S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 42–51 (2010) УДК 512.542
MSC 20B15

О ПЕРЕСЕЧЕНИЯХ СИЛОВСКИХ 2-ПОДГРУПП В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ, II

В. И. ЗЕНКОВ

Abstract. The finite groups with simple socle K are considered, where K is exeptional group of Lee type over field of order 3. For Sylov 2-subgroup S let $l_2(G)$ be a number of S-orbits on the set $X = \{S^g \mid S \cap S^g = 1, g \in G\}$. It is proved that $l_2(G) \geq 3$.

Keywords: intersections, simple group.

1. Введение

В работе [1, следствие C] было доказано, что в любой конечной группе G для простого числа p и силовской p-подгруппы P найдутся такие элементы x и y, что $P \cap P^x \cap P^y = O_p(G)$, где $O_p(G)$ обозначает наибольшую нормальную p-подгруппу группы G. Так как подгруппа $O_p(G)$ лежит в любой силовской p-подгруппе из G, то изучая пересечения силовских p-подгрупп, можно считать, что $O_p(G) = 1$. Возникает вопрос: при каких условиях на группу G в соотношении $P \cap P^x \cap P^y = 1$ можно обойтись только одним элементом, то есть, когда в группе G найдется такой элемент z, что $P \cap P^z = 1$? В общем случае для простого числа p, равного 2 или числу Мерсенна, можно построить конечную группу G с условием $O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P выполнено соотношение $P \cap P^z \neq 1$ для любого $z \in G$. Исторически первые примеры таких групп появились в работе Ито [2] и были разрешимыми группами. В разделе 2 примеры приведены серии таких групп.

Случай неразрешимых групп на протяжении тридцати с лишним лет после работы Ито оставался неисследованным, даже не было опубликовано ни одного

Zenkov, V. I., On intersections sylov subgroups in finite groups, II.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российским фондом фундаментальных исследований, проекты № 07-01-00148 и № 08-01-90006, программы Отделения математических наук РАН и программами совместных исследований УрО РАН с СО РАН и с НАН Беларуси.

Поступила 10 декабря 2009 г., опубликована 8 февраля 2010г.

примера неразрешимой группы G, в которой $O_p(G) = 1$ и любые две силовские p-подгруппы пересекаются нетривиально. Более того, в работе [3] было доказано, что в любой простой неабелевой группе G для любой силовской подгруппы P из G найдется такой элемент $z \in G$, что $P \cap P^z = 1$. Однако, как показано далее, в группе $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(7))$ любые две силовские 2-подгруппы пересекаются нетривиально, хотя $|\mathrm{Aut}(L_2(7)) : \mathrm{Inn}(L_2(7))| = 2$ и в $\mathrm{Inn}(L_2(7)) \simeq L_2(7)$ найдутся две силовские 2-подгруппы, которые пересекаются по единице. Таким образом, рассматривая случай произвольной конечной группы G с условием $O_p(G) = 1$, в которой для силовской p-подгруппы P и любого элемента $x \in G$ выполняется условие $P \cap P^x \neq 1$, в первую очередь нужно изучить почти простые группы с этим условием.

Главным инструментом изучения пересечений силовских подгрупп в конечных группах является параметр $l_p(G)$, который мы сейчас введем. Рассмотрим конечную группу G с силовской p-подгруппой P и условием $O_p(G) = 1$. Пусть $X = \{P^g \mid P^g \cap P = 1, g \in G\}$. Тогда подгруппа P действует сопряжениями на множестве X. Через $l_p(G)$ обозначим число орбит при этом действии. Тогда, к примеру, в случае простой неабелевой группы G имеем $l_p(G) > 0$, поскольку в G найдется элемент x такой, что $P \cap P^x = 1$, но в то же время $l_2(\mathrm{Aut}(L_2(7))) = 0$.

Из леммы 1 следует, что зная $l_p(G)$, можно вычислить $l_p(G \wr Z_p)$. В частности, при $l_p(G) \geq 3$ неравенство $l_p(G) \leq l_p(G \wr Z_p)$ справедливо для всех простых чисел p, а в случае нечетного простого числа p данное неравенство справедливо даже при $l_p(G) \geq 2$. С другой стороны, если $l_p(G) = 1$ и $N_G(P) = P$ для $P \in Syl_2(G)$, то всегда $l_p(G \wr Z_p) = 0$, а при $p = 2$ даже в случае, когда $l_2(G) = 2$ и $N_G(P) = P$ для $P \in Syl_2(G)$, имеем $l_2(G \wr Z_2) = 1$ и $l_2((G \wr Z_2) \wr Z_2) = 0$. Каков же механизм применения этого параметра? Дело в том, что лемма 5 вместе с примерами из раздела 2 дает вполне удовлетворительную информацию о разрешимой группе G с условием $l_p(G) = 0$. Если разрешимый радикал $S(G)$ группы G нетривиален и $l_p(S(G)) = 0$, то $l_p(G) = 0$ и строение $S(G)$ описывается леммой 5. Пусть $l_p(S(G)) > 0$. Тогда по [1, лемма 3.2] $l_p(G/S(G)) = 0$. Итак, можно считать, что $S(G) = 1$ и $G = E(G)P$. Группа G действует сопряжениями на множестве $\{K_1, K_2, \ldots, K_n\}$ компонент из $E(G)$ и по [1, лемма 3.14] изоморфно вкладывается при этом в прямое произведение $\prod_{i=1}^k \mathrm{Aut}_G(K_i) \wr S_{n_i}$, где k — число G-орбит, n_i — длина, а K_i — представитель i-й орбиты при этом действии, $\mathrm{Aut}_G(K_i)$ — группа индуцированных автоморфизмов компоненты K_i.

Случай нечетного простого числа p полностью рассмотрен в лемме 4. Поэтому можно считать, что $p = 2$ и так как силовская 2-подгруппа из S_n может быть представлена как прямое произведение некоторых сплетений, то и здесь работает описанный выше механизм применения параметра $l_2(G)$. А именно, мы видим, что в группе G с силовской 2-подгруппой P и $S(G) = 1$ условие $l_2(G) = 0$ может выполняться только в случае, когда $l_2(\mathrm{Aut}_G(K_i)) \leq 2$ для некоторой компоненты K_i. Следовательно, задача изучения произвольной конечной группы G с условиями $S(G) = 1$ и $l_2(G) = 0$ сводится к изучению почти простых групп K таких, что $l_2(K) \leq 2$. В настоящей работе доказана

Теорема. *Пусть K — конечная простая группа исключительного лиева типа над полем порядка 3 и $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$. Тогда $l_2(G) \geq 3$.*

В работе использованы стандартные обозначения, в основном совпадающие с обозначениями из [4].

2. Предварительные сведения

Лемма 1. [1, лемма 3.12]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, G_1 — такая подгруппа из G, что $O_p(G_1) = 1$ и $G = G_1 \wr Z_p$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $l_p(G_1) \geq 3$, то и $l_p(G) \geq 3$;*

(2) *если $p = 2, l_2(G_1) = 2$ и $N_{G_1}(P_1) = P_1$ для силовской 2-подгруппы P_1 из G_1, то $L_2(G) = 1$.*

Лемма 2. [1, лемма 3.6]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, P — силовская p-подгруппа из G, M — p-локальная подгруппа из G, содержащая $N_G(P)$. Если $l_p(M/O_p(M)) \geq 3$ и $O_p(M) \cap O_p(M)^x = 1$ для некоторого элемента x из G, то $l_p(G) \geq 3$.*

Лемма 3. [1, теорема 8.1]. *Если G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом и каждая компонента из $E(G)$ — спорадическая или знакопеременная группа, отличная от A_5, A_6, A_8, то $l_2(G) \geq 3$.*

Лемма 4. [1, теорема 6.1]. *Пусть G — конечная группа с единичным разрешимым радикалом, p — нечетное простое число, P — силовская p-подгруппа из G. Тогда следующие условия эквиваленты:*

- **(1):** *$P \cap P^x \neq 1$ для любого элемента x из G;*
- **(2):** *$p = 3$ и группа G содержит субнормальную подгруппу K, где $P\Omega_8^+(3) < K \leq P\Omega_8^+(3) \leftthreetimes \langle g \rangle$ и g — графовый автоморфизм порядка три группы $P\Omega_8^+(3)$.*

Лемма 5. [1, теорема B]. *Пусть G — конечная группа, p — простое число, $S(G)$ —разрешимый радикал группы G, P — силовская p-подгруппа из G. Если $P \cap P^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G, то справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) *$(P \cap S(G)) \cap (P \cap S(G))^x \neq O_p(G)$ для любого элемента x из G и в факторгруппе $\overline{S(G)} = S(G)/O_p(G)$ выполняются утверждения одного из следующих пунктов:*
- **(1а):** *$p = 2, q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна и $\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $(Z_q \times Z_q) \leftthreetimes D_{2^{n+1}}$, и $D_{2^{n+1}}$ действует точно на $Z_q \times Z_q$;*
- **(1б):** *$p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна и $\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $F \wr Z_p$, где F — группа Фробениуса, изоморфная $V_{p+1} \leftthreetimes Z_p$;*
- **(1в):** *$p = 2, q = 2^n + 1$ — простое число Ферма и $S(G)$ содержит подгруппу, изоморфную $(Z_q \times Z_q) \leftthreetimes Z_4 \circ D_{2^{n+1}}$, и $Z_4 \circ D_{2^{n+1}}$ действует точно на $Z_q \times Z_q$;*
- **(1г):** *$\overline{S(G)}$ содержит подгруппу, изоморфную $Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8 \leftthreetimes (Z_3 \wr Z_3)$, где $|Z(Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8)| = 2$ и $Z_3 \times Z_3$ действует на $Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8$ как подгруппа из $Hol(Q_8 \circ Q_8 \circ Q_8)$.*

(2) *$P \cap S(G) \cap (P \cap S(G))^y = O_p(G)$ для некоторого элемента y из G и в факторгруппе $\widetilde{G} = G/S(G)$ выполняются условия одного из следующих пунктов:*

(2а): *$p = 3$ и группа $\widetilde{G}$ содержит субнормальную подгруппу $\widetilde{K}$, где $P\Omega_8^+(3) < \widetilde{K} \leq P\Omega_8^+(3) \leftthreetimes < g >$, где g — графовый автоморфизм порядка три группы $P\Omega_8^+(3)$;*

(2б): *$p = 2$ и группа $\widetilde{G}$ содержит компоненту изоморфную одной из следующих групп:*

(2б1): *простой группе лиева типа над полем из q элементов, где $q = 9$ или q — простое число Ферма или Мерсенна;*

(2б2): $L_3(4), L_n(2), n \geq 3, \Omega_n(2), n \geq 7, F_4(2), E_6(2), E_7(2), E_8(2),$ ${}^2F_4'(2)$.

Лемма 6. *Пусть G — конечная группа, $O_2(G) = 1$ и N — нормальная подгруппа из G. Если $l_2(N) = n > 0$ и $l_2(G/N) = m > 0$, то $l_2(G) \geq mn$.*

Доказательство. Пусть S — силовская 2-подгруппа из G $T = S \cap N$ — силовская 2-подгруппа из N. По аргументу Фраттини [6, Карг.,с. 149] $G = N \cdot N_G(T)$. Теорема о гомоморфизме [6, Карг.,с. 46,т. 4] влечет, что $G/N \simeq N_G(T)/N \cap N_G(T)$. По условию $l_2(G/N) = m > 0$, поэтому $l_2(N_G(T)/N \cap N_G(T)) = l_2(G/N) = m > 0$. Заметим, что $T \leq S$, поэтому $N_G(T) \geq S$. Кроме того, подгруппа $N \cap N_G(T)$ — 2-замкнута, поэтому каждая силовская 2-подгруппа из $N_G(T)$, являясь силовской 2-подгруппой из G, содержит T. С другой стороны, в силу $l_2(N_G(T))/N \cap N(T)) = m > 0$, имеем в факторгруппе $N_G(T) = N_G(T)/N \cap N_G(T)$, что $\tilde{S} \cap \tilde{S}^{\tilde{X}_i^j} = \tilde{1}$, где $i = 1, 2, \ \ldots, |\tilde{S}|$, а $j = 1, 2, \ \ldots, \ m$. Здесь нижние индексы $1, 2, \ \ldots, \ |\widetilde{S}|$ нумеруют силовские 2-подгруппы из $\widetilde{N}_G(J)$, которые пересекаются с $\widetilde{S}$ по $\tilde{1}$ и образуют орбиту под действием $\widetilde{S}$ сопряжением, а верхний индекс j нумерует орбиты. Следовательно, в полном прообразе подгруппы $\tilde{S}^{\tilde{X}_i^j}$ в $N_G(T)$ некоторая силовская 2-подгруппа $S^{x_i^j}$ пересекается с подгруппой S по подгруппе T для любого набора индекса i, j. Отметим, что $|\widetilde{S}| = |S : T|$, значит, в $N_G(T)$ найдется не менее, чем $|S : T| \cdot m$ силовских 2-подгрупп, которые пересекаются с S по подгруппе T.

В подгруппе N имеем $l_2(N) = n > 0$, следовательно $T \cap T^{y_k^l} = 1$, где снова нижний индекс k нумерует силовские 2-подгруппы из орбиты под действием T сопряжение, а верхний индекс l нумерует орбиты. Таким образом, в подгруппе N найдется не менее, чем $|T| \cdot n$ силовских 2-подгрупп, которые пересекаются с T по единице.

Под действием элемента y_k^l силовская 2-подгруппа $S^{X_i^j}$ перейдет в силовскую 2-подгруппу $S^{x_i^j y_k^l}$ и, таким образом, возникает $|S : T| \cdot m \cdot |T| \cdot n = |S| \cdot mn$ силовских 2-подгрупп. Все эти силовские 2-подгруппы попарно различны. Действительно, $|S : T| \cdot m$ из них лежат в $N_G(T)$ и там попарно различны, пересекаясь по подгруппе T. Далее, в $N_G(T^{y_k^l})$ и в $N_G(T^{y_{k'}^{l'}})$ нет общих силовских 2-подгрупп при $l' \neq l$ или $k' \neq k$, где k' и l' пробегают то же множество индексов, что и k с l, так как силовские 2-подгруппы из $N_G(T^{y_k^l})$ пересекаются с N по $T^{y_k^l}$, а силовские 2-подгруппы из $N_G(T^{y_{k'}^{l}})$ пересекаются с N по $T^{y_{k'}^{l'}}$.

Покажем, что подгруппа $S^{x_i^j y_k^l}$ пересекается с S тривиально.

Допустим, что $S \cap S^{x_i^j y_k^l} = D \neq 1$. Рассмотрим образ $\overline{D}$ подгруппы D в факторгруппе $\overline{G} = G/N$. Так как $S \cap S^{x_i^j} = T \leq N$, то $SN \cap S^{x_i^j} N \leq N$. Значит, $S^{y_k^l} N \cap S^{x_i^j} N \leq N$. Но $y^l \in N$, следовательно, образ подгруппы $S^{y_k^l} N$ в $\overline{G}$ равен

$\overline{S}$. Так как образ пересечения $S^{y_k^l}N \cap S^{x_i^i y_k^l}$ в $\overline{G}$ равен $\overline{1}$ и совпадает с $\overline{S} \cap \overline{S}^{x_i^j}$, то $\overline{D} = 1$. Таким образом, $D \leq N$. Но $S \cap N = T$ и, поскольку $D \leq S$ и $D \leq N$, то $D \leq S \cap N = T$. Аналогично, $D \leq T^{y_k^0}$. Так как $T \cap T^{y_k^l} = 1$, то $D = 1$. Лемма доказана.

Замечание. В общем случае $m \geq 0$ и $n \geq 0$. Если $n = 0$, то это означает, что любая пара силовских 2-подгрупп из N имеет нееденичные пересечение. Теперь факторизация $G = N \cdot N_G(T)$ влечет, что любая пара силовских 2-подгрупп из G имеет неединичное пересечение. Следовательно, из условия $l_2(N) = 0$ вытекает, что $l_2(G) = 0$. Таким образом, можно считать, что $n = l_2(N) > 0$.

Если $m = 0$, то возможно, что $l_2(G) = 0$, а возможно, что $l_2(G) > 0$. Соответствующие примеры приведены в лемме 1.

Лемма 7. [7, Зенков, Макосий, теорема] *Пусть G — конечная простая группа, изоморфная $U_3(3)$, $L_3(3)$, $L_4(3)$, $U_4(3)$, $PSp_4(3)$, $\Omega_7(3)$ $\Omega_8^-(3)$ или $\Omega_8^+(3)$ и $\mathrm{Inn}(K) \leq G \leq \mathrm{Aut}(K)$. Если $l_2(G) \leq 2$, то $k = U_3(3)$ или $k = PSp_4(3)$, при этом $l_2(U_3(3)) = 2$ и $l_2(\mathrm{Aut}(U_3(3))) = 1$, $l_2(PSp_4(3)) = 1$ и $l_2(\mathrm{Aut}(PSp_4(3))) = 1$.*

3. Примеры

Здесь мы приведем примеры разрешимых и почти простых групп G с $l_2(G) = 0, 1, 2$. Заметим, что главная задача состоит в полном описании таких групп.

3.1. Первая серия. Разрешимые группы.

(1) $p = 2$

(1): Пусть $G = Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}$, где $2^n + 1 = p$ — простое число Ферма, а $k \leq n$ и G – группа Фробениуса. Тогда при $k = n$ имеем $l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^n}) = 1$, при $k = n-1$ имеем $l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^{n-1}}) = 2$, а при $k \leq n-2$ имеем $l_2(Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}) \geq 3$. Следовательно, по лемме 1 $l_2((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^n}) \wr Z_2) = 0, l_2(((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^{n-1}}) \wr Z_2) \wr Z_2) = 0$, а при $k \leq n-2$ имеем $l_2((Z_{2^n+1} \leftthreetimes Z_{2^k}) \wr Z_2) \geq 3$.

(2): Пусть $G = (Z_{2^n-1} \times Z_{2^n-1}) \leftthreetimes SD_{2^{n+2}}$, где $SD_{2^{n+2}}$ действует точно на $Z_{2^n-1} \times Z_{2^n-1}$ и $p = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна. Тогда $l_p(G) = 0$.

(2) $p = 2^n - 1$ – простое число Мерсенна. Пусть $G = V_{2^n} \leftthreetimes Z_p$ — где G — группа Фробениуса. Тогда $l_p(G) = 1$ и по лемме 1 $l_p(G \wr Z_p) = 0$.

3.2. Вторая серия. Неразрешимые группы.

(1) $p = 2$ [1, лемма 3.27]. Пусть $G \simeq S_n$, где $S_n' = A_n$ — знакопеременная группа и $n \geq 5$. Тогда

(1): $l_2(A_5) = l_2(S_5) = l_2(Aut(A_5)) = 1$;
(2а): $l_2(A_6) = 4$;
(2б): $l_2(S_6) = 1$;
(2в): $l_2(PGL_2(9)) = 1$;
(2г): $l_2(PGL_2^*(9)) = 2$;
(2д): $l_2(Aut(A_6)) = 0$;
(3): $l_2(Aut(A_7)) \geq 3$;
(4): $l_2(S_7) \geq 3$;
(5): $l_2(A_8) = 1$;

(6): $l_2(S_8) = 0$;
(7): $l_2(A_n) \geq 3$ и $l_2(S_n) \geq 3$ при $n \geq 9$.

(2) $p = 2$ [1, лемма 3.18]. Пусть $G \simeq \mathrm{Aut}(L_2(q))$. Тогда:
(1): $l_2(G) = 1$, если $q = 2^n + 1$ — простое число Ферма;
(2): $l_2(G) = 0$, если $q = 2^n - 1$ — простое число Мерсенна.

4. Доказательство теоремы

Согласно [8, Liebeck, Saxl] исключительная простая группа лиева типа ассоциирована с одной из следующих систем корней: G_2, F_4, ${}^3D_4$, E_6, E_7, E_8 и для доказательства теорем нужно рассмотреть случаи, когда $K \simeq G_2(3)$, $F_4(3)$, $E_6(3)$, ${}^2E_6(3)$, $E_7(3)$, $E_8(3)$, ${}^3D_4(3)$.

Рассмотрим эти возможности. Обозначим через S силовскую 2-подгруппу из G.

Пусть $K \simeq D_4^3(3)$. Тогда [8, Liebeck, Saxl, c. 254] и [4, Атлас, c.XVI] $K \simeq G$ и G содержит максимальную подгруппу $M = C(z) = (K_1 \circ K_2)\langle t\rangle$, где z — инволюция из $Z(S)$, $K_1 \simeq SL_2(3)$ и $K_2 \simeq SL_2(27)$, $t^2 \in K_1 \circ K_2$ и t нормализует K_1 и K_2, причем $|C(z) : K_1 \circ K_2| = 2$ и $C(z)/K_1 \simeq L_2(27)$. По лемме [1, лемма 3.27] $l_2(L_2(27)) \geq 3$. Теперь по лемме 2 $l_2(G) \geq 3$. Случай $K \simeq {}^3D_4(3)$ рассмотрен.

Пусть $K \simeq G_2(3)$. Необходимая информация о группе $G_2(3)$ и $\mathrm{Aut}(G_2(3))$ содержится в [4, Атлас, c. 60]. В частности, для группы $G \simeq \mathrm{Aut}(K)$ имеем, при отождествлении K с $\mathrm{Inn}(K)$, $|G : K| = 2$, $|K| = 2^6 3^6 7 \cdot 13$. Пусть $P = S \cap K$. Тогда согласно [12, Gorenstein, Harada, л. 81, c. 854] подгруппа P содержит двадцать семь инволюций, которые сопряжены в K и для инволюции z из $Z(P)$ имеем согласно [4, Атлас, c. 60], что $|C_K(z)| = 2^6 \cdot 3^2$ и $N_K(P) = P$. Следовательно, [**?**, Кабанов, Кондратьев, c. 121] для числа m силовских 2-подгрупп из K, содержащие z, имеем

$$m = |z^K \cap P|\, |C_K(z)||P| = 3^3 \cdot 3^2 = 3^5.$$

Так как в подгруппе P содержится двадцать семь инволюций, то число силовских 2-подгрупп из K, пересекающихся нетривиально с P, не больше, чем $3^3 \cdot 3^5 = 3^8$.

Рассмотрим группу $G = \mathrm{Aut}(K)$ и подсчитаем число инволюций в разности $S \backslash P$. Согласно [4, Атлас, c. 60] в разности $S \backslash P$ есть инволюция t, такая, что $C(t) \simeq \langle t\rangle \times L$, где $L \simeq \mathrm{Aut}(L_2(8))$ и G содержит 2-локальную подгруппу M, содержащую S с $O_2(M) \simeq V_8$ и факторгруппа $M/O_2(M) = \overline{M}$ изоморфна $\mathrm{Aut}(L_2(7))$. В частности, подгруппа $\overline{S}$ изоморфна D_{16}. Пусть t_1 — произвольная инволюция из $S \backslash P$. Так как $|S : P| = 2$ и в разности $S \backslash P$ содержится инволюция t, то $t_1 = tp$, где $p \in P$. Значит, $1 = t_1^2 = tptp = p^t p$. Следовательно, инволюция t инвертирует элемент p. Но тогда и в факторгруппе $\overline{M}$ инволюция $\bar{t}$ инвертирует элемент $\overline{p}$. Так как $\overline{S} \simeq D_{16}$, то образ $\bar{t}$ элемента t в $\overline{S}$ лежит в максимальной циклической 2-подгруппе $\overline{X}$ из $\overline{S}$. Пусть X — полный прообраз подгруппы $\overline{X}$ из $\overline{S}$. Тогда все инволюции из $S \backslash P$ лежат в подгруппе $X\lambda\langle t\rangle$. Так как $|\overline{X}| \leq 8$, а подгруппа $O_2(M)$ — элементарная абелева, то экспонента X не превосходит шестнадцати. Пусть $x \in X$ и $\langle \overline{x}\rangle = \overline{X}$. Тогда $|x| \leq 16$. Предположим, что $p \in V$. Из того, что $p^2 = 1$ следует, что $[t, p] = 1$. Поэтому $\underset{O_2(M)}{C(t)}$. Так как $O_2(M) \simeq V_8$, то $|O_2(M) : \underset{O_2(M)}{C(t)}| \leq 2$. Но $\overline{M}$ действует точно на $O_2(M)$, значит, $C(t) \simeq V_4$. Поэтому подгруппа $O_2(M)\langle t\rangle$ содержит четыре инволюций из $S\backslash P$. Кроме того, силовская 2-подгруппа из $L_2(7)$ изоморфна D_8. Следовательно, образ любой инволюции из $S\backslash P$ в $\overline{M}$ совпадает с одной из четырех сопряженных с $\bar{t}$ под действием $\overline{S}$ инволюции. Действительно $\overline{S} \simeq D_{16}$, а $\overline{P} \simeq D_8$, поэтому в разности $\overline{S}\backslash\overline{P}$ столько же инволюций, сколько и в $D_{16}\backslash D_8$, то есть 4. Тогда это инволюции из смежных классов $t\,O_2(M)$, $t^{s_1}O_2(M)$, $t^{s_2}O_2(M)$, $t^{s_3}O_2(M)$, где s_1, s_2, s_3 — некоторые элементы из S. Выше показано, что подгруппа $\langle t\rangle O_2(M)$ содержит четыре инволюции из $S\backslash P$. Следовательно, каждая из подгрупп из $\langle t^{s_1}\rangle O_2(M)$, $\langle t^{s_2}\rangle O_2(M)$ и $\langle t^{s_3}\rangle O_2(M)$ содержит по четыре инволюции из $S\backslash P$. Таким образом, $S\backslash P$ содержит не более шестнадцати инволюций. Поэтому для числа n силовских 2-подгрупп из G, пересекающихся с S по инволюции t из $S\backslash P$ имеем

$$n = |t^G \cap S||C(t)|/N(S) = 18 \cdot 9,$$

а для числа r силовские 2-подгрупп из G, пересекающихся с S по инволюции из $S\backslash P$ имеем:

$$r \leq 18 \cdot 9 \cdot 18.$$

Значит для числа l силовских 2-подгрупп из G, пересекающихся с S нетривиально, имеем:

$$l \leq 3^8 + 3^6 \cdot 4.$$

Так как число всех силовских 2-подгрупп из $G = |G : N(S)| = 3^6 \cdot 7 \cdot 13$, то число силовских 2-подгрупп , которые пересекаются с подгруппой S по единице не меньше, чем $3^6 \cdot 7 \cdot 13 - (3^8 + 3^6 \cdot 4) = 3^6(7 \cdot 13 - (3^2 + 4)) = 3^6 \cdot 13 \cdot 6$. Следовательно, $l_2(G) \geq 3^6 \cdot 13 \cdot 6/2^7 = (3^7/2^7)13 \geq 13$.

Случай $K \simeq G_2(3)$ рассмотрен.

Пусть $K \simeq F_4(3)$. Тогда согласно [11, Харрис. лемма 4.20(а)] $\mathrm{Aut}(K) \simeq K$. Следовательно, $G \simeq F_4(3)$. Далее по [4, Атлас, с. XVI] $|F_4(3)| = 3^{24}(3^{12}-1)(3^6-1)(3^2-1) = 3^{24}(3^6+1)(3^6-1)(3^4+1)(3^4-1)(3^6-1) \cdot 2^3 = 3^{24} \cdot 730 \cdot ((3^2-1)(3^4+3^2+1))^2 \cdot 82 \cdot 80 \cdot 2^3 = 2^{15} \cdot 3^{24} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot 41 \cdot 73$. Известно [11, Харрис, лемма 4.20(в)], что G имеет два класса инволюций с представителями t и δ, причем $C(t) \simeq \mathrm{Spin}_9(3)$ и $Z(C(t)) = \langle t\rangle$, а $C(\delta)$ имеет две 2-компоненты J_1 и J_2, такие, что $Z(J_1) = Z(J_2) = \delta$, $J_1 \simeq SL_2(3)$, $J_2 \simeq Sp_6(3)$, $|C(\delta)/J_1 \circ J_2|, = 2$ и $C(J_1 \circ J_2) = \langle\delta\rangle$. Так как $|SL_2(3)|_2 = 2^3$, а $|Sp_6(3)| = 2^9$ по [4, Атлас, с. 110], то $|C(\delta)|_2 = 2^{12}$. Следовательно, $t \in Z(S)$. Так как $O_2(C(t)) = \langle t\rangle$ и G — простая группа, то $\langle t\rangle \cap \langle t\rangle^x = 1$ для некоторого элемента x и G. Теперь лемма 3.6 из [1, Зенков, с. 19] влечет, что для доказательства того, что $l_2(G) \geq 3$ достаточно показать, что $l_2(C(t)/\langle t\rangle) \geq 3$.

Так как $C(t)/\langle t\rangle \simeq P\Omega_9(3)$, то по лемме [11, Харрис, с. 37] $C(t) \simeq \mathrm{Spin}_9(3)$ содержит центральную инволюцию j из $Z(S)\setminus Z(G)$, такую, что $C(j)$ содержит компоненту J с $Z(J) = \langle Z(G), j\rangle$, $J \simeq \mathrm{Spin}_8^+(3)$. Так как $J/Z(J) \simeq P\Omega_8^+(3)$, а согласно [4, Атлас, с. 140] $|P\Omega_8^+(3)| = 2^{12}$, то $|J|_2 = 2^{14}$. Следовательно, разность $S\backslash S \cap J$ содержит элемент d, который индуцирует на $C(t)$ некоторый автоморфизм и $d^2 \in J$. Если d индуцирует на подгруппе J внутренний автоморфизм, то тогда $dD_1 \in C(J)$ для некоторого элемента d_1 из J. В этом случае подгруппа $A = \langle dd_1, j, Z(G)\rangle = O_2(C(j))$ — абелева. Тогда $A \cap A^y = 1$ для некоторого элемента y из G. Факторгруппа $C(j)/A \simeq P\Omega_8^+(3)$ и по теореме [7, Зенков, Макосий] $l_2(P\Omega_8^+(3)) \geq 3$. Теперь по лемме 3.6 [1, Зенк, с. 19] имеем $l_2(G) \geq 3$. Если d индуцирует внешний автоморфизм на подгруппе J, то в этом случае $O_2(C(j)) = \langle j, Z(G)\rangle \simeq V_4$, а $C(j)/O_2(C(j)) \simeq P\Omega_8^+(3)\cdot\langle r\rangle$, где $r^2 \in P\Omega_8^+(3)$. Снова $l_2(P\Omega_8^+(3)\langle r\rangle) \geq 3$ согласно [7, Зенков, Макосий] и по лемме 3.6 [1, Зенков, с. 19] имеем $l_2(G) \geq 3$. Случай $K \simeq F_4(3)$ рассмотрен.

Пусть $K \simeq E_6^\varepsilon(3)$, где $\varepsilon = \pm 1$. В обоих случаях $G' \simeq K$ [11, Харрис, с. 47,48] и G содержит S-инвентарную максимальную подгруппу $M \simeq N_G(2^2\cdot P\Omega_8^+(3))$. Число m всех коммутирующих между собой попарно подгрупп X_i, изоморфных $SL_2(3)$, согласно [10, Asch.2, теорема 2] равно 4 как для $E_6^\varepsilon(3)$, так и для $2^2\cdot P\Omega_8^+(3)$. Кроме того, для подгруппы $X = \langle X_1, X_2, X_3, X_4\rangle$ имеем $C_{G'}(X) \leq X$, причем $C_{G'}(X) = Z(X) = V_8$ [9, Asch. 1. 33]. Следовательно, любой элемент из $S \cap G'$, индуцирующий на $E(M)$ внутренний автоморфизм, дает элемент $t_1 = ty \in C(E(M)) \leq C(X) \simeq V_8$. Заметим, что $E(M)$ централизует четверную подгруппу $Z = Z(E(M))$ из $C(X)$, но $E(M)$ не нормализует $C(X)$ [9, Asch., 2, т. 2], так как $N(C(X))$ — разрешимая подгруппа. Следовательно, $C_{G'}(E(M)) = Z \simeq V_4$.

Допустим, что некоторый элемент S из $G\backslash G'$ индуцирует внутренний автоморфизм на $E(M)$. Тогда некоторый элемент $s_1 = sy_1$, для $y \in E(M)$, лежит в $C(E(M))$. В частности, $[\langle s_1\rangle,\ Z(E(M))] = 1$. Значит, подгруппа $\langle s_1\rangle$, $Z(E(M)) >= A$ — абелева и $A = O_2\ (N_G(2^2\cdot P\Omega_8^+(3)))$. По лемме 3.3 [1, Зенков, с. 18] $A \cap A^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$. Кроме того, $N_G(Z)/C_G(Z) \simeq S_3$, где $Z = Z(E(M))$ по [8, Liebeck, Saxl]. Действительно, $C_{G'}(Z) = C_{G'}(z)$, где z инволюция из $Z(S)$ и $C_{G'}(Z)$ — максимальная подгруппа из G', а $N_{G'}$ не лежит в $C_{G'}(Z)$ в силу максимальности в G'. Но $C_{G'}(Z)$ является нерасщепляемым расширением подгруппы Z с помощью подгруппы R из $\mathrm{Aut}(P\Omega_8^+)(3)$. По лемме 7 $l_2(R) \geq 3$. Тогда лемма 6 влечет, что $l_2(N_{G'}(Z)/Z) \geq 3$. Следовательно, $l_2(N_G(Z))/O_2(N_G(Z)) \geq 3$. Так как $O_2(N_G)(Z)$ — абелева группа, то $l_2(G) \geq 3$ по лемме 3.6 из [1]

Случай $K \simeq E_6^\varepsilon(3)$ рассмотрен.

Пусть $K \simeq E_8(3)$. Тогда согласно [11, Харрис, лемма 4.19(a)] $G \simeq \mathrm{Inn}(K) \simeq K$. По теореме из [8, Liebeck, Saxl] группа G содержит подгруппу $G_1 \simeq N_G(R)$ нечетного индекса, где подгруппа R является расширением четверной подгруппы V с помощью подгруппы $K_1 \times K_2$, где $K_1 \simeq K_2 \simeq P\Omega_8^+(3)$, причем $C(R) \leq R$ по [11, Харрис, лемма 4.19(в)]. Пусть $\overline{G}_1 \simeq G_1/O_2(G)$. Так как $O_2(G_1) = S(G_1)$, где $S(G_1)$ — разрешимый радикал группы G_1, то $F^*(\overline{G}_1) = K_1 \times K_2$, а $\overline{G}_1 = (K_1 \times K_2)\overline{S}$, где $S \in Syl_2(G)$. Значит, $|\overline{G}_1 : N_{\overline{G}_1}(K_i)| \leq 2$ $i = 1, 2$. Следовательно, $N_{\overline{G}_1}(K_1) = N_{\overline{S}}(K_2)$. Так как $N_{\overline{G}_1}(K_1)/C_{\overline{G}_1}(K_1) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(K_1)$ и $N_{\overline{G}_1}(K_2)/C_{\overline{G}_1}(K_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(K_2)$, то по теореме Ремака [6, Карг., с. 50] $N_{\overline{G}_1}(K_i)/C_{\overline{G}_1}(K_1) \cap C_{\overline{G}_1}(K_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_1) \times \mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_2)$, при этом $G_1 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_1) \wr Z_2$. Согласно [7] $l_2(L) \geq 3$, где группа L является расширением $\Omega_8^+(3)$. Следовательно, $l_2(\mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_1) \times \mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_2)) \geq 3$. По лемме 3.12 из [1] $l_2(\mathrm{Aut}_{\overline{S}}(K_1) \wr Z_2) \geq 3$. Значит, $l_2(\overline{G}_1) \geq 3$. Так как $S \simeq K \simeq E_8(3)$ — простая группа, то [7] $S \cap S^g = 1$ для некоторого элемента $g \in G$. Поэтому $O_2(G) \cap (O_2(G))^g = 1$ и по лемме 3.6 [1, Зенков, с. 19] $l_2(G) \geq 3$.

Случай $K \simeq E_8(3)$ рассмотрен.

Пусть $K \simeq E_7(3)$. Согласно [11, Харрис,лемма 4.24, с. 44] $|\mathrm{Aut}(K) : \mathrm{Inn}(K)| = 2$ и силовская 2-подгруппа S из $\mathrm{Aut}(K)$ содержит пять классов сопряженных инволюций, причем три из них, с представителями t_1, t_2 и t_3 лежат в $S \cap \mathrm{Inn}(K) = S_1$, а два, с представителями t_4 и t_s — лежат в разности $S\backslash S_1$.

Далее, по [4, Атлас, с. XVI] $|E_7(3)| = (3^{18}-1)(3^{14}-1)(3^{12}-1)(3^{10}-1)(3^8-1)(3^6-1)(3^2-1)/2$. Следовательно, $|E_7(3)|_2 = 2^{23}$ и $|\mathrm{Aut}(E_7(3))|_2 = 2^{24}$.

Пусть U — корневая подгруппа из $G' = L$ и U^- — противоположная к ней подгруппа и пусть $K \simeq \langle U, U^-\rangle$ — фундаментальная подгруппа. Тогда [9, Asch., с. 401] $K \simeq SL_2(3)$. Определим $\Omega(L) = \{K^l | l \in L\}$ и обозначим $\Omega = \Omega(L)$ — множество фундаментальных подгрупп из L. Для подгруппы $K \in \Omega$ через $z(K)$ обозначим единственную инволюцию из K и пусть $V(K) = \{J \in \Omega | z(K) = z(Y)\}$. Тогда $V(K) = K$. Определим $R(L)$ — множество силовских 2-подгрупп элементов из L, изоморфных Q_8 и пусть $\triangle = \mathrm{Fnn}_L(S_1) = \{K \in \Omega | R \leq K\}$ для некоторой $R \in R(L)$ и $R \leq P\}$. Тогда $\triangle$ — максимальное множество попарно коммутирующих фундаментальных подгрупп из L. Пусть $k = |\triangle|$. Число k и группа подстановок $p(L) = N_L(\triangle)^\triangle$ степени k приведены в [9, Asch., т. 2].

Понятно, что $P \leq N_L(\triangle)$ и $S \leq NV_L(\triangle)$, так как S_1 и S нормализуют класс фундаментальных подгрупп из L. Пусть $\triangle = \{X_1, X_2, \ldots, X_7\}$ и $\langle t_i\rangle = Z(X_i)$ для $1 \leq i \leq 7$. Обозначим $Z = \langle t_1, \ldots, t_7\rangle = Z(X_1 \ldots X_7)$. Согласно [9, Asch.,т. 2] для подгруппы $L \simeq E_7(3)$ $k = 7$ $\rho(L) \simeq GL_3(2)$ и $|Z| = 2^3$. Так как $|E_7(3)|_2 = 2^{23}$, а $|\rho(L)|_2 = |GL_3(2)|_2 = 2^3$, то для ядра T рассматриваемого подстановочного представления имеем $|T|_2 = 2^{20}$. Так как $X_i \trianglelefteq T$ и $N_T(X_i)/C(X_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X_i)$, то по теореме Ремака [6, Карг., Мерз., с. 50] факторгруппа $T/\bigcap\limits_{i=7}^{7} C_T(X_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(X_1) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(X_7)$, где $\mathrm{Aut}(X_i) \simeq S_4$. Но $\bigcap\limits_{i=7}^{7} C_T(X_i) = C_T(\langle X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_7\rangle) = C(T)$. Согласно [9] $C(T) = Z(T) = Z \simeq V_8$. Заметим, что $|T|_2 = 2^{20}$ и $|X|_2 = 2^{17}$, где $X = X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_7$. Так как образ X в факторгруппе $T = T/Z \simeq \overline{X}_1 \times \ldots \times \overline{X}_2$, где $\overline{X}_i \simeq A_4$, то и подгруппа T является расширением X с помощью элементарной абелевой подгруппы порядка 2^3, индуцирующей на каждой подгрупе X_i нетривиальные автоморфизмы.

Так как подгруппа S нормализует X, то любой элемент из $S \backslash S_1$ имеет образ в группе подстановок $\rho(G) = N_G(\triangle)^\triangle$. Если образ некоторого элемента из $S \backslash S_1$ f не лежит в $L_2(7)$, то $\langle L_2(7), \hat{f}\rangle = D \simeq S_7$, где $\hat{f}$ — образ элемента f. Это невозможно, так как $D' \simeq A_7$ и $D' < G'$. Значит, образ некоторого элемента σ из $S \backslash S_1$ при этом подстановочном представлении попадает в ядро T и этот элемент σ, таким образом, лежит в $N_T(X)$. Пусть V — силовская 3-подгруппа из X. Тогда по аргументу Фраттини $N_G(X) = X \cdot N_G(V)$. Поэтому $\sigma = \sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1 \in X$, а $\sigma_2 \in N_G(V)$, причем $\sigma_2 \neq 1$, так как $\sigma \notin G'$.

Допустим, что σ_2 действует тривиально на V. Тогда в подгруппе $\langle\sigma_2\rangle \cdot X$ элемент σ нормализует каждую подгруппу X_i, так как σ из ядра подстановочного представления, а $\sigma_1 \in O_2(X)$, и, таким образом, тоже лежит в ядре. Значит, рассматривая подгруппу $Y_i = \langle\sigma_2\rangle X_i$ в факторгруппе $\overline{Y}_i = Y_i/Z(X_i)$ $\bar{\sigma}_2$ действует тривиально, так как $\bar{\sigma}_2$ централизует силовскую 3-подгруппу $\overline{V}_i$ из $\overline{Y}_i$ и некоторый 2-элемент ω из $\overline{Y}_i$. Тогда $\bar{\sigma}_2$ централизует $\overline{U}_i$. Но полный прообраз $\overline{U_i^-}$ изоморфен Z_6. Значит, σ_2 нормализует подгруппу $\overline{U_i^-}$. Но $[\langle\sigma_2\rangle, \overline{U_i^-}] \leq Z(X_i)$. Следовательно $[\langle\sigma_2\rangle, \overline{U_i^-}] = 1$. Таким образом $\langle\sigma_2 U_i\rangle] = 1$. Поэтому $[\langle\sigma_2\rangle, X] = 1$ и $C_G(X) = \langle\sigma_2\rangle Z$ — допустимая относительно $L_2(7)$ подгруппа. Так как $\sigma^2 \in G'$, и $C(X) = Z$, то $\sigma^2 \in Z$. Поэтому $\sigma^2 = 1$, иначе в подгруппе $\langle\sigma_2\rangle Z$ подгруппа, порожденная квадратами изоморфна Z_2 и допустима относительно $L_2(7)$. Противоречие с транзитивностью $L_2(7)$ на $Z^\sharp$. Следовательно, σ_2 инволюция из $S\backslash S_1$. Сейчас по структуре $C_L(t_4)$ и $C_L(t_5)$ [11, Харрис, лемма 4.24]. Подгруппа $C_4 = C_L(t_4)$ содержит единственную компоненту Y изоморфную некоторой факторгруппе $SL_8(3)$, причем $C_{C_4}(J)$ — циклическая подгруппа, а подгруппа $C_5 = C_L(t_5)$ содержит единственную компоненту J_1, изоморфную некоторой факторгруппе из накрывающей $\mathrm{Cov}(E_6(3))$, причем $C_{C_5}(J_1)$ — циклическая группа. В обоих случаях получаем противоречия с [9, Asch.,т. 2], так как соответствующие числа $k = |\triangle|$ в обоих случаях меньше 7.

Пусть теперь каждый элемент из $N_G(T)$ действует нетривиально на T. Тогда $O_2(X) \leq S_1$ и [3] $S_1 \cap P \cap P^x = 1$ для некоторого элемента x из G. Поэтому $O_2(X) \cap (O_2(X))^x = 1$. Так как $O_2(X) = O_2(N_G(T))$, то для доказательства достаточно показать, что $l_2(N_G(T)/O_2(N_G(T))) \geq 3$. Поскольку $N_G(T)/T \simeq L_2(7)$, то $l_2(N_G(T)/T) > 0$. Покажем, что $l_2(T/O_2(T)) \geq 4$. Действительно, факторгруппа $\widetilde{T} = T/O_2(T)$ является расширением элементарной абелевой подгруппы $\widetilde{V} = \tilde{x}$ порядка 3^7 с помощью элементарной абелевой подгруппе порядка 2^4, причем $\widetilde{T} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\widetilde{X}_1) \times \mathrm{Aut}(\widetilde{X}_2) \times \ldots \times \mathrm{Aut}(\widetilde{X}_7)$, где $\mathrm{Aut}(\widetilde{X}_i) \simeq S_3$ и $\widetilde{T}$ — допустимая относительно транзитивной подгруппы $L_2(7)$ подгруппа. Так как $l_2(S_3) = 1$, то и $l_2(S_3 \times \ldots \times S_3) = 1$. Пусть $S_2 = S \cap T$. Тогда $|\widetilde{S}_2| = 2^4$, а число силовских 2-подгрупп из $\widetilde{T}$, которые пересекаются с $\widetilde{S}_2$ тривиально, 2^7. Значит, $l_2(\widetilde{T}) \geq 4$. По лемме 6 $l_2(N_G(T)/O_2(T)) \geq 4$. Следовательно, по лемме 2 $l_2(G) \geq 4$. Случай $K \simeq E_7(3)$ рассмотрен.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] Зенков В. И., *Пересечения нильпотентных подгрупп в конечных группах*, Фунд. и прикл. математика, **2**: 1 (1996), 1–92.

[2] Ito N., *Über den kleisten p-Durchschittauflösbarer Gruppen*, Arch. Math. **9**: 1–2 (1958), 27–32.

[3] Зенков В. И., Мазуров В. Д., *О пересечении силовских подгрупп в конечных группах*, Алгебра и логика, **35**: 4 (1996), 424–432.

[4] *Atlas of finite groups* / J.H. Conway [et al.] Oxford: Clarendon Press, 1985. 252 p.

[5] Кабанов В. В., Кондратьев А. С., *Силовские 2-подгруппы конечных простых групп*, Свердловск: УрО АН СССР, 1979, 144 с.

[6] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И., *Основы теории групп. Москва: Издательство Наука*, 1972, 240 с.

[7] Зенков В.И., Макосий А.И., *О пересечениях силовских 2-подгрупп в конечных группах, I*, Владикавказский матем. журн., **10**: 1 (2009), 16–21.

[8] Liebeck M. W., Saxl J., *The primitive permutation droups of odd legree*, J. London Math. Soc., **31**: 2 (1985), 250–264.

[9] Aschbacher M., *A characterization of chevalley groups over fields of odd order*, Ann.of Math., **106** (1977), 355–468.

[10] Aschbacher M., *On finite groups of Lie type and add characteristic*, J.Algebra, **66** (1980), 400–424.

[11] Harris N. E., *Finite groups containing an intrinsic 2-component of Chevalley type over a field of odd order*, Trans. Amer. Math. Soc., **272**: 1 (1982), 1–65.

[12] Gorenstein D., Harada K., *Finite simple groups of low 2-rank*, Bull. Amer. Math. Soc., **77**: 6 (1971), 829–862.

Виктор Иванович Зенков
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: zenkov@imm.uran.ru