S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 340–349 (2010) УДК 519.21
MSC 60J80

ПРОИЗВОДНАЯ ПЛОТНОСТИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С БЕСКОНЕЧНЫМ МОМЕНТОМ ПРИ $\alpha \in (0, 1/2]$

В. А. ТОПЧИЙ

Abstract. Increments of the renewal function related to the distributions with infinite means and regularly varying tails of orders $\alpha \in (0, 1]$ were described by Erickson [4, 6]. However, explicit asymptotics for the increments are known for $\alpha \in (1/2, 1]$ only. For smaller α one can get, generally speaking, only the lower limit of the increments. There are many examples showing that this statement cannot be improved in general. Topchii [1] refine Erikson's results by describing sufficient conditions for regularity of the renewal measure density of the distributions with regularly varying tails with $\alpha \in (0, 1/2]$. Here we propose the conditions for regularity of the renewal measure density derivative.

Keywords: renewal measure density, regularly varying tails, stable distributions

1. Мотивация исследований

Изучение свойств функций восстановления без первого момента восходит к Гарсиа, Ламперти [2] и Тегельсу [3]. Особо интересно концептуальное исследование Эриксона [4], где через интегралы от хвостов исходных распределений $F(t)$ описаны свойства функций восстановления и их приращений. Мы не будем касаться всевозможных обобщений этих результатов, а остановимся на случае

$$1 - F(t) = t^{-\alpha} L(t), \quad t > 0, \quad F(0) = 0, \tag{1}$$

Topchii, V.A., Derivative of renewal density with infinite moment with $\alpha \in (0, 1/2]$.

Работа поддержана программой 1.1 ОМН РАН "Современные проблемы теоретической математики в ИМ СО РАН".

Поступила 12 мая 2010 г., опубликована 19 октября 2010 г.

где $L(t)$ – медленно меняющаяся функция (определение см. [5, гл. VIII §8, формула (8.6)]), а $\alpha \in (0, 1/2]$. Дело в том, что приращения функции восстановления при $\alpha \in (1/2, 1]$ ведут себя регулярно и описаны в теореме 1 [4], а для $\alpha \in (0, 1/2]$ теорема 2 [4] описывает только нижние пределы этих приращений. Без дополнительных условий правильного изменения приращений добиться невозможно. Гипотеза о условиях, обеспечивающих регулярность поведения приращений, сформулирована, но не доказана в [6]. Автор описал асимптотику плотности восстановления [1] в условиях менее ограничительных, чем гипотетические из [6] (см. ниже теорему 1).

Мотивируем необходимость получения результатов о правильном изменении приращений (производной) от плотности восстановления при $\alpha \in (0, 1/2]$. Аналогичная проблема для плотностей функций восстановления, если исходные распределения имеют конечные средние (верно при $\alpha \geq 1$), рассмотрена в [7]. Там в явном виде выписаны два первых главных члена асимптотического разложения плотности функции восстановления и оценена погрешность. Оценка разности плотностей при умеренных приращениях аргумента формально приводит к погрешности того же порядка, однако имеющиеся доказательства несложно модифицировать и получить существенно улучшенную оценку погрешности для разностей (производных). В.А. Ватутиным и автором подготовлена работа о свойствах каталитических случайных блужданий в $\mathbb{Z}^d$, где приводимые результаты необходимы, но по методам исследования выпадают из идеологии той работы и довольно громоздки. Симметрические случайные блуждания частиц с непрерывным временем по многомерной целочисленной решётке с возможностью ветвления только в начале координат порождают много задач, исследование которых приводит к уравнениям типа восстановления [8]. В ряде работ В.А. Ватутина и В.А. Топчия исследование характеристик ветвящихся случайных блужданий сводится к изучению многомерных ветвящихся процессов Беллмана–Харриса (см. [9]), описание асимптотических свойств которых тоже теснейшим образом связаны с уравнениями восстановления. Если рассмотреть просто непрерывное симметричное случайное блуждание по решетке $\mathbb{Z}^d$, то вероятность, выйдя из нуля находиться в нем через время t, обладает замечательным свойством – она является преобразованием Лапласа от некоторой меры с асимптотикой хвоста порядка $t^{-d/2}$, а асимтотика всех производных получается формальным дифференцированием главного члена данной вероятности (см. [10]). Это показывает, что рассматриваемые далее условия на производные от плотности довольно естественны. Время первого возвращения в начало координат при условии, что оно конечно, ищется с помощью уравнения восстановления. Для размерности более 2 хвосты на 1 утолщаются, то есть, становятся порядка $t^{1-d/2}$. Добавление возможности ветвления частиц в нуле при исследовании функционалов от ансамблей частиц приводит к новым уравнениям типа восстановления. Если для размерностей больше 5 свойства решений описаны в канонических работах [4], [7] или [5], то для остальных нужно проводить дополнительные исследования. В частности, исследование блужданий на трёхмерных решётках требует явных асимптотических формул для плотности восстановления и ее производной при исходных плотностях из области притяжения устойчивых законов с параметром $\alpha = 1/2$, что ранее не было получено.

2. Асимптотика плотности и производной от нее

Сформулируем основные результаты. По сравнению с [1] мы упростили обозначения и ряд подходов к доказательствам. Далее символ := используется для введения новых обозначений, а двоеточие ставим рядом с вводимой величиной.

Пусть у $F^{*N_0}(x)$ для некоторого $N_0 > 0$ плотность ограничена, то есть,

$$\max_x f^{*N_0}(x) < \infty, \tag{2}$$

где $f(x) := F'(x)$. Будем считать, что найдутся $x_0 > 0$ и постоянная $c \in \mathbf{R}_+$ такие, что для $\alpha \in (0, 1/2]$ и всех $x \geq x_0$ выполнено неравенства $f(x) > 0$ и

$$f(x) \leq cf_1(x) := c\left(\mathbb{I}_{\{x<x_0\}} + \mathbb{I}_{\{x\geq x_0\}}x^{-1-\alpha}L_1(x)\right), \tag{3}$$

где $L_1(x) > 0$ такая, что $L_1(x) \underset{x\to\infty}{\sim} L(x)$ и $L_1'(x) \underset{x\to\infty}{=} o(L(x)/x)$, последняя существуют в силу представления Карамата [5, гл. VIII §9, формула (9.9)].

Из [1] следует, что условие (3) менее ограничительно, чем

$$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \alpha x^{-1-\alpha}L_1(x).$$

Теорема 1. [1] *Пусть для абсолютно непрерывного распределения $F(x)$ верно соотношение* (1) *с $\alpha \in (0, 1/2]$ и выполнены условия* (2) *и* (3). *Тогда плотность функции восстановления $u(x) := \sum_{j=1}^{\infty} f^{*j}(x)$, определённая при $x > 0$, имеет асимптотику*

$$u(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{\alpha-1}\sin(\pi\alpha)}{\pi L(x)}.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что для определенного ранее $x_0 > 0$ при $x \geq x_0$ верны неравенства $f(x) > 0$ и $f_1'(x) < 0$.

По аналогии с $f_1(x)$ определим вспомогательную функцию

$$f_2(x) := \mathbb{I}_{\{x<x_0\}} + \mathbb{I}_{\{x\geq x_0\}}x^{-2-\alpha}L_1(x),$$

а так же

$$f_{-1}(x) := \int_0^x uf(u)du \quad \text{и} \quad f_0(x) := \int_x^{\infty} f_1(u)du.$$

Отметим, что $f_1'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -(1+\alpha)f_2(x)$, $f_2'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} -(2+\alpha)f_2(x)x^{-1}$, а по теореме 1 [5, гл. VIII §9]

$$f_{-1}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \alpha\frac{t^{1-\alpha}L_1(x)}{1-\alpha} \quad \text{и} \quad f_0(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{x^{-\alpha}L_1(x)}{\alpha}.$$

Усилим условие (3). Пусть $f(x)$ абсолютно непрерывна и найдется $c \in \mathbb{R}_+$ такое, что при $x \geq x_0$

$$|f'(x)| \leq cf_2(x). \tag{4}$$

Соотношение (3) следует из (4) путем интегрирования $f'(x)$ по (x, ∞), но, не ограничивая общности, можно считать, что постоянные в (3) и (4) совпадают.

Теорема 2. *Пусть $F(x)$ абсолютно непрерывна с абсолютно непрерывной плотностью и удовлетворяет условиям* (1) *и* (4). *Тогда производная $u'(x)$, определённая при $x > 0$, имеет асимптотику*

$$u'(x) \underset{x\to\infty}{\sim} (\alpha-1)\frac{x^{\alpha-2}\sin(\pi\alpha)}{\pi L(x)}.$$

По теореме 2.6.1 [11], функция распределения $F(x)$, удовлетворяющая соотношению (1), с носителем из $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ принадлежит области притяжения устойчивого распределения $G(t)$ порядка $\alpha \in (0,2)$, которое всегда абсолютно непрерывно и далее полагаем $g(x) := G'(t)$. Это означает (см. гл. II §6 [11]), что найдутся две последовательности A_n и B_n такие, что распределение нормированных сумм

$$\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n} \xi_j - A_n\right) B_n^{-1} \tag{5}$$

сходится к $G(x)$, где ξ_j – независимые случайные величины с функцией распределения $F(x)$. Как отмечено в [5, гл. XVII, §5, замечание после теоремы 3], при $\alpha < 1$ можно полагать, что все $A_n = 0$. По теореме 2.1.1 [11, формула (2.6.4)] вторая последовательность с точностью до эквивалентности имеет вид

$$B_n = n^{1/\alpha} h(n) \underset{n\to\infty}{\sim} n^{1/\alpha} L^{1/\alpha}(B_n) \tag{6}$$

и удовлетворяет соотношению

$$n(1 - F(B_n x)) \underset{n\to\infty}{\to} c x^{-\alpha},$$

где $c > 0$ произвольная фиксированная постоянная, которую, не ограничивая общности, можно считать $c = 1$, а $h(n)$ – медленно меняющаяся на бесконечности функция. В [1] доказано, что $h(n)$ можно продолжить на $\mathbb{R}_+$ и так, что $h'(x) \underset{x\to\infty}{=} o(h(x)/x)$, для $x \in \mathbb{R}_+$.

Сходимость распределений, соответствующих (5), записывается в виде

$$F^{*n}(B_n x) \underset{n\to\infty}{\to} G(x).$$

По теореме 2.2.2 [11] логарифм характеристической функции для $G(x)$ равен

$$-c_\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\frac{|t|}{t} \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right) = -\Gamma(1-\alpha)|t|^\alpha \exp\left\{-\frac{i\pi\alpha|t|}{2t}\right\}, \tag{7}$$

где $c_\alpha = \Gamma(1-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)$ и учтено, что по замечанию 2 [11, с. 54], если носителем $F(x)$ является $\mathbb{R}_+$, то $\beta = 1$.

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство данного результата тесно связано с выводом теоремы 8.3 [1] и при знании этой работы многое можно было бы аргументировать аналогией, но мы приводим подробные независимые доказательства всех новых соотношений, ссылаясь только на явно доказанные в [1] факты.

Одной из узловых идей для исследования асимптотики плотности восстановления является использование равномерной сходимости плотности распределения для нормированной суммы случайных величин к плотности устойчивого. Приведем соотношении (8.7) [1], являющееся следствием теоремы 4.3.1 [11]

$$\max_x |B_n f^{*n}(B_n x) - g(x)| \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{8}$$

Изучим подобную разность производных плотностей. При этом мы докажем, что аналог соотношения (8) будет иметь место, если условие (2) заменить на абсолютную непрерывность $f(x)$, что сделано в утверждении теоремы 2. Далее запись $(f^{*n})'(y(x))$ означает, что производная берется от функции, а затем подставляется аргумент, так как нам удобно вычленить производную от аргумента сложной функции, равную B_n.

Лемма 1. *При выполнении условий теоремы* 2

$$\max_x |B_n^2 (f^{*n})'(B_n x) - g'(x)| =: \Delta_n \underset{n\to\infty}{\to} 0. \tag{9}$$

Ниже в ряде оценок мы будем использовать эквивалентное представление определения из (9)

$$\max_x |(f^{*n})'(x) - B_n^{-2} g'(B_n^{-1}x)| = \Delta_n B_n^{-2}.$$

Следуя доказательству теоремы 4.3.1 [11], рассмотрим характеристические функции $\hat{f}(t)$ и $\hat{g}(t)$ для распределений с плотностями $f(x)$ и $g(x)$, тогда

$$B_n^2 (f^{*n})'(B_n x) - g'(x) = \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-itx} \left(\hat{f}^n \left(\frac{t}{B_n} \right) - \hat{g}(t) \right) dt. \tag{10}$$

Соотношение (10) после приравнивания модулей левой и правой частей, разбиения области интегрировани на части и внесения модулей под знаки интегралов становится аналогом (4.3.3) [11]:

$$\begin{aligned} \left|B_n^2 (f^{*n})'(B_n x) - g'(x)\right| &\le \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^{A} \left| \hat{f}^n \left(\frac{t}{B_n} \right) - \hat{g}(t) \right| |t| dt \\ + \quad \int_{|t|\ge A} |\hat{g}(t)||t| dt &+ \int_{\varepsilon B_n \ge |t| \ge A} \left| \hat{f}^n \left(\frac{t}{B_n} \right) \right| |t| dt \\ + \quad \int_{|t|\ge \varepsilon B_n} \left| \hat{f}^n \left(\frac{t}{B_n} \right) \right| &|t| dt =: I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned}$$

где A и ε – произвольные положительные числа, и, выбирая первое число большим, а второе малым, правая часть в последнем соотношении делается сколь угодно малой при $n \to \infty$.

В самом деле, отличие определенных выше I_j от введенных в (4.3.3) [11] состоит в том, что у нас под интегралом появляется сомножитель $|t|$. При оценках нужно дополнительно воспользоваться тем, что первый интеграл I_1 берется по ограниченной области и умножение стремящейся к нулю разности характеристических функций (при $n \to \infty$) на $|t|$ оставляет его бесконечно малым. Подинтегральное выражение в I_3 (см. (4.3.5) [11]) оценивалось экспонентой $e^{-\bar{c}_0 |t|^{\alpha/2}}$, где $\bar{c}_0 > 0$, если ε достаточно малое, а сам интеграл можно сделать сколь угодно малым, если A достаточно большое, и умножение подинтегрального выражения на $|t|$ оставляет интеграл бесконечно малым при $A \to \infty$. Для I_2 сохраняется в точности то же обоснование в силу (7), где приведен явный вид $\ln \hat{g}(t)$.

В условиях теоремы 2 $f(t)$ дифференцируема, поэтому по лемме 4 [5] $\hat{f}(t) = o(|t|^{-1})$, а, следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(t)|^2 dt < \infty$. По теореме Планшераля для преобразований Фурье последнее эквивалентно $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$. При доказательстве (8) в [11, гл. IV, §3] фактически использовалась только эквивалентность сходимости интегралов по $\mathbb{R}$ от $|f^{*N_0}(x)|^2$ и от $|\hat{f}(t)|^{2N_0}$, следующая из (2). Точнее (2) влекло сходимость интеграла от первого выражения, а в доказательстве использовалась сходимость интеграла от второго выражения.

Соотношение (4.3.7) [11, гл. IV, §3] в нашем случае переходит в

$$\begin{aligned} I_4 &= O(1)\int_{|t|\geq \varepsilon B_n}\left|\hat{f}^{n-1}\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\frac{B_n|t|}{|t|}dt \\ &= O(1)B_n^2 e^{-\bar{c}(n-3)}\int_{\mathbb{R}}\left|\hat{f}(t)\right|^2 dt \underset{n\to\infty}{\to} 0, \end{aligned}$$

где $\bar{c}$ определено равенством $\sup_{|t|>\varepsilon}|\hat{f}(t)| = e^{-\bar{c}} < 1$, что верно для абсолютно непрерывных распределений. Это завершает доказательство (9).

Докажем аналог теоремы 8.2 [1], где показано, что существует неубывающая ступенчатая функция $n_1(t) \in \mathbf{N}$, такая, что $tB_{n_1(t)} \underset{t\to\infty}{\sim} 1$, которую мы зафиксируем. Пусть $n(t,a) := n_1(a^{-1/\alpha}t)$, где $a \in \mathbb{R}^+$ произвольно, тогда в силу (6) $n_1(t) \underset{t\to\infty}{\sim} t^\alpha/L(t)$ и $n(t,a) \underset{t\to\infty}{\sim} a^{-1}n_1(t)$.

Теорема 3. *В условиях теоремы* 2 *при любых фиксированных* $N > 1$

$$\sum_{j=n(t,N)}^{\infty}(f^{*j}(t))' \underset{t\to\infty}{=} \frac{(\alpha-1)t^{\alpha-2}\sin\pi\alpha}{\pi L(t)}\Big(1 + N^{2/\alpha-1}o(1) + N^{-2}O(1)\Big).$$

Для дальнейших приложений в теореме 2, безусловно, N нужно будет выбирать достаточно большим. Кроме этого фиксируем $\varepsilon \in (0,1)$, которое нужно будет взять достаточно малым в доказательстве теоремы 3.

Обозначая $x_j(t) := (tB_j^{-1})^\alpha h^\alpha(j)/L(t)$, $\Delta x_j(t) := x_{j+1}(t) - x_j(t)$, естественным образом видоизменим доказательство (8.9) [1].

Прежде всего, по определению B_j, связанному с соотношением (6), и допущениях о $h(x)$ при $j \in [n(t,N), n(t,\varepsilon)]$

$$\begin{aligned} -\Delta x_j(t) &= \frac{t^\alpha(B_{j+1}^\alpha h^\alpha(j) - B_j^\alpha h^\alpha(j+1))}{L(t)B_{j+1}^\alpha B_j^\alpha} \\ &\underset{j\to\infty}{=} \frac{t^\alpha h^{2\alpha}(j)(1+o(1))}{L(t)(B_j^\alpha)^2} = \frac{L(t)x_j^2(t)(1+o(1))}{t^\alpha}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что $h^\alpha(j) \underset{t\to\infty}{\sim} L(t)$ при $j \in [n(t,N), n(t,\varepsilon)]$, по определению имеем $B_j^{-1} \underset{t\to\infty}{\sim} x_j^{1/\alpha}(t)t^{-1}$.

Следовательно, с помощью леммы 1 получаем

$$\begin{aligned} (11)\qquad &\left|\sum_{j=n(t,N)}^{\infty}(f^{*j}(t))' + \frac{t^{\alpha-2}}{L(t)}\sum_{j=n(t,N)}^{n(t,\varepsilon)}\frac{x_j^{2/\alpha}(t)(1+o(1))}{x_j^2(t)}g'(x_j^{1/\alpha}(t))\Delta x_j(t)\right| \\ &\leq \sum_{j=n(t,N)}^{\infty}\frac{\Delta_j}{B_j^2} + \sum_{j=n(t,\varepsilon)}^{\infty}\frac{|g'(B_j^{-1}t)|}{B_j^2}. \end{aligned}$$

По определению B_j и теореме 1 [5, гл. VIII, §9] о правильно меняющихся функциях

$$(12)\qquad \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{B_j^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^{2/\alpha}h^2(j)} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\alpha n^{-2/\alpha+1}}{(2-\alpha)h^2(n)}.$$

Как показано в [1], при любых фиксированных N справедливы соотношения $n(t,N) \underset{t\to\infty}{\to} \infty$ и $\sup_{j\ge n(t,N)} \Delta x_j(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \Delta x_{n(t,N)}(t) \underset{t\to\infty}{\sim} N^2 L(t) t^{-\alpha} \underset{t\to\infty}{\to} 0$, следовательно, сумма под знаком модуля в левой части (11) аппроксимирует интеграл $\int_\varepsilon^N x^{2/\alpha-2} g'(x^{1/\alpha})dx$. Как отмечено в [1] и выше, в каноническом представлении изучаемого семейства устойчивых распределений параметр $\beta = 1$, а по утверждению из [11, гл. II, §5, разд. 3] плотность $g(x)$ сосредоточена на положительной полуоси и одновершинна. С другой стороны, теорема 2.4.1 [11], описывающая асимптотику $g(x)$, позволяет получить и то, что $|g'(x)|$ на бесконечности с точностью до постоянной ограничен $x^{-\alpha-2}$. Поэтому

$$\int_t^\infty x^{2/\alpha-2} g'(x^{1/\alpha})dx \underset{t\to\infty}{=} O(t^{-2}). \tag{13}$$

Теоремы 2.4.5 или 2.4.6 [11] утверждают, что в нашем случае $g(x)$ в окрестности нуля убывает быстрее любой степенной функции, то есть в нуле ее производная равна нулю. Очевидно, что $g'(x)$ непрерывна, так как по теореме 2.3.1 [11] на положительной полуоси $g(x)$ представима в виде целой функции, деленной на x. Поэтому

$$\int_0^\varepsilon x^{2/\alpha-2} g'(x^{1/\alpha})dx = o(1) \tag{14}$$

при $\varepsilon \to +0$, а если дополнительно $t \to \infty$ и $j \ge n(t,\varepsilon)$, то $|g'(B_j^{-1}t)| \to 0$.

Учтем, что подстановка вместо n в (12) определенного выше $n(t,a)$ превращает правую часть в $a^{2/\alpha-1} \dfrac{\alpha t^{\alpha-2}}{(2-\alpha)L(t)}$, а при дальнейшей замене $n(t,a)$ на $n(t,N)$ или $n(t,\varepsilon)$ первый сомножитель в этом выражении становится $N^{2/\alpha-1}$ или $\varepsilon^{2/\alpha-1}$, соответственно.

Последнее и произвольность выбора $\varepsilon \in (0,1)$ совместно с (12) позволяют оценить правую часть (11) как $N^{2/\alpha-1}o(1)$, а сумма под знаком модуля в левой части (11) при этом в силу (14) становится асимптотически эквивалентной интегралу $\int_0^N x^{2/\alpha-2} g'(x^{1/\alpha})dx$.

Заменяя переменные и интегрируя по частям, получаем

$$\int_0^\infty x^{2/\alpha-2} g'(x^{1/\alpha})dx = \alpha \int_0^\infty x^{1-\alpha} g'(x)dx = -\alpha(1-\alpha) \int_0^\infty x^{-\alpha} g(x)dx,$$

Отметим, что последний интеграл, умноженный на α, при доказательстве теоремы 8.2 [1] обозначен I_α и равен $\sin(\pi\alpha)/\pi$.

Для завершения доказательства теоремы 3, учитывая три последних абзаца, осталось воспользоваться соотношением (13).

Лемма 2. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то*

$$\underline{u}'(t) := \sum_{j=1}^{n(t,N)-1} (f^{*j})'(t) \underset{t\to\infty}{=} O\left(N^{-2}\right) \frac{t^{\alpha-2}}{L(t)}.$$

Доказательство леммы 2 взаимосвязано с разделом 8.3 [1].

Определим постоянные $c_0 = c_0(t_0) > 0$ и $c_1 = c_1(t_0) > 0$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} c_0 &:= \sup_{t_0<t,\, t/2\le u\le t} \left\{ \frac{f_1(u)}{f_1(t)}, \frac{f_2(u)}{f_2(t)}, \frac{|f_1'(u)|}{|f_1'(t)|}, \frac{|f_2'(u)|}{|f_2'(t)|} \right\} < \infty, \\ c_1 &:= c^2c_0^2 + cc_0 \sup_{t_0<t} \frac{f_{-1}(t)\,|f_2'(t)|}{f_1^2(t)} + 2cc_0^2 \sup_{t_0<t} \frac{f_{-1}(t)\,|f_1'(t)|}{f_1(t)f_0(t)} < \infty, \end{aligned}$$

где t_0 выбрано так, что при $t > t_0$ все знаменатели отделены от нуля.

По определению $c_0 \ge 2^{3+\alpha}$, $c \ge 1$, следовательно, и $c_1 \ge 1$. Отметим, что функция $f_{-1}(t)$ – возрастающая.

Фиксируем $T_0 > 4t_0$. Начнем с тождественных преобразований производной от свертки при $t \ge T_0$.

$$(f^{*(k+1)})'(t) = \left(\int_0^{t/2} f(t-u)f^{*k}(u)du + \int_0^{t/2} f(u)f^{*k}(t-u)du \right)' \tag{15}$$

$$= 2f(t/2)f^{*k}(t/2) + \int_0^{t/2} f'(t-u)f^{*k}(u)du + \int_0^{t/2} f(u)(f^{*k})'(t-u)du.$$

В частности, используя определённые выше постоянные, легко получить

$$\begin{aligned} \left|(f^{*2})'(t)\right| &\le 2c^2f_1^2(t/2) + 2c\int_0^{t/2} f_2(t-u)f(u)du \\ &\le 2c^2c_0^2f_1^2(t) + 2cf_2(t)\left(1 - \int_{t/2}^{\infty} f(u)du\right) \\ &+ 2c\int_0^{t/2} |f_2(t-u) - f_2(t)|\, f(u)du \\ &\le 2c^2c_0^2f_1^2(t) + 2cf_2(t) + 2c^2c_0|f_2'(t)|f_{-1}(t) \\ &\le 2cf_2(t) + 2c_1f_1^2(t). \end{aligned} \tag{16}$$

Аналогично, учитывая дополнительно очевидное неравенство $\mathbb{E}(\eta_1 + \eta_2)\mathbb{I}(\eta_1+\eta_2 < z) \le \mathbb{E}\eta_1\mathbb{I}(\eta_1 < z) + \mathbb{E}\eta_2\mathbb{I}(\eta_2 < z)$,

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{t/2} f'(t-u)f^{*j}(u)du\right| &\le cf_2(t) + cc_0j|f_1'(t)|f_{-1}(t) \\ &\le cf_2(t) + jc_1f_1^2(t). \end{aligned} \tag{17}$$

В частности,

$$c\int_0^{t/2} f_2(t-u)f(u)du \le cf_2(t) + c_1f_1^2(t), \tag{18}$$

Теми же методами получается оценка

$$\int_0^{t/2} f_1^2(t-u)f(u)du \le f_1^2(t) + \int_0^{t/2} \left|f_1^2(t-u) - f_1^2(t)\right| f(u)du$$

$$\le f_1^2(t) + 2cc_0^2f_1(t)f_{-1}(t)|f_1'(t)| \le f_1^2(t)(1 + c_1f_0(t)). \tag{19}$$

В работе [1] получено неравенство (8.20), имеющее вид

$$f^{*j}(t) \le jcf_1(t) + j^2c(1)f_0(t)f_1(t),$$

где $c(1)$ – конечная постоянная, которую можно из обозначений [1] преобразовать в используемые в этой работе, а c – то же, что и здесь. Явный вид $c(1)$ не важен в силу того, что $n(t,N) \underset{t\to\infty}{\sim} N^{-1}n_1(t)$, $n_1(t) \underset{t\to\infty}{\sim} t^{\alpha}/L(t)$, а

$$\sup_{j\le n(t,N)} jf_0(t) \underset{n(t),N\to\infty}{\to} 0 \tag{20}$$

и при достаточно больших t_0 и N верна оценка

$$f^{*j}(t) \le 2jcf_1(t). \tag{21}$$

Используя явный вид функций и асимптотику $n(t,N)$, легко получить

$$n^2(t,N)f_2(t) \underset{t\to\infty}{\to} N^{-2}\frac{t^{\alpha-2}}{L(t)}, \qquad n^3(t,N)f_1^2(t) \underset{t\to\infty}{\to} N^{-3}\frac{t^{\alpha-2}}{L(t)}. \tag{22}$$

Соотношение (20) на основании (19) позволяет заключить, что при достаточно больших t_0 и N для $t>4t_0$ верно неравенство

$$j\int_0^{t/2} f_1^2(t-u)f(u)du \le f_1^2(t)(j+1). \tag{23}$$

Используя (17) и (21), преобразуем оценку (15) в

$$\left|(f^{*(k+1)})'(t)\right| \le cf_2(t) + 3kc_1f_1^2(t) + \int_0^{t/2} f(u)(f^{*k})'(t-u)du. \tag{24}$$

Докажем методом математической индукции справедливость соотношения

$$\left|(f^{*k})'(t)\right| \le kcf_2(t) + 4k^2c_1f_1^2(t). \tag{25}$$

Неравенство (16) является основанием для индукции, а оценка

$$\left|(f^{*(k+1)})'(t)\right| \le (k+1)cf_2(t) + 4k(k+2)c_1f_1^2(t),$$

следующая из (24), (18) и (23), подтверждает индукционное допущение.

Воспользовавшись неравенством (25), получаем

$$\underline{u}'(t) = \sum_{j=1}^{n(t,N)-1} (f^{*j})'(t) \le cf_2(t)\sum_{j=1}^{n(t,N)-1} j + 4c_1f_1^2(t)\sum_{j=1}^{n(t,N)-1} j^2.$$

Значения сумм в правой части последней оценки эквивалентны $n^2(t,N)/2$ и $n^3(t,N)/3$, а в силу (22) доказательство леммы 2 завершено.

Теорема 2 следует из теоремы 3 и леммы 2.

Список литературы

[1] V. Topchii, *Renewal measure density for distributions with regularly varying tails of order* $\alpha\in(0,1/2]$, In: Workshop on Branching Processes and Their Applications: Lecture Notes in Statistics, **197** (2010), 109–118.

[2] A. Garsia, J. Lamperti, *A discrite renewal theorem with infinite mean*, Comment. Math. Helv., **37** (1962/63), 221–234.

[3] J.L. Teugels, *Renewal theorems when the first or second moment is infinite*, Ann. Math. Stat. **39** (1968), 1210–1219.

[4] K.B. Erickson, *Strong renewal theorems with infinite mean*, Transactions of the American mathematical society, **151** (1970), 263–291.

[5] В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т.2*, Мир, Москва, 1984.

[6] K.B. Erickson, *A renewal theorem for distribution on* $\mathbb{R}^1$ *without expectation*, Buletin Amer. Math. Society, **77** (1971), 406–410.

[7] М.С. Сгибнев *Асимптотика плотности функции восстановления*, Сибирский математический журнал, **20** (1979), 141–151.

[8] S. Albeverio, L.V. Bogachev, *Branching random walk in a catalytic medium. I. Basic equations*, Positivity, **4** (2000), 41–100.

[9] V.A. Topchii, V.A. Vatutin, *Two-dimensional limit theorem for a critical catalytic branching random walk*, In: Mathematics and Computer Science III, Algoritms, Trees, Combinatorics and Probabilities, Editors M. Drmota, P. Flajolet, D. Gardy, B. Gittenberger. Birkhauser, Verlag, Basel-Boston-Berlin, (2004), 387-395.

[10] V.A. Topchii, V.A. Vatutin, E.B. Yarovaya, *Catalytic branching random walk and queueing systems with random number of independent servers*, Theory of Probability and Mathematical Statistics, **69** (2003), 1–15.

[11] И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник, *Независимые и стационарно связанные случайные величины*, Наука, Москва, 1965.

Валентин Алексеевич Топчий
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: topchij@ofim.oscsbras.ru