S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 284–339 (2010) УДК 517.968.73, 517.933
MSC 39A99

ТЕОРИЯ ДРОБНОГО ЗАТУХАЮЩЕГО ОСЦИЛЛЯТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

К. К. КАЗБЕКОВ

Abstract. General solution of the Cauchy problem for the class of fractional differential equations of the oscillatory type with attenuating part in the operator field of relations is found in the paper. For new generalized function of the Mittag-Leffler type with the help of which the general solution is represented a series of basic properties is being proved. Formal examples of the equation theory application in some generalized problems of theoretical mechanics such as motion of mathematical pendulum, motion of spherical pendulum, motion of heavy symmetric top with fixed low point and the Foucault pendulum theory are given.

Keywords: equation of oscillator, function of the Mittag-Leffler, pendulum.

1. Исходные теоретические модели

Рассмотрим кратко, в качестве введения, некоторые задачи теоретической механики в которых возникают дифференциальные уравнения, обобщение которых на дробный случай при учете затухания составляет основной предмет изучения данной работы.

1.1. **Математический маятник.** Рассмотрим задачу о математическом маятнике [1,2,3], т. е. задачу о совершаемых в вертикальной плоскости колебаниях тяжелого шарика массы m, подвешенного на нити длиной l, в поле тяжести U с величиной ускорения свободного падения g. Пусть φ — переменный угол между нитью и вертикалью, φ_0 — максимальный угол отклонения; t — время отсчитываемое от момента, когда $\varphi = 0$.

Kazbekov, K.K., The theory of fractional differential equation of the oscillatory type with attenuating part.

Работа поддержана Российским Фондом содействия отечественной науке.

Поступила 29 апреля 2010 г., опубликована 4 октября 2010 г.

Лагранжиан системы равен:

$$L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi, \tag{1.1}$$

где $\dot{\varphi}$ — принятое в механике обозначение первой производной по времени t.

Уравнение движения маятника, следующее из лагранжиана (1.1) имеет вид:

$$\ddot{\varphi}(t) + \omega_{00}^2 \sin\varphi(t) = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\omega_{00} = \sqrt{g/l}$ — "собственная"частота колебаний маятника; начальный угол $\varphi(0) = 0$, начальная скорость $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0 > 0$.

Энергия движения маятника:

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0, \tag{1.3}$$

т. е. равна потенциальной энергии маятника в точке максимального отклонения.

Вычисление периода маятника, как учетверенного времени прохождения интервала углов от нуля до φ_0, приводит к выражению [1, 2]:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{2g}}\int\limits_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}} = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right), \tag{1.4}$$

где $K(k)$ — эллиптический интеграл первого рода [4]. При малых колебаниях, когда $\sin\varphi_0/2 \approx \varphi_0/2$, разложение функции $K(k)$ дает:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \dots\right\}. \tag{1.5}$$

Первый член этого разложения отвечает известной элементарной формуле [5]. По сравнению с ним поправочные члены ряда (1.5) составляют около $0,05\%$ при $\varphi_0 = 5°$. Поэтому на практике почти всегда (за исключением случаев когда нужна очень большая точность) пользуются приближенной формулой. Идеология теории математического маятника применяется напрямую в гравиметрии. Точнее, эта теория лежит в основе действия разнообразных маятниковых приборов, предназначенных для определения ускорения силы тяжести [6,7,8].

Если начальная скорость маятника не лежит в плоскости начального отклонения, то движение маятника уже не будет плоским. Маятник будет описывать эллипсоподобные траектории на сферической поверхности. Такой маятник называют сферическим.

1.2. **Сферический маятник.** Представим схему интегрирования [1,9,13] уравнения движения сферического маятника — материальной точки m, движущейся, как сказано выше, по поверхности сферы радиуса l в поле тяжести.

В сферических координатах с началом в центре сферы и полярной осью, направленной вертикально вниз, функция Лагранжа маятника:

$$L = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right) + mgl\cos\theta. \tag{1.6}$$

Координата φ — циклическая, поэтому сохраняется обобщенный импульс p_φ, совпадающий с z-компонентой момента:

$$ml^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = M_z = \text{const}. \tag{1.7}$$

Энергия

$$E = \frac{ml^2}{2}\left(\dot\theta^2 + \dot\varphi^2 \sin^2\theta\right) - mgl\cos\theta = \tag{1.8}$$

$$= \frac{ml^2\dot\theta^2}{2} + \frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta.$$

Определяя отсюда $\dot\theta$ и разделяя переменные, получим:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/ml^2)\left[E - U_{\text{эфф}}(\theta)\right]}}\ , \tag{1.9}$$

где введена "эффективная потенциальная энергия"

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2\sin^2\theta} - mgl\cos\theta. \tag{1.10}$$

Для угла φ, используя (1.7), найдем

$$\varphi = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\theta)}}. \tag{1.11}$$

Интегралы (1.9) и (1.11) приводятся к эллиптическим интегралам соответственно первого и третьего рода.

Область движения по углу θ определяется условием $E > U_{\text{эфф}}$, а ее границы — уравнением $E = U_{\text{эфф}}$ т.е.:

$$\cos^3\theta + \left(\frac{E}{mgl}\right)\cos^2\theta - \cos\theta + \left[\frac{M_z^2 - 2ml^2E}{2m^2gl^3}\right] = 0. \tag{1.12}$$

Последнее, как видно, представляет собой кубическое уравнение для $\cos\theta$, имеющее в промежутке от -1 до $+1$ два корня, определяющих положение двух параллельных окружностей на сфере, между которыми заключена вся траектория [1,9]. Общий характер движения сферического маятника таков [9]: материальная точка описывает по сферической поверхности волнообразную кривую в одном направлении между (указанными выше) двумя параллельными горизонтальными кругами, причем два последовательных "гребня"кривой отстают друг от друга на угол, больший $180°$.

Если оба предельных горизонтальных круга сливаются в один, то получается так называемый конический маятник [9], в котором материальная точка описывает окружность, лежащую в пределах нижней полусферы, а нить — боковую поверхность конуса, образующие которого составляют с вертикалью угол φ.

Для того чтобы это было возможно, горизонтальная скорость v материальной точки должна удовлетворять соотношению [9]:

$$v^2 = gl\sin\varphi \cdot \operatorname{tg}\varphi. \tag{1.13}$$

1.3. **Симметрический волчок с неподвижной нижней точкой.** Напомним [1,2,3], что под симметрическим волчком в механике понимается твердое тело, два главных момента инерции которого равны друг другу: $I_1 = I_2 \neq I_3$.

Приведение к квадратурам задачи о движении тяжелого симметрического волчка с неподвижной нижней точкой в целом подобно решению задачи о сферическом маятнике. Однако детали схемы в этом случае гораздо сложнее [1,10,12].

Выберем совместное начало подвижной $S(x_1, x_2, x_3)$ и неподвижной $S(X, Y, Z)$ систем координат в неподвижной точке волчка O, а ось Z направим по вертикали. Функция Лагранжа волчка в поле тяжести [1,2,12]:

$$L = \frac{I_1 + \mu l^2}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 - \mu g l \cos \theta, \tag{1.14}$$

где μ — масса волчка, l — расстояние от нижней точки до центра инерции; (θ, φ, ψ) — эйлеровы углы, определяющие ориентацию осей (x_1, x_2, x_3) движущейся системы кооринат относительно неподвижной системы (X, Y, Z).

Из (1.14) непосредственно замечаем, что координаты ψ и φ — циклические. Поэтому сразу получаем два интеграла движения волчка:

$$p_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3 \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right) = \mathrm{const} \equiv M_3, \tag{1.15}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \left(I_1' \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta \right) \dot{\varphi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = \mathrm{const} \equiv M_z, \tag{1.16}$$

где введено обозначение $I_1' = I_1 + \mu l^2$. Величины p_ψ и p_φ представляют собой составляющие вращательного момента, определенного относительно точки O, соответственно по осям x_3 и Z. Кроме того сохраняется энергия волчка:

$$E = \frac{I_1}{2} \left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \right) + \frac{I_3}{2} \left(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta \right)^2 + \mu g l \cos \theta. \tag{1.17}$$

Из интегралов движения (1.15), (1.16) находим следующие соотношения:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1' \sin^2 \theta}, \tag{1.18}$$

$$\dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1' \sin^2 \theta} \cdot \cos \theta. \tag{1.19}$$

Выражения (1.18), (1.19) для $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ позволяют исключить их из выражения для энергии (1.17) так, что последнее преобразуется к виду

$$E' = \frac{I_1'}{2} \dot{\theta}^2 + U_{\text{эфф}}(\theta). \tag{1.20}$$

Здесь введены обозначения:

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2 I_3} - \mu g l, \tag{1.21}$$

$$U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{2 I_1' \sin^2 \theta} - \mu g l (1 - \cos \theta). \tag{1.22}$$

Выделяя теперь величину $\dot{\theta}$ из выражения (1.20) и разделяя переменные, получим

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I_1') \left(E' - U_{\text{эфф}}(\theta) \right)}}. \tag{1.23}$$

Интеграл (1.23) сводится к эллиптическому. Он позволяет выразить углы ψ и φ в виде квадратур как функции от θ при помощи уравнений (1.18), (1.19).

Условие $E' \geqslant U_{\text{эфф}}(\theta)$ определяет область изменения угла θ при движении волчка. Из (1.22) легко видеть, что функция $U_{\text{эфф}}(\theta)$ (при $M_3 \neq M_z$) для значений аргумента $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ стремится к $+\infty$, а в промежутке между ними проходит через минимум. Вследствие этого уравнение $E' = U_{\text{эфф}}$ должно иметь два корня, определяющих предельные углы θ_1 и θ_2 наклона оси волчка к вертикали.

Знак производной $\dot{\varphi}$ сохраняется или изменяется, смотря по тому остается ли неизменным или меняется (при изменении угла θ от θ_1 до θ_2) знак разности $M_z - M_3 \cos\theta$. В первом случае ось волчка прецессирует вокруг вертикали монотонно, одновременно совершая колебания (так называемую нутацию) вверх и вниз. Во втором случае направление прецессии противоположно на двух граничных окружностях, так что ось волчка перемещается вокруг вертикали, описывая петли. Наконец в предельном случае, когда одно из значений θ_1 или θ_2 совпадает с нулем разности $M_z - M_3 \cos\theta$, на соответствующей предельной окружности $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$ одновременно обращаются в нуль, так что ось волчка описывает траекторию вырожденных петель [3,10,11,12].

Отметим так же [11,12], что вращение волчка вокруг вертикальной оси будет устойчивым, если значение $\theta = 0$ отвечает минимуму функции $U_{\text{эфф}}(\theta)$. При малых углах θ эффективная потенциальная энергия волчка (1.22) принимает вид:

$$U_{\text{эфф}}(\theta) \approx \left(\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right)\theta^2, \tag{1.24}$$

откуда находим условие $M_3^2 > 4I_1'\mu g l$ или через угловую скорость вращения волчка Ω_3 вокруг оси x_3:

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu g l}{I_3^2}. \tag{1.25}$$

1.4. **Маятник Фуко.** Под маятником Фуко, как известно [5,9,13], понимается устройство, служащее для доказательства вращения Земли вокруг своей оси.

Определим влияние, оказываемое вращением Земли на малые колебания маятника [5,9].

Считая вертикальное смещение маятника малой величиной второго порядка и пренебрегая ею, можно считать движение тела происходящим в горизонтальной плоскости xy. Опуская члены, содержащие Ω^2 (где Ω — угловая скорость вращения Земли, принимаемая здесь постоянной), напишем уравнение движения в виде:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 2\Omega_z \dot{y}, \tag{1.26}$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = -2\Omega_z \dot{x}, \tag{1.27}$$

где ω — частота колебаний маятника без учета вращения Земли; $\Omega_z = \Omega \sin\varphi$, причем угол φ есть широта точки закрепления подвеса маятника. Уравнения (1.26) и (1.27) удобно представить в едином комплексном виде (умножая второе уравнение на $i = \sqrt{-1}$ и складывая с первым):

$$\ddot{\xi}(t) + 2i\Omega_z \dot{\xi}(t) + \omega^2 \xi(t) = 0, \tag{1.28}$$

заданном для комплексной величины $\xi = x + iy$.

При $\Omega_z << \omega$ решение уравнения (1.28) принимает вид:

$$\xi(t) = e^{-i\Omega_z t}\left(A_1 e^{i\omega t} + A_2 e^{-i\omega t}\right), \tag{1.29}$$

или

$$x + iy = e^{-i\Omega_z t}(x_0 + iy_0),$$

где функции $x_0(t)$, $y_0(t)$ дают траекторию маятника Фуко без учета вращения Земли. Таким образом влияние этого вращения сводится к повороту траектории маятника вокруг вертикали с угловой скоростью Ω_z. Наблюдатель, вращающийся вместе с Землей, видит постепенное изменение направления качаний маятника относительно окружающих земных предметов. Как показано выше, угловая скорость вращения плоскости качания маятника зависит от географической широты места наблюдения. На земных полюсах эта плоскость поворачивается на $360°$ в звездные сутки, т.е. на $15°$ в час; на экваторе вращение отсутствует вовсе. В промежуточных широтах за один час звездного времени угол поворота равен $15° \sin\varphi$.

2. Постановка задачи

Ранее в работе [14] была рассмотрена задача Коши для дробного биномиального дифферен- циального уравнения вида

$$\left(D_{0+}^{\alpha} + \lambda\right)^q f(t) = g(t), \qquad q \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

с произвольным вещественным параметром λ, когда начальные условия для уравнения (2.1):

$$D_{0+}^{\nu\alpha-k} f(0) = a_k^{\nu}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu n, \tag{2.2}$$

записаны с помощью набора некоторых вещественных чисел $\{a_k^{\nu}\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, q$.

Уравнение (2.1) рассматривается в операторном поле отношений $\mathfrak{M}(M)$, где M — кольцо Микусинского [15].

Напомним [15,16], что если L обозначает класс всех функций, определенных и суммируемых на полуоткрытом отрезке $[0, \infty)$, то под функциональным кольцом Микусинского M понимается множество всех функций, определенных в области $0 \leqslant t < \infty$, дифференцируемых в этой области и производная которых принадлежит множеству L. При этом всякую функцию $F(t)$ принадлежащую множеству M можно представить в виде

$$F(t) = F(0) + \int\limits_0^t f(u)du, \qquad \text{где} \qquad f(t) \in L.$$

Относительно обычных операций сложения функций и умножения функций на число множество M есть линейное подмножество в L.

Операционным произведением функций $F(t) \in M$ и $G(t) \in M$ является функция $K(t) \in M$, определенная равенством [16,17]:

$$K(t) = F(t) * G(t) \equiv \frac{d}{dt} \int\limits_0^t F(t-u)G(u)du. \tag{2.3}$$

Линейное множество M вместе с операцией умножения (2.3) образует коммутативное кольцо, которое собственно и называется кольцом Микусинского.

Так как кольцо Микусинского M является целостным кольцом без делителей нуля его можно расширить до поля отношений [16,17,18]. Последнее и является рассматриваемым полем $\mathfrak{M}(M)$ или просто $\mathfrak{M}$.

Элементами поля $\mathfrak{M}$ являются операторы. Точнее, элементами поля $\mathfrak{M}$ являются множества, состоящие из эквивалентных между собой пар $(F(t), G(t))$, $G(t) \not\equiv 0$, которые обозначаются символом $\frac{F}{G}$. Две пары $(F(t), G(t))$ и $(F_1(t),$

$G_1(t)$) называются эквивалентными, если $F * G_1 = F_1 * G$ и, следовательно, $\frac{F}{G} = \frac{F_1}{G_1}$ тогда и только тогда, когда $F * G_1 = F_1 * G$.

Множество всех операторов поля приводящихся к виду $\frac{F}{1}$ образует в поле $\mathfrak{M}$ подкольцо, изоморфное исходному подкольцу M. Поэтому вместо $\frac{F(t)}{1}$ можно писать $F(t)$, т.е. в $\mathfrak{M}(M)$ верно $\frac{F(t)}{1} = F(t)$.

Важным подполем поля $\mathfrak{M}$ является поле $\mathfrak{M}(S)$ всех преобразуемых по Лапласу операторов [19]. Можно показать [19], что каждому оператору $a \in \mathfrak{M}(S)$ ставится в соответствие функция $\bar{a}(z)$ комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$, преобразуемая по Лапласу.

Возвращаясь к уравнению (2.1) заметим, что в работе [14] введено обозначение, согласно которому D^{α}_{0+} означает оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля [20], такой что для любой функции $f(t) \in M$ или любого оператора $f(t) \in \mathfrak{M}(M)$:

$$D^{\alpha}_{0+} f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int\limits_0^t \frac{f(x)dx}{(t-x)^{\alpha-n+1}}, \tag{2.4}$$

где параметр дифференцирования α изменяется в пределах $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N} \equiv \{1, 2, 3, \dots\}$, а $f = f(t)$ — есть функциональное представление оператора $f \in \mathfrak{M}$.

При этом в [14] под решением дробного уравнения (2.1) в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ понимается всякий оператор $f \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющий начальным условиям (2.2) и обращающим уравнение (2.1) при подстановке в операторное тождество.

Относительно существования и единственности решения задачи Коши для линейных обыкновенных дробных дифференциальных уравнений с непрерывными коэффициентами выпишем две известные из [20] теоремы единственности.

Теорема (∗.1). *Пусть $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, m$, и $g(x)$ — непрерывные в интервале $(0, h)$ функции. Тогда задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x) D^{(m-k)\alpha}_{0+} f(x) = g(x), \qquad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.5}$$

$$D^{k\alpha-1}_{0+} f(+0) = b_k, \qquad k = 1, 2, \dots, m,$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ решение.

Теорема (∗.2). *При условиях теоремы (∗.1) задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x) D^{(m-k)\alpha}_{0+} f(x) = g(x), \qquad n-1 < \alpha \leqslant n, \tag{2.6}$$

$$D^{k\alpha-j}_{0+} f(+0) = b_{kj}, \qquad k = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

имеет единственное непрерывное на $(0, h)$ решение.

Для адаптации теорем (∗.1) и (∗.2) к решению задач Коши для уравнений вида (2.5) и (2.6) с соответствующими начальными условиями в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$, необходимо отметить следующие моменты.

Прежде всего заметим, что как было показано выше, всякий оператор a поля $\mathfrak{M}$ определен в последнем лишь с точностью до эквивалентности. Так если $a = \frac{F}{G} \in \mathfrak{M}$, $a_1 = \frac{F_1}{G_1} \in \mathfrak{M}$ и выполнено условие эквивалентности $F(t) * G_1(t) = F_1(t) * G(t)$ то и сами операторы a и a_1 совпадают в $\mathfrak{M}$: $a = a_1$. В связи с этим, всюду ниже, все эквивалентные между собой элементы поля $\mathfrak{M}(M)$ будем рассматривать как один единый оператор.

Далее, для переложения задач Коши (2.5), (2.6) в поле $\mathfrak{M}(M)$ необходимо заменить непрерывные на интервале $(0, h)$ функции $p_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ и $g(x)$ на операторы $\{p_k(t)\}_{k=0}^m$ и $g(t)$ поля $\mathfrak{M}$, а верхнюю границу интервала $(0, h)$ устремить к бесконечности: $h \to +\infty$.

Переход от некоторой непрерывной на $(0, +\infty)$ функции $\varphi(x)$ к оператору $\varphi(t)$ поля $\mathfrak{M}$ следует производить в предположении, что функция $\varphi(x)$ преобразуема по Лапласу. Точнее, обозначим через $S \subset M$ множество функций $\varphi(x)$, для которых интеграл Лапласа

$$f^*(z) = \int\limits_0^\infty f(x) e^{-zx} dx \tag{2.7}$$

сходится абсолютно. В свою очередь, через S^* обозначим множество функций комплексной переменной $z = x + iy$, представимых интегралом (2.7), где $f(x) \in S$. Как известно [19], множество S^* состоит из функций аналитических в полуплоскостях $\mathrm{Re} z > \gamma$, где γ, вообще говоря, зависит от выбора функции $f^*(z)$.

Указанное ранее подполе $\mathfrak{M}(S) \subset \mathfrak{M}(M)$ состоит из элементов $a(t) = \frac{F(t)}{G(t)}$, где $F(t)$, $G(t) \in S$. Каждому оператору $a \in \mathfrak{M}(S)$ можно поставить в соответствие функцию $\bar{a}(z)$ (которое обозначается как $a \div \bar{a}(z)$) следующим образом [16,19]: если $a(t) = \frac{F(t)}{G(t)}$, то $\bar{a}(z) = \frac{F^*(z)}{G^*(z)}$, где $F^*(z)$, $G^*(z)$ представимы абсолютно сходящимися интегралами Лапласа. Совокупность всех функций $\bar{a}(z)$ обозначим через $\overline{\mathfrak{M}}(S)$; она является образом поля $\mathfrak{M}(S)$ при преобразовании $(\div)$. Существует известная теорема [19], утверждающая изоморфизм полей $\mathfrak{M}(S)$ и $\overline{\mathfrak{M}}(S)$.

Представленную цепь рассуждений резюмируем в виде следующего простого утверждения.

Предложение 2.1. *Существует гомоморфное отображение множества S в поле $\mathfrak{M}(M)$.*

$\lhd$ Очевидно, что S^* есть линейное множество. Кроме того, из теоремы Бореля [19] следует, что если $f^*(z) \in S^*$ и $g^*(z) \in S^*$, то и их произведение $f^*(z) g^*(z)$ тоже принадлежит S^*. То есть S^* есть кольцо относительно обычных операций сложения и умножения.

Более того, множество всех функций $\bar{a}(z)$ поля $\overline{\mathfrak{M}}(S)$, приводящихся к виду $\frac{F^*(z)}{1}$, образует (в силу изоморфизма полей $\mathfrak{M}(S)$ и $\overline{\mathfrak{M}}(S)$) в поле $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ подкольцо $S^* \subset \overline{\mathfrak{M}}$, изоморфное исходному кольцу S^*.

Теперь искомое отображение $\phi : S \to \mathfrak{M}(M)$, реализуется как композиция $\phi = \psi \circ \pi$ двух отображений: гомоморфизма $\pi : S \to S^*$, осуществляющего отображение посредством интегрального преобразования (2.7) и отображения $\psi : S^* \to \mathfrak{M}(S)$, осуществляемого с помощью изоморфизма $\overline{\mathfrak{M}}(S) \div \mathfrak{M}(S)$. $\rhd$

Следующие три определения конкретизируют понятие решения дробного уравнения, интуитивно использованное в работе [14].

Определение 2.1. *Пусть оператор $f \in \mathfrak{M}(M)$ имеет в поле $\mathfrak{M}$ функциональное представление $f = f(t)$, и пусть соответствие $C_{\mathfrak{M}} : C(\mathbb{R}_0^+) \to \mathfrak{M}(M)$ осуществляет мономорфное отображение непрерывных на полуинтервале $(0, +\infty)$ функций в поле операторов $\mathfrak{M}(M)$ по правилу $C_{\mathfrak{M}} : \varphi(x) \mapsto \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функциональное представление оператора $\varphi \in \mathfrak{M}$. Прообраз оператора $f \in \mathfrak{M}$ при мономорфизме $C_{\mathfrak{M}}$ будем называть классическим аналогом оператора f.*

Определение 2.2. *Оператор $f \in \mathfrak{M}(M)$ будем называть S-непрерывным в поле $\mathfrak{M}$ если при мономорфизме $C_{\mathfrak{M}}$ у оператора f существует классический аналог, являющийся непрерывной на $(0, +\infty)$ функцией $f(x) \in M$ интеграл Лапласа от которой сходится абсолютно.*

Определение 2.3. *Под решением обыкновенного дробного дифференциального уравнения произвольного вида в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ понимается всякий S-непрерывный оператор $f \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющий соответствующим начальным условиям и обращающим данное уравнение при подстановке в операторное тождество.*

Предложение 2.1., определения 2.1 - 2.3 и ряд дополнительных рассуждений позволяют переформулировать теоремы $(*.1)$ и $(*.2)$ для поля отношений.

Теорема 2.1. *Пусть $p_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m$ и $g(t)$ — заданные S-непрерывные операторы поля $\mathfrak{M}(M)$. Тогда задача Коши*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(t) D_{0+}^{(m-k)\alpha} f(t) = g(t), \qquad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.8a}$$

$$D_{0+}^{k\alpha-1} f(0) = b_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет единственное (с точностью до эквивалентности) решение в поле $\mathfrak{M}(M)$ в смысле определения 2.3.

Теорема 2.2. *При условиях теоремы 2.1. задача Коши:*

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(t) D_{0+}^{(m-k)\alpha} f(t) = g(t), \qquad n - 1 < \alpha \leqslant n, \tag{2.8b}$$

$$D_{0+}^{k\alpha-j} f(0) = b_{kj}, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет единственное (с точностью до эквивалентности) решение в поле $\mathfrak{M}(M)$ в смысле определения 2.3.

Приведём так-же без доказательства формулировку теоремы существования и единственности решения задачи Коши для интересующего нас в данной работе класса уравнений.

Теорема 2.3. *Пусть $p_k(t)$, $k = 0, 1, \ldots, q+1$ и $g(t)$-заданные S-непрерывные операторы поля $\mathfrak{M}(M)$. Тогда задача Коши для гиперосцилляторного уравнения*

$$\sum_{k=0}^{q} p_k(t) D_{0+}^{\alpha+(q-k)} f(t) + p_{q+1}(t) f(t) = g(t), \tag{2.9}$$

$$D_{0+}^{\alpha-j} f(0) = b_j, \qquad j = -(q-1), -(q-2), \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n,$$

где $q, n \in \mathbb{N}$ и $n-1 < \alpha \le n$ имеет единственное (с точностью до эквивалентности) решение в поле $\mathfrak{M}(M)$ в смысле определения 2.3.

Полные доказательства теорем 2.1, 2.2. и в особенности теоремы 2.3. достаточно ёмкие сами по себе, увели бы нас несколько в сторону от основной цели работы и потому будут приведены в отдельном сообщении.

Выпишем здесь так-же для удобства необходимые нам в дальнейшем результаты из работы [14].

Лемма (∗.1). *Пусть нам задан произвольный оператор $f \in \mathfrak{M}$ с функциональным представлением $f = f(t)$ в поле $\mathfrak{M}(M)$ и с начальными условиями $D_{0+}^{\alpha-k} f(0) = b_k$, $k = 1, 2, \dots, n$, где параметр α таков, что $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда операторное изображение выражения $D_{0+}^{\alpha} f(t)$ в поле $\mathfrak{M}(M)$ имеет вид:*

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) = p^{\alpha} * f(t) - \sum_{k=1}^{n} b_k p^k. \tag{2.10}$$

Лемма (∗.2). *Пусть в поле $\mathfrak{M}(M)$ задан оператор*

$$\mathfrak{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) \equiv \frac{1}{(p^{\alpha}+\lambda)^q}, \qquad n-1 < \alpha \leqslant n, \qquad n, q \in \mathbb{N}, \tag{2.11}$$

где λ — произвольное вещественное число.

Тогда функциональное представление оператора $\mathcal{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda)$ в кольце M дается следующим выражением:

$$\mathfrak{B}_{\alpha}^{q}(p;\lambda) = t^{q\alpha} E_{\alpha, q\alpha+1}^{q-1}(-\lambda t^{\alpha}), \tag{2.12}$$

где $E_{\alpha,\beta}^{q-1}(x)$ — новые специальные функции введенные в [14] и являющиеся одним из обобщений функций типа Миттаг-Леффлера [21].

Точнее в [14] под функциями $E_{\alpha,\beta}^{q-1}(x)$ понимаются функции, определенные для вещественных $x \in \mathbb{R}$, вида

$$E_{\alpha,\beta}^{q-1}(x) \equiv \widetilde{P}_{q-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k) \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \tag{2.13}$$

где $q = 1, 2, \dots$. Здесь $\widetilde{P}_{q-1}(k)$ — многочлен степени $q-1$ от k. Последние возникают при сведении многомерной суммы величин $a(k_1 + \dots + k_q)$ по индексам $k_1, \dots, k_q$ к одномерной сумме с одним индексом k [14]:

$$\sum_{k_1,\dots,k_q=0}^{\infty} a(k_1 + \dots + k_q) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k) \cdot a(k). \tag{2.14}$$

Сформулируем теперь конкретно проблематику данного сообщения.

Постановка задачи. Найти в поле $\mathfrak{M}(M)$ единственное (с точностью до эквивалентности) решение задачи Коши для следующего класса дифференциальных уравнений дробного порядка:

$$D_{0+}^{\alpha+1} f(t) + \lambda_1 D_{0+}^{\alpha} f(t) + \lambda_2 f(t) = g(t), \tag{2.15}$$

где λ_1, λ_2 — произвольные вещественные числа, $g(t)$ — заданный оператор из поля $\mathfrak{M}(M)$, α — параметр дробного порядка в пределах $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n = 1, 2, \dots$.

Начальные условия для уравнения (2.15) имеют вид:

$$\lim_{t\to+0}\left[D_{0+}^{\alpha-k}f(t)\right]\equiv D_{0+}^{\alpha-k}f(0)=b_k, \tag{2.16}$$

$k=0,1,2,\ldots,n$. Повторим здесь, что под решением задачи Коши понимается операторное решение в поле $\mathfrak{M}(M)$ в смысле определения 2.3.

3. Решение однородного уравнения

Как и в [14] нахождение явного вида решения задачи Коши для уравнения (2.15) без правой части и начальными условиями (2.16) проведем в два этапа. В начале рассмотрим функциональное представление оператора заданного структурой уравнения (2.15) в кольце M. Затем, исходя из вида этого функционального представления, найдем операторное решение уравнения (2.15) в общем виде.

Уточним предварительно некоторые технические детали а так же соответствующую терминологию.

Рассмотрим в поле $\mathfrak{M}$ все операторы, приводящиеся к виду $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$. Очевидно, совокупность таких элементов будет линейным множеством. Функция $F(t)$ дифференцируема и $F'(t)=f(t)$. В связи с этим операторы поля $\mathfrak{M}$, приводящие к виду $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$, будем вслед за [16,19] называть функциями и вместо $\frac{F(t)}{t}$ писать $f(t)$, т.е.

$$\frac{F(t)}{t}=F'(t)=f(t),\qquad \text{если}\qquad F(0)=0. \tag{3.1}$$

Ясно, что не всякий оператор может быть приведен к функции. Например оператор дифферен- цирования $p=\frac{1}{t}$, очевидно, не может быть приведен к виду (3.1).

Так как, вообще говоря, всякая функция $y(t)$ из функционального кольца M есть частный случай некоторого оператора $\bar{y}(p)$ из поля $\mathfrak{M}$, то в терминологических целях будем, как и в [14], называть оператор $\varphi(p)$ из поля $\mathfrak{M}$ собственно оператором, если никаким образом он не сводится к виду $\frac{F(t)}{t}$, $F(0)=0$, где $F(t)\in M$.

Добавим здесь, что любая функция $f(t)$ множества S представима в виде $f(t)=\bar{f}(p)$; выражение $\bar{f}(p)$ называют операторным изображением функции $f(t)$, причем [19]:

$$\bar{f}(p)=p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \tag{3.2}$$

Более того, всякий оператор $f\in\mathfrak{M}$ допускает двойное p-представление и t-представление. Последнее мы называем функциональным представлением оператора f в поле $\mathfrak{M}(M)$. Его не следует (в общем случае) путать с приведением оператора $f(t)\in\mathfrak{M}$ к функции в поле $\mathfrak{M}$. Однако, если оператор $f(t)\in\mathfrak{M}$ удовлетворяет условиям (3.1), то разумеется функциональное представление оператора $f(t)$ совпадает с его функцией приведения.

Пусть $R(z)=\sum\limits_k\alpha_k z^k$ есть полином некоторой неотрицательной степени от переменной z в поле $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. Тогда соответствующий ему по изоморфизму оператор $R(p)$ в поле $\mathfrak{M}(S)$ равен $\sum\limits_k\alpha_k p^k$.

Запишем теорему, описывающую приводимость операторных полиномов к функциям [16,19].

Теорема (∗.3). *Если полином* $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k p^k$ *приводится к функциям, то* $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Из этой теоремы вытекает, что если степень многочлена $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k z^k$ больше или равна единице, то соответствующий оператор $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k p^k$ не может быть приведен к функции.

Напомним [19], что совокупность всех операторов вида $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^k$, $0 \leqslant n < \infty$, образует кольцо. Это кольцо может быть расширено до поля отношений. Элементами поля будут рациональные дроби от оператора p, т.е. операторы вида $R(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$, где $P_n(p) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k p^k$ и $Q_m(p) = \sum_{k=0}^{m}\beta_k p^k$. Оператор $R(p)$ называется рациональным оператором. Каждой рациональной дроби $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ отвечает рациональный оператор $R(p)$. Это соответствие устанавливает изоморфизм между полем всех рациональных дробей $\overline{\mathfrak{M}}_R$ и полем рациональных операторов $\mathfrak{M}_R$. Само поле рациональных операторов $\mathfrak{M}_R$ содержится в поле $\mathfrak{M}$ и, следовательно, является подполем поля $\mathfrak{M}$.

Для определения дробных операторов в поле $\mathfrak{M}$ проведем следующее построение.

Для каждого $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ зададим два гомоморфизма $\varphi_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\phi_\alpha : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, осуществляющие поэлементное отображение $\varphi_\alpha : z \mapsto z^\alpha$ и $\phi_\alpha : p \mapsto p^\alpha$ соответственно. Тогда каждая рациональная дробь $R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$ при гомоморфизме φ_α отобразится в дробь $R(z^\alpha) = \frac{P_n(z^\alpha)}{Q_m(z^\alpha)}$, а каждый рациональный оператор $R(p) = \frac{P_n(p)}{Q_m(p)}$ гомоморфизмом ϕ_α отображается в оператор $R(p^\alpha) = \frac{P_n(p^\alpha)}{Q_m(p^\alpha)}$.

Ясно, что как и в целом случае, каждой рациональной дроби $R(z^\alpha)$ биективно соответствует рациональный оператор $R(p^\alpha)$.

Обозначим совокупность всех рациональных дробей $R(z^\alpha)$ при фиксированном $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, через $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \subset \overline{\mathfrak{M}}(S)$, а совокупность всех рациональных операторов $R(p^\alpha)$ при том-же фиксированном α: $n-1 < \alpha \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$, через $\mathfrak{M}_R^\alpha \subset \mathfrak{M}(S)$. Биективное соответствие $R(z^\alpha) \doteqdot R(p^\alpha)$ между дробями $R(z^\alpha)$ и операторами $R(p^\alpha)$ приводит в целом к изоморфизму множеств $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \simeq \mathfrak{M}_R^\alpha$, которое в частном случае $\alpha = 1$ дает уже приведенный выше изоморфизм полей $\overline{\mathfrak{M}}_R \simeq \mathfrak{M}_R$. Следовательно гомоморфизмы $\varphi_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\phi_\alpha : \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, являются по существу гомоморфизмами $\varphi_\alpha : \overline{\mathfrak{M}}_R \to \overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ и $\phi_\alpha : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R^\alpha$.

Так как при гомоморфизмах φ_α и ϕ_α сохраняются соответствующие кольцевые структуры, которые далее могут быть расширены до полей отношений, то окончательно можно сказать, что множества $\mathfrak{M}_R^\alpha$ и $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ являются полями, а изоморфизм $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \simeq \mathfrak{M}_R^\alpha$ является изоморфизмом полей.

Сформулируем кратко данные построения в виде утверждения.

Предложение 3.1. *Отображения* $\varphi_\alpha : \overline{\mathfrak{M}}_R \to \overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ *и* $\phi_\alpha : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R^\alpha$, *для каждого фиксированного* $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *осуществляют гомоморфное расширение изоморфизма полей* $\overline{\mathfrak{M}}_R \simeq \mathfrak{M}_R$ *до изоморфизма полей* $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \simeq \mathfrak{M}_R^\alpha$.

В связи с предложением 3.1. запишем

Определение 3.1. *Элемент поля* $\mathfrak{M}_R^\alpha$, *соответствующий рациональной дроби* $R(z^\alpha)$ *поля* $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ *при изоморфизме* $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \simeq \mathfrak{M}_R^\alpha$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *назовем дробным рациональным оператором* $R(p^\alpha)$.

Переформулируем теперь теорему (∗.3) на случай дробных рациональных операторов.

Теорема 1. *Пусть* $P_{m_1}(p^\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{m_1} a_k p^{\alpha k}$, $Q_{m_2}(p^\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{m_2} b_k p^{\alpha k}$, m_1, $m_2 \in \{0, 1, 2, \dots\}$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$; $\{a_k\}_{k=0}^{m_1}$, $\{b_k\}_{k=0}^{m_2}$ — *некоторые числовые коэффициенты. Тогда дробный рациональный оператор* $R(p^\alpha) = P_{m_1}(p^\alpha)/Q_{m_2}(p^\alpha)$ *из поля* $\mathfrak{M}_R^\alpha$ *приводим к функции если и только если* $\alpha(m_1 - m_2) < 1$.

$\lhd$ В одну сторону доказательство теоремы очевидно, так как согласно одному из обобщений теоремы (∗.3) (см. [19]) произвольный рациональный оператор $R(p)$ поля $\mathfrak{M}(M)$ приводим в $\mathfrak{M}$ к функции, всякий раз, как только степень оператора $R(p)$ оказывается меньше единицы.

Для доказательства в другую сторону предположим, что оператор $R(p^\alpha)$ приводим в $\mathfrak{M}$ к функции, т.е. представим в виде $\frac{F(t)}{t}$, $F(0) = 0$. В таком случае, осуществляя в поле $\mathfrak{M}$ операционное преобразование, согласно [16,19] найдем:

$$\frac{F(t)}{t} = \frac{P_{m_1}(p^\alpha)}{Q_{m_2}(p^\alpha)} = t^{(m_2 - m_1)\alpha} \cdot \frac{\widetilde{P}_{m_1}(t^\alpha)}{\widetilde{Q}_{m_2}(t^\alpha)}, \tag{∗.1}$$

где

$$\widetilde{P}_{m_1}(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{m_1} \frac{a_k}{\Gamma(1 - k\alpha)} \cdot t^{(m_1 - k)\alpha}, \tag{∗.2}$$

$$\widetilde{Q}_{m_2}(t^\alpha) = \sum_{k=0}^{m_2} \frac{b_k}{\Gamma(1 - k\alpha)} \cdot t^{(m_2 - k)\alpha}. \tag{∗.3}$$

Из (∗.1) следует, что функция $F(t) \in M$ имеет вид:

$$F(t) = t^{1 + (m_2 - m_1)\alpha} \cdot \sigma_{m_1 m_2}^\alpha(t), \tag{∗.4}$$

где в свою очередь $\sigma_{m_1 m_2}^\alpha(t) = \widetilde{P}_{m_1}(t^\alpha)/\widetilde{Q}_{m_2}(t^\alpha)$. Так как $\lim\limits_{t \to 0} \sigma_{m_1 m_2}^\alpha(t) = \sigma_{m_1 m_2}(0) = (a_{m_1}/b_{m_2})$, то для выполнения условия $F(0) = 0$ необходимо чтобы $1 + (m_2 - m_1)\alpha > 0$ для данных α, m_1, m_2. $\rhd$

Теорема 3.1. позволяет уточнить не совсем корректно сформулированную теорему 2.2.2. в работе [14], в которой идёт речь об операторной природе решений задачи Коши для класса уравнений вида (2.1). Некорректность результата была обусловлена прямым применением теоремы (∗.3) к возникающим в теории уравнений класса (2.1) дробным операторам.

Теорема (∗.4). *В общем случае решение задачи Коши для класса уравнений вида (2.1) с начальными условиями (2.2), когда правая часть (2.1) есть S-непрерывный оператор и параметр* $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, *приводимо в поле* $\mathfrak{M}$ *к функции лишь при условии* $q(n - \alpha) < 1$.

Другими словами, решение задачи Коши для класса уравнений (2.1) является собственно оператором в поле $\mathfrak{M}$ только когда $q(n-\alpha) \geq 1$. В этом смысле пример приводимый для иллюстрации теоремы 2.2.2. в [14], как раз является примером функции в поле $\mathfrak{M}$ а не собственного оператора, как утверждается в работе.

Построения сформулированные в предложении 3.1. естественным образом обобщаются. Для этого заметим, что гомоморфизмы $\varphi_\alpha : \overline{\mathfrak{M}}_R \to \overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ и $\phi_\alpha : \mathfrak{M}_R \to \mathfrak{M}_R^\alpha$ на самих полях $(\overline{\mathfrak{M}}_R, \overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha)$ и $(\mathfrak{M}_R, \mathfrak{M}_R^\alpha)$ осуществляют следующее поэлементное отображение: $\varphi_\alpha : R(z) \mapsto R(z^\alpha)$ и $\phi_\alpha : R(p) \mapsto R(p^\alpha)$ соответственно.

Обозначим через $R_s(z^\alpha)$ рациональную дробь из поля $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha$ степени $s \in \mathbb{R}$ с характерным дробным показателем $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим совокупность рациональных дробей $\widetilde{R}(z^\beta)$ (где $\beta \in I_\beta \subset \mathbb{R}$, I_β — некоторый интервал из $\mathbb{R}$), образующих поле отношений $\overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta$, являющееся одновременно подполем в поле $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. По изоморфизму полей $\overline{\mathfrak{M}}(S) \simeq \mathfrak{M}(S)$, в поле $\mathfrak{M}(S)$ существует подполе $\mathfrak{M}_{\widetilde{R}}^\beta$, изоморфное исходному подполю $\overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta$ и состоящее из рациональных операторов $\widetilde{R}(p^\beta)$, $\beta \in I_\beta \subset \mathbb{R}$.

Определение 3.2. *Пару* $\left(\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}, \widetilde{\phi}_{\alpha\beta}\right)$ *назовем гомоморфным расширением изоморфизма полей* $\overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \simeq \mathfrak{M}_R^\alpha$ *до изоморфизма полей* $\overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta \simeq \mathfrak{M}_{\widetilde{R}}^\beta$, *если* $\left(\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta}, \widetilde{\phi}_{\alpha\beta}\right)$ *осуществляют гомоморфное отображение полей* $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} : \overline{\mathfrak{M}}_R^\alpha \to \overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta$ *и* $\widetilde{\phi}_{\alpha\beta} : \mathfrak{M}_R^\alpha \to \mathfrak{M}_{\widetilde{R}}^\beta$ *путем поэлементного правила* $\widetilde{\varphi}_{\alpha\beta} : R_s(z^\alpha) \mapsto \widetilde{R}_{s'}(z^\beta)$ *и* $\widetilde{\phi}_{\alpha\beta} : R_s(p^\alpha) \mapsto \widetilde{R}_{s'}(p^\beta)$ *соответственно.*

Определение 3.3. *Элемент поля* $\mathfrak{M}_{\widetilde{R}^\beta}$, *соответствующий рациональной дроби* $\widetilde{R}(z^\beta)$ *поля* $\overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta$ *при изомоморфизме* $\overline{\mathfrak{M}}_{\widetilde{R}}^\beta \simeq \mathfrak{M}_{\widetilde{R}}^\beta$, $\beta \in I_\beta \subset \mathbb{R}$, *назовем обобщенным дробным рациональным оператором* $\widetilde{R}(p^\beta)$.

Утверждение о приводимости к функциям операторов типа $\widetilde{R}(p^\beta)$ принимает вид.

Теорема 2. *Обобщенный дробный рациональный оператор* $\widetilde{R}_s(p^\beta)$ *из поля* $\mathfrak{M}_{\widetilde{R}}^\beta$, $\beta \in I_\beta \subset \mathbb{R}$, *приводим в* $\mathfrak{M}$ *к функции если степень этого оператора меньше единицы* $s < 1$.

Доказательство теоремы 3.2. в общих чертах повторяет схему доказательства теоремы 3.1.

Для решения исходно поставленной в данном пункте задачи разберем ниже конкретный частный случай.

Пусть $\widetilde{P}_m(z;\beta)$ — обобщенные полиномы вида:

$$\widetilde{P}_m(z;\beta) = a_0 + \sum_{j=1}^{m} z^{j\beta} P_j(z), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{3.3}$$

где $P_j(z) = \sum\limits_{k=1}^{m_j} a_k(j) z^k$; m, $m_1, \ldots, m_m$ — произвольные натуральные; a_0, $a_k(j) = a_{kj}$, $k = \overline{1, m_j}$, $j = \overline{1, m}$ — числовые коэффициенты; $\beta \in I_\beta \subset \mathbb{R}$.

Предложение 3.2. *Совокупность обобщенных полиномов $\widetilde{P}_m(z;\beta)$ вида (3.3) образует в поле $\mathfrak{M}$ кольцо K_β.*

$\triangleleft$ Пусть $\widetilde{P}_{n_1}(z;\beta)$ и $\widetilde{Q}_{n_2}(z;\beta)$ два обобщенных полинома из указанной совокупности K_β и пусть для определенности $n_2 \geqslant n_1$. Тогда сумма

$$\widetilde{P}_{n_1}(z;\beta)+\widetilde{Q}_{n_2}(z;\beta)=(a_0+b_0)+\sum_{j=1}^{n_1} z^{j\beta}\left(P_j(z)+Q_j(z)\right)+\sum_{j=n_1+1}^{n_2} z^{j\beta}Q_j(z)=$$

$$=c_0+\sum_{j=1}^{n_2} z^{j\beta}\widetilde{Q}_j(z)=\widetilde{N}_{n_2}(z;\beta)\in K_\beta, \qquad (*.1)$$

где $c_0=(a_0+b_0)$; $\widetilde{Q}_j(z)=P_j(z)+Q_j(z)$ для $j=\overline{1,n_1}$ и $\widetilde{Q}_j(z)=Q_j(z)$ для $j=\overline{n_1+1,n_2}$.

Произведение полиномов

$$\widetilde{P}_{n_1}(z;\beta)\cdot\widetilde{Q}_{n_2}(z;\beta)=a_0b_0+a_0\sum_{j=1}^{n_2} z^{j\beta}Q_j(z)+$$

$$+b_0\sum_{j=1}^{n_1} z^{j\beta}P_j(z)+\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} z^{\beta(j_1+j_2)}P_{j_1}(z)Q_{j_2}(z)=$$

$$=a_0b_0+\sum_{j=1}^{n_2} z^{j\beta}\widetilde{Q}'_j(z)+\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2} z^{\beta(j_1+j_2)}D_{j_1j_2}(z)=$$

$$=c'_0+\sum_{j=1}^{n_2} z^{j\beta}\widetilde{Q}'_j(z)+\sum_{j=2}^{n_1+n_2} z^{\beta j}D'_j(z)=$$

$$=c'_0+\sum_{j=1}^{n_1+n_2} z^{j\beta}\widetilde{D}'_j(z)=\widetilde{N}'_{n_1+n_2}(z;\beta)\in K_\beta, \qquad (*.2)$$

где $c'_0=a_0b_0$, $\widetilde{Q}'_j(z)=a_0Q_j(z)+b_0P_j(z)$ для $j=\overline{1,n_1}$ и $\widetilde{Q}'_j(z)=a_0Q_j(z)$ для $j=n_1+1,\ldots,n_2$;

$$D_{j_1j_2}(z)=\sum_{k_1=1}^{m_{j_1}}\sum_{k_2=1}^{m_{j_2}} a_{k_1}(j_1)b_{k_2}(j_2)z^{k_1+k_2}=\sum_{k=2}^{m_{j_1}+m_{j_2}} c_k(j_1,j_2)z^k; \qquad (*.3)$$

наконец $\widetilde{D}'_1(z)=\widetilde{Q}'_1(z)$, $\widetilde{D}'_j(z)=\widetilde{Q}'_j(z)+D'_j(z)$ для $j=\overline{2,n_2}$ и $\widetilde{D}'_j(z)=D'_j(z)$ для $j=n_2+1,\ldots,n_1+n_2$. $\triangleright$

Так как кольцо K_β является целостным (не имеет делителей нуля), то его можно расширить до поля отношений $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}$, — подполя поля $\overline{\mathfrak{M}}(S)$. Элементами поля будут обобщенные рациональные дроби вида $\widetilde{R}(z;\beta)=\widetilde{P}_{m_1}(z;\beta)/\widetilde{Q}_{m_2}(z;\beta)$, где $\widetilde{P}_{m_1}(z;\beta)$, $\widetilde{Q}_{m_2}(z;\beta)$— полиномы кольца K_β.

По изоморфизму полей $\overline{\mathfrak{M}}(S)$ и $\mathfrak{M}(S)$, полю $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}$ соответствует поле операторов $\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$, —подполе поля $\mathfrak{M}(S)$. Элементами поля $\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$ являются обобщенные дробные рациональные операторы $\widetilde{R}(p;\beta)$, соответствующие рациональным дробям $\widetilde{R}(z;\beta)$ при изоморфизме полей $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}\simeq\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$. Подобно дроби $\widetilde{R}(z;\beta)$

оператор $\widetilde{R}(p;\beta)$ имеет вид:

$$\widetilde{R}(p;\beta)=\frac{\widetilde{P}_{m_1}(p;\beta)}{\widetilde{Q}_{m_2}(p;\beta)}, \tag{3.4}$$

где например $\widetilde{P}_{m_1}(p;\beta)$ задается операторным аналогом выражения (3.3).

В частном случае, когда $\beta=0\in I_\beta$, поле $\mathfrak{M}^0_{\widetilde{R}}$ состоит из операторов $\widetilde{R}(p;0)\equiv \widetilde{R}^0(p)$ вида $\widetilde{R}^0(p)=\widetilde{P}^0_{m_1}(p)/\widetilde{Q}^0_{m_2}(p)$, где $\widetilde{P}^0_{m_1}(p)\equiv\widetilde{P}_{m_1}(p;0)$, $\widetilde{Q}^0_{m_2}(p)\equiv\widetilde{Q}_{m_2}(p;0)$ и, например $\widetilde{P}^0_{m_1}(p)=a_0+\sum\limits_{j=1}^{m_1}P_j(p)$.

В целом поле $\mathfrak{M}^0_{\widetilde{R}}$ изоморфно полю дробей $\overline{\mathfrak{M}}^0_{\widetilde{R}}$. Гомоморфное расширение изоморфизма полей $\overline{\mathfrak{M}}^0_{\widetilde{R}}\simeq\mathfrak{M}^0_{\widetilde{R}}$ до изоморфизма полей $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}\simeq\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$, при произвольном фиксированном $\beta\in I_\beta\subset\mathbb{R}$ (при условии, что $0\in I_\beta$) реализуется парой отображений $(\widetilde{\varphi}_{0\beta},\widetilde{\phi}_{0\beta})$, где $\widetilde{\varphi}_{0\beta}:\overline{\mathfrak{M}}^0_{\widetilde{R}}\to\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}$, $\widetilde{\phi}_{0\beta}:\mathfrak{M}^0_{\widetilde{R}}\to\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$, причем поэлементное соответствие имеет вид $\widetilde{\varphi}_{0\beta}:\widetilde{R}^0(z)\mapsto\widetilde{R}(z;\beta)$, $\widetilde{\phi}_{0\beta}:\widetilde{R}^0(p)\mapsto\widetilde{R}(p;\beta)$.

Однако расширение $(\widetilde{\varphi}_{0\beta},\widetilde{\phi}_{0\beta})$ до изоморфизма полей $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}\simeq\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$ не является расширением в смысле определения 3.2, так как вообще говоря, в случае операторов вида (3.4) между полями $\overline{\mathfrak{M}}^\alpha_{R}$ и $\overline{\mathfrak{M}}^\beta_{\widetilde{R}}$ (соответственно $\mathfrak{M}^\alpha_{R}$ и $\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$) невозможно установить однозначного соответствия.

Одним из частных представителей операторов поля $\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$, $\beta\in I_\beta\subset\mathbb{R}$, является подмножество $\mu^\beta(\widetilde{R}_1)\subset\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$, состоящее из операторов вида:

$$\widetilde{R}_1(p;\beta)=\frac{a_0+p^\beta P_1(p)}{b_0+p^\beta Q_1(p)}, \tag{3.5}$$

где входящие операторы: $P_1(p)=\sum\limits_{k=1}^{m_1}a_kp^k$, $Q_1(p)=\sum\limits_{k=1}^{m_2}b_kp^k$; m_1, $m_2\in\mathbb{N}$; $\{a_k\}_{k=1}^{m_1}$, $\{b_k\}_{k=1}^{m_2}$ — числовые коэффициенты.

Нас интересует далее один частный случай операторов вида $\widetilde{R}_1(p;\beta)\in\mu^\beta(\widetilde{R}_1)$, образуемый из выражения (3.5) при условиях: $\beta=\alpha-1$, где $\alpha\in(n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$; $a_0=1$, остальные $a_k=0$ для всех $k=\overline{1,m_1}$; $m_2=2$, причем $b_0=\lambda_2$, $b_1=\lambda_1$, $b_2=1$, где λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{R}$ (то есть оператор $P_1(p)=0$, а оператор $Q_1(p)=p^2+\lambda_1p$). Такой оператор $\widetilde{R}_1(p;\beta)=\widetilde{R}_1(p;\alpha-1)$ будем обозначать как $\mathcal{A}_\alpha(p)$. Итак считаем определенным следующий оператор:

$$\mathcal{A}_\alpha(p)=\mathcal{A}_\alpha(p;\lambda_1,\lambda_2)\equiv\frac{1}{p^{\alpha+1}+\lambda_1p^\alpha+\lambda_2}, \tag{3.6}$$

для всех λ_1, $\lambda_2\in\mathbb{R}$ и $n-1<\alpha\leqslant n$, $n=1,2,\dots$.

Лемма 3.1. *Функциональное представление оператора $\mathcal{A}_\alpha(p)\in\mu^\beta(\widetilde{R}_1)\subset\mathfrak{M}^\beta_{\widetilde{R}}$ в кольце M при произвольных вещественных значениях параметров λ_1, λ_2 и $\alpha\in(n-1,n]$, $n\in\mathbb{N}$, задается следующим выражением:*

$$\mathcal{A}_\alpha(p)=\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)}\cdot E^{q-1}_{1,1+q(\alpha+1)}(-\lambda_1t), \tag{3.7}$$

т.е. выражается через обобщенную функцию $E^{q-1}_{\beta,\gamma}(x)$ типа Миттаг-Леффлера, определенную равенством (2.13) для всех β, $\gamma>0$, $q=1,2,\dots$.

◁ Непосредственно из вида оператора $\mathcal{A}_\alpha(p)$ в поле $\mathfrak{M}^{\beta}_{\widetilde{R}} \subset \mathfrak{M}(S)$ замечаем, что $\mathcal{A}_\alpha(p)$ — обобщенный дробный рациональный оператор степени $s = -(\alpha + 1) < 0$. Следовательно, по теореме 3.2. оператор $\mathcal{A}_\alpha(p)$ в поле $\mathfrak{M}$ приводим к функции при любых $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Прежде всего найдем представление $\mathcal{A}_\alpha(p)$ в форме бесконечного операторного ряда. Имеем:

$$\mathcal{A}_\alpha(p) = \frac{1}{p^\alpha(p+\lambda_1)+\lambda_2} = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-\lambda_2)^{q-1}}{p^{\alpha q}(p+\lambda_1)^q} =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \frac{1}{p^{\alpha q}} * \mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1). \tag{$*.1$}$$

Здесь $\mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1)$ — частный случай оператора (2.11) с функциональным представлением в кольце M (следующим из (2.12))

$$\mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1) = t^q E_{1,q+1}^{q-1}(-\lambda_1 t). \tag{$*.2$}$$

Вычислим отдельное слагаемое во второй сумме равенства $(*.1)$, пользуясь представлением $(*.2)$:

$$\frac{1}{p^{\alpha q}} * \mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1) = \frac{t^{\alpha q}}{\Gamma(\alpha q + 1)} * \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k) \frac{(-\lambda_1)^k \cdot t^{k+q}}{\Gamma(k+q+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k) \cdot (-\lambda_1)^k \frac{t^{k+q+\alpha q}}{\Gamma(k+q+\alpha q+1)} = t^{q+\alpha q} \cdot E_{1,q+1+\alpha q}^{q-1}(-\lambda_1 t). \tag{$*.3$}$$

Подстановка $(*.3)$ в $(*.1)$ сразу приводит к искомому представлению (3.7). ▷

Лемма 3.1. позволяет сформулировать основной результат данного пункта.

Теорема 3. *Решение задачи Коши для класса однородных уравнений (2.15) с начальными условиями (2.16) в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ представляется в виде следующего общего выражения:*

$$\begin{aligned} f(t) &= b_0 \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-1} \cdot E_{1,q(\alpha+1)}^{q-1}(-\lambda_1 t) + \\ &+ \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-k} \cdot E_{1,1+q(\alpha+1)-k}^{q-1}(-\lambda_1 t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-k-1} \cdot E_{1,q(\alpha+1)-k}^{q-1}(-\lambda_1 t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

◁ В условиях постановки задачи в пункте 2, т.е. задачи Коши с начальными условиями (2.16), вещественными параметрами λ_1, λ_2 и $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, уравнение (2.15) без правой части принимает вид:

$$D_{0+}^{\alpha+1} f(t) + \lambda_1 D_{0+}^{\alpha} f(t) + \lambda_2 f(t) = 0. \tag{$*.1$}$$

Здесь $f = f(t)$ в общем случае оператор поля $\mathfrak{M}(M)$, причем собственно $f(t)$ есть функциональное представление оператора f в поле $\mathfrak{M}$.

Применяя к уравнению (∗.1) результат (2.10) леммы (∗.1) найдем операторное изображение уравнения (∗.1):

$$(p^{\alpha+1} + \lambda_1 p^{\alpha} + \lambda_2)\overline{f}(p) = b_0 p + \sum_{k=1}^{n} b_k(\lambda_1 + p)p^k. \tag{∗.2}$$

Операторное решение уравнения (∗.2) с использованием оператора (3.6) сводится к выражению:

$$\overline{f}(p) = \mathcal{A}_\alpha(p;\lambda_1,\lambda_2) * B_n(p;\lambda_1), \tag{∗.3}$$

где $B_n(p;\lambda_1)$ — оператор в правой части уравнения (∗.2). Перепишем (∗.3) в развернутом виде:

$$\overline{f}(p) = b_0\left[p * \mathcal{A}_\alpha(p)\right] + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k \left[p^k * \mathcal{A}_\alpha(p)\right] + \sum_{k=1}^{n} b_k \left[p^{k+1} * \mathcal{A}_\alpha(p)\right]. \tag{∗.4}$$

Из (∗.4) видно, что технически нахождение явного вида решения $f = f(t)$ в поле $\mathfrak{M}(M)$ сводится к нахождению функционального представления оператора $\left[p^k * \mathcal{A}_\alpha(p)\right]$ в поле $\mathfrak{M}$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$. Для этого воспользуемся функциональным представлением (3.7) леммы 3.1. для оператора $\mathcal{A}_\alpha(p)$ или представлением $\mathcal{A}_\alpha(p)$ в виде p-ряда (см. (∗.1) леммы 3.1.). Имеем:

$$\left[p^k * \mathcal{A}_\alpha(p)\right] = \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \frac{1}{p^{\alpha q - k}} * \mathcal{B}_1^q(p;\lambda_1) =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-k} \cdot E^{q-1}_{1,1+q(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t). \tag{∗.5}$$

При нахождении второго равенства в (∗.5) можно опираться на выражение (∗.3) леммы 3.1. Теперь искомое представление (3.8) возникает при подстановке равенства (∗.5) в выражение (∗. 4). ▷

Рассмотрим следующие частные примеры.

Пример 3.1. В одном из предельных частных случаев уравнения (2.15) параметр $\lambda_1 = 0$. Уравнение (2.15) при $\lambda_1 = 0$ в непосредственном виде принимает нестандартную форму, в связи с чем его необходимо преобразовать, точнее редуцировать к стандартному виду. Запишем сразу уравнение (2.15) в редуцированной форме:

$$D^{\alpha}_{0+} f(t) - \lambda f(t) = 0, \tag{3.9}$$

т.е. здесь положено, что $\lambda_2 = -\lambda$, $\alpha \in (n-1, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Редуцированные начальные условия для уравнения (3.9) соответственно принимают вид:

$$D^{\alpha-k}_{0+} f(0) = \lim_{t\to 0}\left[D^{\alpha-k}_{0+} f(t)\right] = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.10}$$

Редукция к уравнению (3.9) с начальными условиями (3.10), технически сводится в общем решении (3.8) теоремы 3.3. к замене в третьей сумме $\alpha+1 \to \alpha$ и $k \to k-1$; так же, для согласования начальных условий необходимо положить в (3.8) $b_0 = 0$.

Тогда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{q=1}^{\infty} \lambda^{q-1} t^{q\alpha-(k-1)-1} \cdot E^{q-1}_{1,q\alpha-(k-1)}(0) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\lambda^q t^{q\alpha}}{\Gamma(q\alpha+\alpha+1-k)} = \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k} \cdot E_{\alpha,\alpha+1-k}(\lambda t^{\alpha}), \tag{3.11}$$

т.е. в точности результат известный из [20].

Добавим для ясности, что при выводе (3.11) использовалось разложение функций $E^{q-1}_{\beta,\gamma}(x)$ в ряд (2.13) в форме

$$E^{q-1}_{\beta,\gamma}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} + \sum_{k=1}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k) \cdot \frac{x^k}{\Gamma(\beta k+\gamma)}, \tag{3.12}$$

откуда немедленно следует, что в нулевой точке

$$E^{q-1}_{\beta,\gamma}(x=0) = E^{q-1}_{\beta,\gamma}(0) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)}, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots. \tag{3.13}$$

Пример 3.2. В другом предельном случае, когда $\lambda_2 = 0$, внутренние суммы по "q" в решении (3.8) теоремы 3.3. незануляются только при $q = 1$, т.е.

$$f(t) = b_0 t^{\alpha} \cdot E^0_{1,\alpha+1}(-\lambda_1 t) + \lambda_1 \sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha+1-k} \cdot E^0_{1,1+(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} b_k t^{(\alpha+1)-k-1} \cdot E^0_{1,\alpha+1-k}(-\lambda_1 t), \tag{3.14}$$

где $E^0_{\beta,\gamma}(x) \equiv E_{\beta,\gamma}(x)$ — функция Миттаг-Леффлера.

Заметим, что уравнение (2.15) при λ_2=0 эквивалентно дифференциальному уравнению:

$$f'(t) + \lambda_1 f(t) = 0. \tag{3.15}$$

Действительно, из (2.15) при $\lambda_2 = 0$ следует, что

$$D^{\alpha+1}_{0+} f(t) + \lambda_1 D^{\alpha}_{0+} f(t) = D^{\alpha}_{0+}(D^1_{0+} f(t) + \lambda_1 f(t)) =$$

$$= D^{\alpha}_{0+}(f'(t) + \lambda_1 f(t)) = 0. \tag{3.16}$$

Из (3.16) неизбежно следует уравнение (3.15), так как $D^{\alpha}_{0+} F(t) \equiv 0$ для всех $t \in \mathbb{T}_0 \subset \mathbb{R}^+_0$ тогда и только тогда, когда $F(t) = 0$, $t \in \mathbb{T}_0$.

Следовательно, при $\lambda_2 = 0$ в уравнениии (2.15) следует сразу положить, что все $b_k = 0$, $k = \overline{1,n}$, за исключением $b_0 = D^{\alpha}_{0+} f(0) \neq 0$ и, кроме того, приравнять параметр α к нулю, т.е. $\alpha = 0$.

Тогда из выражения (3.14), полагая $\lambda_1 = \lambda$, найдем:

$$f(t) = b_0 E_{1,1}(-\lambda t) = b_0 e^{-\lambda t}, \tag{3.17}$$

т.е. решение уравнения (3.15), как и следовало.

Пример 3.3. В наиболее простом нетривиальном случае задачи Коши для уравнения (2.15), когда $n = 1$, $0 < \alpha \leqslant 1$, необходимо задать два начальных значения:

$$b_0 = D^{\alpha}_{0+} f(0) \quad \text{и} \quad b_1 = D^{\alpha-1}_{0+} f(0). \tag{3.18}$$

Оператор $B_n(p;\lambda_1)$ (см. (∗.3) теоремы 3.3.) в этом случае равен

$$B_1(p,\lambda_1) = (b_0 + b_1\lambda_1)p + b_1 p^2, \tag{3.19}$$

поэтому и общее решение, следующее из выражения (3.8) теоремы 3.3, принимает вид:

$$f_\alpha(t) = (b_0 + b_1\lambda_1)\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)-1} \cdot E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)}(-\lambda_1 t)+$$

$$+b_1\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)-2} \cdot E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)-1}(-\lambda_1 t). \tag{3.20}$$

В предельном случае, когда $\alpha = 1$, из (3.20) следует новое представление известного решения [22], выраженного в терминах специальных функций $E^{q-1}_{\beta,\gamma}$. Именно:

$$f_1(t) = (b_0 + b_1\lambda_1)\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{2q-1} \cdot E^{q-1}_{1,2q}(-\lambda_1 t)+$$

$$+b_1\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{2q-2} \cdot E^{q-1}_{1,2q-1}(-\lambda_1 t). \tag{3.21}$$

4. Неоднородный случай

Произведем обобщение теоремы 3.3. на случай задачи Коши для уравнения (2.15) с ненулевой правой частью и начальными условиями (2.16). Напомним, что в общем случае, в правой части уравнения (2.15) стоит оператор $g = g(t)$ поля $\mathfrak{M}(M)$, функциональное представление $g(t)$ которого в поле $\mathfrak{M}$ заранее известно.

Теорема 4. *Решение задачи Коши для класса неоднородных уравнений (2.15) с начальными условиями (2.16) и заданным оператором $g = g(t)$ в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ представляется в виде следующего общего выражения:*

$$f(t) = f_0(t) + \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-u)\cdot\mathcal{A}_\alpha(u)du =$$

$$= f_0(t) + \frac{d}{dt}\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}\int_0^t (t-u)^{q(\alpha+1)}\cdot E^{q-1}_{1,1+q(\alpha+1)}\left[-\lambda_1(t-u)\right]g(u)du, \tag{4.1}$$

где $f_0 = f_0(t)$ — решение (3.8) задачи Коши для однородного уравнения (2.15).

◁ В соответствии с выражением (∗.2) теоремы 3.3. операторное изображение неоднородного уравнения (2.15) принимает вид:

$$(p^{\alpha+1} + \lambda_1 p^\alpha + \lambda_2)\overline{f}(p) = \overline{g}(p) + b_0 p + \sum_{k=1}^{n} b_k(\lambda_1 + p)p^k. \tag{$*$.1}$$

Операторное решение уравнения (∗.1) в поле $\mathfrak{M}(M)$ сводится таким образом к сумме однородного и неоднородного членов:

$$\overline{f}(p) = \mathcal{A}_\alpha(p;\lambda_1,\lambda_2) * B_n(p;\lambda_1) + \mathcal{A}_\alpha(p;\lambda_1,\lambda_2) * \overline{g}(p). \tag{$*$.2}$$

Первое слагаемое в (∗.2) есть результат теоремы 3.3. Для второго слагаемого следует лишь учесть определение операторного произведения (2.3) в поле $\mathfrak{M}$

и выражение (3.7) леммы 3.1. для функционального представления оператора $\mathcal{A}_\alpha(p)$. Отсюда найдем:

$$\mathcal{A}_\alpha(p;\lambda_1,\lambda_2)*\bar{g}(p)=\frac{d}{dt}\int_0^t \mathcal{A}_\alpha(t-u)\cdot g(u)du=\frac{d}{dt}\int_0^t g(t-u)\cdot\mathcal{A}_\alpha(u)du=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}\int_0^t(t-u)^{q(\alpha+1)}\cdot E_{1,1+q(\alpha+1)}^{q-1}\left[-\lambda_1(t-u)\right]\cdot g(u)du. \qquad (*.3)$$

Первые два равенства в $(*.3)$ выражают перестановочное свойство свертки [19]. Допустимость почленного интегрирования (равно как и почленного дифференцирования) бесконечного произведения обусловлена методами операторного анализа в поле $\mathfrak{M}$, на деталях которого мы здесь останавливаться не будем (см. однако [15,16,19]). $\triangleright$

На практике обычно гораздо удобнее пользоваться непосредственно методами операционного исчисления, нежели применять для нахождения решения неоднорого уравнения (2.15) довольно громоздкое выражение (4.1).

В связи с этим, приведем ниже несколько простых поясняющих примеров решения задачи Коши уравнения (2.15) с правой частью, найденных при прочих равных условиях, указанных в постановке задачи в пункте 2.

Пример 4.1. В простейшем нетривиальном случае неоднорого уравнения (2.15) $g(t)=g_0=\text{const}\in\mathfrak{M}$. Из $(*.2)$ теоремы 4.1. находим:

$$f(t)=f_0(t)+\mathcal{A}_\alpha(p)*g_0=f_0(t)+g_0\mathcal{A}_\alpha(t)=$$

$$=f_0(t)+g_0\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)}\cdot E_{1,1+q(\alpha+1)}^{q-1}(-\lambda_1 t). \qquad (4.2)$$

Пример 4.2. Пусть $g(t)=g_0/p^\beta=(g_0t^\beta)/\Gamma(\beta+1)$, где β – произвольный положительный показатель, $\beta>0$. Решение уравнения (2.15) равно:

$$f(t)=f_0(t)+g(t)*\mathcal{A}_\alpha(p),$$

где в силу леммы 3.1. (см. равенства $(*.1)$ и $(*.3)$)

$$g(t)*\mathcal{A}_\alpha(p)=\frac{g_0}{p^\beta}*\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-\lambda_2)^{q-1}}{p^{\alpha q}(p+\lambda_1)^q}=g_0\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}\sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q-1}(k)\frac{(-\lambda_1)^k\cdot t^{k+\beta+q(\alpha+1)}}{\Gamma\left[k+\beta+q(\alpha+1)+1\right]}.$$

Таким образом

$$f(t)=f_0(t)+g_0\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)+\beta}\cdot E_{1,1+q(\alpha+1)+\beta}^{q-1}(-\lambda_1 t). \qquad (4.3)$$

Пример 4.3. Пусть $g(t)=g_0\sin\omega_0 t$, где $g_0,\omega_0=\text{const}\in\mathfrak{M}$. Неоднородная часть решения уравнения (2.15) равна:

$$g(t)*\mathcal{A}_\alpha(p)=g_0\sin\omega_0 t*\mathcal{A}_\alpha(p)=\frac{g_0\omega_0 p}{p^2+\omega_0^2}*\sum_{q=1}^{\infty}\frac{(-\lambda_2)^{q-1}}{p^{\alpha q}(p+\lambda_1)^q}=$$

$$=g_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega_0^{2k+1}\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}\frac{1}{p^{\alpha q+2k+1}}*\mathcal{B}_1^q(p;\lambda_1).$$

Отсюда решение (2.15) есть

$$f(t) = f_0(t) + g_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \omega_0^{2k+1} \times$$

$$\times \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \cdot t^{q(\alpha+1)+2k+1} \cdot E_{1,q(\alpha+1)+2k+2}^{q-1}(-\lambda_1 t). \tag{4.4}$$

В случае, если $g(t) = g_0 \sin \omega_0 t^\beta$, $\beta > 0$, решение уравнения (2.15) несколько усложняется:

$$f(t) = f_0(t) + g_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(2\beta k + \beta + 1)}{\Gamma(2k+2)} \omega_0^{2k+1} \times$$

$$\times \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \cdot t^{q(\alpha+1)+2\beta k+\beta} \cdot E_{1,q(\alpha+1)+2\beta k+\beta+1}^{q-1}(-\lambda_1 t). \tag{4.5}$$

Пример 4.4. Пусть с правой стороны уравнения (2.15) стоит оператор $g(t) = g_0 \exp(-\omega_0/4p) = g_0 J_0(\sqrt{\omega_0 t})$, где по прежнему g_0, $\omega_0 = \mathrm{const} \in \mathfrak{M}$, $J_0(x)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка [23]. Найдем неоднородную часть уравнения (2.15):

$$g(t) * \mathcal{A}_\alpha(p) = g_0 J_0(\sqrt{\omega_0 t}) * \mathcal{A}_\alpha(p) = g_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0)^k}{2^{2k} \cdot k!} \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \frac{1}{p^{\alpha q + k}} * \mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1).$$

Решение (2.15) таким образом равно:

$$f(t) = f_0(t) + g_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\omega_0)^k}{2^{2k} \cdot k!} \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)+k} \cdot E_{1,q(\alpha+1)+k+1}^{q-1}(-\lambda_1 t). \tag{4.6}$$

Пример 4.5. Пусть наконец неоднородный оператор в уравнении (2.15) равен

$$g(t) = g_0 \cdot {}_2 F_1 \left(a_0, 1; b_0; \frac{\omega_0}{p} \right) = g_0 \cdot {}_1 M_1(a_0, b_0, \omega_0 t),$$

где g_0, ω_0, a_0, $b_0 = \mathrm{const} \in \mathfrak{M}$; ${}_2F_1(a, b; c; x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, ${}_1M_1(a, b, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Куммера [23]. Имеем:

$$f(t) = f_0(t) + g_0 \cdot {}_1 M_1(a_0, b_0, \omega_0 t) * \mathcal{A}_\alpha(p) =$$

$$= f_0(t) + g_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k}{(b_0)_k} \omega_0^k \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} \frac{1}{p^{\alpha q + k}} * \mathfrak{B}_1^q(p; \lambda_1) = \tag{4.7}$$

$$= f_0(t) + g_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_0)_k}{(b_0)_k} \omega_0^k \sum_{q=1}^{\infty} (-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)+k} \cdot E_{1,q(\alpha+1)+k+1}^{q-1}(-\lambda_1 t).$$

Здесь $(a)_k = \Gamma(k + a)/\Gamma(a)$, $k = 0, 1, 2, \ldots,$ — символ Похгаммера [23]. Из сравнения выражений (4.6) и (4.7) замечаем, что внутренняя сумма по q у них полностью совпадает.

5. Функции $E^q_{\alpha,\beta}(z)$

Как показано в пунктах 3. и 4. решение задачи Коши для уравнения (2.15) естественным образом выражается через функции $E^{q-1}_{\alpha,\beta}(x)$, $q \in \mathbb{N}$, введённые в [14]. Функции $E^{q-1}_{\alpha,\beta}(x), x \in \mathbb{R}, q \in \mathbb{N}$, являются одним из обобщений специальных функций $E_{\alpha,\beta}(x)$, т. е. функций типа Миттаг - Леффлера [21,24]. Рассмотрим ниже подробнее некоторые основные свойства функций $E^q_{\alpha,\beta}(x)$.

5.1. **Некоторые элементарные соотношения.** Функции $E^q_{\alpha,\beta}(x)$ исходно возникли в работе [14] при вычислении операторов $\mathcal{B}^q_n(p;\lambda)$ в поле отношений $\mathfrak{M}(M)$. При этом, функциональное представление операторов $\mathcal{B}^q_n(p;\lambda)$ в $\mathfrak{M}$ обладает характерной особенностью, обусловившей строение функций $E^q_{\alpha,\beta}(x)$.

Определение 5.1. *Пусть нам задан числовой ряд вида*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a\left(k_1,\ldots,k_q\right), \quad q=1,2,\ldots, \tag{5.1}$$

который мы будем называть q - мерным числовым рядом. Ряд (5.1) *назовем вполне аддитивным, если для любого $q=1,2,\ldots$, выполнено свойство:*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a\left(k_1,\ldots,k_q\right) = \sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a\left(k_1+\ldots+k_q\right). \tag{5.2}$$

Как показано в [14] (см. пункт 2, выражение (2.14)) для вполне аддитивных q - мерных рядов выполняется простое преобразование к одномерному ряду

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a\left(k_1,\ldots,k_q\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k)\cdot a(k). \tag{5.3}$$

Здесь $\widetilde{P}_{q-1}(k)$ - вес слагаемого $a(k)$ в одномерной сумме, - суть многочлен степени $q-1$ от k, коэффициенты которого подлежат вычислению для каждого $q=1,2,\ldots$. Выпишем из [14] явный вид многочленов $\widetilde{P}_{q-1}(x)$ для первых четырех значений q:

$$\widetilde{P}_0(x)=1; \quad \widetilde{P}_1(x)=1+x; \quad \widetilde{P}_2(x)=1+\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2;$$
$$\widetilde{P}_3(x)=1+\frac{11}{6}x+x^2+\frac{1}{6}x^3. \tag{5.4}$$

Отметим, что свободный член многочлена $\widetilde{P}_{q-1}(x)$ равен единице для любого натурального q, т.е. $\widetilde{P}_{q-1}(0)=1, q\in\mathbb{N}$.

Укажем некоторые очевидные следствия преобразования (5.3) для степенных рядов.

Определение 5.2. *Нозовём q - мерным степенным рядом от переменного $x \in \mathbb{R}$, ряд*

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a\left(k_1,\ldots,k_q\right) x^{k_1+\ldots+k_q}, \quad q=1,2,\ldots, \tag{5.5}$$

заданный в области своей сходимости $\mathbb{R}_x \subset \mathbb{R}$. Ряд (5.5) будем называть вполне аддитивным, если вполне аддитивен соответствующий ему числовой ряд $\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} a(k_1,\ldots,k_q)$ вида (5.1).

Один из наиболее простых примеров вполне аддитивного ряда доставляет q - мерная сумма геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{(1-x)^q} = \sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} x^{k_1+\ldots+k_q} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(k)x^k, \quad |x|<1. \tag{5.6}$$

В частности при $q=2$ из (5.6) следует:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_1(k)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)\, x^k, \quad |x|<1. \tag{5.7}$$

В других случаях из (5.6) найдём при $|x|<1$:

$$\frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \widetilde{P}_0\,(k_1)\,\widetilde{P}_1\,(k_2)\,x^{k_1+k_2} = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_2\,(k)\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1+\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}k^2\right] x^k; \tag{5.8}$$

$$\frac{1}{(1-x)^4} = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \widetilde{P}_0\,(k_1)\,\widetilde{P}_2\,(k_2)\,x^{k_1+k_2} = \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \widetilde{P}_1\,(k_1)\,\widetilde{P}_1\,(k_2)\,x^{k_1+k_2} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_3\,(k)\,x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left[1+\frac{11}{6}k+k^2+\frac{1}{6}k^3\right] x^k. \tag{5.9}$$

Рассмотрим вполне аддитивную сумму другого вида. Пусть $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$; тогда из (5.3) найдём следующее преобразование многочленов $\widetilde{P}_{q-1}$:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{q_1}=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_2-1}\,(k_1+\ldots+k_{q_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_1-1}\,(k)\,\widetilde{P}_{q_2-1}\,(k)\,. \tag{5.10}$$

В частности при $q_1=q_2=q$ из (5.10) найдём:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}\,(k_1+\ldots+k_q) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}^2_{q-1}\,(k)\,. \tag{5.11}$$

Здесь $\widetilde{P}^2_{q-1}\,(k) \equiv \left[\widetilde{P}_{q-1}\,(k)\right]^2$ - возведение в квадрат величины $\widetilde{P}_{q-1}\,(k)$. Выражение (5.11) подсказывает общий метод возведения в степень под знаком суммы многочленов $\widetilde{P}_{q-1}$. Действительно, пусть $q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$, тогда следуя правилу (5.10) получим:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{q_1}=0}^{\infty} \widetilde{P}^{q_3-1}_{q_2-1}\,(k_1+\ldots+k_{q_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_1-1}\,(k)\,\widetilde{P}^{q_3-1}_{q_2-1}\,(k)\,, \tag{5.12}$$

откуда в частности при $q_1=q_2=q_3=q\in\mathbb{N}$ следует

$$\sum_{k_1,\ldots,k_q=0}^{\infty} \widetilde{P}^{q-1}_{q-1}\,(k_1+\ldots+k_q) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}^{q}_{q-1}\,(k)\,. \tag{5.13}$$

В более общем случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ - однозначные и непрерывные функции $x\in\mathbb{R}$ при $x\geq 0$, то из (5.12) можно получить преобразование:

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{q_1}=0}^{\infty} \widetilde{P}^{q_3-1}_{q_2-1}\,[f(k_1+\ldots+k_{q_1})]{\cdot}\varphi\,(k_1+\ldots+k_{q_1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_1-1}\,(k)\,\widetilde{P}^{q_3-1}_{q_2-1}\,[f\,(k)]{\cdot}\varphi\,(k)\,. \tag{5.14}$$

В случае, когда $q_1 = q_2 = q_3 = q \in \mathbb{N}$ и $f(k) = k$, преобразование (5.14) приводит к обобщённому выражению, подобному (5.13):

$$\sum_{k_1,\dots,k_q=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}^{q-1}(k_1+\ldots+k_q)\cdot\varphi(k_1+\ldots+k_q) = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q-1}^{q}(k)\cdot\varphi(k). \tag{5.15}$$

Преобразование q - мерного степенного ряда подобного преобразованию (5.3), в общем случае для вполне аддитивного ряда, имеет вид:

$$\sum_{k_1,\dots,k_q=0}^{\infty} a(k_1+\ldots+k_q)\,x^{k_1+\ldots+k_q} = \sum_{k=0}^{\infty} a(k)\,\widetilde{P}_{q-1}(k)\,x^k. \tag{5.16}$$

С помощью (5.16) легко производить разнообразные обобщения известных элементарных и специальных функций через их представления в форме степенных рядов.

Приведём ниже лишь формальные примеры таких обобщений, не уточняя строго обоснованность приводимых равенств и областей сходимости (или существования) возникающих рядов. Будем исходить из соотношения (5.12). Тогда обобщение функции e^x по типу (5.12) принимает вид:

$$\sum_{k_1,\dots,k_{q_1}=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k_1+\ldots+k_{q_1})\frac{x^{k_1+\ldots+k_{q_1}}}{\Gamma(k_1+\ldots+k_{q_1}+1)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q_1-1}(k)\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k)\frac{x^k}{k!} \equiv \left(e_{q_1,q_2}^{q_3}\right)^x. \tag{5.17}$$

Из (5.17) в частности найдём, что $\left(e_{1,1}^{1}\right)^x = \left(e_{1,q}^{1}\right)^x = \left(e_{1,1}^{q}\right)^x = e^x, q = 1, 2, \ldots$.

Обобщение функций $\sin(x)$ и $\cos(x)$ по типу (5.12):

$$\sum_{k_1,\dots,k_{q_1}=0}^{\infty}(-1)^{k_1+\ldots+k_{q_1}}\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k_1+\ldots+k_{q_1})\frac{x^{2\left(k_1+\ldots+k_{q_1}\right)+1}}{\Gamma\left[2\left(k_1+\ldots+k_{q_1}\right)+2\right]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k)\,\widetilde{P}_{q_1-1}(k)\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \equiv \sin_{q_1,q_2}^{q_3}(x); \tag{5.18}$$

$$\sum_{k_1,\dots,k_{q_1}=0}^{\infty}(-1)^{k_1+\ldots+k_{q_1}}\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k_1+\ldots+k_{q_1})\frac{x^{2\left(k_1+\ldots+k_{q_1}\right)}}{\Gamma\left[2\left(k_1+\ldots+k_{q_1}\right)+1\right]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k)\widetilde{P}_{q_1-1}(k)\frac{x^{2k}}{(2k)!} \equiv \cos_{q_1,q_2}^{q_3}(x). \tag{5.19}$$

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$; запишем далее обобщение произвольного гипергеометрического ряда
${}_nF_m(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_m;x)$ по типу (5.12):

$$\sum_{k_1,\dots,k_{q_1}=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k_1+\ldots+k_{q_1})\cdot\frac{(a_1)_{k_1+\ldots+k_{q_1}}\ldots(a_n)_{k_1+\ldots+k_{q_1}}}{(b_1)_{k_1+\ldots+k_{q_1}}\ldots(b_m)_{k_1+\ldots+k_{q_1}}}\times$$

$$\times\frac{x^{k_1+\ldots+k_{q_1}}}{\Gamma(k_1+\ldots+k_{q_1}+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}\widetilde{P}_{q_1-1}(k)\,\widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k)\cdot\frac{(a_1)_k\ldots(a_n)_k}{(b_1)_k\ldots(b_m)_k}\cdot\frac{x^k}{k!}\equiv$$

$$\equiv\left({}_nF_m\right)_{q_1,q_2}^{q_3}(a_1,\ldots,a_n;b_1,\ldots,b_m;x). \tag{5.20}$$

Наконец произведём обощение функции типа Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(x)$ по типу (5.12):

$$\sum_{k_1,\ldots,k_{q_1}=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k_1+\ldots+k_{q_1}) \cdot \frac{x^{k_1+\ldots+k_{q_1}}}{\Gamma\left[\alpha\left(k_1+\ldots+k_{q_1}\right)+\beta\right]} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q_1-1}(k)\, \widetilde{P}_{q_2-1}^{q_3-1}(k) \cdot \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} \equiv \left(E_{\alpha,\beta}\right)_{q_1,q_2}^{q_3}(x). \tag{5.21}$$

5.2. **Определение и регулярность.**

Определение 1. *Пусть даны $q = 0, 1, 2, \ldots,$ и параметры $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Под функцией $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$ комплексного переменного $z \in \mathbb{C}$ будем понимать следующий бесконечный степенной ряд:*

$$E_{\alpha,\beta}^{q}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_q(k) \cdot \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \tag{5.22}$$

Лемма 1. *Для произвольных $q = 0, 1, 2, \ldots,$ и $\alpha, \beta > 0$, функции $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$ являются целыми аналитическими в $\mathbb{C}$ функциями.*

$\lhd$ Из определения (5.3) следует, что функцию $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$ с произвольно выбранными параметрами $q = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta > 0$, можно рассматривать как степенной ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, разложенный в окрестности точки $z_0 = 0$ с коэффициентами разложения

$$c_k = \frac{1}{k!} D_z^k E_{\alpha,\beta}^{q}(0) = \frac{\widetilde{P}_q(k)}{\Gamma(\alpha k+\beta)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{$*$.1}$$

При больших k, пользуясь асимптотическим представлением для гамма-функции [23]: $\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi} e^{-z} z^{z+1/2}$, $|z| \to \infty$, $|\arg z| < \pi$, найдём, что

$$c_k \sim \frac{\widetilde{P}_q(k) e^{\alpha k+\beta-1}}{\sqrt{2\pi}\,(\alpha k+\beta-1)^{\alpha k+\beta-1/2}}, \quad k \to \infty. \tag{$*$.2}$$

Тогда из формулы Коши-Адамара и из ($*$.2) найдём радиус сходимости $R_q(\alpha, \beta)$ степенного ряда (5.22):

$$\frac{1}{R_q(\alpha,\beta)} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\frac{\left|\widetilde{P}_q(k)\right|}{\Gamma(\alpha k+\beta)}} = 0. \tag{$*$.3}$$

Следовательно, всюду в $\mathbb{C}$ функции $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$, $q = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta > 0$, представимы абсолютно и равномерно сходящимися рядами вида (5.22). $\rhd$

Из леммы (5.1) следует регулярность функций $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$ всюду в $\mathbb{C}$ и, следовательно, их дифференцируемость и непрерывность в $\mathbb{C}$. Несмотря на это докажем последнее непосредственно в терминах малых.

Лемма 2. *Функции $E_{\alpha,\beta}^{q}(z)$, $q = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta > 0$, - непрерывны в нуле.*

$\lhd$ Пусть $z_0 = 0$ и $|z - z_0| = |z| < \delta$, где δ - некоторое положительное число: $\delta > 0$. Выберем следующий ряд:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_q(k) \frac{\delta^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}. \tag{$*$.1}$$

В силу равномерной сходимости ряда $(*.1)$ (что следует из леммы (5.1.)) на $\mathbb{R}_0^+ \equiv [0, +\infty)$, для любого $\epsilon_1 > 0$ существует такое $N \in \mathbb{N}$, что

$$\left| \sum_{k=N}^{N+m} \widetilde{P}_q(k) \frac{\delta^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \right| < \epsilon_1, \tag{$*.2$}$$

для всякого $m = 1, 2, \ldots$, $\delta > 0$. В частности из $(*.2)$ можно записать, что

$$\left| \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\widetilde{P}_q(k)}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \delta^k \right| < \epsilon_1. \tag{$*.3$}$$

Тогда (если обозначить через $\widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \equiv \widetilde{P}_q(k)/\Gamma(\alpha k + \beta)$; $q, k = 0, 1, 2, \ldots$) для любого $\epsilon_1 > 0$ найдётся такое $N \in \mathbb{N}$, при котором:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \delta^k \right| \leq S^q_{N-1}(\delta) + \epsilon_1, \tag{$*.4$}$$

где

$$S^q_{N-1}(\delta) \equiv \left| \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \, \delta^k \right|, \tag{$*.5$}$$

- конечное вещественное число из $\mathbb{R}_0^+$.

Очевидно, что

$$S^q_{N-1}(\delta) \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \, \delta^k \right| = \sum_{k=0}^{N-1} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \delta^k, \tag{$*.6$}$$

в силу положительной определённости всех $\widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ясно, что выбирая соответствующим образом $\delta > 0$ можно сделать величину $S^q_{N-1}(\delta)$ сколь угодно малой при любом $N \in \mathbb{N}$.

Пусть теперь дано некоторое $\epsilon > 0$. При данном ϵ всегда можно так выбрать $\epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon) > 0$ а вместе с ним $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ и $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, чтобы

$$\sum_{k=N(\epsilon)}^{N(\epsilon)+m} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \, \delta^k(\epsilon) < \epsilon_1(\epsilon), \qquad \text{для любого} \qquad m = 1, 2, \ldots. \tag{$*.7$}$$

Из $(*.3)$ следует, что при этом

$$\sum_{k=N(\epsilon)}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \, \delta^k(\epsilon) < \epsilon_1(\epsilon), \tag{$*.8$}$$

и значит

$$\left| E^q_{\alpha,\beta}(z) \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \cdot |z|^k < \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \delta^k(\epsilon) \leq S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta(\epsilon)] + \epsilon_1(\epsilon) < \epsilon, \tag{$*.9$}$$

где

$$S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta(\epsilon)] = \sum_{k=0}^{N(\epsilon)-1} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \, \delta^k(\epsilon). \tag{$*.10$}$$

Таким образом из $(*.9)$ и $(*.10)$ следует, что для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, а вместе с ним и $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, $\epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon) > 0$ и $S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta(\epsilon)] > 0$ такие, что $\left| E^q_{\alpha,\beta}(z) \right| < S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta(\epsilon)] + \epsilon_1(\epsilon) < \epsilon$, если только $|z| < \delta$. $\triangleright$

Лемма 3. *Функции $E^q_{\alpha,\beta}(z), q = 0, 1, 2, \ldots, \alpha, \beta > 0$, - непрерывны всюду в $\mathbb{C}$.*

$\lhd$ Пусть z_0 - произвольная точка на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Рассмотрим последовательность значений для пары точек $z, z_0 \in \mathbb{C}$ (где z - некоторая точка в окрестности U_{z_0} точки z_0): $|z - z_0|, \left|z^2 - z_0^2\right|, \ldots, \left|z^k - z_0^k\right|, \ldots$, т. е. счётное множество $\left\{\Delta z_0^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, где $\Delta z_0^k \equiv \left|z^k - z_0^k\right|, k = 0, 1, 2 \ldots$. На множестве $\left\{\Delta z_0^k\right\}_{k=0}^{\infty}$ введём величину

$$\overline{\Delta z_0} \equiv \sup_{k=0,1,2,\ldots} \left\{\Delta z_0^k\right\}^{1/k} = \sup_{k=0,1,2,\ldots} \sqrt[k]{\left|z^k - z_0^k\right|}. \qquad (*.1)$$

Ясно, что всегда $0 \leq \overline{\Delta z_0} < \infty$ $\left(\overline{\Delta z_0} = 0 \text{ только если } z = z_0\right)$. Величины $|z - z_0|^k$ и $\left|z^k - z_0^k\right|$ однозначно коррелируют между собой для всех $k = 1, 2, \ldots$. Именно, для любого $\delta > 0$ существует $\delta_1 = \delta_1(\delta) > 0$ такое, что если $|z - z_0| < \delta$ то $\overline{\Delta z_0} \leq \delta_1(\delta)$. Иными словами, если для любого $k = 1, 2, \ldots, |z - z_0|^k < \delta^k$, то $\left|z^k - z_0^k\right| < \delta_1^k(\delta)$ и $\overline{\Delta z_0}^k \leq \delta_1^k(\delta)$. Но тогда по лемме 5.2. для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, а вместе с ним $\delta_1 = \delta_1[\delta(\epsilon)] > 0$, $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, $\epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon; \delta_1) > 0$ и $S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta_1(\delta)] > 0$ такие, что выполнены следующие неравенства:

$$\sum_{k=N(\epsilon)}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k)\, \delta_1^k(\delta) < \epsilon_1(\epsilon; \delta_1), \qquad (*.2)$$

$$S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta_1(\delta)] + \epsilon_1(\epsilon; \delta_1) < \epsilon, \qquad (*.3)$$

где

$$S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta_1(\delta)] \equiv \sum_{k=0}^{N(\epsilon)-1} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k)\, \delta_1^k(\delta). \qquad (*.4)$$

Из $(*.2)$, $(*.3)$ и $(*.4)$ следует, что:

$$\left|E^q_{\alpha,\beta}(z) - E^q_{\alpha,\beta}(z_0)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \cdot \left|z^k - z_0^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k) \cdot \overline{\Delta z_0}^k \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{e}^q_{\alpha,\beta}(k)\, \delta_1^k(\delta) \leq S^q_{N(\epsilon)-1}[\delta_1(\delta)] + \epsilon_1(\epsilon; \delta_1) < \epsilon. \qquad (*.5)$$

$\rhd$

5.3. **Представление в виде контурного интеграла и интеграла типа Коши.**

Лемма 4. *Для любых значений параметров $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, а так - же параметра $\sigma > 0$, аналитическая функция $E^q_{\alpha,\beta}(z)$ представима в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в виде контурного интеграла:*

$$E^q_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\zeta} \zeta^{\alpha q + (\alpha-\beta)}}{(\zeta^{\alpha} - z)^{q+1}} d\zeta. \qquad (5.23)$$

$\lhd$ Запишем представление для $\frac{1}{\Gamma(s)}$ в виде контурного интеграла, верное при $\operatorname{Re} s > 0$ [25]:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^z z^{-s} dz, \quad \operatorname{Re}\sigma = \sigma > 0. \qquad (*.1)$$

Тогда в силу равномерной сходимости ряда (5.22) при произвольных $\alpha, \beta > 0$ и $q = 0, 1, 2, \dots$ (см. лемму 5.1.) и соотношения (5.6), применяя (∗.1) найдём:

$$E^q_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_q(k) \frac{z^k}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\zeta} \zeta^{-\alpha k-\beta} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{\zeta}\zeta^{-\beta} d\zeta \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{P}_q(k) \left[z\zeta^{-\alpha}\right]^k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\zeta}\zeta^{-\beta}}{\left[1 - z\zeta^{-\alpha}\right]^{q+1}} d\zeta. \qquad (*.2)$$

Из (∗.2) следует искомое представление. ▷

В частности, из представления (5.23) леммы 5.4. при $q = 0$ найдём известное представление для функции Миттаг - Леффлера $E^0_{\alpha,\beta}(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$ [21]:

$$E^0_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{\zeta}\zeta^{\alpha-\beta}}{(\zeta^{\alpha} - z)} d\zeta, \quad \sigma > 0, \qquad (5.24)$$

где $z \in E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ - произвольный круг с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и радиуса $R : 0 < R < \infty$.

Лемма 5. *В любом конечном круге $E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ и для любых $\alpha, \beta > 0$ и $q = 1, 2, \dots,$ функции $E^q_{\alpha,\beta}(z)$ представимы в виде производной q-го порядка от аналитической функции $F^q_{\alpha,\beta}(z)$:*

$$E^q_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{q!} \left(D^q_z F^q_{\alpha,\beta}(z) \right), \qquad (5.25)$$

причём сама функция $F^q_{\alpha,\beta}(z)$ представляется в форме интеграла типа Коши.

◁ Исходим из выражения (5.24) для представления функции $E^0_{\alpha,\beta}(z)$ в форме интеграла типа Коши. Проведём в (5.24) замену переменной $\zeta^{\alpha} = s$. После элементарных преобразований интеграл в (5.24) можно переписать в виде:

$$E^0_{\alpha,\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} \frac{f^0_{\alpha,\beta}(s)}{(s - z)} ds, \quad \sigma_0 > 0, \qquad (*.1)$$

где функция

$$f^0_{\alpha,\beta}(s) \equiv \frac{1}{\alpha} e^{s^{1/\alpha}} \cdot s^{(1-\beta)/\alpha}, \quad (\alpha, \beta > 0), \qquad (*.2)$$

непрерывна на прямой $\operatorname{Re} z = \sigma_0$.

Рассмотрим следующую аналитическую в круге $E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ функцию, заданную в форме интеграла типа Коши:

$$F^q_{\alpha,\beta}(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_q-i\infty}^{\sigma_q+i\infty} \frac{f^q_{\alpha,\beta}(s)}{(s - z)} ds, \qquad (*.3)$$

где $\sigma_q > 0$ для всех $q = 0, 1, 2, \dots$; функции

$$f^q_{\alpha,\beta}(s) \equiv \frac{1}{\alpha} e^{s^{1/\alpha}} \cdot s^{q+(1-\beta)/\alpha} \equiv s^q f^0_{\alpha,\beta}(s), \qquad (*.4)$$

$q = 0, 1, 2, \dots,$ непрерывны на соответствующих прямых $\operatorname{Re} z = \sigma_q$. Из сравнения (∗.1) и (∗.3) сразу находим, что $E^0_{\alpha,\beta}(z) = F^0_{\alpha,\beta}(z)$, $z \in E_R(z_0)$.

В силу аналитичности функции $F^q_{\alpha,\beta}(z)$ в $\mathbb{C}$ и в частности в $E_R(z_0)$, она имеет производные всех порядков, причём:

$$D^n_z F^q_{\alpha,\beta}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\sigma_q - i\infty}^{\sigma_q + i\infty} \frac{f^q_{\alpha,\beta}(s)}{(s-z)^{n+1}}ds, \tag{$*.5$}$$

где D^n_z - оператор дифференцирования по z n - го порядка, $n = 1, 2, \ldots$. В частности из $(*.5)$ при $n = q$ следует:

$$D^q_z F^q_{\alpha,\beta}(z) = \frac{q!}{2\pi i}\int_{\sigma_q - i\infty}^{\sigma_q + i\infty} \frac{f^q_{\alpha,\beta}(s)}{(s-z)^{q+1}}ds. \tag{$*.6$}$$

Если теперь в контурном представлении (5.23) для функции $E^q_{\alpha,\beta}(z)$ с произвольными параметрами $q = 1, 2, \ldots$ и $\alpha, \beta > 0$, произвести замену $\zeta^\alpha = s$ и после элементарных преобразований умножить на $q!$, то мы вновь придём к контурному интегралу в правой части $(*.6)$. $\rhd$

5.4. **Рекуррентное соотношение.**

Лемма 6. *Функции $E^q_{\alpha,\beta}(z)$ удовлетворяют в произвольной точке z комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующему рекуррентному соотношению:*

$$E^{q-1}_{\alpha,\beta}(z) - zE^{q-1}_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = E^{q-2}_{\alpha,\beta}(z), \tag{5.26}$$

где параметры $\alpha, \beta > 0$ и $q = 2, 3, 4, \ldots$.

$\lhd$ Пользуясь определениями $(*.2)$ и $(*.4)$ леммы 5.5. найдём, что для любых $\alpha, \beta > 0$ и $q = 2, 3, 4, \ldots$, верно

$$f^{q-1}_{\alpha,\beta}(s) - zf^{q-1}_{\alpha,\beta+\alpha}(s) = \left[f^0_{\alpha,\beta}(s) - zf^0_{\alpha,\alpha+\beta}(s)\right]s^{q-1} =$$

$$= (s-z)\,s^{q-2}f^0_{\alpha,\beta}(s) = (s-z)\,f^{q-2}_{\alpha,\beta}(s), \quad (s, z \in \mathbb{C}). \tag{$*.1$}$$

Тогда по представлениям $(*.6)$ и (5.25) леммы 5.5. найдём непосредственно:

$$E^{q-1}_{\alpha,\beta}(z) - zE^{q-1}_{\alpha,\alpha+\beta}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{q-1} - i\infty}^{\sigma_{q-1} + i\infty}\left[f^{q-1}_{\alpha,\beta}(s) - zf^{q-1}_{\alpha,\beta+\alpha}(s)\right]\frac{ds}{(s-z)^q} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{q-2} - i\infty}^{\sigma_{q-2} + i\infty}\frac{f^{q-2}_{\alpha,\beta}(s)}{(s-z)^{q-1}}ds = E^{q-2}_{\alpha,\beta}(z). \tag{$*.2$}$$

Переход в контурном интеграле в $(*.2)$ от $\sigma_{q-1} > 0$ к $\sigma_{q-2} > 0$ в параметрах контура допустимо, так - как при положительности величины σ это не влияет на значение рассматриваемого интеграла. $\rhd$

Дополним соотношения (5.26) следующим ниже выражением, левая часть которого соответствует левой части (5.26) при $q = 1$:

$$E^0_{\alpha,\beta}(z) - zE^0_{\alpha,\beta+\alpha}(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)}, \quad (z \in \mathbb{C}). \tag{5.27}$$

Выражение (5.27) элементарно следует из определения 5.3.

Лемма 7. *Для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $q = 2, 3, 4, \ldots$, многочлены $\widetilde{P}_q(x)$ при $x = k$ подчиняются следующему рекуррентному соотношению:*

$$\widetilde{P}_{q-1}(k) - \widetilde{P}_{q-2}(k) = \widetilde{P}_{q-1}(k-1). \tag{5.28}$$

$\lhd$ Будем исходить из рекуррентного соотношения (5.26) леммы 5.6. и того, что всюду в $\mathbb{C}$ функции $E^{q}_{\alpha,\beta}(z)$ представимы абсолютно и равномерно сходящимися рядами (5.22) (см. лемму 5.1.). Из (5.26) имеем:

$$E^{q-1}_{\alpha,\beta}(z) - zE^{q-1}_{\alpha,\beta+\alpha}(z) - E^{q-2}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\widetilde{P}_{q-1}(k) - \widetilde{P}_{q-2}(k)\right]\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{P}_{q-1}(k-1)\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left[\widetilde{P}_{q-1}(0) - \widetilde{P}_{q-2}(0)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\widetilde{P}_{q-1}(k) - \widetilde{P}_{q-2}(k) - \widetilde{P}_{q-1}(k-1)\right]\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} = 0. \qquad (*.1)$$

Результат (5.28) теперь следует из $(*.1)$ если в последнем учесть линейную независимость системы функций $z, z^2, z^3, \ldots$, и того что $\widetilde{P}_{q-1}(0) = \widetilde{P}_{q-2}(0) = 1$ для $q = 2, 3, 4, \ldots$ (см. (5.4)). $\rhd$

В верности соотношений (5.28) для $q = 2, 3, 4$ можно непосредственно убедиться если обратиться к явным выражениям (5.4) для $\widetilde{P}_{q-1}(x)$.

Лемма 8. *В любой конечной части плоскости $\mathbb{C}$ (и в частности в любом конечном круге $E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$) и при любых положительных $\alpha, \beta > 0$ функция Миттаг-Леффлера $E_{\alpha,\beta}(z) \equiv E^{0}_{\alpha,\beta}(z)$ однозначно выражается через функции $E^{q}_{\alpha,\gamma}(z)$ произвольного порядка $q = 1, 2, 3, \ldots$, в виде:*

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{q}(-1)^k C^k_q z^k E^{q}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z). \qquad (5.29)$$

$\lhd$ Не снижая общности будем вести рассмотрение в некотором конечном круге $E_R(z_0)$, так-как для любой конечной части $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ найдётся такая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ и радиус $R < \infty$, что $\mathbb{D} \subset E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$.

Обратимся к основному соотношению (5.26) леммы 5.6. При $q = 2$ из (5.26) найдём:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E^{1}_{\alpha,\beta}(z) - zE^{1}_{\alpha,\beta+\alpha}(z). \qquad (*.1)$$

В свою очередь, при $q = 3$ из (5.26) следует

$$E^{1}_{\alpha,\beta}(z) = E^{2}_{\alpha,\beta}(z) - zE^{2}_{\alpha,\beta+\alpha}(z); \qquad (*.2)$$

тогда подстановкой $(*.2)$ в $(*.1)$ получим

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E^{2}_{\alpha,\beta}(z) - 2zE^{2}_{\alpha,\beta+\alpha}(z) + z^2E^{2}_{\alpha,\beta+2\alpha}(z). \qquad (*.3)$$

Проводя аналогичные рассуждения для $q = 4, 5, \ldots$, введём индуктивное предположение:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E^{q-2}_{\alpha,\beta}(z) + (-1)C^1_{q-2}zE^{q-2}_{\alpha,\beta+\alpha}(z) +$$

$$+(-1)^2C^2_{q-2}z^2E^{q-2}_{\alpha,\beta+2\alpha}(z) + \ldots + (-1)^{q-2}z^{q-2}E^{q-2}_{\alpha,\beta+(q-2)\alpha}(z). \qquad (*.4)$$

Из (5.26) следует, что

$$E^{q-2}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z) = E^{q-1}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z) - zE^{q-1}_{\alpha,\beta+(k+1)\alpha}(z). \qquad (*.5)$$

Подстановка $(*.5)$ в $(*.4)$ приводит к необходимому результату:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = E^{q-1}_{\alpha,\beta}(z) + \sum_{k=1}^{q-2}(-1)^k\left[C^k_{q-2} + C^{k-1}_{q-2}\right]z^kE^{q-1}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z) +$$

$$+(-1)^{q-1}z^{q-1}E^{q-1}_{\alpha,\beta+(q-1)\alpha}(z)=\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^kC^k_{q-1}z^kE^{q-1}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z),\quad q=2,3,\ldots. \quad (*.6)$$

Проведя в $(*.6)$ замену $q-1\to q$ придём к (5.29). $\triangleright$

Прямым обобщением леммы 5.8. является следующая

Лемма 9. *Пусть натуральное $p\in\mathbb{N}$ таково, что: $1\le p\le q$. Тогда в любом конечном круге $E_R(z_0)\subset\mathbb{C}$ функция $E^p_{\alpha,\beta}(z)$ однозначно выражается через функции $E^q_{\alpha,\gamma}(z)$ произвольного порядка $q\in\mathbb{N}$ в виде:*

$$E^p_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{q-p}(-1)^kC^k_{q-p}z^kE^q_{\alpha,\beta+k\alpha}(z). \quad (5.30)$$

$\triangleleft$ Из (5.26) леммы 5.6. в первом поколении найдём:

$$E^p_{\alpha,\beta}(z)=E^{p+1}_{\alpha,\beta}(z)-zE^{p+1}_{\alpha,\beta+\alpha}(z),\quad (z\in E_{R_0}(z_0)). \quad (*.1)$$

Введём индуктивное предположение

$$E^p_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{q-1}(-1)^k\,C^k_{q-1}z^kE^{p+q-1}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z). \quad (*.2)$$

Выражая функции в $(*.2)$ через связь (5.26) запишем:

$$E^{p+q-1}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z)=E^{p+q}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z)-zE^{p+q}_{\alpha,\beta+(k+1)\alpha}(z). \quad (*.3)$$

Отсюда подстановкой в $(*.2)$ получим:

$$E^p_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{q}(-1)^k\,C^k_{q}z^kE^{p+q}_{\alpha,\beta+k\alpha}(z). \quad (*.4)$$

Наконец осуществляя в $(*.4)$ замену $q\to q-p\ge 0$, найдём очевидно (5.30), причём случай $q=p$ является тривиальным. $\triangleright$

Рекуррентное соотношение (5.26) леммы 5.6. позволяет преобразовать общее решение (3.8) теоремы 3.3. к более гармоничному виду.

Лемма 10. *Решение задачи Коши для класса однородных уравнений (2.15) с начальными условиями* (2.16)*, представленное в операторном поле $\mathfrak{M}(M)$ в виде общего выражения (3.8) теоремы 3.3., представимо так - же в виде:*

$$f(t)=b_0\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)-1}\cdot E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)}(-\lambda_1 t)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}b_k\left\{\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha+1-k)}+\sum_{q=2}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)-k-1}\cdot E^{q-2}_{1,q(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t)\right\}. \quad (5.31)$$

$\triangleleft$ Рассмотрим вторую и третью суммы в (3.8). Представим их в виде единой суммы:

$$\sum_{k=1}^{n}b_k\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1}t^{q(\alpha+1)-k-1}\left[E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t)+\lambda_1 tE^{q-1}_{1,q(\alpha+1)-k+1}(-\lambda_1 t)\right]. \quad (*.1)$$

В тоже время, полагая в (5.26) $z=-\lambda_1 t$, $\alpha=1$, $\beta=q(\alpha+1)-k$, найдём что

$$E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t)+\lambda_1 tE^{q-1}_{1,q(\alpha+1)-k+1}(-\lambda_1 t)=$$

$$= E^{q-2}_{1,q(\alpha+1)-k}(-\lambda_1 t), \quad q = 2, 3, 4, \ldots. \tag{$*.2$}$$

Подстановка $(*.2)$ в сумму $(*.1)$ приводит к выражению:

$$\sum_{k=1}^{n} b_k t^{\alpha-k}\left[E^0_{1,\alpha+1-k}(-\lambda_1 t) + \lambda_1 t E^0_{1,\alpha+2-k}(-\lambda_1 t)\right] +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{q=0}^{\infty}(-\lambda_2)^{q+1} t^{q(\alpha+1)+2\alpha+1-k} \cdot E^q_{1,q(\alpha+1)+2\alpha+2-k}(-\lambda_1 t). \tag{$*.3$}$$

Учитывая в $(*.3)$ соотношение (5.27) при $\alpha = 1$, $\beta = \alpha + 1 - k$ и $z = -\lambda_1 t$, т.е.

$$E^0_{1,\alpha+1-k}(-\lambda_1 t) + \lambda_1 t E^0_{1,\alpha+2-k}(-\lambda_1 t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1-k)}, \tag{$*.4$}$$

найдём вновь $(*.3)$, которое после простого преобразования и подстановки в общее решение (3.8) приводит к выражению (5.31). $\triangleright$

Запишем в новом представлении (5.31) решение (3.20) примера 3.3, возникающее в частном случае решения уравнения (2.15), когда $n = 1$, т.е. $0 < \alpha \le 1$:

$$f_\alpha(t) = b_0 \sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-1} \cdot E^{q-1}_{1,q(\alpha+1)}(-\lambda_1 t) +$$

$$+ b_1 \left\{\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \sum_{q=2}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-2} \cdot E^{q-2}_{1,q(\alpha+1)-1}(-\lambda_1 t)\right\}. \tag{5.32}$$

При $\alpha = 1$ решение (5.32), как показанно в примере 3.3. переходит в выражение (3.21). Для сумм входящих в последнее выражение укажем одно важное свойство.

Лемма 11. *Для произвольного параметра $\lambda \in \mathbb{R}$ и переменной $t \in \mathbb{R}$, функции $E^{q-1}_{1,2q}$ и $E^{q-2}_{1,2q-1}$ подчиняются соответственно следующим правилам суммирования:*

$$\sum_{q=1}^{\infty}(-\lambda^2)^{q-1} t^{2q-1} \cdot E^{q-1}_{1,2q}(-2\lambda t) = t e^{-\lambda t}; \tag{5.33}$$

$$1 + \sum_{q=2}^{\infty}(-\lambda^2)^{q-1} t^{2q-2} \cdot E^{q-2}_{1,2q-1}(-2\lambda t) = (1+\lambda t)e^{-\lambda t}. \tag{5.34}$$

$\triangleleft$ Рассмотрим уравнение (2.1) при $q = 2, \lambda \in \mathbb{R}$ и $g(t) = 0$, т.е. уравнение вида

$$D^{2\alpha}_{0+} f(t) + 2\lambda D^{\alpha}_{0+} f(t) + \lambda^2 f(t) = 0, \tag{$*.1$}$$

с начальными условиями

$$D^{\nu\alpha-k}_{0+} f(0) = a^\nu_k, \quad \nu = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{$*.2$}$$

Причём здесь $n \in \mathbb{N}$ и $n - 1 < \alpha \le n$.

В теореме 2.1.2. работы [14] показано, что в поле отношений $\mathfrak{M}(M)$ решение задачи Коши для уравнения $(*.1)$ с начальными условиями $(*.2)$ представляется в виде

$$f(t) = \sum_{\nu=1}^{2}\sum_{k=1}^{\nu n} C^\nu_2 \lambda^{2-\nu} a^\nu_k t^{2\alpha-k} \cdot E^1_{\alpha,2\alpha+1-k}(-\lambda t^\alpha). \tag{$*.3$}$$

Для согласования уравнений (∗.1) и (2.15), очевидно необходимо положить $\lambda_1 = 2\lambda$, $\lambda_2 = \lambda^2$, причём полное совпадение (∗.1) и (2.15) возможно в единственном случае, когда $n = \alpha = 1$. При таких условиях решение (∗.3) сводится к выражению

$$f(t) = \left(2\lambda a_1^1 + a_1^2\right) tE_{1,2}^1\left(-\lambda t\right) + a_2^2 E_{1,1}^1(-\lambda t), \tag{∗.4}$$

где $a_1^1 = a_2^2 = f\left(0\right)$; $a_1^2 = f'\left(0\right)$.

В тоже время решение задачи Коши для уравнения (2.15) при $n = \alpha = 1$ даётся выражением (3.21) с $\lambda_1 = 2\lambda$ и $\lambda_2 = \lambda^2$.

Для функций, входящих в решение (∗.4) из определения 5.3. имеем при $x \in \mathbb{R}$:

$$E_{1,1}^1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{\Gamma(k+1)} x^k = (1+x)e^x; \tag{∗.5}$$

$$E_{1,2}^1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)}{\Gamma(k+2)} x^k = e^x. \tag{∗.6}$$

Таким образом мы получаем решение известное из классической теории [22]:

$$f(t) = b_1 e^{-\lambda t} + \left(b_0 + b_1\lambda\right) te^{-\lambda t}. \tag{∗.7}$$

Отсюда правила суммирования (5.33) и (5.34) получаются простым сравнением выражений (∗.7) и (3.21). ▷

Покажем наконец, как рекуррентное соотношение (5.26) позволяет убедиться в верности общего решения (3.8) теоремы 3.3. (или (5.31) леммы 5.10) для уравнения (2.15) путём прямой подстановки.

Прежде всего отметим, что

$$D_{0+}^{\alpha}\left\{t^{\beta} E_{1,\beta+1}^{q-1}(\lambda t)\right\} = t^{\beta-\alpha} E_{1,\beta+1-\alpha}^{q-1}(\lambda t), \tag{5.35}$$

для $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$; $\beta > 0$; $t, \lambda \in \mathbb{R}$ и $q = 1, 2, \ldots$.

Тогда, условно обозначая первую сумму в (3.8) через $\{1\}$, найдём:

$$D_{0+}^{\alpha+1}\left\{1\right\} + \lambda_1 D_{0+}^{\alpha}\left\{1\right\} + \lambda_2\left\{1\right\} = t^{-1}(-\lambda_1 t)e^{-\lambda_1 t} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + \sum_{q=2}^{\infty}(-\lambda_2)^{q-1} t^{q(\alpha+1)-\alpha-2} \times$$

$$\times \left[E_{1,q(\alpha+1)-\alpha-1}^{q-1}(-\lambda_1 t) - E_{1,q(\alpha+1)-\alpha-1}^{q-2}(-\lambda_1 t) + (\lambda_1 t)E_{1,q(\alpha+1)-\alpha}^{q-1}(-\lambda_1 t)\right] = 0. \tag{5.36}$$

Совершенно аналогично (5.36) проводятся вычисления для второй и третьей суммы в (3.8).

5.5. **Асимптотическое поведение.**

Лемма 12. *Для всех $q = 1, 2, \ldots$ и $\alpha, \beta > 0$ функции $E_{\alpha,\beta}^q(z)$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ удовлетворяют общему асимптотическому неравенству:*

$$\left|E_{\alpha,\beta}^q(z)\right| \leq \frac{M_{\alpha,\beta}^q (1-\rho)^q}{2\pi(\Delta\sigma)^q} \int_{-\pi}^{\pi} (1+\rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^{-(q+1)/2} d\varphi, \tag{5.37}$$

где $\rho \to 1-0$; $\Delta\sigma = |\sigma - \sigma_0|$, $\sigma = \operatorname{Re} z$, $\sigma_0 > 0$; $0 < M_{\alpha,\beta}^q < \infty$, - конечные положительные числа для всех натуральных q.

◁ Как показано в лемме 5.5. (см. выражения (∗.6)) в любом конечном круге $z \in E_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ и для любых $\alpha, \beta > 0$ и $q = 1, 2, \ldots$, функции $E^q_{\alpha,\beta}(z)$ даются выражением (5.25). Следовательно верны неравенства:

$$\left|E^q_{\alpha,\beta}(z)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_q - i\infty}^{\sigma_q + i\infty} \frac{f^q_{\alpha,\beta}(\zeta)}{(\zeta - z)^{q+1}} d\zeta\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \left|\frac{f^q_{\alpha,\beta}(\zeta)}{(\zeta - z)^{q+1}}\right| |d\zeta| \leq$$

$$\leq \frac{M^q_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_{C_0} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|^{q+1}} = \frac{M^q_{\alpha,\beta}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{[(\sigma - \sigma_0)^2 + (t - y)^2]^{(q+1)/2}}. \qquad (*.1)$$

Функции $f^q_{\alpha,\beta}(\zeta)$ для всех $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta > 0$, непрерывны на прямой $C_0 \equiv \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \sigma_0 > 0\}$ и, следовательно, ограничены на C_0. Значит для каждого $q \in \mathbb{N}$ существует конечное положительное число $M^q_{\alpha,\beta}(0 < M^q_{\alpha,\beta} < \infty)$, что

$$\left|f^q_{\alpha,\beta}(\zeta)\right| \leq M^q_{\alpha,\beta}, \quad \text{для} \quad \forall \zeta \in C_0. \qquad (*.2)$$

Ограничение (∗.2) обуславливает второе неравенство в (∗.1), где $z = \sigma + it$; $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Полагая $\Delta\sigma = |\sigma - \sigma_0| > 0$ неравенство (∗.1) легко преобразовать к виду:

$$\left|E^q_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \frac{M^q_{\alpha,\beta}}{2\pi(\Delta\sigma)^q}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{(q+1)/2}}. \qquad (*.3)$$

Для оценки интеграла в правой части неравенства (∗.3) воспользуемся следующей асимптотической формулой [26]:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1 + x^2)^n} \sim \frac{1}{2}(1 - \rho)^{2n-1}\int_{-\pi}^{\pi} (1 + \rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^{-n} d\varphi, \qquad (*.4)$$

верной при $\rho \to 1 - 0$ и $n > \frac{1}{2}$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{(1 + u^2)^{(q+1)/2}} \sim (1 - \rho)^q \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \rho^2 - 2\rho\cos\varphi)^{-(q+1)/2} d\varphi, \qquad (*.5)$$

где в силу условия $n > \frac{1}{2}$ в (∗.4), $q > 0$.

Величина в правой части (∗.5) ограничена. Действительно, при $\rho \to 1 - 0$, для интеграла в правой части (∗.5) верна асимптотическая формула:

$$\sim 2^{-(q+1)/2}(1 - \rho)^q \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \rho\cos\varphi)^{-(q+1)/2} d\varphi. \qquad (*.6)$$

Последний интеграл, очевидно, находится в пределах: $2\pi < (*.6) \leq 2\pi(1 - \rho)^{-(q+1)/2}$, откуда

$$\pi 2^{(1-q)/2}(1-\rho)^q \leq (1-\rho)^q \int_{-\pi}^{\pi} (1+\rho^2-2\rho\cos\varphi)^{-(q+1)/2} d\varphi \leq \pi 2^{(1-q)/2}(1-\rho)^{(q-1)/2}. \qquad (*.7)$$

Таким образом, для всех $q = 1, 2, \ldots$, выполняется верхняя оценка:

$$\left|E^q_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \frac{M^q_{\alpha,\beta}(1 - \rho)^{(q-1)/2}}{2^{(1+q)/2}(\Delta\sigma)^q}, \quad \rho \to 1 - 0. \qquad (*.8)$$

Из-за расходимости при $q = 0$, оценка (∗.8) неприменима для функции $E^0_{\alpha,\beta}(z)$, т.е. для функции Миттаг-Леффлера. ▷

Покажем, что из рекуррентного соотношения (5.26) и оценок (5.37) леммы 5.12. можно получить бесконечную последовательность оценок для функции Миттаг - Леффлера $E^0_{\alpha,\beta}(z)$.

Действительно, применяя например выражение (∗.1) леммы 5.8. и подставляя в него соответствующую оценку из (5.37) найдём:

$$\left|E^0_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \left|E^1_{\alpha,\beta}(z)\right| + |z| \left|E^1_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \frac{M^1_{\alpha,\beta}}{2\Delta\sigma} + \frac{1}{2} M^1_{\alpha,\beta+\alpha} \sqrt{1 + \frac{t^2}{(\Delta\sigma)^2}}, \quad (5.38)$$

при условии, что $\sigma_0 \to 0$; $z = \sigma + it$; $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

Если в свою очередь для функции $E^1_{\alpha,\beta}(z)$ использовать выражение (∗.2) леммы 5.8, то подставляя его в (5.38) и вновь применяя соответствующую оценку из (5.37), можно получить оценку 2-го поколения и т.д. Используя аналогично результат леммы 5.9. можно далее получать ещё более общие и более сложные оценки. Например для $E^1_{\alpha,\beta}(z)$ из (5.37) и (∗.2) леммы 5.8. следует, что

$$\left|E^1_{\alpha,\beta}(z)\right| \leq \frac{M^2_{\alpha,\beta}\sqrt{1-\rho(\sigma)}}{2^{3/2}(\Delta\sigma)^2} + M^2_{\alpha,\beta+\alpha} \frac{\sqrt{1-\rho(\sigma)}}{2^{3/2}\Delta\sigma} \sqrt{1 + \frac{t^2}{(\Delta\sigma)^2}}. \quad (5.39)$$

Здесь $\rho = \rho(\sigma)$ учитывает характер стремления $\rho \to 1 - 0$ при $|z| \to 0$ или $|z| \to \infty$, т.к. вообще говоря, при независимом от величины $|z|$ стремлении ρ к $1 - 0$ могут возникать неверные оценки.

6. Формальные приложения

6.1. **Общий формализм.** Пусть нам задана механическая система $M(s)$ с $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы в некоторой фиксированной системе координат S. Пусть так-же для системы $M(s)$ выбраны соответствующие наборы обобщённых координат $q = (q_1, \ldots, q_n)$ и обобщённых скоростей $\dot{q} = (\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$.

В таком случае лагранжиан L системы $M(s)$ является функцией переменных $(q, \dot{q})$, т.е. $L = L(q, \dot{q}) = L(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$.

Положим так-же, что на систему $M(s)$ действует обобщённая диссипативная сила f (которую мы для определённости будем называть просто силой трения), с компонентами:

$$f_i = -\sum_k \alpha_{ik}\dot{q}_k. \quad (6.1)$$

Здесь для коэффициентов трения α_{ik} предполагается выполненым свойство симметрии [1]: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$. При выполнении последнего условия, как известно [1,10], компоненты силы f могут быть записаны в виде производных

$$f_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \quad (6.2)$$

от квадратичной формы

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k} \alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k, \quad (6.3)$$

называемой диссипативной функцией.

Уравнения Лагранжа для системы $M(s)$ приобретают вид [1,5]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

Принимая во внимание (6.2), уравнения (6.4) удобнее переписать покомпонентно в виде:

$$D_t^1 p_{q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + f_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{6.5}$$

где $p_q = \partial L / \partial \dot{q}$ - обобщённый импульс системы M по q-ой координате; D_t^1 - оператор дифференцирования по времени t.

Пусть теперь для простоты у нас система $M(s)$ с одной степенью свободы ($n = 1$) и, следовательно, с одной обобщённой координатой q. Тогда $L = L(q, \dot{q})$, $f_q = -\alpha\dot{q}$, $F = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$, и уравнение Лагранжа (6.5) сводятся к одному уравнению

$$D_t^1 \left[p_q + \alpha q\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \tag{6.6}$$

Предположим далее существование у системы $M(s)$ виртуальных неодномерных по времени состояний, и учтём в теории проявление подобной неодномерности (или лучше сказать неоднородности времени, проявляющейся в форме метрической неодномерности) формальной заменой

$$D_t^1 \to D_t^{1-(1-\beta)}, \tag{6.7}$$

где $0 < \beta \leq 1$ - показатель неодномерности.

Тогда уравнение Лагранжа (6.6) для виртуальных по времени неодномерных состояний системы $M(s)$ примет вид:

$$D_t^{1-(1-\beta)} \left[p_q + \alpha q\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \beta \in (0, 1]\,. \tag{6.8}$$

Ясно, что актуальное физическое проявление собственно виртуальных состояний системы возможно лишь в предельном случае

$$\lim_{\beta \to 1} D_t^{1-(1-\beta)} \left[p_q + \alpha q\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{6.9}$$

т.е. в случае абсолютной одномерности $\beta = 1$.

В связи с выражениями (6.8) и (6.9) будем ниже говорить о виртуальном уравнении движения или просто о виртуальном движении системы $M(s)$ всякий раз, когда $\beta \in (0, 1)$.

Итак повторим, что уравнение (6.8) есть уравнение движения (6.6) до проведения операции предельного перехода (6.9) по β.

Вообще, следует классифицировать механические диссипативные системы $M(s)$ на два основных типа относительно поведения этих систем во времени.

К первому типу будем относить собственно неодномерные по времени системы, т.е. механические системы „двигающиеся“ в неодномерном по времени пространстве. Точнее механические системы, обладающие такими состояниями, изменение которых можно интерпретировать как механическое движение в буквально „неодномерном“ по времени пространстве. Из современных эмпирических представлений следует, что все такие состояния будут всегда виртуальными (т.е. если и проявляются, то за времена принципиально недоступные для непосредственных экспериментальных измерений), и актуализация таких состояний возможна лишь в предельном случае (6.9), когда $\beta \to 1$.

Ко второму типу будем относить несобственно неодномерные по времени системы, т.е. механические системы, движение которых в обычном одномерном по времени (и трёхмерном по координатам) пространстве можно эффективно описывать по какой-либо обобщённой координате при помощи уравнения

Лагранжа вида (6.8) с $\beta \neq 1$ (т.е. с $\beta \in (0,1)$). В связи с неодномерностью эффективного описания таких систем, некоторые из состояний с $\beta \in (0,1)$ (т.е. некоторые из виртуальных состояний по терминологии собственно неодномерных систем) могут актуализироваться и стать доступными для прямого измерения. В таком случае, помимо $\beta = 1$, существует по крайней мере ещё одно $\beta_0 \in (0,1)$, что процедура предельного перехода (6.9) здесь приобретает вид:

$$\lim_{\beta \to \beta_0} D_t^{1-(1-\beta)}\left[p_q + \alpha q\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \tag{6.10}$$

и конечное уравнение движения системы $M(s)$ по координате q есть

$$D_t^{1-(1-\beta_0)}\left[p_q + \alpha q\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \beta_0 \in (0,1]. \tag{6.11}$$

Преобразуем уравнение (6.11) к более удобному для использования виду. Для этого воспользуемся законом композиции операторов дробного интегро-дифференцирования [20]:

$$D_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\beta} f(t) = D_{0+}^{\alpha+\beta} f(t), \tag{6.12}$$

верное для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\beta \leq 0$; функция $f(t)$ предполагается ограниченной и измеримой на рассматриваемом интервале $[0,t] \subset \mathbb{R}_0^+$. Оператор $D_t^{1-(1-\beta)}$ можно представить в виде:

$$D_t^{1-(1-\beta)} \to D_{0+}^{1-(1-\beta)} = D_{0+}^{1} D_{0+}^{-(1-\beta)} = D_{0+}^{-(1-\beta)} D_t, \tag{6.13}$$

причём последнее равенство верно в силу коммутативности закона композиции (6.12). Действительно, из (6.12) сразу следует, что $D_{0+}^{\alpha+\beta} f(t) = D_{0+}^{\beta+\alpha} f(t) = D_{0+}^{\beta} D_{0+}^{\alpha} f(t)$ для любых $\beta \leq 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $f(t) \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ - множество суммируемых по Лебегу на $\mathbb{R}_0^+$ функций. Покажем так-же свойство ассоциативности закона композиции (6.12). Для этого достаточно рассмотреть цепочку равенств:

$$\left[D_{0+}^{\beta_1}(D_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{\beta_2})\right] f(t) = D_{0+}^{\beta_1}\left[D_{0+}^{\alpha+\beta_2} f(t)\right] = D_{0+}^{\beta_1+(\alpha+\beta_2)} f(t) =$$
$$= D_{0+}^{(\beta_1+\alpha)+\beta_2} f(t) = \left[(D_{0+}^{\beta_1} D_{0+}^{\alpha}) D_{0+}^{\beta_2}\right] f(t), \tag{6.14}$$

верных для любых $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta_1 \leq 0$, $\beta_2 \leq 0$ и $f(t) \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$. Наконец добавим, что при $\alpha \geq 0$ из (6.12) в частности следует, что $D_{0+}^{\alpha} D_{0+}^{-\alpha} f(t) = D_{0+}^{-\alpha} D_{0+}^{\alpha} f(t) = f(t)$.

Возвращаясь к уравнению (6.11), проведём в нём замену оператора $D_{0+}^{1-(1-\beta_0)}$ по правилу (6.13), с одновременной заменой $\beta_0 \to \beta$. Имеем

$$D_{0+}^{-(1-\beta)}\left[\dot{p}_q + \alpha \dot{q}\right] = \frac{\partial L}{\partial q}, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.15}$$

Умножая правую и левую часть уравнения (6.15) на оператор $D_{0+}^{(1-\beta)}$ и применяя выше-приведённые правила дробных операторов, найдём:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = D_{0+}^{1-\beta}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) + f_q, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.16}$$

В (6.16) для определённости указания переменной t по которой действует оператор $D_{0+}^{1-\beta}$, введено обозначение $D_{0+}^{1-\beta}(t)$.

Системы, подчиняющиеся уравнению (6.16), то есть движение которых эффективно выражается через обобщённое уравнение Лагранжа вида (6.16) по какой либо обобщённой координате q, будем называть квазиодномерными по времени механическими системами или короче t-квазиодномерными по q системами.

Если далее некоторая механическая система $M(s)$ в координатной системе S обладает $n \in \mathbb{N}$ степенями свободы и лагранжианом $L = L(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$, являясь t-квазиодномерной с наборами показателей $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-m})$ соответственно по последним $n - m$ координатам ($m \leq n$), то уравнения Лагранжа системы M примут вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{6.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) = D_{0+}^{1-\beta_j}(t)\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) + f_{q_j}, \tag{6.18}$$

где $\beta_j \in (0, 1)$ для $j = m + 1,\, m + 2, \ldots, n$.

Здесь предпологается, что по последним $n - m$ координатам (или степеням свободы) „действует“ сила трения, обуславливающая возникновение t-квазиодномерности системы по $(q_{m+1}, \ldots, q_n)$ и имеющая вид:

$$f_{q_j} = -\sum_{k=m+1}^{n} \alpha_{jk}\dot{q}_k, \tag{6.19}$$

с коэффициентами трения $\alpha_{jk} = \alpha_{kj}$.

Диссипативная функция для системы $M(s)$ имеет вид:

$$F = \frac{1}{2}\sum_{i,k=m+1}^{n} \alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k. \tag{6.20}$$

Поясним, что вся приводимая в этой части работы теория носит только формально-математический характер и ни в коем случае не претендует на статус окончательной физической теории.

В каждом конкретном случае допустимость таких представлений необходимо строго физически обосновывать. Поэтому ниже мы рассмотрим лишь некоторые принципиальные следствия t-квазиодномерности моделей при априорном условии, что исходные физические посылки этих моделей верны.

Основной задачей которая будет преследоваться в приводимых ниже примерах является вывод уравнений движения соответствующих механических систем.

Более обстоятельный анализ поведения t-квазиодномерных систем, включающий в себя прежде всего вопросы траектории движения, периода движения и выявления характерных особенностей движения в зависимости от управляющих параметров, а так-же вопросы устойчивости движения этих систем, слишком обширен для подробного изложения в данном сообщении (может являться объектом отдельных исследований) и по существу выходит за логические рамки данной работы.

6.2. **Вопрос физической размерности.** При выводе уравнения Лагранжа (6.16) не учтена размерность физических величин, входящих в уравнение. Поэтому уточним в данном пункте этот вопрос.

Прежде всего отметим, что в силу символьной традиции в теоретической механике (и в физике вообще) целесообразно ввести переобозначение (которое неявно уже было использовано в пункте 6.1.) для дробной производной по времени. Именно, для функции $f = f(t)$ полагаем:

$$D_{0+}^{\alpha} f(t) \equiv D_t^{\alpha} f(t), \quad \text{где} \quad f(t) \in L^1(\mathbb{R}_0^+), \tag{6.21}$$

и $\alpha \in \mathbb{R}$ - произвольный вещественный параметр.

Далее, в силу размерного характера физических величин, переход (6.7) следует проводить с естественной мультипликативной поправкой на размерность:

$$D_t^1 \to k_t(\beta) D_t^{1-(1-\beta)}, \tag{6.22}$$

где $k_t(\beta)$ - временной поправочный коэффициент, зависящий от параметра $\beta \in (0, 1]$.

Коэффициент $k_t(\beta)$ с параметром $\beta \in (0, 1]$ для t-квазиодномерной системы $M(s)$ будем считать полностью опеределённым, если выполнены следующие условия:

(a) существует такое время $t_0 > 0$, что оно характеризует происходящие в системе $M(s)$ рассматриваемые механические процессы;

(b) коэффициент $k_t(\beta)$ является функцией параметров t_0 и β: $k_t(\beta) = f(t_0; \beta)$, $\beta \in I \subset \mathbb{R}$;

(c) для любых двух вещественных параметров α и γ верно правило:

$$k_t(\alpha) k_t(\gamma) = k_t(\alpha + \gamma); \tag{6.23}$$

таким образом правило (6.12) для операторов (6.22) приобретает вид:

$$\left(k_t(\alpha) D_t^{\alpha}\right) \left(k_t(\gamma) D_t^{\gamma}\right) f(t) = k_t(\alpha + \gamma) D_t^{\alpha+\gamma} f(t), \tag{6.24}$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \leq 0$ и $f(t) \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$;

(d) полагаем, что исходно коэффициент $k_t(\beta)$ t-квазиодномерной системы $M(s)$ определён на полусегменте ${I^{\circ}}_n^+ \equiv (n-1, n]$ или ${I^{\circ}}_n^- \equiv [n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, на котором он непрерывен по β и доопределён (при необходимости) в точке $\beta = n - 1$ (или $\beta = n$), в которой, вообще говоря, $k_t(\beta)$ может испытывать разрыв 1-го рода; после доопределения $k_t(\beta) = f(t_0; \beta)$ где $\beta \in I_n \equiv [n-1, n] \subset \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$;

(e) пусть $[A]$ - есть символ размерности физической величины A, причём случай $[B] = 1$ соответствует безразмерной величине B; размерная структура $k_t(\beta)$ такова, что

$$\left[k_t(\beta) D_t^{\beta}\right] = [D_t^n] = \sec^{-n}, \quad \text{если} \quad \beta \in {I^{\circ}}_n^+, \tag{6.25}$$

т.е. $\beta : n - 1 < \beta \leq n$, и

$$\left[k_t(\beta) D_t^{\beta}\right] = \left[D_t^{n-1}\right] = \sec^{-(n-1)}, \quad \text{если} \quad \beta \in {I^{\circ}}_n^-, \tag{6.26}$$

т.е. $\beta : n-1 \leq \beta < n$, где ${I^{\circ}}_n^{\pm}$ - соответствующие полусегменты непрерывности $k_t(\beta)$.

Из условия (e) (см.(6.25),(6.26)) сразу следует, что $[k_t(n)] \equiv 1$ для любого $n = 1, 2, \ldots$, т.е. $k_t(n)$ - безразмерная величина. Последнее можно доопределить тем, что $[k_t(0)] = 1$.

Итак: $[k_t(n-1)] \equiv 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Действительно, при $\beta \in {I^{\circ}}_n^+$ и $\beta = n$ из (6.25) следует, что $[k_t(n) D_t^n] = [k_t(n)][D_t^n] = [D_t^n]$, $n \in \mathbb{N}$. Аналогично, при $\beta \in {I^{\circ}}_n^-$ и $\beta = n-1$ из (6.26) следует: $[k_t(n-1) D_t^{n-1}] = [k_t(n-1)][D_t^{n-1}] = [D_t^{n-1}]$, $n \in \mathbb{N}$.

В связи с условием (e) рассмотрим так-же набор примеров:

$$[k_t(\beta)D_t^{\beta}] = [D_t^1] = \sec^{-1}, \beta \in I^{\circ}{}_1^+ \equiv (0,1];$$

$$[k_t(\beta)D_t^{\beta}] = [D_t^2] = \sec^{-2}, \beta \in I^{\circ}{}_2^+ \equiv (1,2];$$

$$[k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}] = [D_t^0] = 1, \beta \in I^{\circ}{}_1^+, \text{т.е.} (1-\beta) \in I^{\circ}{}_1^- \equiv [0,1);$$

$$[k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}] = [D_t^1] = \sec^{-1}, \beta \in I^{\circ}{}_0^+ \equiv (-1,0], \text{т.е.} (1-\beta) \in I^{\circ}{}_2^- \equiv [1,2);$$

$$[k_t(\beta+1)D_t^{\beta+1}] = [D_t^2] = \sec^{-2}, \beta \in I^{\circ}{}_1^+, \text{т.е.} (\beta+1) \in I^{\circ}{}_2^+.$$

Рассмотрим некоторую механическую систему $M(s)$ с лагранжианом $L(q_1,\ldots,q_s;\dot q_1,\ldots,\dot q_s)$ и t-квазиодномерную по некоторой одной обобщённой координате q_i, $i \in [1,s]$, $s \in \mathbb{N}$.

Пусть вначале для простоты $s = 1$ и $L = L(q,\dot q)$; система $M(s)$ t-квазиодномерна по q и для неё определён размерный коэффициент $k_t(\beta)$, $\beta \in (0,1]$. Из перехода (6.22) вместо уравнения (6.11) следует теперь уравнение вида:

$$k_t(\beta)D_t^{1-(1-\beta)}[p_q + \alpha q] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.27}$$

Отметим здесь, что хотя параметр β в (6.27) определён на полусегменте $0 < \beta \le 1$, сам коэффициент $k_t(\beta)$ следует определить на всём сегменте $[0,1]$, т.е. доопределить $k_t(\beta)$ в нулевой точке. В противном случае неопределённым останется свойство (6.24) при $\alpha \ge 0$, $\gamma = -\alpha$.

Действительно из (6.24) найдём, что

$$\left(k_t(\alpha)D_t^{\alpha}\right)\left(k_t(-\alpha)D_t^{-\alpha}\right)f(t) = k_t(0)D_t^0 f(t) = f(t), \tag{6.28}$$

т.е. следует положить $k_t(0) = 1$.

Однако при этом непрерывность функции $k_t(\beta)$ по β следует строго требовать лишь в полуинтервале $(0,1]$, тогда как в нулевой точке $\beta = 0$ функция $k_t(\beta) = f\,(t_0;\beta)$ может, вообще говоря, испытывать разрыв 1-го рода.

Представляя по свойству (6.24) дробный оператор в уравнении (6.27) в виде $k_t(\beta)D_t^{1-(1-\beta)} = \left(k_t(1)D_t^1\right)\left(k_t(\beta-1)D_t^{-(1-\beta)}\right)$ и, умножая затем (6.27) на оператор $k_t(1-\beta)D_t^{(1-\beta)}$, найдём окончательное представление уравнения Лагранжа для t-квазиодномерной системы по q:

$$D_t^1\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) = k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) + f_q. \tag{6.29}$$

Соответственно в случае системы $M(s)$ с $s > 1$, $s \in \mathbb{N}$, система уравнений Лагранжа принимает вид:

$$D_t^1\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad i = 1,2,\ldots,m; \tag{6.30}$$

$$D_t^1\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_j}\right) = k_t(1-\beta_j)D_t^{1-\beta_j}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j}\right) + f_{q_j}, \tag{6.31}$$

где $\beta_j \in (0,1]$, $j = m+1, m+2, \ldots, n$.

Перед тем как приступать к непосредственному изложению конкретных примеров укажем заранее, что во всех рассматриваемых случаях диссипативная часть энергии $\epsilon_\beta(t)$, $t \in I_t \subset \mathbb{R}_0^+$, предполагается представимой в виде полной производной $(df_\beta(q,t)/dt)$ от некоторой функции координат и времени $f_\beta(q,t) \in L^1(\mathbb{R}_0^+)$ всюду на полуинтервале I_t. Так-как функция Лагранжа определена лишь с точностью до прибавления к ней полной производной от любой (ограниченной и измеримой) функции $f = f(q,t)$ [1], то выполнение данного выше условия позволяет для разбираемых t-квазиодномерных систем использовать исходные лагран-жианы без изменений.

6.3. **Математический маятник.** Рассмотрим колебания плоского математического маятника (см. пункт 1.1.), полагая что система t-квазиодномерна по углу φ и на неё действует сила трения $f_\varphi = -\alpha\dot{\varphi}$, где $\alpha = \alpha_\beta \equiv \alpha(\beta)$ - параметрическая функция $\beta \in (0,1]$.

Лагранжиан системы даётся выражением (1.1); её энергия равенством (1.3). Однако в нашем случае, в силу наличия силы трения f_φ и, следовательно, диссипативной функции $F_\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha_\beta\dot{\varphi}^2$, величина энергии маятника E зависит от времени: $E = E_\beta(t) \equiv E\left[\varphi_\beta(t)\right]$, причём

$$E_\beta(t) = E_0 - \epsilon_\beta(t), \tag{6.32}$$

где $E_0 = -mgl\cos\varphi_0$, $\epsilon_\beta(t) = 2\int_0^t F_\varphi(t)dt = \alpha_\beta\int_0^t \dot{\varphi}^2(\tau)d\tau$. Таким образом энергия маятника уже не является интегралом движения.

Уравнение движения маятника найдём из (6.29). Исходно имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi}\right) + f_\varphi, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.33}$$

Непосредственная подстановка лагранжиана (1.1) в (6.33) даёт

$$ml^2\ddot{\varphi}(t) + \alpha_\beta\dot{\varphi}(t) + k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}\left[mgl\sin\varphi(t)\right] = 0. \tag{6.34}$$

Производя стандартные преобразования над (6.34) (по правилам указанным в пункте 6.1. и 6.2.) найдём уравнение движения t-квазиодномерного математического маятника

$$D_t^{\beta+1}\varphi(t) + 2\lambda_\beta D_t^\beta\varphi(t) + k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2\sin\varphi(t) = 0, \tag{6.35}$$

где $\lambda_\beta = \lambda(\beta) = \alpha_\beta/2ml^2$. В случае заведомо малых колебаний маятника $|\varphi(t)| << 1$ и уравнение (6.35) можно заменить на приближённое уравнение:

$$D_t^{\beta+1}\varphi(t) + 2\lambda_\beta D_t^\beta\varphi(t) + k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2\varphi(t) = 0. \tag{6.36}$$

Здесь $\omega_{00} = \sqrt{g/l}$ - частота свободных колебаний t-одномерного маятника. В отличие от уравнения (6.35) уравнение (6.36) является точно решаемым если только его снабдить начальными условиями. Запишем последние в виде:

$$\varphi_0(\beta) \equiv k_t(\beta-1)D_t^{\beta-1}\varphi(0) = k_t(\beta-1)\lim_{t\to0}\left[D_t^{\beta-1}\varphi(t)\right]; \tag{6.37}$$

$$\dot{\varphi}_0(\beta) \equiv k_t(\beta)D_t^\beta\varphi(0) = k_t(\beta)\lim_{t\to0}\left[D_t^\beta\varphi(t)\right]. \tag{6.38}$$

В связи с начальными условиями (6.37), (6.38) поясним, что маятник начинает движение в момент $t = 0$ с некоторого начального угла $\varphi(0)$ с начальной скоростью u_0. Уточним, что согласно равенству (1.3) для начального момента времени $t = 0$, между углом максимального отклонения φ_0 t-квазиодномерного маятника и его начальной скоростью u_0 существует простая связь: $lu_0^2 = 2g\left(1-\cos\varphi_0\right)$. Конструкция величин (6.37), (6.38) такова, что по размерности $[\varphi_0(\beta)] = [\varphi(0)]$ и $[\dot{\varphi}_0(\beta)] = [u_0]$ для любого $\beta \in (0,1]$. Однако, вообще говоря, величины $\varphi_0(\beta)$ и $\dot{\varphi}_0(\beta)$ отличаются от начальных фиксированных величин $\varphi(0)$ и u_0 соответ-ственно. Поэтому целесообразно $\varphi_0(\beta)$ и $\dot{\varphi}_0(\beta)$ называть начальными параметрическими функциями $\beta \in (0,1]$, или короче дробным начальным углом $\varphi_0(\beta)$ и дробной начальной скоростью $\dot{\varphi}_0(\beta)$ маятника. Последовательная физическая теория (помимо прочего) должна объяснить связь между начальными величинами $\varphi_0(\beta)$ и $\varphi(0)$, и $\dot{\varphi}_0(\beta)$ и u_0 при любых $0 < \beta \leq 1$. Физически интуитивно можно заранее предположить вероятную пропорциональность этих величин. Очевидно, что при $\beta = 1$ возникает совпадение: $\varphi_0(1) = \varphi(0)$ и $\dot{\varphi}_0(1) = u_0$.

Из общих физических соображений полагаем, что $\varphi_0(\beta) \equiv 0$ для любого $\beta \in (0, 1]$ а $\dot{\varphi}_0(\beta) > 0$. Другими словами предполагаем, что t-квазиодномерный математический маятник начинает своё движение из нулевого угла $\varphi(0) = 0$ с некоторой начальной скоростью u_0 и соответствующей ей дробной начальной скоростью $\dot{\varphi}_0(\beta)$ при некотором $\beta \in (0, 1]$. В противном случае, при $\varphi(0) \neq 0$, неизбежно возникновение сингулярности значения функции $\varphi(t)$ в начальный момент времени $t = 0$, что физически никак не оправдано.

Согласно теореме 3.3. решение уравнения (6.36) при начальных условиях (6.37), (6.38), имеет вид:

$$\varphi_\beta(t) = \left(\frac{\dot{\varphi}_0(\beta)}{k_t(\beta)}\right) \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left(\frac{\omega_{00}}{\sqrt{k_t(\beta)}}\right)^{2q-2} t^{q(\beta+1)-1} E^{q-1}_{1,q(\beta+1)}\left(-2\lambda_\beta t\right). \quad (6.39)$$

Зная явную зависимость $\varphi = \varphi_\beta(t)$ и вычисляя производную $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_\beta(t)$ найдём диссипативную функцию $F_\varphi(t)$, что в свою очередь позволяет найти нам функцию $\epsilon = \epsilon_\beta(t)$. Рассматривая далее систему двух функций $\varphi = \varphi_\beta(t)$, $\epsilon = \epsilon_\beta(t)$, и исключая из него t, можно в принципе найти функциональную связь $\epsilon = \epsilon_\beta(\varphi)$. В реальности, из-за сложности приводимых соотношений, явная зависимость $\epsilon = \epsilon_\beta(\varphi)$ может быт найдена только приближённо.

Используя совместно выражения (1.3) и (6.32) и применяя в них зависимость $\epsilon = \epsilon_\beta(\varphi)$, найдём уравнение:

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi = -mgl\cos\varphi_0 - \epsilon_\beta(\varphi), \quad (6.40)$$

откуда следует общее выражение для периода t-квазиодномерного маятника:

$$T_\beta = 4\sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi - \cos\varphi_0) - \tilde{\epsilon}_\beta(\varphi)}}, \quad (6.41)$$

где $\tilde{\epsilon}_\beta(\varphi) = \epsilon_\beta(\varphi)/2mgl$.

В наиболее простом случае t-квазиодномерного математического маятника $\tilde{\epsilon}_\beta(\varphi) = \tilde{\epsilon}(\beta) = \epsilon_\beta/2mgl$, где $\epsilon_\beta = \epsilon_0(\beta)$ есть независящая от φ функция параметра β, непрерывно зависящая от него на полусегменте $(0, 1]$. Проведём необходимые расчёты для T_β в этом случае. Пусть для удобства $a = \epsilon_0(\beta)/2mgl$. Тогда из (6.41) следует, что

$$T_\beta = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2(\varphi_0/2) - \sin^2(\varphi/2) - a}} = 2\sqrt{\frac{l}{g}} J(\varphi_0, a). \quad (6.42)$$

Проводя элементарные преобразования, для интеграла $J(\varphi_0, a)$ несложно получить представление в виде ряда:

$$J(\varphi_0, a) = 2 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2q)!(a^q)}{2^{2q}(q!)^2 \sin^{2q}(\varphi_0/2)} \int_0^{\pi/2} \frac{d\xi}{\left(1 - \sin^2\xi\right)^q \sqrt{1 - k^2 \sin^2\xi}}. \quad (6.43)$$

Введём в рассмотрение следующее обобщение. Будем называть обобщённым эллиптическим интегралом 3-го рода интеграл вида:

$$\Pi^q(u;n,k) \equiv \int_0^u \frac{d\tau}{(1+n\tau^2)^q\sqrt{(1-\tau^2)(1-k^2\tau^2)}}, \tag{6.44}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ - целое число; $q = 0, 1, 2, \dots$; $k \in \mathbb{R}$ - вещественное число. В частности

$$\Pi^0(u;n,k) = \int_0^u \frac{d\tau}{\sqrt{(1-\tau^2)\,(1-k^2\tau^2)}} = F(u,k), \tag{6.45}$$

- эллиптический интеграл 1-го рода [23]; $\Pi^0(u;0,0) = \Pi^q(u;0,0) = \arcsin u$; наконец $\Pi^1(u;n,k) = \Pi(u;n,k)$, - стандартный эллиптический интеграл 3-го рода [4,23]. В (6.44) интеграл $\Pi^q(u;n,k)$ определён в так называемой нормальной форме Якоби, которая заменой $\tau = \sin\xi$ преобразуется к форме Лежандра:

$$\Pi^q(u;n,k) = \int_0^{\varphi_0} \frac{d\xi}{\left(1+n\sin^2\xi\right)^q\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} = \Pi^q\left(\sin\varphi_0;n,k\right), \tag{6.46}$$

где верхний предел в интеграле определяется как $\sin\varphi_0 = u$. В частности, при $n = -1$ интеграл $\Pi^q\left(\sin\varphi_0;-1,k\right)$ можно представить в виде ряда:

$$\Pi^q\left(\sin\varphi_0;-1,k\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{P}_{q-1}(m)\int_0^{\varphi_0} \frac{\sin^{2m}\xi d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}. \tag{6.47}$$

Интеграл $\Pi^q(u;n,k)$ при $\varphi_0 = \pi/2$ будем называть полным обобщённым интегралом 3-го рода и обозначать: $\Pi^q\left(\sin\frac{\pi}{2};n,k\right) = \Pi^q(1;n,k) \equiv \Pi^q(n,k)$.

Таким образом интеграл $J(\varphi_0,a)$ перепишем в форме следующего представления:

$$J\left(\varphi_0,a\right) = 2\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(2q)!(a^q)}{2^{2q}(q!)^2\sin^{2q}\left(\varphi_0/2\right)}\Pi^q\left(-1,\sin\frac{\varphi_0}{2}\right). \tag{6.48}$$

Следовательно, общее выражение для T_β в данном случае принимает вид ряда

$$T_\beta = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\sum_{q=0}^{\infty} b_q\left[\frac{\epsilon_0(\beta)}{2mgl\sin^2(\varphi_0/2)}\right]^q \Pi^q\left(-1,\sin\frac{\varphi_0}{2}\right), \tag{6.49}$$

где $\beta \in (0,1]$, $b_q \equiv (2q)!/2^{2q}(q!)^2$, $q = 0, 1, 2, \dots$.

В частности, при $\epsilon_0 = 0$, для всех $0 < \beta \leq 1$ из (6.49) получим

$$T_0 = 4b_0\sqrt{\frac{l}{g}}\Pi^0\left(-1,\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = 4\sqrt{\frac{l}{g}}K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right), \tag{6.50}$$

где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл 1-го рода. То есть мы (как и должно) получили в предельном случае $\epsilon_0 = 0$ известную формулу (1.4) для периода колебаний плоского математического маятника.

Пусть теперь для любого $\beta \in (0,1]$ выполнено условие $|\epsilon_0(\beta)| \leq \bar{\epsilon}$, причём само $\bar{\epsilon} << 2mgl\sin^2(\varphi_0/2)$. Из (6.49) в первом порядке приближения по $\bar{\epsilon}$ образуется выражение:

$$T_\beta = T_0 + \frac{\epsilon_0(\beta)}{mg\sqrt{gl}\sin^2(\varphi_0/2)}\Pi\left(-1,\sin(\varphi_0/2)\right). \tag{6.51}$$

Последнее выражение при малых колебаниях маятника, когда $\sin(\varphi_0/2) \approx (\varphi_0/2) << 1$ можно так-же представить в виде:

$$T_\beta = T_0 \left[1 + \frac{\epsilon_0(\beta)}{mgl\varphi_0^2} \cdot \frac{\Pi\left(-1, \varphi_0/2\right)}{K\left(\varphi_0/2\right)} \right]. \tag{6.52}$$

При $\varphi_0 \to 0$ отношение эллиптических интегралов в (6.52) стремится к

$$\lim_{\varphi_0 \to 0} \frac{\Pi\left(-1, \varphi_0/2\right)}{K\left(\varphi_0/2\right)} = \frac{\Pi(-1,0)}{K(0)} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \xi d\xi. \tag{6.53}$$

Для ряда в правой части (6.53) верна оценка

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^{2k} \xi d\xi \geq 1,$$

что следует из того, что все интегралы ряда неотрицательны и его первое слагаемое равно $\pi/2$. Таким образом предельное отношение (6.53) конечно и положительно и период T_β в первом порядке по ϵ_β неограниченно возрастает при $\varphi_0 \to 0$, если только $\epsilon_0(\beta)$ перестает зависеть от φ_0.

Представим наконец период (6.49) в соотнесённом к T_0 виде. Имеем:

$$T_\beta = T_0 \left[1 + \sum_{q=1}^{\infty} b_q \left\{ \frac{\epsilon_0(\beta)}{2mgl \sin^2(\varphi_0/2)} \right\}^q \widetilde{\Pi}^q \left(-1, \sin\frac{\varphi_0}{2} \right) \right], \tag{6.54}$$

где введено обозначение $\widetilde{\Pi}^q(-1,k) \equiv \Pi^q(-1,k)/K(k)$, $q = 1, 2, \ldots$. Следовательно, весь ряд в правой части (6.54) составляет относительное изменение периода T_β в сравнении с T_0, т.е. определяет величину $\Delta_\beta = \left|T_\beta - T_0\right|/T_0$.

6.4. **Сферический маятник.** Рассмотрим движение сферического маятника в сферической системе координат $S = S(\rho, \theta, \varphi)$ с началом в центре сферы (см. пункт 1.2.), на который действует сила трения $f_\theta = -\alpha\dot{\theta}$ (т.е. сила пропорциональная скорости маятника по угловой координате θ), приводящая к t-квазиодномерности по углу θ. Уточним: по общей идеологии предполагается, что система сферического маятника совершает сложное диссипативное движение (т.е. движение, связанное с потерей энергии) при котором диссипативные силы, действующие на систему, могут и не быть пропорциональны скорости движения маятника по какой-либо компоненте. Однако, априорно допускается возможность переформулировки описания движения маятника от непосредственного к эффективному.

При эффективном описании в системе $S = S(\rho, \theta, \varphi)$ маятник движется t - квазиодномерно по углу θ и на него действует единственная сила трения (по существу эффективная сила), равная по величине $f_\theta = -\alpha\dot{\theta}$, где коэффициент трения α напрямую связан с параметром неодномерности $\beta \in (0, 1]$, т.е. $\alpha = \alpha_\beta \equiv \alpha(\beta)$ - непрерывная функция β.

Функция Лагранжа L маятника задаётся выражением (1.6) из которого сразу следует цикличность координаты φ и сохранение обобщённого импульса $p_\varphi = M_z = const$. Энергия E системы при наличии диссипации уже не может являтся интегралом движения и зависит явно от времени движения маятника.

Действительно, согласно например [1], диссипативная функция F_β определят скорость изменения энергии системы: $dE/dt = -2F_\beta$. Отсюда

$$E(t) - E(t_0) = -\alpha_\beta \int_{t_0}^{t} \dot{\theta}^2(\tau)d\tau = -\epsilon_\beta(t). \tag{6.55}$$

Полагая здесь $t_0 = 0$ а $E(t_0) = E(0) = E_0$, в качестве последней следует взять энергию системы в момент отсутствия трения, т.е. в момент когда энергия системы совпадает с интегралом движения (1.8).

Обратимся к вопросу о количественных методах нахождения траектории движения сфери-ческого маятника. Наиболее простой вариант нахождения траектории доставляет выражение (1.7) для интеграла p_φ. Действительно, если знать явную зависимость $\theta = \theta_\beta(t)$, то из (1.7) сразу следует первая квадратура задачи:

$$\varphi_\beta(t) = \frac{M_z}{ml^2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sin^2\left[\theta_\beta(\tau)\right]}, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.56}$$

Для получения 2-ой квадратуры необходимо рассмотреть систему функций $\theta_\beta = \theta_\beta(t)$ и $\varphi_\beta = \varphi_\beta(t)$. Исключая время t из этой системы найдём явную зависимость траектории движения маятника $\theta_\beta = \theta_\beta(\varphi)$, $\beta \in (0,1]$. Отсюда, вновь пользуясь интегралом (1.7), найдём вторую квадратуру в виде:

$$T_\beta = \frac{ml^2}{M_z} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin^2\left[\theta_\beta(\varphi)\right] d\varphi, \tag{6.57}$$

где $\varphi_1 < \varphi_2$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in [0, 2\pi]$ - некоторые углы (в частности, для полного периода T_β очевидно: $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 2\pi$).

В другом (стандартном) варианте решения задачи о траектории движения маятника, квадратуры можно найти отталкиваясь от выражения для полной энергии системы (6.55). Именно, переписывая выражение (6.55) в виде

$$E(\theta) = E_0 - \epsilon_\beta(\theta) = \frac{ml^2\dot{\theta}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(\theta), \tag{6.58}$$

где $\theta = \theta_\beta(t)$ а $U_{\text{эфф}}(\theta)$ даётся выражением (1.10), найдём 2-ую квадратуру в виде:

$$t_\beta = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/ml^2)\left[E_0 - \epsilon_\beta(\theta) - U_{\text{эфф}}(\theta)\right]}}. \tag{6.59}$$

В таком случае (по прежнему из интеграла (1.7)) 1-ая квадратура равна:

$$\varphi_\beta = \frac{M_z}{l\sqrt{2m}} \int \frac{d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{E_0 - \epsilon_\beta(\theta) - U_{\text{эфф}}(\theta)}}. \tag{6.60}$$

В интегралах (6.59), (6.60), зависимость $\epsilon_\beta(\theta)$ есть результат исключения времени t из системы двух функций: $\epsilon = \epsilon_\beta(t)$ и $\theta = \theta_\beta(t)$.

Уравнения $\theta = \theta_\beta(t)$, (6.59) и (6.60), решают задачу о траектории движения t-квазиодномерного сферического маятника в квадратурах при условии нахождения представления $\epsilon = \epsilon_\beta(\theta)$.

Рассмотрим далее вопрос о представлении $\epsilon_\beta(\theta)$, найдя предварительно уравнение движения сферического маятника.

Как и в случае математического маятника, общее уравнение движения сферического маятника по углу θ имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = k_t\,(1-\beta)\,D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right) + f_\theta, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.61}$$

Умножая (6.61) на оператор $k_t\,(\beta-1)\,D_t^{-(1-\beta)}$ и учитывая что $(\partial L/\partial\dot\theta)=ml^2\dot\theta$, после элементарных преобразований найдём:

$$D_t^{\beta+1}\theta(t)+2\lambda_\beta\frac{k_t(\beta)}{k_t\,(\beta+1)}D_t^\beta\theta(t)+k_t^{-1}\,(\beta+1)\left[\frac{g}{l}\sin\theta(t)-\frac{\dot\varphi^2}{2}\sin 2\theta(t)\right]=0. \tag{6.62}$$

Из уравнения (6.62), при условии малости угла колебаний $|\theta(t)|<<1$ в процессе всего движения маятника, легко найти уравнение малых θ-колебаний сферического маятника:

$$D_t^{\beta+1}\theta(t)+2\lambda_\beta D_t^\beta\theta(t)+\left[\frac{g-l\dot\varphi^2}{lk_t(\beta+1)}\right]\theta(t)=0, \tag{6.63}$$

где $\lambda_\beta=\alpha_\beta/2ml^2$. Будем полагать, что условие вещественности величины $\omega=\sqrt{(g/l)-\dot\varphi^2}$ выполнено. Параметризуем частотную величину $\omega=\omega(\dot\varphi)$. Для этого будем приближённо описывать движение сферического маятника в виде малых θ-колебаний, с одновременным условием равномерности движения по углу φ, то есть таким движением, при котором $\ddot\varphi(t)=0$ во все время рассмотрения. Точнее, считаем выполненными следующие условия: $|\theta(t)|<<1$ и $\dot\varphi(t)=\dot\varphi_{00}=const$, причём $\dot\varphi_{00}\le\sqrt{g/l}$.

В таком случае частотная величина $\omega=\omega(\dot\varphi)$ оказывается равной $\omega_{00}=\sqrt{(g/l)-\dot\varphi_{00}^2}=\omega\,(\dot\varphi_{00})$, которую мы будем называть частотой свободных малых θ-колебаний сферического маятника при условии равномерного движения по φ.

Таким образом уравнение движения сферического маятника в указанных выше условиях принимает вид:

$$D_t^{\beta+1}\theta(t)+2\lambda_\beta D_t^\beta\theta(t)+k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2\theta(t)=0. \tag{6.64}$$

Согласно теореме 3.3. решение уравнения (6.64) при начальных условиях

$$\theta_0(\beta)\equiv k_t\,(\beta-1)\,D_t^{\beta-1}\theta(0)=k_t\,(\beta-1)\lim_{t\to0}\left[D_t^{\beta-1}\theta(t)\right]\equiv0, \tag{6.65}$$

$$\dot\theta_0\,(\beta)\equiv k_t(\beta)D_t^\beta\theta(0)=k_t(\beta)\lim_{t\to0}\left[D_t^\beta\theta(t)\right]>0, \tag{6.66}$$

для всех $\beta\in(0,1]$, принимает вид:

$$\theta_\beta(\tau)=\left(\frac{\dot\theta_0(\beta)}{k_t(\beta)}\right)\sum_{q=1}^{\infty}(-1)^{q-1}\left(\frac{\omega_{00}}{\sqrt{k_t(\beta)}}\right)^{2q-2}\tau^{q(\beta+1)-1}E_{1,q(\beta+1)}^{q-1}\left(-2\lambda_\beta\tau\right). \tag{6.67}$$

Здесь предполагается, что движение маятника начинается из южного полюса ($\theta(0)=0$) с конечной начальной скоростью u_0, θ-компонента которой пропорциональна $\dot\theta_0(\beta)$. Кроме того, относительно начальных условий (6.65), (6.66), верны в точности те-же замечания, что и для начальных условий (6.37), (6.38) пункта 6.3. задачи о математическом маятнике.

Подставляя выражение (6.67) в правую часть (6.55) и производя соответствующие преобра-зования получим:

$$\epsilon_\beta(t)=\alpha_\beta\left(\frac{\dot\theta_0^2(\beta)}{k_t^2(\beta)}\right)\sum_{q_1,q_2=1}^{\infty}\left(-\frac{\omega_{00}^2}{k_t(\beta)}\right)^{(q_1+q_2)-2}t^{(q_1+q_2)(\beta+1)-3}\widetilde F_{\beta+1}^{q_1,q_2}\left(-2\lambda_\beta t\right), \tag{6.68}$$

где введено условное обозначение для двойного ряда

$$\widetilde{F}^{q_1,q_2}_{\beta+1}(-2\lambda_\beta t) \equiv \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{\widetilde{P}_{q_1-1}(k_1)\,\widetilde{P}_{q_2-1}(k_2)}{[(q_1+q_2)(\beta+1)+(k_1+k_2)-3]}\times$$

$$\times\frac{(-2\lambda_\beta t)^{k_1+k_2}}{\Gamma\left[k_1+q_1(\beta+1)+1\right]\cdot\Gamma\left[k_2+q_2(\beta+1)+1\right]}. \tag{6.69}$$

Во избежание появления нефизических сингулярностей при выводе (6.68) необходимо дополнительно предположить, что для t-квазиодномерных систем параметр β, по крайней мере, должен лежать в пределах $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$.

Равенство (6.68) даёт общее выражение для величины энергии диссипации $\epsilon_\beta(t)$ t-квази-одномерной системы в зависимости от времени t и параметра неоднономерности $\beta \in (1/2, 1]$, когда сила „трения“ имеет вид $f_\theta = -\alpha\dot{\theta}$. Ясно, что в форме (6.68) величина $\epsilon = \epsilon_\beta(t)$ имеет слишком громоздкий для анализа вид. Поэтому для получения каких-либо физических выводов из выражения (6.68) требуется произвести значительные упрощения.

Вернёмся к квадратурам (6.59), (6.60). Область движения маятника по углу θ определяется условием $E_0 > U_{\text{эфф}}+\epsilon_\beta$, а её границы условием $E_0 = U_{\text{эфф}}+\epsilon_\beta$. В простейшем случае, когда $\epsilon_\beta = \epsilon_0(\beta) \neq f(\theta)$ не зависит от θ, результат сводится к смещению $E_0 \to E_0 - \epsilon_0(\beta)$ в уравнении (1.12) и, следовательно, в значениях граничных углов. Однако качественная картина движения при этом в целом сохраняется. В более общих случаях, когда будет учтена в том или ином приближении зависимость ϵ_β от угла θ, в поведении движения t-квазиодномерного сферического маятника могут обнаружиться существенные изменения.

6.5. **Симметрический волчок с неподвижной нижней точкой.** Пусть совместное начало подвижной $S(x_1, x_2, x_3)$ и неподвижной $S(X, Y, Z)$ систем координат выбрано в неподвижной точке волчка O, а ось Z направлена по вертикали (см. пункт 1.3.).

Рассмотрим движение волчка, когда система эффективно t-квазиодномерна (см. пункт 6.4.) и на неё действует (эффективная) сила трения:

$$\mathbf{f} = \mathbf{e}_\varphi f_\varphi + \mathbf{e}_\psi f_\psi + \mathbf{e}_\theta f_\theta, \tag{6.70}$$

где $f_\varphi = -\alpha_\varphi\dot{\varphi}$, $f_\psi = -\alpha_\psi\dot{\psi}$, $f_\theta = -\alpha_\theta\dot{\theta}$; $(\mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\psi, \mathbf{e}_\theta)$ - базис единичных векторов в подвижной системе $S(\theta, \varphi, \psi)$, где (θ, φ, ψ) - эйлеровы углы. Положим всюду ниже, что $\alpha_\varphi = \alpha_\psi \equiv 0$ для всего времени движения волчка. Функция Лагранжа L волчка в поле тяжести в подвижной системе $S(\theta, \varphi, \psi)$ представляется выражением (1.14). Два первых интеграла движения p_ψ и p_φ следуют сразу из L и даются формулами (1.15) и (1.16) соответственно.

Энергия E системы в силу наличия диссипации не сохраняется:

$$E(t) = E_0 - \epsilon_\beta(t) = E_0 - \alpha_\theta \int_0^t \dot{\theta}^2(\tau)d\tau, \tag{6.71}$$

где $\alpha_\theta = \alpha_\theta(\beta)$ - коэффициент „трения“ системы, зависящий от параметра неоднономерности $\beta \in (0, 1]$; величина E_0 определяется выражением (1.17), заданного для начального момента времени $t = 0$. Исходя из общего уравнения

(6.29) запишем уравнение движения t-квазиодно-мерного волчка по обобщённой координате θ:

$$D_t^{\beta+1}\theta(t) + 2\lambda_\beta D_t^\beta \theta(t) + \frac{\left[I_3 - I_1^{'}\right]}{2I_1 k_t(\beta)}\dot{\varphi}^2 \sin 2\theta(t) + \frac{\left[I_3\dot{\psi}\dot{\varphi} - \mu g l\right]}{I_1^{'} k_t(\beta)} \sin\theta(t) = 0, \quad (6.72)$$

где $\lambda_\beta = \alpha_\theta(\beta)/\left(I_1 + \mu l^2\right)$. Рассматривая движение волчка как малые θ-колебания относительно оси Z, такие что $|\theta(t)| << 1$ для всех $t \in I_t \subset \mathbb{R}_0^+$, из (6.72) найдём приближённое уравнение:

$$D_t^{\beta+1}\theta(t) + 2\lambda_\beta D_t^\beta \theta(t) + \left[\frac{I_3\dot{\varphi}(\dot{\varphi} + \dot{\psi}) - I_1^{'}\dot{\varphi}^2 - \mu g l}{I_1^{'} k_t(\beta)}\right]\theta(t) = 0. \quad (6.73)$$

При малых значениях модуля функции $\theta(t)$, $\cos\theta \approx 1$ и приближённо выполнены равенства:

$$p_\psi \approx I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\right) \approx M_3 = const; \quad (6.74)$$

$$p_\varphi \approx I_3\left(\dot{\psi} + \dot{\varphi}\right) + I_1^{'}\dot{\varphi}\theta^2 \approx M_z = const. \quad (6.75)$$

Но тогда числитель скобки в уравнении (6.73) равен: $M_z\dot{\varphi} - I_1^{'}\dot{\varphi}^2 - \mu g l$. Если теперь параметри-зовать θ-колебания волчка по $\dot{\varphi}$ полагая, что $\dot{\varphi} \approx \dot{\varphi}_{00} = const$, то уравнение (6.73) примет искомую форму

$$D_t^{\beta+1}\theta(t) + 2\lambda_\beta D_t^\beta \theta(t) + k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2\theta(t) = 0, \quad \beta \in (0, 1], \quad (6.76)$$

где

$$\omega_{00} = \sqrt{\frac{\left(M_z - I_1^{'}\dot{\varphi}_{00}\right) - \mu g l}{I_1 + \mu l^2}}, \quad (6.77)$$

- есть частота свободных θ-колебаний волчка, равномерно движущегося по углу φ.

Решение уравнения (6.76) для произвольного $\beta \in (0, 1]$ и начальных условиях вида (6.65), (6.66), в точности совпадает с выражением (6.67).

Сделаем несколько замечаний о характере t-квазиодномерного движения волчка.

Прежде всего найдём общее выражение периода движения волчка по углу θ и укажем условие допустимого движения по θ.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ волчок начинает своё движение с некоторых углов $\theta(0) = \theta_0 = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$, $\psi(0) = \psi_0$, с некоторыми соответствующими начальными скоростями $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ (не путать с $\dot{\theta}_0(\beta)$), $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$, $\dot{\psi}(0) = \dot{\psi}_0$. Тогда из выражения (1.17) найдём энергию начального движения волчка:

$$E_0 = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}I_3\left(\dot{\psi}_0 + \dot{\varphi}_0\right)^2 + \mu g l. \quad (6.78)$$

Подставляя в (6.71) решение уравнения (6.76) и найдя таким образом зависимость $\epsilon_\beta(t)$, исключим время t из системы функций $\epsilon_\beta = \epsilon_\beta(t)$ и $\theta_\beta = \theta_\beta(t)$, получая при этом новую зависимость $\epsilon_\beta = \epsilon_\beta(\theta)$. Пользуясь одновременно представлениями энергии системы в виде (1.20)-(1.22) и (6.71) запишем общее энергетическое соотношение:

$$\frac{I_1^{'}}{2} = E_0^{'} - U_{\text{эфф}}(\theta) - \epsilon_\beta(\theta), \quad (6.79)$$

причём $E_0^{'} = E_0 - \mu gl - (M_3^2/2I_3)$. Из (6.79) сразу следует общее выражение периода волчка:

$$t = \int \frac{d\theta}{\sqrt{(2/I_1^{'})\left(E_0^{'} - U_{эфф}(\theta) - \epsilon_\beta(\theta)\right)}}. \tag{6.80}$$

Условие возможного движения волчка по углу θ сводится таким образом к неравенству:

$$E_0^{'} \geq U_{эфф}(\theta) + \epsilon_\beta(\theta). \tag{6.81}$$

Рассмотрим далее случай, который мы будем называть медленными θ-колебаниями волчка, когда частота $\omega_{00} = \omega_{00}(\dot{\varphi}_{00})$ настолько мала, что в решении (6.67) влиянием членов выше первого по ω_{00} можно пренебречь. Тогда

$$\theta_\beta(\tau) = a_0 \tau^\beta E_{1,\beta+1}\left(-2\lambda_\beta \tau\right), \quad \beta \in (0, 1], \tag{6.82}$$

где $a_0 = a_0(\beta) \equiv k_t^{-1}(\beta)\dot{\theta}_0(\beta)$. Выражение для $\epsilon_\beta(t)$ в первом приближении по ω_{00} принимает форму гораздо более простую нежели (6.68), равную

$$\epsilon_\beta(t) = \alpha_\theta a_0^2 t^{2\beta-1} \sum_{k_1,k_2=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k_1+\beta)\Gamma(k_2+\beta)} \cdot \frac{(-2\lambda_\beta t)^{k_1+k_2}}{[(k_1+k_2)+2\beta-1]}, \tag{6.83}$$

если только $\beta \in (1/2, 1]$, что и примем далее. В простейшем случае малого трения $|\lambda_\beta| << 1$, так что из решения (6.82) и выражения (6.83) возникают совсем элементарные равенства:

$$\theta_\beta(t) \approx a_0 \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}; \quad \epsilon_\beta(t) \approx \frac{\alpha_\theta a_0^2}{\Gamma^2(\beta)} \cdot \frac{t^{2\beta-1}}{(2\beta-1)}, \tag{6.84}$$

откуда исключая t найдём, что

$$\epsilon_\beta(\theta) = \frac{\alpha_\theta a_0^2}{\Gamma^2(\beta)} \left[\frac{\Gamma(\beta+1)}{a_0(\beta)}\right]^{2-(1/\beta)} \frac{\theta^{2-(1/\beta)}}{(2\beta-1)} \equiv b_0(\beta)\theta^{(2\beta-1)/\beta}. \tag{6.85}$$

В нашем случае волчок совершает малые θ - колебания, равномерно прецессируя вокруг оси Z со скоростью $\dot{\varphi}_{00} = \left[(M_z - M_3\cos\theta)/I_1^{'}\sin^2\theta\right]_{00}$. Следовательно, при равномерной прецессии волчка по углу φ эффективная потенциальная энергия системы $U_{эфф}(\theta)$ может быть представлена простым приближённым равенством $U_{эфф}(\theta) = u_0 + u_1\cos\theta$, где входящие равны: $u_0 = (M_z\dot{\varphi}_{00}/2) - \mu gl$; $u_1 = \mu gl - (M_3\dot{\varphi}_{00}/2)$. Тогда из учёта (6.85) и выше найденного, условие (6.81) возможного движения по углу θ примет вид более конкретного неравенства:

$u_1\cos\theta + b_0\theta^{2-(1/\beta)} \leq E_0^{'} - u_0$; $\beta \in (1/2, 1]$. Принимая приближённо что $\cos\theta \approx 1 - (\theta^2/2) + (\theta^4/24)$, в граничном случае возможного движения волчка (т.е. в случае равенства $U_{эфф}(\theta) + \epsilon_\beta(\theta) = E_0^{'}$), придём к нелинейному уравнению относительно граничного угла $\overline{\theta}$:

$$\overline{\theta}^4 - 12\overline{\theta}^2 + \widetilde{b}_0\overline{\theta}^{2-(1/\beta)} + (24 - \widetilde{A}) = 0, \quad \beta \in (1/2, 1]. \tag{6.86}$$

Здесь $\widetilde{b}_0 = \widetilde{b}_0(\beta) = [24 b_0(\beta)/u_1]$; $\widetilde{A} = 24A$, причём

$$A = \left|\frac{E_0^{'} - u_0}{u_1}\right| = \left|\frac{2I_3E_0 - \left(M_3^2 + M_zI_3\dot{\varphi}_{00}\right)}{I_3\left(2\mu gl - M_3\dot{\varphi}_{00}\right)}\right|. \tag{6.87}$$

Для простоты рассмотрим предельный полуодномерный случай, когда $\beta \to \frac{1}{2}$. В таком пределе уравнение (6.86) переходит в простое биквадратное уравнение: $\overline{\theta}^4 - 12\overline{\theta}^2 + (24 - \widetilde{B}) = 0$, где $\widetilde{B} = 24B$ и $B = A - (b_0(\beta)/u_1)$. Общее решение биквадратного уравнения имеет вид $\pm\sqrt{6 \pm \sqrt{12 + \widetilde{B}}}$. Следовательно, при $B > 1$ существует лишь один положительный корень $\sqrt{6 + \sqrt{12 + \widetilde{B}}}$, то есть волчок прецессирует вокруг оси Z, совершая одновременно нутацию в растворе углов: $0 \le \theta \le \sqrt{6 + \sqrt{12 + \widetilde{B}}}$. При $B < 1$ существуют два положительных корня $\sqrt{6 \pm \sqrt{12 + \widetilde{B}}}$, и волчок прецессирует с нутацией в ограниченном растворе углов: $\sqrt{6 - \sqrt{12 + \widetilde{B}}} \le \theta \le \sqrt{6 + \sqrt{12 + \widetilde{B}}}$. Наконец в „математическом“ случае $B = 1$, граничные углы нутации принимают конкретные значения: $0 \le \theta \le 2\sqrt{3}$.

Разумеется, проведённые рассуждения являются результатом проделанных исходно при-ближений и не могут претендовать на полную объективность представляемой физической картины. Чем выше будет порядок приближения, тем очевидно сложнее будет поведение системы, прямо обусловленное данным приближением. Тем не менее, уже в приведённом порядке приближения поведение t-квазиодномерного волчка качественно обладает основными особенностями, присущими движению обычного (одномерного) волчка (см. пункт 1.3.).

Найдём в рамках данных приближений период t-квазиодномерного движения волчка для полуодномерного предельного случая, когда $\beta \to \frac{1}{2} + 0$. Из (6.80) и (6.85) имеем:

$$T_{1/2} = \sqrt{\frac{I_1'}{2}} \int_{\theta_0^-}^{\theta_0^+} \frac{d\theta}{\sqrt{E_0' - U_{\text{эфф}}(\theta) - b_0}}, \tag{6.88}$$

где (θ_0^-, θ_0^+) - предельные углы нутации волчка, $b_0 = b_0(\beta)$.

Проведём вычисление периода $T_{1/2}$ для случая вращения волчка, возникающего из условия $u_1 \le 0$, т.е. когда угловая скорость по φ такова, что $\dot{\varphi}_{00} \ge (2\mu g l/M_3)$.

Окончательно имеем:

$$T_{1/2} = \sqrt{\frac{2(I_1 + \mu l^2)}{E_0' - (b_0 + u_0 + u_1)}} \left[F\left(\sin\frac{\theta_0^+}{2}, k\right) - F\left(\sin\frac{\theta_0^-}{2}, k\right) \right], \tag{6.89}$$

где $k = \sqrt{(-2u_1)/\left[E_0' - (b_0 + u_0 + u_1)\right]}$ - модуль эллиптических функций $F(u,k)$ 1-го рода.

В частности, при достижении волчком критической угловой скорости $\dot{\varphi}_{00} = (2\mu g l/M_3)$, следует что $u_1 = k = 0$, откуда (полагая B конечным) найдём простую связь:

$$T_{1/2} = \frac{\sqrt{I_1'}\left[\theta_0^+ - \theta_0^-\right]}{\sqrt{2\left[E_0' - (b_0 + u_0)\right]}}. \tag{6.90}$$

Отметим дополнительно, что вращение волчка вокруг вертикальной оси Z будет устойчивым, если угол $\theta = 0$ отвечает минимуму функции $f_{\text{эфф}}(\theta) = U_{\text{эфф}}(\theta) + \epsilon_\beta(\theta)$. При малых углах θ эффективная энергия волчка $f_{\text{эфф}}(\theta)$ в приближениях (1.24) и (6.85) принимает вид:

$$f_{\text{эфф}}(\theta) \approx \left[\frac{M_3^2}{8I_1'} - \frac{\mu g l}{2}\right]\theta^2 + b_0\theta^{2-(1/\beta)}. \tag{6.91}$$

Проводя в (6.91) грубую замену $\epsilon_\beta(\theta) \to \tilde{\epsilon}_\beta(\theta) = b_0(\beta)\theta^2\left\langle\overline{\theta}\right\rangle^{-(1/\beta)}$, где $\left\langle\overline{\theta}\right\rangle$ - некоторый усреднённый по θ-колебаниям граничный угол волчка, из (6.91) найдём условие устойчивости: $M_3^2 > 4I_1'\mu g l\left[1 - \left(2b_0/\mu g l\left\langle\overline{\theta}\right\rangle^{(1/\beta)}\right)\right]$. Выражая это условие через угловую скорость волчка Ω_3, перепишем его как

$$\Omega_3^2 > \frac{4I_1'\mu g l}{I_3^2}\left[1 - \frac{2b_0}{\mu g l}\left\langle\overline{\theta}\right\rangle^{-(1/\beta)}\right], \quad \beta \in (1/2, 1]. \tag{6.92}$$

6.6. **Движение в неинерциальной системе отсчёта.** Как известно [1,11], в инерциальной системе отсчёта K_0, функция Лагранжа L например одной частицы m во внешнем поле U имеет вид:

$$L_0 = \frac{m\mathbf{v}_0^2}{2} - U.$$

В случае, если движение данной частицы „t-квазиодномерно“ и недиссипативно (в данном пункте мы не будем напрямую связывать диссипацию энергии с t-квазиодномерностью движения системы), с параметром неодномерности $\beta \in (0,1]$, уравнение Лагранжа (6.29) в векторной форме принимает вид:

$$D_t\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}}\right) = k_t(1-\beta)D_t^{1-\beta}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}\right), \tag{6.93}$$

откуда полагая потенциал U независимым от скорости $\mathbf{v}$ (т.е. потенциал U есть $U(\mathbf{r})$), найдём уравнение:

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{k_t(1-\beta)}{\Gamma(\beta)}t^{-(1-\beta)}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}. \tag{6.94}$$

Так-как для частицы непрерывно двигающейся во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ без изменения характера движения, не существует выделенного момента времени t_0 (или временного интервала Δt_0), то в качестве последнего следует выбрать текущее время t. Если к тому же размерный коэффициент $k_t(1-\beta)$ сам имеет в своём составе числовой множитель $\Gamma(\beta)$, т.е. $k_t(1-\beta) = a(\beta)\Gamma(\beta)t^{(1-\beta)}$ для $\beta \in (0,1]$, то мы придём к обычному (с точностью до константы) уравнению движения частицы в поле U [1,2]:

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}.$$

Такой результат показывает, что при качественно неизменном непрерывном t-квазиодномерном движении частицы во внешнем поле, сам характер движения не отличим от одномерного.

В случае же, если частица двигается во внешнем поле так, что её движение носит регулярный (периодический) характер, то выбирая в качестве характерного времени t_0 системы период T_0 (т.е. в качестве размерного множителя $k_t(1-\beta) = a(\beta)\Gamma(\beta)T_0^{(1-\beta)}$, $\beta \in (0,1]$), мы приходим к появлению временной зависимости в правой части (6.94), то есть к уравнению:

$$m\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = -a(\beta)\left(\frac{T_0}{t}\right)^{1-\beta}\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad \beta \in (0,1]. \tag{6.95}$$

В неинерциальной системе отсчёта движение t-квазиодномерной механической системы приобретает гораздо более сложный характер.

Рассмотрим общий вид функции Лагранжа частицы в произвольной неинерциальной системе отсчёта K, двигающейся относительно инерциальной системы K_0 с ускорением $\mathbf{W}$ и вращающейся с угловой скоростью (в едином векторном обозначении) $\mathbf{n}_\Omega\Omega = \mathbf{n}_\Omega(t)\Omega(t) \equiv \mathbf{n}_{\Omega_x}(t)\Omega_x(t) + \mathbf{n}_{\Omega_y}(t)\Omega_y(t) + \mathbf{n}_{\Omega_z}(t)\Omega_z(t)$ (где например $\mathbf{n}_{\Omega_x}(t) = \mathbf{e}_x \cos\alpha_x(t)$, причём $\cos\alpha_x$ - направляющий косинус вдоль оси x_0 в системе K_0) [1,11]:

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} + m\mathbf{v}[\mathbf{n}_\Omega\Omega, \mathbf{r}] + \frac{m}{2}[\mathbf{n}_\Omega\Omega, \mathbf{r}]^2 - m\mathbf{W}\mathbf{r} - U. \tag{6.96}$$

Вычисляя по лагранжиану (6.96) необходимые нам частные производные $(\partial L/\partial\mathbf{v})$ и $(\partial L/\partial\mathbf{r})$, подставляя их в уравнение (6.93) и умножая затем полученное уравнение слева и справа на оператор $k_t(1-\beta)D_t^{-(1-\beta)}$, придём к эквивалентному уравнению: $k_t(\beta)D_t^\beta\,(\partial L/\partial\mathbf{v}) = (\partial L/\partial\mathbf{r})$, или в развёрнутом виде

$$mk_t(\beta)D_t^\beta\mathbf{v}(t) = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}} - m\mathbf{W} + m[\mathbf{n}_\Omega\Omega[\mathbf{r}, \mathbf{n}_\Omega\Omega]] + 2m[\mathbf{v}, \mathbf{n}_\Omega\Omega] + \\ + m\left\{k_t(\beta)D_t^\beta[\mathbf{r}, \mathbf{n}_\Omega\Omega] - [\mathbf{v}, \mathbf{n}_\Omega\Omega]\right\}. \tag{6.97}$$

Уравнение (6.97) есть общее уравнение t-квазиодномерного движения частицы m во внешнем поле $U(\mathbf{r})$ в неинерциальной системе отсчёта K. Помимо известных сил инерции (Кориолиса и центробежной) в (6.97) возникает дополнительное слагаемое смешанного типа, связанное с неравномерностью движения частицы и её „t-квазиодномерностью“.

В случае равномерно вращающейся системы K, не имеющей поступательного движения ($\Omega = \mathrm{const}, \mathbf{W} = 0$), функция Лагранжа имеет вид $L = (mv^2/2) + m\mathbf{v}[\mathbf{n}_\Omega\Omega, \mathbf{r}] + (m/2)[\mathbf{n}_\Omega\Omega, \mathbf{r}]^2 - U(\mathbf{r})$, и уравнение движения (6.97) приобретает более простой вид:

$$mk_t(\beta)D_t^\beta\mathbf{v}(t) = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}} + 2m\,[\mathbf{v}, \mathbf{n}_\Omega\Omega] + m\,[\mathbf{n}_\Omega\Omega\,[\mathbf{r}, \mathbf{n}_\Omega\Omega]] + 2m\left[\Delta_\beta^-\mathbf{v}, \mathbf{n}_\Omega\Omega\right], \tag{6.98}$$

где $\Delta_\beta^-\mathbf{v} = \Delta_\beta^-\mathbf{v}(t) \equiv (1/2)\left[k_t(\beta)D_t^\beta\mathbf{r}(t) - \mathbf{v}(t)\right]$ для любого $\beta \in (0,1]$, или в другой интерпре-тации $\Delta_\beta^-\mathbf{v}(t) \equiv (1/2)\,[\mathbf{v}_\beta(t) - \mathbf{v}(t)]$, где $\mathbf{v}_\beta(t) \equiv k_t(\beta)D_t^\beta\mathbf{r}(t)$, $\beta \in (0,1]$. Величину $\Delta_\beta^-\mathbf{v}(t)$ будем называть t-квазиодномерным или короче β^--приращением скорости частицы, движение которой описывается в системе K радиус-вектором $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$; соответственно величину $\mathbf{v}_\beta(t)$ будем называть t-квазиодномерной или β-скоростью частицы, а силу $2m\left[\Delta_\beta^-\mathbf{v}, \mathbf{n}_\Omega\Omega\right]$ - t-квазиодномерной или β-кориолисовой силой.

Итак отличительная черта уравнения (6.98) это наличие β-кориолисовой силы.

Если наряду с β^--приращением скорости частицы $\Delta_\beta^-\mathbf{v}(t)$ ввести β^+-приращение по формуле $\Delta_\beta^+\mathbf{v} = \Delta_\beta^+\mathbf{v}(t) \equiv (1/2)\,[\mathbf{v}_\beta(t) + \mathbf{v}(t)]$, то уравнение движения (6.98) можно так-же записать в виде:

$$mk_t(\beta)D_t^\beta\mathbf{v}(t) = -\frac{\partial U}{\partial\mathbf{r}} + 2m\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega\Omega] + m\,[\mathbf{n}_\Omega\Omega\,[\mathbf{r}, \mathbf{n}_\Omega\Omega]]\,, \tag{6.99}$$

где $\mathbf{u}_\beta = \mathbf{u}_\beta(t) \equiv [\mathbf{v}(t) + \Delta_\beta^- \mathbf{v}(t)] = \Delta_\beta^+ \mathbf{v}(t)$, - β-обобщённая скорость частицы, а $2m\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega \Omega]$ - β-обобщённая кориолисова сила.

Например, найдём для t-квазиодномерного случая отклонение свободно падающего тела от вертикали, обусловленное вращением Земли, с постоянной угловой скоростью Ω.

В поле тяжести $U(\mathbf{r}) = -m\mathbf{g}\mathbf{r}$, где $\mathbf{g}$ - вектор ускорения силы тяжести; пренебрегая в уравнении (6.99) центробежной силой, содержащей квадрат Ω, получим уравнение движения в виде:

$$k_t(\beta) D_t^\beta \mathbf{v}(t) = 2\Omega\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega] + \mathbf{g}, \tag{6.100}$$

которое можно ещё переписать в виде связи одномерной и t-квазиодномерной скоростей:

$$k_t(\beta) D_t^\beta \mathbf{v}(t) = D_t^1 \mathbf{v}_0(t) + 2\Omega \left[\Delta_\beta^+ \mathbf{v}(t), \mathbf{n}_\Omega\right]. \tag{6.101}$$

6.7. **Маятник Фуко.** Рассмотрим t-квазиодномерное движение маятника Фуко в поле тяжести Земли, используя в качестве исходного уравнения движения, найденное в предыдущем пункте уравнение (6.99). Нас интересует влияние оказываемое вращением Земли на малые колебания „t-квазиодномерно“ движущегося маятника Фуко в рамках приближений, сделанных для одномерного маятника Фуко в пункте 1.4.

Уравнение (6.99) для нашей системы имеет вид:

$$mk_t(\beta) D_t^{\beta+1} \mathbf{r}(t) = \mathbf{N} + mg\mathbf{e}_z + 2m\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega \Omega], \tag{6.102}$$

или покомпонентно

$$k_t(\beta) D_t^{\beta+1} x(t) = -\omega_{00}^2 x(t) + 2\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega \Omega]_x, \tag{6.103}$$

$$k_t(\beta) D_t^{\beta+1} y(t) = -\omega_{00}^2 y(t) + 2\,[\mathbf{u}_\beta, \mathbf{n}_\Omega \Omega]_y, \tag{6.104}$$

где движение маятника $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \equiv (x(t), y(t), z_0)$ описывается в собственной (неинерциальной) системе отсчёта с началом в точке подвеса и базисом $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, у которого единичный орт $\mathbf{e}_z$ направлен вертикально вниз; ω_{00} - частота колебаний „одномерного“ маятника без учёта влияния вращения Земли; $\mathbf{N}$ - сила нормальной реакции опоры подвеса маятника.

Пусть φ - широта положения точки подвеса маятника и пусть значение параметра неодно-мерности движения маятника $\beta \leq 1$ таково, что можно считать выполненным приближение $\mathbf{v}(t) \approx \mathbf{v}_\beta(t)$. Тогда уравнения движения (6.103), (6.104) сводятся к соответствующим уравнениям:

$$D_t^{\beta+1} x(t) + k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2 x(t) = 2\Omega_z D_t^\beta y(t), \tag{6.105}$$

$$D_t^{\beta+1} y(t) + k_t^{-1}(\beta)\omega_{00}^2 y(t) = -2\Omega_z D_t^\beta x(t), \tag{6.106}$$

или к одному комплексному уравнению

$$D_t^{\beta+1} \xi(t) + 2i\Omega_z D_t^\beta \xi(t) + \omega_0^2(\beta)\xi(t) = 0, \tag{6.107}$$

где $\xi(t) = x(t) + iy(t)$; $\omega_0(\beta) \equiv \omega_{00}/\sqrt{k_t(\beta)}$ - частота колебаний t - квазиодномерного маятника Фуко при $\Omega = 0$. Согласно теореме 3.3. решение уравнения (6.107) при любом $\beta \in (0, 1]$ и начальных условиях (см. пункт 6.3.)

$$\xi_0(\beta) = k_t(\beta - 1) D_t^{\beta-1} \xi(0) = k_t(\beta - 1) \lim_{t \to 0} \left[D_t^{\beta-1} \xi(t)\right] \equiv 0, \tag{6.108}$$

$$\dot{\xi}_0(\beta) = k_t(\beta) D_t^\beta \xi(0) = k_t(\beta) \lim_{t \to 0} \left[D_t^\beta \xi(t)\right] > 0, \tag{6.109}$$

имеет вид:

$$\xi_\Omega(t) = \left[\frac{\dot{\xi}_0(\beta)}{k_t(\beta)}\right] \sum_{q=1}^{\infty} (-1)^{q-1} \left[\omega_0(\beta)\right]^{2q-2} t^{q(\beta+1)-1} E^{q-1}_{1,q(\beta+1)} \left(-2i\Omega_z t\right). \quad (6.110)$$

В условиях реального физического эксперимента $\Omega_z << \omega_{00}$ на любой широте φ. Если учесть так же, что при $\beta \approx 1$ величина $k_t(\beta) \approx 1$, то можно считать всегда выполненным условие $\Omega_z << \omega_0(\beta)$. Более того, для произвольного $\beta \in (0,1]$ всегда найдётся интервал широт $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2] \subset [0, \pi/2]$ в пределах которого условие $\Omega_z << \omega_0(\beta)$ будет так-же справедливо. В таком случае следует говорить о подходящих широтах: $\Omega_z = \Omega \sin\varphi << \omega_0(\beta)$, где $\varphi \in [\varphi_1(\beta), \varphi_2(\beta)]$, $\beta \in (0,1]$. Отметим так-же, что как правило маятники Фуко имеют большую длину $l >> 1$ и значительную массу груза, за счёт чего периоды колебаний становятся длинными (например [5] у самого Фуко $T \approx 16$ сек. т.е. $\omega_{00} \approx 0,4$ сек$^{-1} < 1$). Поэтому в (6.110) пренебрежём членами выше ω_{00}^2 и запишем $\xi_\Omega(t)$ во втором порядке по ω_{00} как

$$\xi_\Omega(t) = \left(\frac{\dot{\xi}_0(\beta)}{k_t(\beta)}\right) \left[t^\beta E^0_{1,\beta+1}\left(-2i\Omega_z t\right) - \omega_0^2(\beta) t^{2\beta+1} E^1_{1,2\beta+2}\left(-2i\Omega_z t\right)\right]. \quad (6.111)$$

В тоже время, при отсутствии вращения Земли вокруг своей оси ($\Omega = 0$), решение (6.110) сводится к функции Миттаг-Леффлера:

$$\xi_0(t) = \left(k_t^{-1}(\beta)\dot{\xi}_0(\beta)\right) t^\beta E^0_{\beta+1,\beta+1}\left[-\omega_0^2(\beta) t^{\beta+1}\right]. \quad (6.112)$$

Отношение двух последних выражений даёт:

$$\left(\frac{\xi_\Omega(t)}{\xi_0(t)}\right) = \frac{E^0_{1,\beta+1}\left(-2i\Omega_z t\right)}{E^0_{\beta+1,\beta+1}\left(-\omega_0^2 t^{\beta+1}\right)} - \omega_0^2 t^{\beta+1} \frac{E^1_{1,2(\beta+1)}\left(-2i\Omega_z t\right)}{E^0_{\beta+1,\beta+1}\left(-\omega_0^2 t^{\beta+1}\right)}, \quad (6.113)$$

где $\beta \in (0,1]$ и $\omega_0 = \omega_0(\beta)$. Если исходить из отношения (6.113) для оценки относительного изменения комплексных амплитуд колебаний, то для временного интервала $0 \le t \le T_{00}$ (где $T_{00} = (2\pi/\omega_{00})$ - период колебаний „одномерного“ маятника Фуко), учитывая условие $\Omega_z << \omega_0(\beta)$, в пределе $\beta \to 1$ приближённо получим:

$$\left(\frac{\xi_\Omega(t)}{\xi_0(t)}\right) \approx \left[\left(\frac{\omega_{00}}{\Omega_z}\right)\frac{\sin\Omega_z t}{\sin\omega_{00} t} - \frac{1}{6}\frac{\omega_{00}^3 t^3}{\sin\omega_{00} t}\right] e^{-i\Omega_z t}. \quad (6.114)$$

Экспоненциальный множитель в (6.114) описывает известный эффект Фуко [9,13]: поворот траектории $\xi_0(t)$ невозмущённого маятника вокруг вертикали с угловой скоростью Ω_z.

Обобщение выражения (6.114) на случай произвольного $\beta \in (0,1]$ в том-же приближении приводит к зависимости:

$$\xi_\Omega(t) \approx e^{-i\Omega_z(\beta)t}\xi_0(t), \quad (6.115)$$

где $\Omega_z(\beta) \equiv [2\Omega_z/(\beta+1)]$ - угловая скорость поворота t-квазиодномерного маятника Фуко. Видно, что последняя меняется с параметром β так, что при изменении β от 0 до 1 угловая скорость $\Omega_z(\beta)$ лежит в пределах: $2\Omega_z < \Omega_z(\beta) \le \Omega_z$. В частности, при $\beta = \frac{1}{2}$ найдём $\Omega_z(1/2) = (4/3)\Omega_z$, т.е. в пределах $\beta \in [1/2, 1)$ угловая скорость $\Omega_z(\beta)$ мало отличается от Ω_z. Однако для значений $\beta \approx 0$ (вблизи нуля) $\Omega_z(\beta) \to 2\Omega_z$ и отличие t-квазиодномерного эффекта Фуко становится более существенным.

Список литературы

[1] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифщиц, *Механика*, Наука, Москва, 1965.
[2] П. Аппель, *Теоретическая механика : Том 1*, Физматгиз, Москва, 1960.
[3] Е.Л. Николаи, *Теоретическая механика : Часть 2*, Физматгиз, Москва, 1958.
[4] Н.Н. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций*, Наука, Москва, 1970.
[5] Г.М. Финкельштейн, *Курс теоретической механики*, Учпедгиз, Москва, 1958.
[6] Е.А. Мудрецова, К.Е. Веселов, *Гравиразведка : Справочник геофизика*, Недра, Москва, 1990.
[7] Н.П. Грушинский, Н.Б. Сажина, *Гравитационная разведка*, Недра, Москва, 1972.
[8] И.А. Гусев, *Маятниковый комплекс „АГАТ“ : Результаты высокоточных маятниковых измерений*, Советское радио, Москва, 1977, 57–71.
[9] Н.Н. Бухгольц, *Основной курс теоретической механики : Том 1*, Наука, Москва, 1967.
[10] В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, Москва, 1989.
[11] М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон, *Теоретическая механика в примерах и задачах : Том 2*, Наука, Москва, 1991.
[12] Е.Л. Николаи, *Теория гироскопов*, ОГИЗТТЛ, Москва, 1948.
[13] П. Аппель, *Теоретическая механика : Том 2*, Физматлит, Москва, 1960.
[14] К.К. Казбеков, *Операторное решение для одного класса дифференциальных уравнений дробного порядка*, Владикавказский математический журнал, **8**: 3 (2006), 16–28.
[15] Я. Микусинский, *Операторное исчисление*, ИЛ, Москва, 1956.
[16] В.А. Диткин, *Операционное исчисление*, Успехи мат. наук, **22**: 6, №2 (1947), 72–158.
[17] В.А. Диткин, *К теории операционного исчисления*, Доклады АН СССР, **116** (1957), 15–17.
[18] В.А. Диткин, *К теории операционного исчисления*, Доклады АН СССР, **123** (1958), 395–396.
[19] В.А. Диткин, А.П. Прудников, *Операционное исчисление*, Высшая школа, Москва, 1975.
[20] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987.
[21] М.М. Джарбашян, *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, Москва, 1966.
[22] Л.С. Понтрягин, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Наука, Москва, 1974.
[23] М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям*, Наука, Москва, 1979.
[24] М.М. Джарбашян, *Об интегральных преобразованиях, порожденных обобщенной функцией типа Миттаг-Леффлера*, Изв. Акад. Наук Арм. ССР, физ.-мат. науки, **13**: 3 (1960), 21–63.
[25] А.О. Гельфонд, *Вычеты и их приложения*, КомКнига, Москва, 2006.
[26] М.А. Евграфов, Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин, К.А. Бежанов, *Сборник задач по теории аналитических функций*, Наука, Москва, 1969.

Каирбек Казбекович Казбеков
Южный математический институт ВНЦ РАН,
ул. Маркуса 22,
362027, Владикавказ, Россия
E-mail address: `kairbek75@mail.ru`