

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 383–393 (2010)

УДК 515.162.8

MSC 57M25

О ЗАЦЕПЛЕННОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ПАР ЦИКЛОВ
В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАФАХ

А. Ю. ВЕСНИН, А. В. ЛИТВИНЦЕВА

АБСТРАКТ. A pair of disjoint cycles in a graph is said to be hamiltonian if the union of cycles covers all vertices of the graph. It is shown that for each $n \geq 7$ for any spatial embedding of the complete graph K_n there is a hamiltonian pair that forms a nontrivial two-component link.

Keywords: spatial graph, knot, link, hamiltonian cycle.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе изучаются пространственные графы, т.е. вложения графов в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . При каждом таком вложении образом простого цикла является узел, а образом множества из нескольких непересекающихся простых циклов – зацепление. Пусть G – конечный граф, а $f(G)$ – его пространственное вложение (т.е. отображение $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ является вложением, которое мы всегда предполагаем конечно-звенным полигональным). Простой цикл γ в G , содержащий все вершины графа, назовем *гамильтоновым*; а пару непересекающихся простых циклов (α, β) , объединение которых содержит все вершины графа – *гамильтоновой парой* циклов.

Обозначим через K_n полный граф на n вершинах. Конвей и Гордон в [2] и Закс в [4] доказали следующий результат о зацепленности пар циклов в пространственных вложениях полного графа.

Теорема 1. *Любое пространственное вложение графа K_6 содержит нетривиальное двухкомпонентное зацепление.*

VESNIN, A.YU., LITVINTSEVA, A.V., ON LINKING OF HAMILTONIAN PAIRS OF CYCLES IN SPATIAL GRAPHS.

© 2010 Веснин А.Ю., Литвинцева А.В.

Работа выполнена при поддержке Федеральной целевой программы, РФФИ (проекты 10-01-00642, 10-01-91056-НЦНИ-а) и интеграционного проекта СО РАН и УрО РАН.

Поступила 29 октября 2010 г., опубликована 9 ноября 2010 г.

Кроме того, в [2] доказан следующий результат о заузленности циклов в пространственных вложениях полного графа.

Теорема 2. *Любое пространственное вложение графа K_7 содержит нетривиальный узел.*

Следовательно, любое вложение полного графа K_n , $n \geq 7$, содержит как нетривиальное двухкомпонентное зацепление, так и нетривиальный узел.

В доказательствах приведенных теорем узел соответствовал гамильтонову циклу в K_7 , а зацепление – гамильтоновой паре циклов в K_6 . Естественно, возникает вопрос о заузленности вложений гамильтоновых циклов и зацепленности вложений гамильтоновых пар циклов для других полных графов. В [1, 3] было получено следующее обобщение теоремы 2:

Теорема 3. *При $n \geq 7$ любое пространственное вложение графа K_n содержит нетривиальный узел, являющийся вложением гамильтонова цикла.*

Заузленность циклов в пространственных вложениях изучалась не только для полных графов, но и для других классов графов. Так, Шимабара в [5] доказала следующее свойство.

Теорема 4. *Любое пространственное вложение полного двудольного графа $K_{5,5}$ содержит нетривиальный узел.*

В данной работе, в следствии 1, устанавливается следующее обобщение теоремы 1: *при $n \geq 7$ любое пространственное вложение графа K_n содержит нетривиальное двухкомпонентное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов.*

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ

Пусть D – диаграмма ориентированного 2-компонентного зацепления $L = L_1 \cup L_2$. Обозначим через c_1, \dots, c_k двойные точки диаграммы D в которых дуги компоненты L_1 встречаются с дугами компоненты L_2 (мы не учитываем двойные точки в которых обе дуги принадлежат одной и той же компоненте). *Индексом зацепления* 2-компонентного ориентированного зацепления $L = L_1 \cup L_2$ называется величина

$$(1) \quad lk(L_1, L_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \varepsilon(c_i),$$

где $\varepsilon(c)$ равно $+1$ или -1 в соответствии с рис. 1.

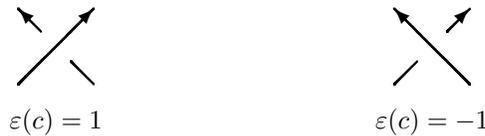


Рис. 1. Метки в двойной точке.

Очевидно, если компоненты не зацеплены друг с другом, то индекс зацепления обращается в ноль. Введем характеристику $lk_2(L_1, L_2)$ – индекс зацепления по модулю 2:

$$(2) \quad lk_2(L_1, L_2) = lk(L_1, L_2) \bmod 2.$$

Пусть $f(G)$ – пространственное вложение графа G . Определим величину

$$(3) \quad w(f(G)) = \left[\sum_{(\alpha, \beta)} lk_2(f(\alpha), f(\beta)) \right] \bmod 2,$$

где сумма берется по всем гамильтоновым парам циклов (α, β) графа G . Очевидно, что если в $f(G)$ любая гамильтонова пара циклов образует тривиальное зацепление, то $w(f(G)) = 0$.

Нетрудно найти число гамильтоновых пар циклов в заданном полном графе.

Лемма 1. *Обозначим через c_n число гамильтоновых пар циклов в графе K_n , $n \geq 6$. Если n нечетное, то*

$$(4) \quad c_n = \sum_{k=3}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^k \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot \frac{(n-k-1)!}{2},$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Если n четное, то полагая $n = 2m$, имеем

$$(5) \quad c_n = c_{2m} = \sum_{k=3}^{m-1} C_{2m}^k \cdot \frac{(k-1)!}{2} \cdot \frac{(2m-k-1)!}{2} + \frac{1}{2} C_{2m}^m \cdot \frac{((m-1)!)^2}{4}.$$

В частности, $c_6 = 10$, $c_7 = 105$, $c_8 = 987$, $c_9 = 9576$.

Определим набор канонических диаграмм для произвольного графа G . Начнем со случая когда G является полным графом K_n , $n \geq 4$. Зафиксируем нумерацию $1, 2, \dots, n$ вершин графа K_n . Расположим вершины $1, 2, \dots, n$ последовательно на окружности и соединим их хордами, образуя правильную n -угольную. Будем говорить, что полученные ребра есть ребра *0-го уровня*. Далее строим диаграмму за $(n-2)$ шага.

1-ый шаг: соединим вершину 1 с вершинами $3, 4, \dots, n-1$ (т. е. с вершинами не смежными с ней на 0-ом уровне). Полученные ребра будем называть ребрами *1-го уровня*.

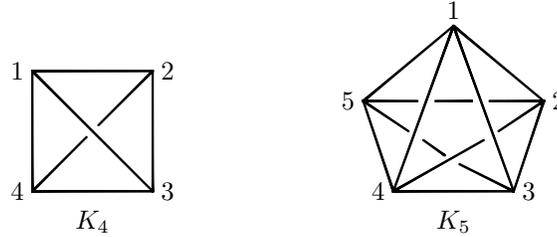
2-ой шаг: проводя линии ниже построенных ребер 0-го и 1-го уровней, соединим вершину 2 со всеми вершинами, с которыми она еще не была соединена ранее, т. е. с вершинами $4, \dots, n$. Полученные ребра будем называть ребрами *2-го уровня*.

t -ый шаг: проводя линии ниже построенных ребер уровней от 0-го до $(t-1)$ -го, соединим вершину t с теми вершинами, с которыми она не была соединена ранее, т. е. с вершинами $(t+1), \dots, n$. Полученные ребра будем называть ребрами *t -го уровня*.

$(n-2)$ -шаг: проводя линию ниже построенных ребер уровней от 0-го до $(n-3)$ -го, соединим вершину $(n-2)$ с вершиной n .

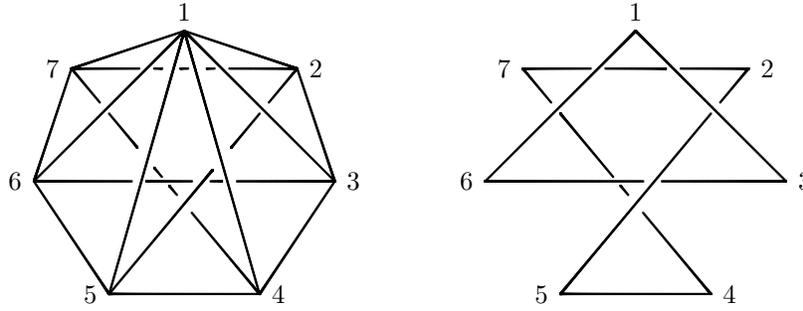
Требуя, чтобы на каждом шаге возникающие точки пересечения были кратности два, получим диаграмму вложения графа K_n . Такую диаграмму и соответствующее вложение (точнее, множество эквивалентных вложений) будем называть *каноническими*. Канонические диаграммы графов K_4 и K_5 приведены на рис. 2.

Пусть граф G имеет n вершин, не содержит петель и кратных ребер. Тогда G является подграфом полного графа K_n . *Канонической диаграммой* графа

Рис. 2. Канонические диаграммы графов K_4 и K_5 .

будем называть соответствующую подграфу $G \subset K_n$ поддиаграмму канонической диаграммы полного графа K_n . При этом, очевидно, каноническая диаграмма графа G , отличного от K_n не определяется однозначно и зависит от нумерации вершин графа.

Пример канонической диаграммы графа $K_{3,3,1}$ с такой нумерацией вершин, что множества $\{1\}$, $\{2, 4, 6\}$ и $\{3, 5, 7\}$ порождают полные подграфы K_1 , K_3 и K_3 , приведен на рис. 3.

Рис. 3. Каноническая диаграмма графа $K_{3,3,1}$ и гамильтонова пара циклов $\alpha = (163)$, $\beta = (2547)$.

Следующий результат является достаточно известным в теории узлов (см. например, [5]).

Лемма 2. Пусть $f(G)$ и $g(G)$ – два пространственных вложения графа G . Тогда существует D_1 – диаграмма $f(G)$ и существует D_2 – диаграмма $g(G)$ такие, что от D_1 к D_2 можно перейти с помощью изотопий плоскости, замен проходов и переходов в двойных точках, и преобразований Рейдемейстера.

Доказательство. Следует, например, из того, что каждую диаграмму пространственного графа можно привести к канонической. \square

Пусть G – произвольный граф, содержащий цикл длины три; обозначим порождающие его вершины через a , b и c . Пусть G' – граф, полученный из G добавлением новой трехвалентной вершины v , удалением ребер $[ab]$, $[bc]$, $[ac]$, и добавлением ребер $[av]$, $[bv]$, $[cv]$. Будем говорить, что граф G' получен из G преобразованием $\Delta \rightarrow Y$, а G получен из G' преобразованием $Y \rightarrow \Delta$ (см. рис. 4).

Роль преобразований $\Delta \rightleftharpoons Y$ при изучении пространственных вложений графов видна из следующего факта, отмеченного Заксом в [4].

Рис. 4. Преобразование $\Delta \rightarrow Y$.

Лемма 3. Пусть G – произвольный граф. Предположим, что G' получен из G преобразованиями $\Delta \rightleftharpoons Y$. Если каждое вложение графа G содержит нетривиальное зацепление, то и каждое вложение графа G' содержит нетривиальное зацепление.

Семейством графов Петерсена называют множество из семи графов, состоящее из K_6 и графов, полученных из него преобразованиями $\Delta \rightleftharpoons Y$ (см., например, [4]). Очевидно, каждый граф из этого семейства имеет 15 ребер. В частности, семейство Петерсена содержит граф $K_{3,3,1}$. Из теоремы 1 и леммы 3 следует, что любое пространственное вложение графа $K_{3,3,1}$ содержит нетривиальное зацепление.

3. ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА K_6

Прежде чем переходить к обобщению теоремы 1 на случай гамильтоновых пар в произвольном полном графе, напомним ее доказательство [2].

Число гамильтоновых пар циклов в K_6 равно 10 и длина каждого цикла равна трем. Покажем, что величина $w(f(K_6))$ для всех пространственных вложений $f(K_6)$ принимает одно и то же значение. Согласно лемме 2 диаграмму любого пространственного вложения графа K_6 можно преобразовать в диаграмму другого вложения с помощью операций изотопии плоскости, смены проходов и переходов и преобразований Рейдемейстера. Поскольку при изотопиях плоскости и преобразованиях Рейдемейстера индекс зацепления не меняется, то и $w = w(f(K_6))$ не меняется. Посмотрим, что происходит при смене проходов и переходов.

Для каждой пары циклов при смене прохода и перехода в двойной точке величина $lk_2(f(\alpha), f(\beta))$ либо не изменится (если двойная точка получена при пересечении с тем же или смежным ребром, так как такая точка не участвует в суммировании), либо изменится на ± 1 . В последнем случае, пусть двойная точка возникает при пересечении проекций $f(e_1)$ и $f(e_2)$, где e_1, e_2 – такие ребра в K_6 , что $e_1 \subset \alpha$ и $e_2 \subset \beta$. Очевидно, что при для фиксированных e_1 и e_2 в K_6 имеется лишь две таких гамильтоновых пары (α, β) , что $e_1 \subset \alpha$, а $e_2 \subset \beta$. Поскольку число таких пар четно, величина w не изменится при смене проходов и переходов. Следовательно w на всех вложениях принимает одно и то же значение.

Вычислим эту величину для канонического вложения графа K_6 , приведенного на рис. 5. Переберем все десять вариантов гамильтоновых пар, указав тройки вершин для одного из циклов, скажем α :

$$(123), (124), (125), (126), (134), \underline{(135)}, (136), (145), (146), (156).$$

Каждый раз цикл β образован оставшимися вершинами. Как видно из рис. 5, только одна пара циклов, а именно, подчеркнутый вариант $\alpha = (135)$ и $\beta = (246)$ – ребро 24 проходит под 13 и над 35, образует в каноническом вложении

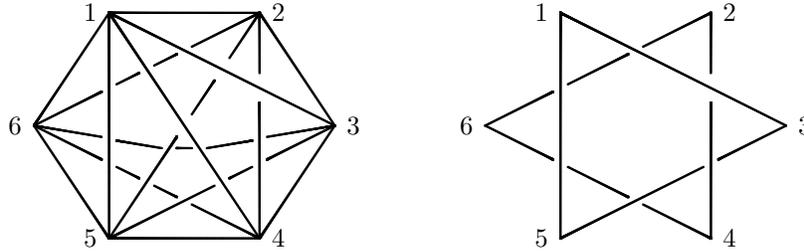


Рис. 5. Каноническая диаграмма графа K_6 и гамильтонова пара $\alpha = (123)$, $\beta = (246)$.

нетривиальное зацепление, причем $lk_2(\alpha, \beta) = 1$. В остальных случаях вложения ребер $f(\alpha)$ ненулевого уровня находятся либо на одном, либо на соседних уровнях, и не зацеплены с $f(\beta)$. Это связано с тем, что среди вершин треугольников есть такие, которые являются соседними на 0-ом уровне. Таким образом, для канонического (а следовательно, и для произвольного) вложения графа K_6 величина $w(f(K_6))$ отлична от нуля.

4. ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА K_7

Как показывает следующая лемма, в приведенных в предыдущем параграфе рассуждениях граф K_6 нельзя заменить на граф K_7 .

Лемма 4. Для любого пространственного вложения $f(K_7)$ имеет место равенство $w(f(K_7)) = 0$.

Доказательство. Прежде всего, отметим, что для графа K_7 число гамильтоновых пар циклов равно 105. При этом, в каждой паре длина одного цикла равна трем, а другого – четырем. Отметим, что каждой тройкой вершин цикл длины три определяется однозначно, а каждая четверка вершин задает три цикла (так, четверка вершин $\{1, 2, 3, 4\}$ задает циклы (1234) , (1324) и (1342)).

Покажем, что величина $w(f(K_7))$ для всех пространственных вложений $f(K_7)$ принимает одно и то же значение. Воспользуемся леммой 2. Очевидно, что при изотопиях плоскости и преобразованиях Рейдемейстера величина $w = w(f(K_7))$ не меняется. Посмотрим, что происходит при смене проходов и переходов.

(1) Если двойная точка получена при пересечении проекции вложения ребра с самим собой или с вложением ребра из того же цикла, то w не изменится, так как такая точка не участвует в суммировании.

(2) Пусть двойная точка получена при пересечении проекций $f(e_1)$ и $f(e_2)$, где ребра e_1 и e_2 принадлежат разным циклам: $e_1 \subset \alpha$ и $e_2 \subset \beta$. Найдем $h(e_1, e_2)$ – число всех гамильтоновых пар (α, β) таких, что $e_1 \subset \alpha$ и $e_2 \subset \beta$ для зафиксированных e_1 и e_2 . Пусть, для определенности, концами e_1 являются вершины 1 и 2, а концами e_2 – вершины 3 и 4. Если α имеет длину три, то возможны такие пары наборов вершин:

α	(125)	(125)	(126)	(126)	(127)	(127)
β	{3467}	{3476}	{3457}	{3475}	{3456}	{3465}

Если α имеет длину четыре, то возможны такие варианты:

α	{1256}	{1265}	{1257}	{1275}	{1267}	{1276}
β	(347)	(347)	(346)	(346)	(345)	(345)

Очевидно, $h(e_1, e_2) = 36$ – четно. Значит, величина w не меняется при переходе к новой диаграмме. Следовательно, величина $w = f(f(K_7))$ для всех пространственных вложений графа K_7 принимает одно и то же значение.

Вычислим w для канонического вложения графа K_7 (см. рис. 6). Поскольку

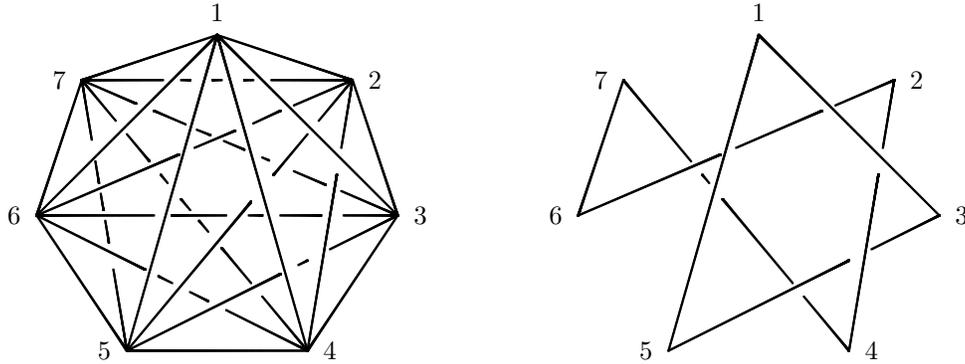


Рис. 6. Каноническая диаграмма графа K_7 и гамильтонова пара $\alpha = (135)$, $\beta = (2476)$.

в гамильтоновой паре один из циклов имеет длину три, можем считать, что это цикл α . Для него имеется 35 возможностей:

- | | | | | | | | | |
|-------|--------------|--------------|-------|-------|-------|--------------|--------------|-------|
| (123) | (124) | (125) | (126) | (127) | (234) | (235) | (236) | (237) |
| (134) | <u>(135)</u> | (136) | (137) | | (245) | <u>(246)</u> | <u>(247)</u> | |
| (145) | <u>(146)</u> | (147) | | | (256) | <u>(257)</u> | | |
| (156) | <u>(157)</u> | | | | (267) | | | |
| (167) | | | | | | | | |
| | (345) | (346) | (347) | (456) | (457) | (567) | | |
| | (356) | <u>(357)</u> | | (467) | | | | |
| | (367) | | | | | | | |

Нетрудно видеть, что если в тройке (pqr) хотя бы два числа, скажем p и q являются соседними на 0-ом уровне (то есть $|p - q| = 1$), то ребра pr и qr лежат на одном и том же или на соседних уровнях. А значит, такой треугольник не может быть зацеплен ни с каким четырехугольником. Остается рассмотреть семь подчеркнутых вариантов. В каждом из них треугольник не содержит ребро 0-го уровня.

Каждому из этих семи треугольников соответствуют три цикла длины четыре, но нетрудно убедиться в том, что только два из них будут зацеплены с треугольником. Таким образом, в K_7 имеется 14 гамильтоновых пар циклов (α, β) вложения которых зацеплены (одна из них, пара $\alpha = (135)$ и $\beta = (2476)$, приведена на рис. 6):

α	(135)	(135)	(136)	(136)	(146)	(146)	(246)	(246)
β	(2647)	(2476)	(2547)	(2475)	(2573)	(2375)	(1375)	(1537)
α	(247)	(247)	(257)	(257)	(357)	(357)		
β	(1365)	(1536)	(1436)	(1364)	(1264)	(1426)		

Поскольку для каждой из указанных пар циклов α и β имеет место равенство $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) = 1$, то $w(f(K_7)) = 0$. \square

Лемма 4 показывает, что доказательство теоремы 1 не переносится на случай графа K_7 .

5. ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА $K_{3,3,1}$

Для дальнейших рассмотрений нам потребуется не только тот факт, что любое пространственное вложение графа $K_{3,3,1}$ содержит нетривиальное зацепление, но и что более того, инвариант w принимает на нем нечетное значение. В следующей лемме доказательство этого факта проводится рассуждениями, аналогичными доказательству для графа K_6 из [2] (см. также [6]).

Лемма 5. *Для любого пространственного вложения $f(K_{3,3,1})$ полного трехдольного графа $K_{3,3,1}$ имеет место равенство $w(f(K_{3,3,1})) = 1$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, можем считать, что вершины графа $K_{3,3,1}$ занумерованы таким образом, что его доли порождаются множествами вершин $\{1\}$, $\{2, 4, 6\}$ и $\{3, 5, 7\}$, а диаграмма имеет вид как на рисунке 3.

В каждой гамильтоновой паре графа $K_{3,3,1}$ длина одного цикла равна трем, а длина другого – четырем. Циклы длины три обозначим, через T , а циклы длины четыре – через S . Нетрудно заметить, что $T = (1, a, x)$, и $S = (b, y, c, z)$, где $a, b, c \in \{2, 4, 6\}$, $x, y, z \in \{3, 5, 7\}$. При этом, цикл T однозначно определяет цикл S . Следовательно, общее число гамильтоновых пар циклов в графе $K_{3,3,1}$ равно 9.

Покажем, что величина $w(f(K_{3,3,1}))$ для всех пространственных вложений $f(K_{3,3,1})$ принимает одно и то же значение. Согласно лемме 2 диаграмму любого пространственного вложения графа $K_{3,3,1}$ можно преобразовать в диаграмму другого вложения с помощью операций изотопии плоскости, смены проходов и переходов, и преобразований Рейдемейстера. Поскольку при изотопиях плоскости и преобразованиях Рейдемейстера индекс зацепления не меняется, то и $w = w(f(K_{3,3,1}))$ не меняется при этих преобразованиях. Посмотрим, что происходит при смене проходов и переходов.

Для каждой пары циклов при смене прохода и перехода в двойной точке величина $lk_2(f(\alpha), f(\beta))$ либо не изменится (если двойная точка получена при пересечении с тем же или смежным ребром, так как такая точка не участвует в суммировании), либо изменится на ± 1 . В последнем случае, пусть двойная точка возникает при пересечении проекций $f(e_1)$ и $f(e_2)$, где e_1, e_2 – такие ребра в $K_{3,3,1}$, что $e_1 \subset \alpha$ и $e_2 \subset \beta$. Очевидно, что для фиксированных e_1 и e_2 в $K_{3,3,1}$ имеется лишь две таких гамильтоновых пары (α, β) , что $e_1 \subset \alpha$, а $e_2 \subset \beta$. Так как число таких пар четно, величина w не изменяется при смене проходов и переходов. Следовательно, w на всех вложениях принимает одно и то же значение.

Вычислим эту величину для канонического вложения графа $K_{3,3,1}$, приведенного на рис. 3. Перечислим все девять гамильтоновых пар циклов. Как уже было отмечено, для этого достаточно указать все циклы длины 3: они имеют указанный выше вид $\alpha = T = (1ax)$: (123), (125), (127), (143), (145), (147), (163), (165), (167). Для каждого цикла α цикл β длины 4 определяется однозначно.

Рассмотрим индексы зацепления вложений пар циклов для канонической диаграммы приведенной на рис. 3. Легко видеть, что лишь одна пара циклов (α, β) , а именно $\alpha = (163)$, $\beta = (2547)$, обладает тем свойством, что $f(\alpha) \cup f(\beta)$ является нетривиальным двухкомпонентным зацеплением, причем $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) = 1$. В остальных случаях вложения ребер $f(\alpha)$ ненулевого уровня находятся либо на одном, либо на соседних уровнях, и следовательно, компоненты $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ не зацеплены. Таким образом, для канонического, а следовательно, и для произвольного, вложения графа $K_{3,3,1}$ величина $w(f(K_{3,3,1}))$ отлична от нуля. \square

Лемма 6. *В каждом пространственном вложении $f(K_{3,3,1})$ существует ребро, которое содержится в нечетном числе таких гамильтоновых пар (α, β) , что $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) \neq 0$.*

Доказательство. В силу леммы 5, $w(f(K_{3,3,1})) = 1$, а значит в $K_{3,3,1}$ содержится нечетное число гамильтоновых пар (α, β) с ненулевыми значениями $lk_2(f(\alpha), f(\beta))$. Пусть, для определенности, число таких пар равно $2k+1$. Тогда суммарное число ребер, содержащихся в гамильтоновых парах с ненулевыми $lk_2(\alpha, \beta)$ равно $7(2k+1)$. Обозначим ребра графа $K_{3,3,1}$ через e_1, e_2, \dots, e_{15} , а число гамильтоновых пар циклов, содержащих ребро e_i , через n_i , где $i = 1, 2, \dots, 15$. Тогда

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{15} n_i = 7(2k+1).$$

Следовательно, найдется такое i , что n_i – нечетное. \square

6. ВЛОЖЕНИЯ ГРАФА K_n

Теорема 5. *Пусть $G_n = K_{3,3,1,\dots,1}$ – полный $(n-4)$ -дольный граф на n вершинах. При $n \geq 7$ для любого пространственного вложения $f(G_n)$ в графе G_n найдется такая гамильтонова пара циклов (α, β) , что $f(\alpha) \cup f(\beta)$ является нетривиальным зацеплением.*

Доказательство. Для $n = 7$ утверждение следует из леммы 5, как впрочем, и из леммы 3. Приведем доказательство для $n = 8$. Данное доказательство аналогично доказательству, приведенному в [1] для случая гамильтоновых циклов.

Пусть $f(G_8)$ – пространственное вложение полного четырехдольного графа $G_8 = K_{3,3,1,1}$. В G_8 рассмотрим подграф $G_7 = K_{3,3,1}$ на семи вершинах. Вершину графа G_8 , не содержащуюся в G_7 , обозначим через v . Напомним, что вершина v соединяется ребром с каждой вершиной графа G_7 . По лемме 6 в G_7 существует ребро, содержащееся в нечетном числе таких гамильтоновых пар (α, β) , что $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) \neq 0$. Обозначим это ребро через e , а его концы – через w_1 и w_2 . Заменив ребро e парой ребер (w_1, v) и (v, w_2) , получим подграф $G'_7 \subset G_8$. По построению, граф G'_7 гомеоморфен, как одномерный комплекс,

графу $G_7 = K_{3,3,1}$ (G'_7 отличается от G_7 вставкой на ребре вершины валентности два). По лемме 6 в G'_7 имеется нечетное число гамильтоновых пар (α, β) таких, что $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) \neq 0$.

В силу леммы 5, в $G_7 = K_{3,3,1}$ содержится нечетное число гамильтоновых пар (α, β) с ненулевыми значениями $lk_2(f(\alpha), f(\beta))$. В силу выбора ребра e , число таких пар, содержащих e , нечетно. Следовательно, число таких пар, не содержащих e , четно. Отметим, что гамильтоновы пары в G_7 , не содержащие ребро e , это в точности гамильтоновы пары в G'_7 , не содержащие ребра (v, w_1) и (v, w_2) . Значит, в G'_7 содержится нечетное число гамильтоновых пар (α, β) , проходящих через ребра (v, w_1) и (v, w_2) , для которых $lk_2(f(\alpha), f(\beta)) \neq 0$. Такие пары являются гамильтоновыми парами циклов в $G_8 = K_{3,3,1,1}$. Таким образом, для каждого пространственного вложения $f(G_8)$ в графе G_8 найдется такая гамильтонова пара циклов, что ее вложение является нетривиальным зацеплением.

Для произвольного n доказательство проводится аналогично. При этом, вместо цепи $\{(w_1, v), (v, w_2)\}$ нужно рассмотреть в G_n простую цепь длины $(n-6)$ соединяющую вершины w_1 и w_2 и проходящую через те вершины графа G_n , которые не принадлежат G_7 . \square

Следствие 1. *При $n \geq 7$ любое пространственное вложение графа K_n содержит нетривиальное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов.*

Доказательство. Следует из теоремы 5 и того факта, что каждая гамильтонова пара циклов в G_n является гамильтоновой парой циклов в K_n . \square

Очевидно, класс графов, любое пространственное вложение которых имеет зацепленную гамильтонову пару, шире чем класс полных графов. В частности, имеет место следующее свойство.

Следствие 2. *Пусть H – граф, имеющий n вершин, $n \geq 7$, и содержащий подграф G_n . Тогда любое пространственное вложение графа H содержит нетривиальное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов.*

Следующий вопрос, по-видимому, до сих пор является открытым: *Верно ли, что любое пространственное вложение полного двудольного графа $K_{m,m}$, $m \geq 5$, содержит двухкомпонентное зацепление, являющееся вложением гамильтоновой пары циклов?*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. Blain, G. Bowlin, J. Foisy, J. Hendricks, J. LaCombe, *Knotted Hamiltonian cycles in spatial embedding of complete graphs*, New York J. of Math. **13** (2007), 11–16.
- [2] J.H. Conway, C.McA. Gordon, *Knots and links in spatial graphs*, J. Graph Theory, **7** (2003), 445–453.
- [3] J. Foisy, *Corrigendum to “Knotted Hamiltonian cycles in spatial embedding of complete graphs”*, New York J. of Math. **14** (2008), 285–287.
- [4] H. Sachs, *On spatial representations of finite graphs*, in: A. Hajnal, L. Lovasz, V.T. Sos (Eds.)/Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, North-Holland, Amsterdam, **37** (1984), 649–662.
- [5] M. Shimabara, *Knots in certain spatial graphs*, Tokyo J. Math. **11(2)** (1988), 405–413.

- [6] R. Motwani, A. Raghunathan, H. Saran, *Constructive results from graph minors: linkless embeddings*, 29-th Asian Symposium on Foundations of Computer Sciences, IEEE, 1988, 398–408.

АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ ВЕСНИН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: vesnin@math.nsc.ru

АННА ВИКТОРОВНА ЛИТВИНЦЕВА
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУНИВЕРСИТЕТ,
УЛ. ПИРОГОВА 2,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: annalitvinceva@gmail.com