'}\quad +}.$$

3) Если $r_1 = \frac{1}{p}$, то

$$e_M\left(B^{\overline{r}}_{p,\theta}\right)_q \asymp M^{-\frac{1}{2}}\left(\log^{\nu} M\right)^{\frac{1}{\theta'}},$$

где $a_+ = \max\{a, 0\}$, $\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta'} = 1$.

Здесь и в дальнейшем $\log M$ – логарифм с основанием 2.

Цель настоящей статьи изучение порядка наилучшего M – членного приближения класса Бесова $B^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta}}$ в пространстве Лебега со смешанной нормой.

Сначала приведем некоторые обозначения и вспомогательные утверждения. Положим

$$Y^m(n, \bar{\gamma}) = \{\bar{s} = (s_1, ..., s_m) \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \bar{s}, \bar{\gamma}\rangle \geq n\},$$

Через $C(p, q, r, y)$ обозначим положительные величины зависящие от указанных в скобках параметров, вообще говоря, различные в разных формулах. Для положительных величин $A(y), B(y)$ запись $A\,(y) \asymp B\,(y)$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2 такие, что $C_1 \cdot A\,(y) \leq B\,(y) \leq C_2 \cdot A\,(y)$.

Лемма 1. *(см.[17], лемма 2). Пусть даны число* $\alpha \in (0, +\infty)$ *и* $\overline{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\overline{\gamma}' = \left(\gamma_1', ..., \gamma_m'\right)$, $\overline{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$, $\theta_j \in [1, +\infty)$, $j = 1, ..., m$, $1 = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu < \gamma_{\nu+1} \leq ... \leq \gamma_m$, $1 = \gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1, ..., \nu$ *и* $1 < \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu + 1, ..., m$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\left\|\left\{2^{-\alpha\langle\overline{s},\overline{\gamma}\rangle}\right\}_{\overline{s}\in Y^m\left(\overline{\gamma}',n\right)}\right\|_{l_{\overline{\theta}}} \asymp 2^{-n\alpha} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Замечание 1. *В случае* $\theta_1 = ... = \theta_m$ *лемма 1 доказана В.Н. Темляковым [7].*

Пусть Ω_M – множество, содержащее не более чем M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами, а $P(\Omega_M, \bar{x})$ – произвольный тригонометрический полином, состоящий из гармоник с "номерами" из Ω_M. Справедлива

Лемма 2. *Пусть* $2 < q_j < +\infty, j = 1, ..., m$. *Тогда для всякого тригонометрического полинома* $P(\Omega_N)$ *и для любого натурального числа* $M < N$ *найдется тригонометрический полином* $P(\Omega_M)$, *для которого имеет место оценка*

$$\|P(\Omega_N) - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \leq C_1(NM^{-1})^{\frac{1}{2}}\|P(\Omega_N)\|_2,$$

причем $\Omega_M \subset \Omega_N$.

Доказательство. Пусть $q_0 = \max\{q_1, ..., q_m\}$. Тогда $2 < q_0 < +\infty$ и

$$\|f\|_{\bar{q}} \leq C\|f\|_{q_0}$$

для функции $f \in L_{q_0}(I^m)$. Поэтому утверждение леммы 2 следует из леммы 2.3 [6].

Лемма 3. *([18], лемма 3). Пусть* $\alpha > 0, \kappa > 0$, $0 < \theta_j < +\infty, j = 1, ..., m$, $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', ..., \gamma_m'), \bar{\bar{\gamma}} = (\tilde{\gamma}_1, ..., \tilde{\gamma}_m)$, $\gamma_j' = \tilde{\gamma}_j = 1, j = 1, ..., \nu$ *и* $\tilde{\gamma}_j < \gamma_j', j = \nu + 1, ..., m$. *Тогда*

$$\left\| \left\{ 2^{\kappa \langle \bar{s}, \bar{\bar{\gamma}} \rangle} \right\}_{\langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \leq C(m, \alpha, \kappa, \theta) 2^{n\alpha\kappa} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма 4. *Пусть* $\bar{\theta}_\nu = (\theta_1, \theta_2 ..., \theta_\nu)$, $1 \leq \theta_j < +\infty$, $j = 1, ..., \nu$, *и даны положительные числа* l, γ_j $j = 1, ..., \nu$, $\mu_1 = l - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j$, $\mu_2 = l + m - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0 \gamma_j$, $s_j^0 > 0$. *Тогда*

$$\left\| \{1\}_{\mu_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{\nu} s_j < \mu_2} \right\|_{l_{\bar{\theta}_\nu}} \leq C(m, \theta) l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta_j}}$$

Доказательство. Пусть $\nu = 2$. Тогда по определению нормы в $l_{\bar{\theta}_2}$ имеем

$$\left\| \{1\}_{\mu_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{2} s_j < \mu_2} \right\|_{l_{\bar{\theta}_2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{0 < s_2 < \mu_1} [\sum_{\mu_1 - s_2 \leq s_1 < \mu_2 - s_2} 1]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \sum_{\mu_1 \leq s_2 < \mu_2} [\sum_{0 < s_1 < \mu_2 - s_2} 1]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{0 < s_2 < \mu_1} [\mu_2 - \mu_1]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \sum_{\mu_1 \leq s_2 < \mu_2} [\mu_2 - s_2]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{0 < s_2 < \mu_1} m^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} + \sum_{\mu_1 \leq s_2 < \mu_2} [\mu_2 - s_2]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \leq$$

$$\leq C(\theta) \left\{ m^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1 + 1)^{\frac{\theta_2}{\theta_1} + 1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} = C(\theta) \left\{ m^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} \mu_1 + (m + 1)^{\frac{\theta_2}{\theta_1} + 1} \right\}^{\frac{1}{\theta_2}} \leq$$

$$\leq C(\theta, m) \mu_1^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Этим лемма доказана при $\nu = 2$.

Теперь предположим, что утверждение верно для $k = \nu$. Докажем оно верно для $k = \nu + 1$. По определению нормы в $l_{\bar{\theta}_{\nu+1}}$ имеем

$$\left\| \{1\}_{\mu_1 \leq \sum\limits_{j=1}^{\nu+1} s_j < \mu_2} \right\|_{l_{\bar{\theta}_{\nu+1}}} = \left\{ \sum_{0 < s_{\nu+1} < \mu_1} \left\| \{1\}_{\mu_1 - s_{\nu+1} \leq \sum\limits_{j=1}^{\nu} s_j < \mu_2 - s_{\nu+1}} \right\|_{l_{\bar{\theta}_\nu}}^{\theta_{\nu+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu_1 \leq s_{\nu+1} < \mu_2} \left\| \{1\}_{0 < \sum\limits_{j=1}^{\nu} s_j < \mu_2 - s_{\nu+1}} \right\|_{l_{\bar{\theta}_\nu}}^{\theta_{\nu+1}} \right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}. \qquad (1)$$

По предположению индукции верно неравенство

$$\left\|\{1\}_{\mu_1-s_{\nu+1}\leq\sum\limits_{j=1}^{\nu}s_j<\mu_2-s_{\nu+1}}\right\|_{l_{\bar\theta_\nu}}\leq C(m,\theta)(\mu_1-s_{\nu+1})^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Следовательно, из оценки (1) получим

$$\left\|\{1\}_{\mu_1\leq\sum\limits_{j=1}^{\nu+1}s_j<\mu_2}\right\|_{l_{\bar\theta_{\nu+1}}}\leq \tag{2}$$

$$\leq\left\{C\sum_{0<s_{\nu+1}<\mu_1}(\mu_1-s_{\nu+1})^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}\theta_{\nu+1}}+\sum_{\mu_1\leq s_{\nu+1}<\mu_2}\left\|\{1\}_{0<\sum\limits_{j=1}^{\nu}s_j<\mu_2-s_{\nu+1}}\right\|_{l_{\bar\theta_\nu}}^{\theta_{\nu+1}}\right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}.$$

Нетрудно убедиться в справедливости неравенства

$$\left\|\{1\}_{0<\sum\limits_{j=1}^{\nu}s_j<\mu_2-s_{\nu+1}}\right\|_{l_{\bar\theta_\nu}}=$$

$$=\left\{\sum_{s_\nu<\mu_2-s_{\nu+1}}\left[\sum_{s_{\nu-1}<\mu_2-\sum\limits_{j=\nu}^{\nu+1}s_j}\ldots\left[\sum_{s_1<\mu_2-\sum\limits_{j=2}^{\nu+1}s_j}1\right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}\ldots\right]^{\frac{\theta_\nu}{\theta_{\nu-1}}}\right\}^{\frac{1}{\theta_\nu}}\leq$$

$$\leq C(\theta,\nu)\cdot(\mu_2-s_{\nu+1})^{\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Поэтому из (2) получим

$$\left\|\{1\}_{\mu_1\leq\sum\limits_{j=1}^{\nu+1}s_j<\mu_2}\right\|_{l_{\bar\theta_{\nu+1}}}\leq$$

$$\leq\left\{\sum_{0<s_{\nu+1}<\mu_1}(\mu_1-s_{\nu+1})^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}\theta_{\nu+1}}+\sum_{\mu_1\leq s_{\nu+1}<\mu_2}(\mu_2-s_{\nu+1})^{\theta_{\nu+1}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}\right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}\leq$$

$$\leq\left\{\mu_1^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}\theta_{\nu+1}+1}+(\mu_2-\mu_1)^{\theta_{\nu+1}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}+1}\right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}\leq$$

$$\leq C(m,\theta)\left\{(l-\sum_{j=\nu+2}^{m}s_j^0\gamma_j)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}\theta_{\nu+1}+1}+m^{\theta_{\nu+1}\sum\limits_{j=1}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}+1}\right\}^{\frac{1}{\theta_{\nu+1}}}\leq C(m,\theta)l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu+1}\frac{1}{\theta_j}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть* $\bar q=(q_1,...,q_m)$, $1<q_j<\infty$ $j=1,...,m$, $\beta=min\{q_1,...,q_m,2\}$ *Тогда для любой функции* $f\in L_{\bar q}(\mathbb{R}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{\bar q}\leq C(q,m)\left\{\sum_{\bar s\in\mathbb{Z}_+^m}\|\delta_{\bar s}(f)\|_{\bar q}^{\beta}\right\}^{\frac{1}{\beta}}.$$

Эта теорема доказана в [19].

Теперь изложим основные результаты статьи. В дальнейшем положим $Y_+ = \max\{0, Y\}$

Теорема 2. *Пусть* $\overline{p} = (p_1, ..., p_m)$, $\overline{q} = (q_1, ..., q_m)$, $\overline{r} = (r_1, ..., r_m)$, $\bar{\theta} = (\theta_1, ..., \theta_m)$,$1 \le p_j \le 2 < q_j$, $j = 1, ..., m$, $1 \le \theta_j < +\infty$, $0 < r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q_\nu} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q_{\nu+1}} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \le ... \le r_m + \frac{1}{q_m} - \frac{1}{p_m}$. *Тогда*

1) Если $r_j = \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., \mu \ge \nu$, *и* $r_j > \frac{1}{p_j}$ *для* $j = \mu + 1, ..., m$, *то*

$$e_M\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}\right)_{\overline{q}} \asymp M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta'_j}}.$$

2) Если $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, \quad q_j < \theta_j, j = 1, ..., m, \quad (r_1 - \frac{1}{p_1})\frac{1}{q_j} < (r_j - \frac{1}{p_j})\frac{1}{q_1}$, $j = \nu + 1, ..., m$, *то*

$$e_M\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}\right)_{\overline{q}} \asymp M^{-\frac{q_1}{2}\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)} (\log M)^{q_1\left(r_1 - \frac{1}{p_1}\right)\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q'_j} + \sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\theta'_j}}.$$

Доказательство. **1 – шаг.** Докажем оценку сверху в первом пункте. Пусть $f \in B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}$. Для произвольного натурального числа M найдется натуральное число n такое, что $M \asymp 2^n n^{\mu-1}, \mu \ge \nu$. Приближающий полином $P(\Omega_M, \bar{x})$ будем искать в виде

$$P(\Omega_M, \bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < n} \delta_{\overline{s}}(f, \bar{x}) + \sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}), \tag{3}$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', ..., \gamma_m')$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}, j = 1, ..., m$ $\gamma_1' = \gamma_1 = ... = \gamma_\nu' = \gamma_\nu = 1 < \gamma_j' < \gamma_j, j = \nu + 1, ..., m$.

Полиномы $P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})$ будут построены для каждого блока $\delta_{\overline{s}}(f, \bar{x})$ согласно лемме 2, а число $\alpha > 1$ будет выбрано в процессе построения.

Предположим, что искомый полином построен. Тогда в силу равенства (3) и теоремы О.В. Бесова [20] и неравенства Минковского будем иметь

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \le$$

$$\le C(q)\left\{\left\|\left(\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle < \alpha n} |\delta_{\overline{s}}(f, \bar{x}) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\bar{q}} + \left\|\sum_{\langle \bar{s}, \overline{\gamma'} \rangle \ge \alpha n} \delta_{\overline{s}}(f, \bar{x})\right\|_{\bar{q}}\right\} =$$

$$= C(q) \cdot \{J_1(f) + J_2(f)\}. \tag{4}$$

Оценим $J_2(f)$. Из теоремы 1 [21] нетрудно получить

$$\|f\|_{\bar{q}} \le C(p, q, m)\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m} 2^{s_j\left(\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j}\right)} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+}\right\|_{l_{\bar{q}}}.$$

Пользуясь этим неравенством получим

$$J_2(f) \le C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \ \frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\ } \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{q}}} = C(p,q)J_3(f), \tag{5}$$

где $Y^m(\alpha n, \bar{\gamma}^{'}) = \left\{ \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : \langle \overline{s}, \overline{\gamma^{'}} \rangle \ge \alpha n \right\}$.

Для оценки $J_3(f)$ рассмотрим различные случаи. Пусть $1 \le \tau_j \le q_j, j = 1,...,m$. Тогда в силу неравенства Иенсена (см. [1], стр. 125)

$$\left(\sum_k |a_k|^{\beta_2} \right)^{\frac{1}{\beta_2}} \le \left(\sum_k |a_k|^{\beta_1} \right)^{\frac{1}{\beta_1}}, 0 < \beta_1 \le \beta_2 < +\infty \tag{6}$$

и учитывая $\gamma_j^{'} \le \gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j} \right) \left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}, j = 1,...,m$ имеем

$$J_3(f) \le C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \ \frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}\ } \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \le$$

$$\le C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \cdot 2^{-\langle \bar{s},\bar{\gamma}\rangle (r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{q}}} \le$$

$$\le C(q,p,r,m) 2^{-\alpha n (r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} \|f\|_{B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}} \tag{7}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, $\theta_j \le q_j, j = 1,...,m$.

Пусть $q_j < \theta_j, j = 1,...,m$. Тогда применяя неравенство Гельдера с показателями $\frac{\theta_j}{q_j} > 1$ и леммой 1 будем иметь

$$J_3(f) \le C(p,q,m) \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \|\delta_{\overline{s}}(f)\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \cdot$$

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j \ r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}\ } \right\}_{\bar{s}\in Y^m(\alpha n,\bar{\gamma}')} \right\|_{l_{\bar{\epsilon}}} \le C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n (r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \frac{1}{\epsilon_j}} \le$$

$$\le C(p,q,m,r) 2^{-\alpha n (r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\theta_j})} \tag{8}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, где $\bar{\epsilon} = (\epsilon_1,...,\epsilon_m)$, $\frac{1}{\epsilon_j} = \frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j}, j = 1,...,m$.

Из неравенств (5), (7), (8) следует, что

$$J_2(f) \le C(p,q,m) 2^{-\alpha n (r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\theta_j})} \tag{9}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$.

Теперь оценим $J_1(f)$. Поскольку $q_j \in (2,+\infty), j = 1,...,m,$ то по теореме О.В. Бесова [20] и свойству нормы имеем

$$J_1(f) \leq \left(\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \| \delta_{\bar{s}}(f, \bar{x}) - P(\Omega_{N_{\bar{s}}}, \bar{x}) \|_{\bar{q}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Далее, пользуясь леммой 2 и неравенством разных метрик для тригонометрических полиномов (см. [1], стр. 133) из (10) получим

$$J_1(f) \leq \left(\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \tag{11}$$

$$\leq C(p,m) \left(\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим

$$N_{\bar{s}} = [2^n n^{\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j} - 1} \cdot \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j}] + 1,$$

где $[a]$– целая часть числа a,

$$\alpha = \frac{q_1}{2} \left(1 + \frac{\mu - 1}{n} \log n \right).$$

Докажем, что справедливо неравенство

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \leq C(\theta, m) M.$$

Для этого применяя неравенство Гельдера с показателем $\theta_j > 1, j = 1,...,m$ получим

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \leq n^m + 2^n n^{\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j} - 1} \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \leq \tag{12}$$

$$\leq n^m + 2^n n^{\sum_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j} - 1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \| \delta_{\bar{s}}(f) \|_{\bar{p}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \cdot \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j (\frac{1}{p_j} - r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}},$$

где $\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta_j'} = 1$, $\chi_{\sigma_n^m}$– характеристическая функция множества $\sigma_n^m = \{ \bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m : n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n \}$.

Оценим

$$I_n^m = \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j (\frac{1}{p_j} - r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}}.$$

Учитывая неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^{\theta - 1} \leq C(\theta) n^{\theta}, \quad \theta > 0$$

и то, что $r_j > \frac{1}{p_j}$ для $j = \mu+1, ..., m$ будем иметь

$$I_n^m \leq \left\{ \sum_{s_m < \frac{\alpha n}{\gamma_m}} \left[\sum_{s_{m-1} < \frac{(\alpha n - s_m\gamma_m)}{\gamma_{m-1}}} \cdots \left[\sum_{s_1 < \alpha n - \sum\limits_{j=2}^{m} s_j\gamma_j} \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - r_j)\theta_1'} \right]^{\frac{\theta_2'}{\theta_1'}} \cdots \right]^{\frac{\theta_m'}{\theta_{m-1}'}} \right\}^{\frac{1}{\theta_m'}} \leq \tag{13}$$

$$\leq C(\gamma, \tau)(\alpha n)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j'}}$$

Из неравенств (12), (13) следует

$$\sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \leq n^m + 2^n n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j} - 1} \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \times$$

$$\times C(\theta, m)\,(\alpha n)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j'}} \leq C(\theta, m)\left\{ n^m + 2^n n^{\mu-1} \right\} \leq C(\theta, m) 2^n n^{\mu-1} \asymp M$$

так как натуральное число n выбрано так, что $2^n n^{\mu-1} \asymp M$.

Далее, продолжим оценку $J_1(f)$ (см. (11)). Подставляя значения $N_{\bar{s}}$ и учитывая $r_j = \frac{1}{p_j}, j = 1, ..., \mu$ (см. (11)) получим

$$J_1(f) \leq C(q, p, m) \left\{ \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} N_{\bar{s}}^{-1} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\overline{p}}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C(q, p, m, r) \left\{ \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} 2^{-n} n^{1 - \sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}} \prod_{j=1}^{m} 2^{-\frac{s_j}{p_j}} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j \frac{2}{p_j}} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\overline{p}} \right\}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C(q, p, m, r) \left\{ \sum_{n \leq \langle \bar{s}, \bar{\gamma}' \rangle < \alpha n} \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - r_j)} \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\overline{p}} \right\}^{\frac{1}{2}} \left(2^{-n} n^{1 - \sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теперь к сумме в правой части применяя неравенство Гельдера $(\frac{1}{\theta_j} + \frac{1}{\theta_j'})$ и пользуясь оценкой (13) будем иметь

$$J_1(f) \leq C(q, p, m) \left(2^{-n} n^{1 - \sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\tau_j}} \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\| \delta_{\bar{s}}(f) \right\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{\frac{1}{2}} \left\| \left\{ \prod_{j=\mu+1}^{m} 2^{s_j(\frac{1}{p_j} - r_j)} \chi_{\sigma_n^m}(\bar{s}) \right\}_{\bar{s} \in \sigma_n^m} \right\|_{l_{\bar{\theta}'}}^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C(q,p,m)\left(2^{-n}n^{1-\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j'}}\right)^{\frac{1}{2}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C(p,q,m,r)2^{\frac{-n}{2}}n^{\frac{\mu+1}{2}-\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

для любой функции $f\in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$ в случае $r_j=\frac{1}{p_j}$ для $j=1,...,\mu$ и $r_j>\frac{1}{p_j}$ при $j=\mu+1,...,m,\quad 2<q_j<\theta_j,\quad j=1,...,m.$

В силу неравенств (9), (14) учитывая условие $\nu\leq\mu$ из (4) получим

$$\left\|f-P(\Omega_M)\right\|_{\bar{q}}\leq C(p,q,m,r)\left\{2^{-\alpha n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\mu}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\theta_j})}+2^{\frac{-n}{2}}n^{\frac{\mu+1}{2}-\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j}}\right\}.$$

Так как $n\alpha=\frac{q_1}{2}\log(2^nn^{\mu-1}),\quad r_1=\frac{1}{p_1},\quad 2<q_j<\theta_j, j=1,...,m,$ то отсюда следует оценка

$$\left\|f-P(\Omega_M)\right\|_{\bar{q}}\leq C(p,q,m,r)\left\{(2^nn^{\mu-1})^{-\frac{1}{2}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\mu}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\theta_j})}+2^{\frac{-n}{2}}n^{\frac{\mu+1}{2}-\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j}}\right\}$$

$$\leq C(p,q,m,r)(2^nn^{\mu-1})^{-\frac{1}{2}}n^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j'}}\asymp M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j'}}$$

для любой функции $f\in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$ в случае $r_j=\frac{1}{p_j}$ для $j=1,...,\mu$ и $r_j>\frac{1}{p_j}$ при $j=\mu+1,...,m,\quad 2<q_j<\theta_j,\quad j=1,...,m.$

Следовательно

$$e_M\left(B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}\right)_{\overline{q}}\leq C(p,q,m,r)M^{-\frac{1}{2}}(\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu}\frac{1}{\theta_j'}}.$$

Этим оценка сверху в пункте 1) доказана .

2 – шаг. Докажем оценку снизу в первом пункте. Для этого будем пользоваться двойственным соотношением, которое следует из более общего результата С. М. Никольского (см. [22]). Согласно этому соотношению для любой функции $f\in L_{\bar{q}}(\mathbb{R}^m)$ имеет место равенство

$$e_M\left(f\right)_{\overline{q}}=\inf_{\Omega_M}\sup_{P\in L^{\perp}}\left|\int_{I^m}f(\bar{x})P(\bar{x})d\bar{x}\right|. \tag{15}$$

По заданному числу M выберем l из равенства

$$l=\frac{\beta}{2}\log M-(\beta-1)(\mu-1)\log\log M,$$

где $\beta=\max_{j=1,...,m}q_j$. Тогда $2<\beta$ и $\beta'=\frac{\beta}{\beta-1}<2$.

Положим $\bar{s}_\mu=(s_1,...,s_\mu,1,...,1)$. Рассмотрим функцию

$$g_1(\bar{x})=\sum_{\langle\bar{s_\mu},\bar{\gamma}\rangle<l}\prod_{j=1}^{m}\sum_{k_j\in\rho^+(s_j)}k_j^{-1}\cos k_jx_j,$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1, ..., \gamma_m)$, $\gamma_j = \left(r_j + \frac{1}{q_j} - \frac{1}{p_j}\right)\left(r_1 + \frac{1}{q_1} - \frac{1}{p_1}\right)^{-1}$, $\rho^+(s_j) = \{k_j \in N : 2^{s_j-1} \le |k_j| < 2^{s_j}\}$, $j = 1, ..., m$. Введем обозначение

$$\delta^+_{\bar{s}}(g_1, \bar{x}) = \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} k_j^{-1} \cos k_j x_j,$$

$$d_{\bar{s}_\mu}(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \rho^+(\bar{s}_\mu)} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j.$$

Поскольку

$$\|d_{\bar{s}_\mu}\|_{\bar{p}} \asymp \prod_{j=1}^{\mu} 2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})}, \quad 1 < p_j < +\infty, \quad j = 1, ..., m,$$

и $\bar{s}_\mu = (s_1, ..., s_\mu, 1, ..., 1)$, то по теореме О. В. Бесова о мультипликаторах (см. [20])

$$\|\delta^+_{\bar{s}_\mu}(g_1)\|_{\bar{p}} \le C \prod_{j=1}^{\mu} 2^{-s_j} \|d_{\bar{s}}\|_{\bar{p}} \asymp \prod_{j=1}^{\mu} 2^{-\frac{s_j}{p_j}}. \tag{16}$$

Следовательно, учитывая, что $r_j = \frac{1}{p_j}$ и неравенство (13) будем иметь

$$\left\| \left\{ \prod_{j=1}^{m} 2^{s_j r_j} \left\|\delta_{\bar{s}}(g_1)\right\|_{\overline{p}} \right\}_{\bar{s} \in \mathbb{Z}^m_+} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} = \left\| \left\{ 2^{\langle \bar{s_\mu}, \bar{r} \rangle} \left\|\delta^+_{\bar{s}}(g_1)\right\|_{\overline{p}} \right\}_{\langle \bar{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \le$$

$$\le C(p, q, m, r) \left\| \{\chi_{\sigma_l}(\bar{s}_\mu)\}_{\bar{s}_\mu \in \sigma_l} \right\|_{l_{\bar{\theta}}} \le C(p, m, \theta) l^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}},$$

где $\chi_{\sigma_l}-$ характеристическая функция множества $\sigma_l = \{\bar{s}_\mu \in \mathbb{Z}^m_+ : \langle \overline{s_\mu}, \overline{\gamma} \rangle < l\}$, $\quad 1 \le \theta_j < +\infty$. Поэтому функция

$$f_1(\bar{x}) = C_1 l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}} g_1(\bar{x})$$

принадлежит классу $B^{\overline{r}}_{\overline{p},\bar{\theta}}$, $\quad 1 < p_j < +\infty$.

Теперь построим функцию $P_1(\bar{x})$, которая удовлетворяла бы требованиям к $P(\bar{x})$ из (15). Пусть

$$v_1(\bar{x}) = \sum_{\langle \bar{s_\mu}, \bar{\gamma} \rangle < l} \prod_{j=1}^{m} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \cos k_j x_j \tag{17}$$

и Ω_M - произвольный набор из M векторов $\bar{k} = (k_1, ..., k_m)$ с целочисленными координатами . Обозначим

$$u_1(\bar{x}) = \sum_{\bar{k} \in \Omega_M}^{*} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j$$

функцию, содержащую только те слагаемые из (17), которые имеют "номера" из множества Ω_M. Положим $w_1(\bar{x}) = v_1(\bar{x}) - u_1(\bar{x})$. Тогда в силу того, что $1 < q_j^{'} = \frac{q_j}{q_j - 1} < 2$ и равенства Парсеваля будем иметь

$$\|w_1\|_{\bar{q}'} \le \|v_1\|_{\bar{q}'} + \|u_1\|_2 \le \|v_1\|_{\bar{q}'} + M^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Далее, пользуясь теоремой 1 [20], теоремой 1, получим

$$\|v_1\|_{\bar{q}'} \leq C(q) \left\| \left(\sum_{\langle \overline{s_\mu}, \overline{\gamma} \rangle < l} |\delta_{\overline{s_\mu}}(v_1, \bar{x})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{\bar{q}'} \leq$$

$$\leq C(q) \left(\sum_{\langle \overline{s_\mu}, \overline{\gamma} \rangle < l} \left\| \delta^+_{\overline{s_\mu}}(v_1, \bar{x}) \right\|^{\beta'}_{\bar{\beta}'} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq C(q, r, m) 2^{\frac{l}{\beta}} l^{\frac{\mu-1}{\beta'}},$$

где $\beta' = \frac{\beta}{\beta-1}$. Поэтому из (18) учитывая опредление числа l получим

$$\|w_1\|_{\bar{q}'} \leq C(q, m) 2^{\frac{l}{\beta}} l^{\frac{\mu-1}{\beta'}} + M^{\frac{1}{2}} \leq C(q, m) 2^{\frac{l}{\beta}} l^{\frac{\mu-1}{\beta'}}.$$

Следовательно, функция $P_1(\bar{x}) = C_2 2^{-\frac{l}{\beta}} l^{-\frac{\mu-1}{\beta'}} w_1(\bar{x})$ удовлетворяет условиям формулы (15) . Подставив $f_1(\bar{x})$ и $P_1(\bar{x})$ в (15) будем иметь

$$e_M(f_1)_{\bar{q}} \geq C(q, m, r) \left(\sum_{l_1 \leq \langle \overline{s_\mu}, \overline{\gamma} \rangle < l} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \right) 2^{-\frac{l}{\beta}} l^{-\frac{\mu-1}{\beta'}} l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}}, \tag{19}$$

где l_1 - число удовлетворяющее условию $2^{l_1} l^{\mu-1} \asymp M$. Так как

$$\sum_{l_1 \leq \langle \bar{s}, \overline{\gamma} \rangle < l} \sum_{k_j \in \rho^+(s_j)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-1} \geq C(m, r) l_1^{\mu},$$

то из (19) получим

$$e_M(f_1)_{\bar{q}} \geq C(q, m, r) 2^{-\frac{l}{\beta}} l^{-\frac{\mu-1}{\beta'}} l^{-\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta_j}} (l_1 - \sum_{j=\mu+1}^{m} \gamma_j)^{\mu-1} \geq$$

$$\geq C(q, m, r) M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta'_j}}.$$

для $l_1 \geq 2 \sum\limits_{j=\mu+1}^{m} \gamma_j$. Следовательно

$$e_M \left(B^{\overline{r}}_{\overline{p}, \bar{\theta}} \right)_{\overline{q}} \geq C(p, q, r, m) M^{-\frac{1}{2}} (\log M)^{\sum\limits_{j=1}^{\mu} \frac{1}{\theta'_j}}$$

при $r_j = \frac{1}{p_j}, \quad j = 1, ..., \mu$, и $r_j > \frac{1}{p_j}, \quad j = \mu+1, ..., m$. Этим оценка снизу в первом пункте доказана.

3 – шаг. Теперь докажем оценку сверху во втором пункте. Здесь рассматривается случай $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, \quad j = 1, ..., m$. Так как по условию теоремы $q_j < \theta_j$, $j = 1, ..., m$, то $\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j} > 0$, $j = 1, ..., m$. Поэтому оценка (9) имеет вид

$$J_2(f) \leq C(p, q, m, r, \tau) 2^{-\alpha n (r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})_+} =$$

$$= C(p, q, m, r, \tau) 2^{-\alpha n (r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} (\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} \tag{20}$$

в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, \quad q_j < \theta_j, \quad j = 1, ..., m$.

Положим
$$\alpha = \frac{q_1}{2} - q_1 \sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})\frac{\log n}{n}.$$
Тогда $\alpha n = \frac{q_1}{2}n - q_1 \sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})\log n$. Следовательно, по свойству логарифма
$$2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} = \left(2^{-\frac{q_1}{2}n + q_1 \sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})\log n}\right)^{r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} =$$
$$= \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{q_1(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}) - q_1(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j}} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})}.$$
Справедливы следующие равенства
$$q_1(\nu-1)(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}) - q_1(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j} + \sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j}) =$$
$$= q_1(r_1 - \frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}} + \sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{'}}.$$
Тогда из предыдущей формулы имеем
$$2^{-\alpha n(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} = \left(2^{-\frac{q_1}{2}n + q_1 \sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})\log n}\right)^{r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1}} n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j} - \frac{1}{\theta_j})} =$$
$$= \left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{q_1(r_1 - \frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}} + \sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{'}}}.$$
Поэтому учитывая $2^n n^{\nu-1} \asymp M$ из неравенства (20) получим
$$J_2(f) \le C\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} n^{q_1(r_1 - \frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}} + \sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{'}}} \asymp$$
$$\asymp M^{-\frac{q_1}{2}(r_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1})} (\log M)^{q_1(r_1 - \frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}} + \sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j^{'}}} \tag{21}$$
в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, \quad q_j < \theta_j, \quad j = 1, ..., m.$

Оценим $J_1(f)$ в случае $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \theta_j, j = 1, ..., m$. Положим
$$N_{\bar{s}} = \left[2^n 2^{(\frac{1}{p_1} - r_1)\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)}\right] + 1,$$
где координаты вектора $\bar{\tilde{\gamma}} = (\tilde{\gamma_1}, ..., \tilde{\gamma_m})$ удовлетворяют соотношениям $\gamma_1^{'} = \tilde{\gamma_1} = ... = \gamma_\nu^{'} = \tilde{\gamma_\nu}, \quad 1 < \tilde{\gamma_j} < \gamma_j^{'}, \quad j = \nu+1, ..., m.$

Тогда в силу леммы Г в [7] справедлива оценка
$$\sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma^{'}}\rangle < \alpha n} N_{\bar{s}} \le n^{m-1} + \sum_{n \le \langle \bar{s}, \overline{\gamma^{'}}\rangle < \alpha n} 2^n 2^{(\frac{1}{p_1} - r_1)\langle \bar{s}, \bar{\tilde{\gamma}}\rangle} 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} \le$$
$$\le n^{m-1} + C(r, m, p) 2^n 2^{-\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} 2^{\alpha n(\frac{1}{p_1} - r_1)} n^{\nu-1} =$$
$$= n^{m-1} + C(r, m, p) 2^n n^{\nu-1} \le C(p, r, m) M.$$

Теперь подставив значения чисел $N_{\bar{s}}$ в (11) и пользуясь неравенством Гельдера и леммой 3 из (11) получим
$$J_1(f) \le C(p, q, m, r, \theta) \times$$

$$\times\left\{2^{-n}2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}\sum_{n\le\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (22)$$

Если $(\frac{1}{p_j}-r_j)\frac{1}{q_1}<(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{1}{q_j}, \quad j=\nu+1,...,m$, то

$$\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1}<\frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_j}}=\gamma_j.$$

Поэтому выберем числа γ_j' и $\tilde{\gamma}_j$ так, чтобы $\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1}<\tilde{\gamma}_j<\gamma_j'<\gamma_j, \quad j=\nu+1,...,m$. Тогда

$$2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\le 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j 2r_j}.$$

Поэтому

$$\sum_{n\le\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}^2\le$$

$$\le\sum_{n\le\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\left(\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}\right)^2. \qquad (23)$$

Так как по условию теоремы $2<q<\theta_j<+\infty$, $j=1,...,m$, то применяя неравенство Гельдера $(\beta_j=\frac{\theta_j}{2},\beta_j'=\frac{\theta_j}{\theta_j-2})$ к сумме в правой части (23) будем иметь

$$\sum_{n\le\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}^2\le$$

$$\le\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^2\left\|\left\{2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\right\}_{\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}\right\|_{l_{\bar{\beta}'}}.$$

По лемме 3 при $\theta_j=\beta_j', j=1,...,m$ из предыдущего неравенства получим

$$\sum_{n\le\langle\bar{s},\overline{\gamma'}\rangle<\alpha n}2^{-(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle\bar{s},\bar{\tilde{\gamma}}\rangle}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j\frac{2}{p_j}}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}^2\le$$

$$\le C(p,q,r,m)2^{n\alpha(\frac{1}{p_1}-r_1)}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\beta_j'}}\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\bar{s}}(f)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}^2\le$$

$$\le C(p,q,r,m)2^{n\alpha(\frac{1}{p_1}-r_1)}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1-\frac{2}{\theta_j})}$$

для любой функции $f\in B_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}}, \quad 2<\theta_j<+\infty, \quad j=1,...,m$. Поэтому из (22) получим

$$J_1(f)\le C(p,q,m,r,\theta)\left(2^{-n}2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(2^{n\alpha(\frac{1}{p_1}-r_1)}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(1-\frac{2}{\theta_j})}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$= C(p,q,m,r,\theta)2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)}2^{-\frac{n}{2}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})} \tag{24}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, $\quad 2 < \theta_j < +\infty$, $\quad q_j < \theta_j$, $\quad \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \theta_j$, $\quad j = 1,...,m$, $\quad (\frac{1}{p_j} - r_j)\frac{1}{q_1} < (\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{1}{q_j}$, $\quad j = \nu+1,...,m$.

В оценке $J_2(f)$ число α выбрано в виде

$$\alpha = \frac{q_1}{2} - q_1\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2} - \frac{1}{q_j})\frac{\log n}{n}.$$

Тогда

$$2^{\alpha n(\frac{1}{p_1}-r_1)} = 2^{n(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{q_1}{2}}n^{-q_1(\frac{1}{p_1}-r_1)\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}.$$

Поэтому из (24) получим

$$J_1(f) \le C(p,q,m,r,\tau)2^{n(\frac{1}{p_1}-r_1)\frac{q_1}{2}}n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}2^{-\frac{n}{2}}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})} =$$

$$= 2^{-n(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})\frac{q_1}{2}}n^{-\frac{q_1}{2}(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}n^{\frac{q_1}{2}(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}\times$$

$$\times n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j})}n^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j})}.$$

Далее, простыми вычислениями можно убедиться, что

$$\frac{q_1}{2}(\nu-1)(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1}) + q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_j}) + \sum_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta_j}) =$$

$$= q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'} + \sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}.$$

Следовательно

$$J_1(f) \le C\left(2^n n^{\nu-1}\right)^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}n^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}} \asymp$$

$$\asymp M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}} \tag{25}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, $\quad 2 < \theta_j < +\infty$, $\quad q_j < \theta_j$, $\quad \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \theta_j$, $\quad j = 1,...,m$, $\quad (\frac{1}{p_j} - r_j)\frac{1}{q_1} < (\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{1}{q_j}$, $\quad j = \nu+1,...,m$.

В силу неравенств (21) и (25) из (4) получим

$$\|f - P(\Omega_M)\|_{\bar{q}} \le C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}$$

для любой функции $f \in B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}$, $\quad 2 < \theta_j < +\infty$, $\quad q_j < \theta_j$, $\quad \frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}$, $q_j < \theta_j$, $\quad j = 1,...,m$, $\quad (\frac{1}{p_j} - r_j)\frac{1}{q_1} < (\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{1}{q_j}$, $\quad j = \nu+1,...,m$.

Следовательно

$$e_M\left(B^{\bar{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}}\right)_{\bar{q}} \le C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}$$

если $2 < \theta_j < +\infty$, $q_j < \theta_j$, $\frac{1}{p_j} - \frac{1}{q_j} < r_j < \frac{1}{p_j}, q_j < \theta_j, j = 1,...,m$, $\quad (\frac{1}{p_j} - r_j)\frac{1}{q_1} < (\frac{1}{p_1} - r_1)\frac{1}{q_j}$, $\quad j = \nu+1,...,m$. Этим оценка сверху во втором пункте доказана.

4 – шаг. Докажем оценку снизу в случае $\frac{1}{p_j}-\frac{1}{q_j}<r_j<\frac{1}{p_j}, \quad j=1,...,m.$ Положим

$$l=\frac{q_1}{2}\log M-\left(q_1\sum_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}}\right)\log\log M.$$

Введем обозначим

$$\varkappa(l,\gamma)=\left\{\bar{s}=(s_1,...,s_m)\in\mathbb{Z}_+^m : l\leq\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<l+m\right\},$$

$$\varkappa_\nu(l,\gamma)=\left\{\bar{s}_\nu=(s_1,...,s_\nu) : l-\sum_{j=\nu+1}^{m}s_j^0\gamma_j\leq\langle\bar{s}_\nu,\bar{\gamma}_\nu\rangle<l+m-\sum_{j=\nu+1}^{m}s_j^0\gamma_j\right\},$$

где $\bar{\gamma}_\nu=(\gamma_1,...,\gamma_\nu)$, $\bar{s}_0=(s_1,...,s_\nu,s_{\nu+1}^0,...,s_m^0)\in\varkappa(l,\gamma)$.

Рассмотрим функцию

$$f_2(\bar{x})=l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}\sum_{\bar{s}_0\in\varkappa(l,\gamma)}\prod_{j=1}^{m}2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})}\sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_0)}\prod_{j=1}^{m}k_j^{-r_j}\cos k_jx_j=$$

$$=l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}g_l(\bar{x})$$

Пользуясь неравенством (см. [8], стр.83)

$$\|\sum_{k_j\in\rho^+(s_j)}k_j^{-r_j}\cos k_jx_j\|_{p_j}\leq C2^{-s_j(r_j+\frac{1}{p_j}-1)}, \quad 1<p_j<+\infty, \quad j=1,...,m,$$

получим

$$\|\delta_{\bar{s}}^+(g_1)\|_{\bar{p}}=\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1-\frac{1}{p_j})}\prod_{j=1}^{m}\|\sum_{k_j\in\rho^+(s_j)}k_j^{-r_j}\cos k_jx_j\|_{p_j}\leq C\prod_{j=1}^{m}2^{-s_jr_j}.$$

Следовательно, применяя лемму 4 будем иметь

$$\left\|\left\{\prod_{j=1}^{m}2^{s_jr_j}\left\|\delta_{\overline{s}}\left(g_1\right)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}=\left\|\left\{2^{\langle\bar{s_\nu},\bar{r}\rangle}\left\|\delta_{\bar{s}}^+\left(g_1\right)\right\|_{\overline{p}}\right\}_{\langle\bar{s_\nu},\bar{\gamma}\rangle<l}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\leq$$

$$\leq C(p,q,m,r)\left\|\left\{\chi_{\sigma_l}(\bar{s})\right\}_{\bar{s}_\nu\in\sigma_l}\right\|_{l_{\bar{\theta}}}\leq C(p,m,\theta)l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}},$$

где χ_{σ_l} – характеристическая функция множества $\sigma_l=\{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m : \langle\overline{s_\nu},\overline{\gamma}\rangle<l\}, \quad 1\leq\theta_j<+\infty$.

Значит, функция $C_2f_2\in B_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}}$, где C_2 некоторая положительная постоянная. В формуле (15) в качестве функции $P(\bar{x})$ возьмем

$$P_3(\bar{x})=2^{-\frac{l}{q_1}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j^{'}}}w_2(\bar{x}),$$

где $w_2(\bar{x})=v_2(\bar{x})-u_2(\bar{x})$,

$$v_2(\bar{x})=\sum_{\bar{s}_0\in\varkappa(l,\gamma)}\sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_0)}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j,$$

$$u_2(\bar{x})=\sum_{\bar{k}\in\Omega}^{*}\prod_{j=1}^{m}\cos k_jx_j.$$

Как в (18) доказывается

$$\|w_2\|_{\bar{q}'} \leq \|v_2\|_{\bar{q}'} + M^{\frac{1}{2}}. \tag{26}$$

В силу теоремы 3.1 [23] имеем

$$\|v_2\|_{\bar{q}'} \leq \| \sum_{\langle \bar{s}_0,\bar{\gamma}\rangle < l+m} \sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j \|_{\bar{q}'} +$$

$$+\| \sum_{\langle \bar{s}_0,\bar{\gamma}\rangle < l} \sum_{\bar{k}\in\rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j \|_{\bar{q}'} \leq C(q,m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}.$$

Следовательно (см. (26))

$$\|w_2\|_{\bar{q}'} \leq C(q,m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}} + M^{\frac{1}{2}}. \tag{27}$$

По определению числа l:

$$l = \log \frac{M^{\frac{q_1}{2}}}{(\log M)^{q_1 \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^l = \frac{M^{\frac{q_1}{2}}}{(\log M)^{q_1 \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}}.$$

С другой стороны

$$l = \left(\frac{q_1}{2} - \left(q_1 \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'} \right) \frac{\log\log M}{\log M} \right) \log M.$$

Так как

$$\lim_{M\to+\infty} \frac{\log\log M}{\log M} = 0,$$

то $\forall \varepsilon > 0\ \exists M_\varepsilon > 0$ такое, что

$$0 < \frac{\log\log M}{\log M} < \varepsilon, \quad \forall M > M_\varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon = \frac{1}{2q_1 \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}$. Тогда

$$l > \left(\frac{q_1}{2} - \frac{1}{2} \right) \log M \quad \Leftrightarrow \quad \log M < \frac{2}{q_1 - 1} l.$$

Поэтому

$$2^{\frac{l}{q_1}} > \frac{M^{\frac{1}{2}}}{(\frac{2}{q_1-1} l)^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}} \quad \Leftrightarrow \quad 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}} > \frac{q_1 - 1}{2} M^{\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, из (27) получим

$$\|w_2\|_{\bar{q}'} \leq C_2(q,m) 2^{\frac{l}{q_1}} l^{\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{q_j'}}.$$

Поэтому $C_2^{-1} \|P_3\|_{\bar{q}'} \leq 1$. Так как $w_2(\bar{x})$ не содержит слагаемые с номерами из множества Ω_M, то функция $C_2^{-1} P_3(\bar{x})$ будет ортогональной множеству $T(\Omega_M)$.

Таким образом, функция $C_2^{-1}P_3(\bar{x})$ удовлетворяет условиям формулы (15). Поэтому согласно этой формуле имеем

$$e_M(f_2)_{\bar{q}} \geq C_2^{-1}|\int_{I^m} f_2(\bar{x})P_3(\bar{x})d\bar{x}| =$$

$$= C_2^{-1}2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}} \sum_{\bar{s}_0 \in \varkappa(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(1-\frac{1}{p_j})} \sum_{\bar{k} \in \rho^+(\bar{s}_0)} \prod_{j=1}^{m} k_j^{-r_j} \geq$$

$$\geq C2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}} \sum_{\bar{s}_0 \in \varkappa(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{m} 2^{-s_j(r_j-\frac{1}{p_j})} =$$

$$= C2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}} \prod_{j=\nu+1}^{m} 2^{s_j^0(\frac{1}{p_j}-r_j)} \sum_{\bar{s}_\nu \in \varkappa_\nu(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{\nu} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)}. \qquad (28)$$

Положим $\mu_1 = l - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j$ и $\mu_2 = l + m - \sum\limits_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j$. Тогда

$$\sum_{\bar{s}_\nu \in \varkappa_\nu(l,\gamma)} 1 = \sum_{\mu_1 \leq \langle \bar{s}_\nu, \bar{1}\rangle < \mu_2} 1 =$$

$$= \sum_{s_\nu=1}^{\mu_1} \sum_{s_{\nu-1}=1}^{\mu_1-s_\nu} \cdots \sum_{s_1=\mu_1-\sum\limits_{j=2}^{\nu} s_j}^{\mu_2-\sum\limits_{j=2}^{\nu} s_j} 1 =$$

$$= \sum_{s_\nu=1}^{\mu_1} \sum_{s_{\nu-1}=1}^{\mu_1-s_\nu} \cdots \sum_{s_2=1}^{\mu_1-\sum\limits_{j=3}^{\nu} s_j} (\mu_2-\mu_1+1) \geq C\left(l - \sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}. \qquad (29)$$

Если

$$\frac{\frac{1}{p_j}-r_j}{\frac{1}{p_1}-r_1} = \frac{r_j+\frac{1}{q_j}-\frac{1}{p_j}}{r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_j}} = \gamma_j \quad j = 1,...,\nu,$$

то

$$\sum_{j=1}^{\nu} s_j(\frac{1}{p_j}-r_j) = (\frac{1}{p_1}-r_1)\sum_{j=1}^{\nu} s_j\gamma_j.$$

Поэтому учитывая (29) получим

$$\sum_{\bar{s}_\nu \in \varkappa_\nu(l,\gamma)} \prod_{j=1}^{\nu} 2^{s_j(\frac{1}{p_j}-r_j)} = \sum_{\bar{s}_\nu \in \varkappa_\nu(l,\gamma)} 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\langle \bar{s}_\nu, \bar{\gamma}_\nu\rangle} \geq$$

$$\geq 2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1} \sum_{\mu_1 \leq \langle \bar{s}_\nu, \bar{1}\rangle < \mu_2} \geq C2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1}\left(l - \sum_{j=\nu+1}^{m} s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}$$

Теперь из (28) получим

$$e_M(f_2)_{\bar{q}} \geq C2^{-\frac{l}{q_1}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}} l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}} \prod_{j=\nu+1}^{m} 2^{s_j^0(\frac{1}{p_j}-r_j)}$$

$$2^{(\frac{1}{p_1}-r_1)\mu_1}\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m}s_j^0\gamma_j\right)^{\nu-1}.$$

В этом неравенстве полагая $s_{\nu+1}^0=...=s_m^0=1$ получим

$$e_M(f_2)_{\bar{q}}\geq C2^{-l(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}}l^{-\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j}}\left(l-\sum_{j=\nu+1}^{m}\gamma_j\right)^{\nu-1}\geq$$

$$\geq C2^{-l(r_1+\frac{1}{q_1}-\frac{1}{p_1})}l^{\sum\limits_{j=2}^{\nu}(\frac{1}{q_j}-\frac{1}{\theta_j})} \tag{30}$$

для $l>2\sum\limits_{j=\nu+1}^{m}\gamma_j$. Теперь учитывая выбор числа l из (30) получим

$$e_M\left(B_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}}\right)_{\bar{q}}\geq C(p,q,m,r)M^{-\frac{q_1}{2}(r_1-\frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1})}(\log M)^{q_1(r_1-\frac{1}{p_1})\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{q_j'}+\sum\limits_{j=2}^{\nu}\frac{1}{\theta_j'}}$$

Теорема доказана.

Замечание 2. *В случаях $\theta_j<q=q_1=...=q_m$, $r_j>\frac{1}{p_j},q_j<\theta_j$, $j=1,...,m$ и $2<p_j\leq q_j<+\infty$, $1<p_j\leq q_j\leq 2$, $j=1,...,m$ оценки M – членного приближения класса Бесова $B_{\bar{p},\bar{\theta}}^{\bar{r}}$ в пространстве $L_{\bar{q}}(\mathbb{R}^m)$ установлены в [24] – [26].*

Замечание 3. *Отметим, что при $p=p_1=...=p_m$, $q=q_1=...=q_m$, $\theta=\theta_1=...=\theta_m$, $\mu=\nu$ утверждения доказанной теоремы соответственно совпадают с пунктами 3) и 2) выше приведенной теоремы А.С. Романюка.*

Автор благодарен Рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

[1] С. М. Никольский, *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Наука, М., 1977.

[2] Т. И. Аманов, *Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной*, Наука, Алма-ата, 1976.

[3] С. Б. Стечкин, *Об абсолютной сходимости ортогональных рядов*, Доклады АН СССР, **102** (1955), 37–40.

[4] Р. С. Исмагилов, *Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами,* Успехи Математических Наук, **29** (1974), 161–173.

[5] В. Е. Майоров, *О линейных поперечниках соболевских классов*, Доклады АН СССР, **243** (1978), 1127–1130.

[6] Э. С. Белинский, *Приближение "плавающей" системой экспонент на классах периодических функций с ограниченной смешанной производной*, Исслед. по теории функц. многих веществ. переменных, Ярославль, (1988), 16–33.

[7] В. Н. Темляков, *Приближение функций с ограниченной смешанной производной*, Труды Математического Института АН СССР, **178** (1986), 3–112.

[8] А. С. Романюк, *Наилучшие M– членные тригонометрические приближения классов Бесова периодических функций многих переменных*, Известия Российской Академии Наук, серия математическая, **67** (2003), 61–100.

[9] А. С. Романюк, *Приближение классов периодических функций многих переменных*, Математические Заметки, **71** (2002), 109–121.

[10] R. A. DeVore, V. N. Temlyakov, *Nonlinear approximation by trigonometric sums*, Journal of Fourier Analysis and Applications, **2** (1995), 29–8.

[11] V. N. Temlyakov, *Greedy algoritm and $m-$ term trigonometric approximation*, Constructive Approximation, **14** (1998), 569–587.

[12] Б. С. Кашин, В. Н. Темляков, *О наилучших $M-$ членных приближениях и энтропии множеств в пространствах L^1*, Математические Заметки, **56** (1994), 57–86.

[13] Б. С. Кашин, *Аппроксимативных свойствах полных ортонормированных систем*, Труды Математического Института АН СССР, **172** (1985), 187–201.

[14] Д. Б. Базарханов, *Оценки некоторых аппроксимативных характеристик пространств Никольского – Бесова обобщенной смешанной гладкости*, Доклады Российской Академии Наук, **426** (2009), 11–14.

[15] R. A. DeVore, *Nonlinear approximation*, Acta Numerica, **7** (1998), 51–150.

[16] V. N. Temlyakov, *Nonlinear methods approximation*, Foundations Computational Mathematics, **3** (2003), 33–107.

[17] Г. Акишев, *О порядках приближения функциональных классов в пространстве Лоренца с анизотропной нормой*, Математические Заметки, **81** (2007), 3–16.

[18] Г. Акишев, *О порядках M - членного приближения классов функций в пространствах Лебега со смешанной нормой*, Математический Журнал, http://www.math.kz, **1** (2007), 5–14.

[19] Г. Акишев, *О порядках приближения классов гладких функций в пространствах Лебега смешанной нормой*, Ученые записки Казанского гос. университета, серия физ.- мат. науки, http://www.ksu.ru/uz, **148** (2006), 5–17.

[20] О. В. Бесов, *Теорема Литльвуда-Пэли для смешанной нормы*, Труды Математического Института АН СССР, **170** (1984), 31–36.

[21] М. К. Потапов, *Теоремы вложения в смешанной метрике* Труды Математического Института АН СССР, **156** (1980), 143–156.

[22] С. М. Никольский, *Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем*, Известия АН СССР, серия математическая, **10** (1946), 207–256.

[23] Э. М. Галеев, *Порядковые оценки производных периодического многомерного α – ядра Дирихле в смешанной норме*, Математический Сборник, **117** (1982), 32–43.

[24] Г. Акишев, *Об оценках наилучшего M - членного приближения классов в разных метриках*, Евразийский Математический Журнал, **3** (2006), 22–33.

[25] Г. Акишев, *О порядках M - членного приближения классов периодических функций*, Математический Журнал, http://www.math.kz, **4** (2006), 5–11.

[26] Г. Акишев, *Об оценках наилучшего M - членного приближения класса Бесова*, Математический Журнал, http://www.math.kz, **4** (2007), 5–11.

Габдолла Акишевич Акишев
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова,
ул. Университетская 28,
100028, Караганда, Казахстан
E-mail address: akishev@ksu.kz