S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 445–457 (2010) УДК 510.64
MSC 03B44, 03B45

ВРЕМЕННАЯ ЛОГИКА ИНДУКТИВНЫХ ФРЕЙМОВ С ЛИНЕЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ

В. Ф. ЮН

Abstract. The polymodal decidable calculus in temporal language with four modalities is found which is complete with respect to the class of Ind-frames with linear time. It is proved that it is finite approximated by the class of finite Ind-frames with linear time.

Keywords: temporal logic, Kripke frames, axiomatization, finite model property.

Введение

В статье исследуется полимодальная логика, связанная с линейными временными моделями с моментами времени, которые являются кластерами состояний. Более точно, в [4] рассматриваются фреймы $\langle \bigcup_{i\in N} C(i),\ R\rangle$ с линейно упорядоченными R-кластерами состояний $C(i)$, и изучается логика класса таких фреймов в языке с временными модальными операторами и слабыми модальностями. Введем дополнительное отношение R_1 между элементами соседних кластеров и рассмотрим класс фреймов вида $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$.

При задании логики посредством моделей важнейшими задачами являются выбор модального языка и проблема аксиоматизации данной логики. Поскольку слабые модальности не являются нормальными, то задача аксиоматизации существенно усложняется. Но ранее доказано (см. [1]), что если добавить к

Yun, V.F., The temporal logic of inductive frames with linear time.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00090-а), гранта Президента РФ по поддержке научных исследований молодых докторов наук МД-2587.2010.1, и при поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ-3606.2010.1).

Поступила 2 октября 2010 г., опубликована 1 декабря 2010 г.

языку временные модальности, связанные с отношением R_1, то слабые модальности выражаются через другие. Поэтому при аксиоматизации естественно выбрать временной язык с четырьмя временными модальностями. В [1] найдена аксиоматизация в этом языке класса линейных по времени $(S \subseteq R)Ind$-фреймов. В данной работе рассматривается другой класс фреймов, связанных с линейными временными моделями с моментами времени, которые являются кластерами состояний — Ind-фреймов с линейным временем.

Построено исчисление $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ в языке с четырьмя модальностями $\Box$, $\Box^*$, $\Box_1$ и $\Box_1^*$, полное относительно класса Ind-фреймов с линейным временем. Доказано, что оно финитно аппроксимируемо конечными Ind-фреймами с линейным временем и, следовательно, является разрешимым.

1. Исчисление $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ и теорема о корректности

Рассмотрим язык с модальными операторами будущего $\Box$, $\Box_1$, модальными операторами прошлого $\Box^*$, $\Box_1^*$, и константой $\top$.

Будем рассматривать фреймы $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$ и модели вида $\langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, где X — непустое множество, R, R_1 — бинарные отношения на множестве X, $\models$ — бинарное отношение истинности между элементами множества X и множеством формул, определяемое стандартным способом [3]. Полагаем для любого $x \in X$:

$$x \models \top,$$

$$x \models \Box A \iff \forall y(xRy \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box_1 A \iff \forall y(xR_1y \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box^* A \iff \forall y(yRx \Longrightarrow y \models A),$$

$$x \models \Box_1^* A \iff \forall y(yR_1x \Longrightarrow y \models A).$$

Формула A *истинна в модели* $M = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, если $x \models A$ для любого $x \in X$. Говорим, что формула A *общезначима в фрейме*, если она истинна в любой модели, основанной на этом фрейме.

Будем называть фрейм $\langle X,\ R,\ R_1\rangle$ *Ind-фреймом с линейным временем*, если выполняется:

(1) для любых x, $y \in X$ верно: xRy или yRx;

(2) для каждого $x \in X$ существует $y \in X$ такой, что xR_1y;

(3) $\exists t_0(\forall x(t_0Rx)$ и $\forall y(yRt_0 \Longrightarrow \neg\exists z(zR_1y)))$;

(4) если xR_1y, zR_1y, и zR_1u, то xR_1u;

(5) $xRy \iff (x = y$ или существуют $x_1, \ldots, x_n \in X$ такие, что $x = x_1R_1 \ldots R_1x_nR_1y$ или существуют $x_1, \ldots, x_m \in X$ такие, что $xR_1x_1R_1 \ldots R_1x_m{R_1}^{-1}y)$.

Замечание 1.1.

(6) Если xR_1y, то xRy;

(7) R — рефлексивное отношение;

(8) R — транзитивное отношение;

(9) если xR_1z и yR_1z, то xRy и yRx.

Доказательство. Рефлексивность R и свойства (6), (9) сразу следуют из определения отношения R.

Докажем транзитивность отношения R. То, что существуют $x_1, \dots, x_k \in X$ такие, что $xR_1x_1R_1 \dots R_1x_k$ обозначим более коротко через $x{R_1}^k x_k$ ($R_1^0 = Id$). Пусть xRy и yRz. В случае, если $x = y$ или $y = z$, соотношение xRz следует очевидным образом. Пусть $x \neq y$ и $y \neq z$. Тогда имеем, что $x{R_1}^n x_n(R_1 \cup (R_1 \circ {R_1}^{-1}))y$ и $y{R_1}^m y_m(R_1 \cup (R_1 \circ {R_1}^{-1}))z$ для некоторых $n,\ m \geq 0$.

Если $x{R_1}^n x_n R_1 y$, то получаем, что $x{R_1}^n x_n R_1 y {R_1}^m y_m (R_1 \cup (R_1 \circ {R_1}^{-1}))z$, то есть xRz.

Пусть $x{R_1}^n x_n R_1 x_{n+1} {R_1}^{-1} y$, тогда $x{R_1}^n x_n R_1 x_{n+1} {R_1}^{-1} y R_1 y_1 \dots z$. Так как $x_n R_1 x_{n+1} {R_1}^{-1} y R_1 y_1$, то по свойству (4) Ind-фрейма с линейным временем имеем, что $x_n R_1 y_1$. Следовательно, $x{R_1}^k x_k (R_1 \cup (R_1 \circ {R_1}^{-1}))z$ для некоторого $k \geq 0$, то есть xRz и транзитивность отношения R доказана. $\square$

Предложение 1.2. *Следующие формулы общезначимы в Ind-фреймах с линейным временем:*

(1) $\Box(\Box A_1 \longrightarrow A_2) \vee \Box(\Box A_2 \longrightarrow A_1)$,
$\Box^*(\Box^* A_1 \longrightarrow A_2) \vee \Box^*(\Box^* A_2 \longrightarrow A_1)$;

(2) $\Diamond_1 \top$;

(3) $\Diamond^* \Box^* \Box_1^* \bot$;

(4) $\Diamond_1^* \Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1^* \Diamond_1 A$, $\Diamond_1 \Diamond_1^* A \longrightarrow \Box_1 \Diamond_1^* A$;

(5) $A \& \Box(A \longrightarrow \Box_1(A \& \Box_1^* A)) \longrightarrow \Box A$;

(6) $\Box A \longrightarrow \Box_1 A$, $\Box^* A \longrightarrow \Box_1^* A$;

(7) $\Box A \longrightarrow A$, $\Box^* A \longrightarrow A$;

(8) $\Box A \longrightarrow \Box\Box A$, $\Box^* A \longrightarrow \Box^*\Box^* A$;

(9) $\Diamond_1^* A \longrightarrow \Box_1^*(\Diamond A \& \Diamond^* A)$.

Здесь и далее $\Diamond_F$ — сокращение для $\neg\Box_F\neg$, и $\Diamond_F^*$ — сокращение для $\neg\Box_F^*\neg$ (где $F \in \{R,\ R_1\}$), и $\bot$ — сокращение для $\neg\top$.

Доказательство. Общезначимость формул (1), (2) и (6)–(9) следует из соответствующих свойств Ind-фреймов с линейным временем и доказаны в [1]. Докажем общезначимость формул (3)–(5).

Пусть $x \in X$, тогда по свойству (3) имеем, что существует $t_0 \in X$ такой, что выполняется: $t_0 R x$ и для любого $y \in X$, если yRt_0, то не существует z такого, что zR_1y. Следовательно, $t_0 \models \Box^*\Box_1^*\bot$. В противном случае имели бы, что выполняется $t_0 \models \Diamond^*\Diamond_1^*\top$, откуда следует, что $\exists y(yRt_0$ и $\exists z(zR_1y))$. Таким образом $x \models \Diamond^*\Box^*\Box_1^*\bot$, и общезначимость формулы (3) доказана.

Докажем общезначимость формул пункта (4). Пусть $x \models \Diamond_1^*\Diamond_1 A$, тогда найдутся $y,\ z \in X$ такие, что yR_1x, yR_1z и $z \models A$. Докажем, что $x \models \Box_1^*\Diamond_1 A$. Пусть uR_1x, тогда по свойству (4) uR_1z, следовательно, $u \models \Diamond_1 A$. Таким образом $x \models \Box_1^*\Diamond_1 A$, и общезначимость формулы $\Diamond_1^*\Diamond_1 A \longrightarrow \Box_1^*\Diamond_1 A$ доказана.

Общезначимость формулы $\Diamond_1\Diamond_1^* A \longrightarrow \Box_1\Diamond_1^* A$ доказывается аналогично.

Докажем общезначимость формулы (5). Предположим, что $x \models A$ и верно $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1(A\&\Box_1^* A))$. Так как отношение R является рефлексивным, то $x \models A \longrightarrow \Box_1(A\&\Box_1^* A)$. Поскольку $x \models A$, то имеем, что $x \models \Box_1(A\&\Box_1^* A)$.

Докажем, что $x \models \Box A$. Пусть xRy, тогда по свойству (5) верно:

$x = y$ или существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $x = x_1R_1 \dots R_1x_nR_1y$ или существуют $x_1, \dots, x_m \in X$ такие, что $xR_1x_1R_1 \dots R_1x_mR_1{}^{-1}y$. Рассмотрим отдельно каждый случай.

Если $x = y$, то $y \models A$, так как $x \models A$.

Пусть существуют $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что $x = x_1R_1 \dots R_1x_nR_1y$. Заметим, что по свойству (6) и транзитивности R выполняется xRx_i для каждого $i \in \{2, \dots, n\}$. Так как $x \models \Box_1(A\&\Box_1^* A)$ и xR_1x_2, то $x_2 \models A$. Поскольку xRx_2, $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1(A\&\Box_1^* A))$ и $x_2 \models A$, то $x_2 \models \Box_1(A\&\Box_1^* A)$. Следовательно, $x_3 \models A$ и т.д. Таким образом получаем, что $x_n \models A$. Так как xRx_n и $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1(A\&\Box_1^* A))$, то $x_n \models \Box_1(A\&\Box_1^* A))$, следовательно, $y \models A$.

Пусть существуют $x_1, \dots, x_m \in X$ такие, что $xR_1x_1R_1 \dots x_{m-1}R_1x_mR_1{}^{-1}y$. По свойству (6) и транзитивности R выполняется xRx_i для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что $x_{m-1} \models A$. Следовательно, поскольку xRx_{m-1} и $x \models \Box(A \longrightarrow \Box_1(A\&\Box_1^* A))$, имеем, что $x_{m-1} \models \Box_1(A\&\Box_1^* A))$. Таким образом $x_m \models \Box_1^* A$, следовательно, $y \models A$, и общезначимость формулы (5) доказана.

$\Box$

Пусть $\mathbf{Ind(R, R_1)}$ — логическое исчисление, полученное добавлением к минимальной временной логике $K_t(R, R_1)$ [3] аксиом (1)–(9) предложения 1.2. Из предложения 1.2 сразу следует теорема о корректности введенного исчисления:

Теорема 1.3. *Для любой формулы A верно: если A выводима в* $\mathbf{Ind(R, R_1)}$, *то A общезначима в любом Ind-фрейме с линейным временем.*

Заметим кроме того, что из формул (4) выводятся формулы $\Diamond_1^*\Box_1 A \longrightarrow \Box_1^*\Box_1 A$, $\Diamond_1\Box_1^* A \longrightarrow \Box_1\Box_1^* A$; из аксиомы (9) выводятся формулы $\Diamond_1^*\Box A \longrightarrow \Box_1^* A$ и $\Diamond_1^*\Box^* A \longrightarrow \Box_1^* A$.

2. Каноническая модель для $\mathbf{Ind(R, R_1)}$ и порожденная подмодель

Одной из целей данной работы является доказательство полноты исчисления $\mathbf{Ind(R, R_1)}$ относительно класса Ind-фреймов с линейным временем. Для этого рассмотрим каноническую модель исчисления $\mathbf{Ind(R, R_1)}$.

Пусть X — множество полных $\mathbf{Ind(R, R_1)}$-непротиворечивых $\mathbf{Ind(R, R_1)}$-теорий [3].

Определим отношения R, R_1 на множестве X стандартным образом:

$$x_1Rx_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \Box A \in x_1\} \subseteq x_2,$$

$$x_1R_1x_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \Box_1 A \in x_1\} \subseteq x_2\ .$$

Определение [3]. Рассмотрим модель $M_{Ind(R,R_1)} = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, где полагаем $x \models p \Longleftrightarrow p \in x$ для любой переменной p и любого элемента $x \in X$. Назовем $M_{Ind(R,R_1)}$ *канонической моделью* исчисления $\mathbf{Ind(R, R_1)}$.

Стандартным образом доказывается:

Замечание 2.1.
1. $x_1 S x_2 \Longleftrightarrow \{A \mid \Box^*_S A \in x_2\} \subseteq x_1$;
2. $\Diamond_S A \in x \Longrightarrow \exists y \in X(xSy$ и $A \in y)$;
3. $\Diamond^*_S A \in x \Longrightarrow \exists y \in X(ySx$ и $A \in y)$, где $S \in \{R,\ R_1\}$.

Докажем некоторые дополнительные свойства канонической модели $M_{Ind(R,R_1)}$.

Теорема 2.2. *Каноническая модель $M_{Ind(R,R_1)}$ для $\mathbf{Ind(R,R_1)}$ удовлетворяет условиям:*
(M 1) если tRx, tRy, то xRy или yRx;
если xRt, yRt, то xRy или yRx;
(M 2) для каждого $x \in X$ существует $y \in X$ такой, что xR_1y;
(M 3) для каждого $x \in X$ существует $x_0 \in X$ такой, что
x_0Rx и для любого y : если yRx_0, то не существует z такого, что zR_1y;
(M 4) если xR_1y, то xRy;
(M 5) R является рефлексивным отношением;
(M 6) R является транзитивным отношением.

Доказательство. Свойства (M 1), (M 2) и (M 4)–(M 6) доказываются стандартным образом с помощью соответствующих аксиом исчисления $\mathbf{Ind(R,R_1)}$ [1].

Докажем свойство (M 3). Пусть $x \in X$, тогда по аксиоме (3) и свойствам полных $\mathbf{Ind(R,R_1)}$-непротиворечивых $\mathbf{Ind(R,R_1)}$-теорий имеем, что $\Diamond^*\Box^*\Box^*_1\bot \in x$. По замечанию 2.1 тогда существует t_0 такой, что t_0Rx и $\Box^*\Box^*_1\bot \in t_0$. Если yRt_0, то по пункту 1 замечания 2.1 получаем, что $\Box^*_1\bot \in y$. Если бы существовал $z \in X$ такой, что zR_1y, то $\bot \in z$, что противоречит непротиворечивости z. Таким образом, свойство (M 3) канонической модели для исчисления $\mathbf{Ind(R,R_1)}$ доказано.

$\Box$

Предположим, что формула A_0 невыводима в исчислении $\mathbf{Ind(R,R_1)}$. Тогда формула A_0 опровергается в некотором мире t канонической модели $M_{Ind(R,R_1)} = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models\rangle$, то есть существует элемент $t \in X$ такой, что $t \not\models A_0$. Заметим, что каноническая модель не является Ind-моделью с линейным временем, поэтому для доказательства полноты необходимо сделать дальнейшие построения.

Рассмотрим порожденную элементом t подмодель канонической модели $M^t = \langle X^t,\ R^t,\ R^t_1,\ \models^t\rangle$, где полагаем $X^t = \{x \in X \mid xRt$ или $tRx\}$, $R^t = R|_{X^t}$, $R^t_1 = R_1|_{X^t}$, и $x \models^t p \iff x \models p$ для любой переменной p и любого элемента $x \in X^t$.

Предложение 2.3. *Порожденная подмодель $M^t = \langle X^t,\ R^t,\ R^t_1,\ \models^t\rangle$ удовлетворяет условиям:*

(M^t 1) для любых $x,y \in X^t$ верно: xR^ty или yR^tx;

(M^t 2) для каждого $x \in X^t$ существует $y \in X^t$ такой, что xR^t_1y;

(M^t 3) существует $t_0 \in X^t$ такой, что для любого y : если $yR^t t_0$, то не существует z такого, что $zR_1^t y$;

(M^t 4) если $xR_1^t y$, то $xR^t y$;

(M^t 5) R^t является рефлексивным отношением;

(M^t 6) R^t является транзитивным отношением.

Доказательство. Свойства (M^t 4)–(M^t 6) сразу следуют из определения порожденной подмодели и соответствующих утверждений теоремы 2.2.

Докажем свойство (M^t 1). Пусть $x, y \in X^t$. Тогда по определению порожденной подмодели: xRt или tRx, yRt или tRy. В любом случае тогда по свойству (M 1) и транзитивности R получаем, что xRy или yRx. Так как $x, y \in X^t$, то $xR^t y$ или $yR^t x$.

Докажем свойство (M^t 2). Пусть $x \in X^t$, тогда $x \in X$, и по свойству (M 2) канонической модели существует $y \in X$ такой, что $xR_1 y$. Докажем, что $y \in X^t$. Так как $xR_1 y$, то xRy. Поскольку $x \in X^t$, то tRx или xRt. Таким образом, если xRt, то по свойству (M 1) имеем: tRy или yRt. Если tRx, то по транзитивности отношения R получаем, что tRy. Таким образом $y \in X^t$, следовательно, $xR_1^t y$.

Докажем свойство (M^t 3). По пункту (M 3) теоремы 2.2 существует $t_0 \in X$ такой, что $t_0 Rt$ и для любого y : если yRt_0, то не существует z такого, что $zR_1 y$. Очевидно, что $t_0 \in X^t$.

Пусть $y \in X^t$ такой, что $yR^t t_0$, тогда yRt_0. Если бы существовал $z \in X^t$ такой, что $zR_1^t y$, то выполнялось бы $zR_1 y$. Это противоречит свойству (M 3), следовательно, такого z не существует.

□

Теорема 2.4 (о порожденной подмодели). *Для любых $x \in X^t$ и формулы A верно:*

$$x \models^t A \iff x \models A.$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по длине формулы A. Базис индукции следует из определения порожденной подмодели.

Пусть $x \in X^t$ и $A = \neg B$, тогда $x \models A \iff x \not\models B$. По индукционной гипотезе это равносильно $x \not\models^t B$, т. е. $x \models^t A$.

Пусть $A = B_1 \& B_2$, тогда $x \models B_1 \& B_2$ равносильно тому, что $x \models B_1$ и $x \models B_2$. По индукционной гипотезе $x \models^t B_1$ и $x \models^t B_2$, что равносильно $x \models^t B_1 \& B_2$.

Случаи, когда $A = B_1 \vee B_2$, $B_1 \longrightarrow B_2$ доказываются аналогично. Рассмотрим оставшиеся случаи, когда формула A построена с помощью модальных операторов.

Необходимость. Предположим, что $x \models^t A$.

Пусть $A = \Diamond B$, тогда существует $y \in X^t$ такой, что $xR^t y$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models B$, следовательно, $x \models \Diamond B$.

Пусть $A = \Diamond_1 B$. Тогда существует $y \in X^t$ такой, что $xR_1^t y$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models B$, следовательно, $x \models \Diamond_1 B$.

Рассмотрим случай, когда $A = \Diamond^* B$. Тогда существует $y \in X^t$ такой, что $yR^t x$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models B$, следовательно, $x \models \Diamond^* B$.

Если $A = \Diamond_1^* B$, то существует $y \in X^t$ такой, что $yR_1^t x$ и $y \models^t B$. По индукционной гипотезе $y \models B$, следовательно, $x \models \Diamond_1^* B$.

Достаточность. Предположим теперь, что $x \models A$.

Если $A = \Diamond B$ и $x \models A$, то существует $y \in X$ такой, что xRy и $y \models B$. По индукционной гипотезе тогда $y \models^t B$. Докажем, что $y \in X^t$. Так как $x \in X^t$, то xRt или tRx. Если xRt, то вместе с xRy по свойству (M 1) канонической модели имеем: tRy или yRt. Следовательно, $y \in X^t$. Если tRx, то вместе с xRy по свойству транзитивности R в канонической модели имеем tRy, то есть $y \in X^t$. Таким образом, существует $y \in X^t$ такой, что $xR^t y$ и $y \models^t B$. Следовательно, $x \models^t \Diamond B$.

Пусть $A = \Diamond_1 B$. Так как $x \models A$, то существует $y \in X$ такой, что $xR_1 y$ и $y \models B$. По индукционной гипотезе $y \models^t B$, докажем, что $y \in X^t$. Так как $xR_1 y$, то xRy по свойству (M 4) канонической модели. Далее, как в предыдущем случае, доказывается утверждение, что $y \in X^t$. Таким образом, поскольку существует $y \in X^t$ такой, что $xR_1^t y$ и $y \models^t B$, то $x \models^t \Diamond_1 B$.

Рассмотрим случай, когда $A = \Diamond^* B$. Так как $x \models A$, то существует $y \in X$ такой, что yRx и $y \models B$. По индукционной гипотезе имеем, что $y \models^t B$. Осталось доказать, что $y \in X^t$. Так как $x \in X^t$, то xRt или tRx. Если xRt, то по транзитивности отношения R имеем yRt, следовательно, $y \in X^t$. Если tRx, то так как yRx, то по свойству (M 1) канонической модели имеем: tRy или yRt. Следовательно, $y \in X^t$.

Если $A = \Diamond_1^* B$, то существует $y \in X$ такой, что $yR_1 x$ и $y \models B$. По индукционной гипотезе $y \models^t B$, осталось доказать, что $y \in X^t$. Так как $yR_1 x$, то yRx. Аналогично доказательству в предыдущем случае можно доказать, что tRy или yRt. Таким образом $y \in X^t$. $\square$

Из теоремы 2.4 следует, что невыводимая в исчислении $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формула A_0 опровергается в порожденной подмодели M^t. Но модель M^t все еще не является Ind-моделью с линейным временем, поэтому продолжим построения.

3. Фильтрация и финитная аппроксимируемость

Цель этого раздела доказать, что исчисление $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ финитно аппроксимируемо конечными Ind-моделями с линейным временем:

Теорема 3.1. *Для любой формулы A верно: формула A выводима в* $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ *тогда и только тогда, когда A истинна в любой конечной Ind-модели с линейным временем.*

Из теоремы 3.1 сразу будет следовать полнота исчисления $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ относительно Ind-моделей с линейным временем. Кроме того заметим, что поскольку исчисление $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ конечно аксиоматизируемо, то из теоремы 3.1 будет также следовать разрешимость $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$.

Доказательство теоремы 3.1 Необходимость следует из теоремы 1.3 о корректности. Докажем обратное утверждение методом фильтраций.

Определение. Пусть $M = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models \rangle$ — модель, Ψ — конечное множество формул, замкнутое относительно подформул. Определим на X отношение эквивалентности $\equiv_\Psi$: $x \equiv_\Psi y \Longleftrightarrow \forall B \in \Psi (x \models B \Longleftrightarrow y \models B)$. Обозначим через $[x]$ класс эквивалентности, содержащий x, то есть $[x] = \{y \mid y \in X,\ x \equiv_\Psi y\}$.

Пусть $X' = \{[x] \mid x \in X\}$, и $[x] \models' p \Longleftrightarrow x \models p$ для любой пропозициональной переменной p.

Пусть R' и R'_1 —- бинарные отношения на X'. Тогда модель $M' = \langle X',\ R',\ R'_1,\ \models' \rangle$ называется *фильтрацией* M *через* Ψ, если выполнено следующее:

(FRi) $xRy \Longrightarrow [x]R'[y]$;

$(FRii)$ $[x]R'[y] \Longrightarrow \forall B((\Box B \in \Psi$ и $x \models \Box B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box^* B \in \Psi$ и $y \models \Box^* B \Longrightarrow x \models B))$;

(FR_1i) $xR_1y \Longrightarrow [x]R'_1[y]$;

(FR_1ii) $[x]R'_1[y] \Longrightarrow \forall B((\Box_1 B \in \Psi$ и $x \models \Box_1 B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box_1^* B \in \Psi$ и $y \models \Box_1^* B \Longrightarrow x \models B))$.

Известны следующие факты:

Лемма 3.2 (о фильтрации).[2] *Пусть M' является фильтрацией M через Ψ. Тогда для любой формулы $B \in \Psi$ и любого $x \in X$ верно:*

$$[x] \models' B \Longleftrightarrow x \models B.$$

Предложение 3.3.[1] *Пусть M' является фильтрацией M через конечное множество Ψ. Тогда для любого множества $Y \subseteq X'$ существует формула F такая, что для любого $x \in X$ верно:*

$$x \models F \iff [x] \in Y.$$

Продолжим доказательство теоремы 3.1.

Пусть формула A_0 невыводима в исчислении $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$. Тогда она опровергается в некотором мире t канонической модели для $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$, следовательно, в порожденной элементом t подмодели $M^t = \langle X,\ R,\ R_1,\ \models \rangle$. Через $Sub(A_0)$ обозначим множество подформул формулы A_0.

Пусть Ψ — конечное множество формул, содержащее множество $Sub(A_0) \cup \{\Box^* \Box_1^* \bot\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(1_Ψ) если $\Box_1 B \in \Psi$, то $\Diamond_1^* \Box_1 B \in \Psi$,

(2_Ψ) если $\Box_1^* B \in \Psi$, то $\Diamond_1 \Box_1^* B \in \Psi$,

(3_Ψ) если $\Box B \in \Psi$, то $\Box_1^* \Box B \in \Psi$,

(4_Ψ) если $\Box^* B \in \Psi$, то $\Box_1^* \Box^* B \in \Psi$,

и замкнутое относительно подформул.

Нетрудно заметить, что условия на множество Ψ не противоречат его конечности. Построим фильтрацию модели M^t через множество Ψ.

Определим на множестве X' отношения R'_1, R' и вспомогательные отношения R''_1, R'' следующим образом:

$$[x]R''_1[y] \iff (\exists x' \equiv_\Psi x)(\exists y' \equiv_\Psi y)(x' R_1 y'),$$

$$[x]R''[y] \iff \forall \Box B, \Box^* B \in \Psi((x \models \Box B \Longrightarrow y \models \Box B) \text{ и} (y \models \Box^* B \Longrightarrow x \models \Box^* B)).$$

$R'_1 = (R''_1 \circ R''^{-1}_1)^* \circ R''_1$, где через S^* обозначим рефлексивное транзитивное замыкание отношения S,

$[x]R'[y] \iff ([x] = [y]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]R'_1 \dots R'_1[x_n]R'_1[y]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x]R'_1[x_1]R'_1 \dots R'_1[x_m]{R'_1}^{-1}[y])$.

Докажем, что определенные выше отношения R'_1 и R' удовлетворяют свойствам фильтрации (FR_1i), (FR_1ii) и (FRi), $(FRii)$ соответственно.

Заметим, что выполняется $R'_1 = R''_1 \circ ({R''_1}^{-1} \circ R''_1)^*$. Кроме того, заметим, что верно следующее:

Замечание 3.4. *Если $[x]R''_1[y]$, то $[x]R'_1[y]$ и, следовательно, верно (FR_1i).*

Утверждение 3.5. *(1) Пусть $[a]R''_1[b]$, $[c]R''_1[b]$, тогда:*

(1а) если $a \models \Box B$ и $\Box B \in \Psi$, то $c \models \Box B$;

(1б) если $a \models \Box^* B$ и $\Box^* B \in \Psi$, то $c \models \Box^* B$;

(1в) если $a \models \Box_1 B$ и $\Box_1 B \in \Psi$, то $c \models \Box_1 B$.

(2) Пусть $[b]R''_1[a]$, $[b]R''_1[c]$, тогда:

если $a \models \Box_1^* B$ и $\Box_1^* B \in \Psi$, то $c \models \Box_1^* B$.

Доказательство. (1) Пусть $[a]R''_1[b]$ и $[c]R''_1[b]$. Предположим, что $a \models \Box B$ и $\Box B \in \Psi$, докажем $c \models \Box B$. Так $[a]R''_1[b]$, то $(\exists a' \equiv_\Psi a)(\exists b' \equiv_\Psi b)(a'R_1b')$. Поскольку $a \models \Box B$ и $\Box B \in \Psi$, то $a' \models \Box B$, следовательно, по аксиоме (8) имеем: $a' \models \Box\Box B$. Таким образом $b' \models \Diamond_1^*\Box\Box B$. Следовательно, по выводимой в $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формуле $\Diamond_1^*\Box A \longrightarrow \Box_1^* A$ получаем, что $b' \models \Box_1^*\Box B$. Так как $[c]R''_1[b]$, то $(\exists c' \equiv_\Psi c)(\exists b'' \equiv_\Psi b)(c'R_1b'')$. Кроме того, по условию (3_Ψ) на множество Ψ имеем $\Box_1^*\Box B \in \Psi$. Следовательно, $b'' \models \Box_1^*\Box B$. Таким образом $c' \models \Box B$. Так как $c' \equiv_\Psi c$ и $\Box B \in \Psi$, то $c \models \Box B$ и утверждение (1а) доказано.

Докажем утверждение пункта (1б). Пусть $a \models \Box^* B$ и $\Box^* B \in \Psi$, докажем $c \models \Box^* B$. Поскольку $[a]R''_1[b]$, то $(\exists a' \equiv_\Psi a)(\exists b' \equiv_\Psi b)(a'R_1b')$. Так как $a \models \Box^* B$ и $\Box^* B \in \Psi$, то $a' \models \Box^* B$. Следовательно, из аксиомы (8) имеем: $a' \models \Box^*\Box^* B$. Таким образом $b' \models \Diamond_1^*\Box^*\Box^* B$. Следовательно, по выводимой из аксиомы (9) в $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формуле $\Diamond_1^*\Box^* A \longrightarrow \Box_1^* A$ получаем, что $b' \models \Box_1^*\Box^* B$. Так как $[c]R''_1[b]$, то $(\exists c' \equiv_\Psi c)(\exists b'' \equiv_\Psi b)(c'R_1b'')$. Кроме того, по условию (4_Ψ) имеем, что $\Box_1^*\Box^* B \in \Psi$. Следовательно, $b'' \models \Box_1^*\Box^* B$. Таким образом $c' \models \Box^* B$. Так как $c' \equiv_\Psi c$ и $\Box^* B \in \Psi$, то $c \models \Box^* B$ и утверждение (1б) доказано.

Докажем утверждение (1в). Пусть $[a]R''_1[b]$ и $[c]R''_1[b]$. Предположим, что $a \models \Box_1 B$ и $\Box_1 B \in \Psi$, докажем $c \models \Box_1 B$. Как и в доказательстве предыдущих пунктов имеем, что $(\exists a' \equiv_\Psi a)(\exists b' \equiv_\Psi b)(a'R_1b')$ и $a' \models \Box_1 B$. Следовательно, $b' \models \Diamond_1^*\Box_1 B$. Так как $[c]R''_1[b]$, то $(\exists c' \equiv_\Psi c)(\exists b'' \equiv_\Psi b)(c'R_1b'')$. Кроме того, по условию (1_Ψ) на множество Ψ имеем $\Diamond_1^*\Box_1 B \in \Psi$, поскольку $\Box_1 B \in \Psi$. Следовательно, $b'' \models \Diamond_1^*\Box_1 B$. Тогда по выводимой из аксиомы (4) в $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формуле $\Diamond_1^*\Box_1 B \longrightarrow \Box_1^*\Box_1 B$ получаем, что $b'' \models \Box_1^*\Box_1 B$. Следовательно, $c' \models \Box_1 B$. Так как $c' \equiv_\Psi c$ и $\Box_1 B \in \Psi$, то $c \models \Box_1 B$.

(2) Пусть $[b]R''_1[a]$, $[b]R''_1[c]$. Предположим, что $a \models \Box_1^* B$ и $\Box_1^* B \in \Psi$. Докажем, что $c \models \Box_1^* B$. Так как $[b]R''_1[a]$, то $(\exists a' \equiv_\Psi a)(\exists b' \equiv_\Psi b)(b'R_1a')$. Так как $a \models \Box_1^* B$ и $\Box_1^* B \in \Psi$, то $a' \models \Box_1^* B$. Следовательно, $b' \models \Diamond_1\Box_1^* B$. Так как $[b]R''_1[c]$, то $(\exists c' \equiv_\Psi c)(\exists b'' \equiv_\Psi b)(b''R_1c')$. Кроме того, по условию (2_Ψ) на множество Ψ

имеем $\Diamond_1\Box_1^*B \in \Psi$, поскольку $\Box_1^*B \in \Psi$. Следовательно, $b'' \models \Diamond_1\Box_1^*B$. Таким образом по выводимой из аксиомы (4) в $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формуле $\Diamond_1\Box_1^*B \longrightarrow \Box_1\Box_1^*B$ получаем, что $b'' \models \Box_1\Box_1^*B$. Следовательно, $c' \models \Box_1^*B$. Так как $c' \equiv_\Psi c$ и $\Box_1^*B \in \Psi$, то $c \models \Box_1^*B$. $\Box$

Предложение 3.6.

(1) Если $[x]R_1'[y]$, *то* $[x]R''[y]$;

(2) Если $[x]R_1'[z]$ *и* $[y]R_1'[z]$, *то* $[x]R''[y]$.

Доказательство. (1) Пусть $[x]R_1'[y]$. Докажем, что $[x]R''[y]$. Так как $[x]R_1'[y]$, то по определению отношения R_1' имеем, что $[x](R_1'' \circ R_1''^{-1})^n[u]R_1''[y]$ для некоторого $n \geq 0$. Заметим также, что поскольку $[u]R_1''[y]$, то существуют u', y' такие, что $u' \equiv_\Psi u$, $y' \equiv_\Psi y$ и $u'R_1y'$.

Предположим, что $x \models \Box A$ и $\Box A \in \Psi$, докажем, что $y \models \Box A$. Так как $[x](R_1'' \circ R_1''^{-1})^n[u]R_1''[y]$, то по пункту (1а) утверждения 3.5 тогда $u \models \Box A$. Так как $u \models \Box A$ и $\Box A \in \Psi$, то $u' \models \Box A$. Следовательно, по аксиоме (8) верно, что $u' \models \Box\Box A$. Таким образом $y' \models \Box A$, и следовательно, $y \models \Box A$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $y \models \Box^*A$ и $\Box^*A \in \Psi$. Тогда $y' \models \Box^*A$. Следовательно, по аксиоме (8) имеем, что $y' \models \Box^*\Box^*A$. Тогда по аксиоме (6) выполняется: $y' \models \Box_1^*\Box^*A$. Следовательно, $u' \models \Box^*A$. Так как $\Box^*A \in \Psi$, то $u \models \Box^*A$. Таким образом, по пункту (1б) утверждения 3.5 имеем, что $x \models \Box^*A$.

(2) Предположим, что $[x]R_1'[z]$ и $[y]R_1'[z]$. Тогда выполняется: $[x](R_1'' \circ R_1''^{-1})^n[u]R_1''[z]R_1''^{-1}[z_1](R_1'' \circ R_1''^{-1})^m[y]$ для некоторых n, $m \geq 0$. Следовательно, $[x](R_1'' \circ R_1''^{-1})^{n+m+1}[y]$. Таким образом, если $x \models \Box A$, $\Box A \in \Psi$, то $y \models \Box A$ по пункту (1а) утверждения 3.5. Если $y \models \Box^*A$ и $\Box^*A \in \Psi$, то $x \models \Box^*A$ по пункту (1б) утверждения 3.5.Таким образом получаем, что $[x]R''[y]$. $\Box$

Следствие. *Если* $[x]R'[y]$, *то* $[x]R''[y]$ *и, следовательно, верно* $(FRii)$.

Доказательство. По определению отношения R' имеем, что если $[x]R'[y]$, то $[x] = [y]$ или $[x]{R_1'}^n[y]$ для некоторого $n \geq 1$, или $[x]{R_1'}^m[x_m]R_1'[x_{m+1}]{R_1'}^{-1}[y]$ для некоторого $m \geq 0$. Кроме того известно, что отношение R'' является рефлексивным и транзитивным. Из предложения 3.6 тогда следует, что если $[x]R'[y]$, то $[x]R''[y]$. Поскольку для отношения R'' выполняется $(FRii)$ (см.[3]), то R' удовлетворяет свойству фильтрации $(FRii)$. $\Box$

Предложение 3.7. *Выполняется* (FR_1ii).

Доказательство. Пусть $[x]R_1'[y]$. Докажем, что $\forall B((\Box_1 B \in \Psi$ и $x \models \Box_1 B \Longrightarrow y \models B)$ и $(\Box_1^*B \in \Psi$ и $y \models \Box_1^*B \Longrightarrow x \models B))$.

Так как $[x]R_1'[y]$, то по определению отношения R_1' имеем, что $[x](R_1'' \circ R_1''^{-1})^n[u]R_1''[y]$ для некоторого $n \geq 0$.

Если $x \models \Box_1 B$ и $\Box_1 B \in \Psi$, то пункту (1в) утверждения 3.5. имеем: $u \models \Box_1 B$. Поскольку $[u]R_1''[y]$, то существуют u', y' такие, что $u' \equiv_\Psi u$, $y' \equiv_\Psi y$ и $u'R_1y'$. Тогда, так как $u \models \Box_1 B$ и $\Box_1 B \in \Psi$, то $u' \models \Box_1 B$. Таким образом $y' \models B$, следовательно, $y \models B$.

Пусть $y \models \Box_1^*B$ и $\Box_1^*B \in \Psi$, докажем $x \models B$. Так как $[x]R_1'[y]$, то $[x]R_1''[x_1](R_1''^{-1} \circ R_1'')^n[y]$ для некоторого $n \geq 0$. Следовательно, по пункту (2) утверждения 3.5 верно, что $x_1 \models \Box_1^* B$. Поскольку $[x]R_1''[x_1]$, то существуют x', x_1' такие, что $x' \equiv_\Psi x$, $x_1' \equiv_\Psi x_1$ и $x' R_1 x_1'$. Тогда $x_1' \models \Box_1^* B$, следовательно, $x' \models B$. Таким образом $x \models B$. $\Box$

Предложение 3.8. *Если* $[x]R_1'[y]$, $[z]R_1'[y]$ *и* $[z]R_1'[u]$, *то* $[x]R_1'[u]$.

Доказательство. Пусть $[x]R_1'[y]$, $[z]R_1'[y]$ и $[z]R_1'[u]$. Тогда $[x]R_1'[y]{R_1'}^{-1}[z]R_1'[u]$. Следовательно, по определению отношения R_1' имеем: $[x](R_1'' \circ {R_1''}^{-1})^n \circ R_1''[y]{R_1''}^{-1} \circ (R_1'' \circ {R_1''}^{-1})^m[z](R_1'' \circ {R_1''}^{-1})^k \circ R_1''[u]$ для некоторых n, m, $k \geq 0$. Таким образом $[x](R_1'' \circ {R_1''}^{-1})^l \circ R_1''[u]$, где $l = n + m + k + 1$, то есть $[x]R_1'[u]$. $\Box$

Предложение 3.9. *Отношение* R' *удовлетворяет свойству* (FRi).

Доказательство. Пусть xRy, докажем, что $[x]R'[y]$. Пусть $Y = \{[t] \mid [x]R'[t]\}$, докажем $[y] \in Y$.

По предложению 3.3 существует формула F такая, что для любого $t \in X$ верно: $t \models F \iff [t] \in Y$. Таким образом достаточно доказать, что $y \models F$.

Замечание. $x \models F$ *и* $x \models \Box(F \longrightarrow \Box_1(F \& \Box_1^* F))$.

Доказательство. Имеем $x \models F$, так как $[x] \in Y$.

Докажем, что $x \models \Box(F \longrightarrow \Box_1(F \& \Box_1^* F))$. Пусть t такой, что xRt и $t \models F$. Требуется доказать, что $t \models \Box_1(F \& \Box_1^* F)$. Для этого необходимо доказать, что если u, $v \in X$ такие, что tR_1u и vR_1u, то $u \models F$ и $v \models F$.

Поскольку tR_1u и vR_1u, то по свойству (FR_1i) (см. замечание 3.4) имеем, что $[t]R_1'[u]$ и $[v]R_1'[u]$. Так как $t \models F$, то $[t] \in Y$, следовательно, $[x]R'[t]$, то есть $[x] = [t]$ или существуют $[x_1], \dots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[t]$, или существуют $[x_1], \dots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_m]{R_1'}^{-1}[t]$. Рассмотрим отдельно все три случая.

Пусть $[x] = [t]$, тогда из $[t]R_1'[u]$ получаем, что $[x]R_1'[u]$. Следовательно, по определению отношения R' верно $[x]R'[u]$, то есть $[u] \in Y$. Таким образом $u \models F$. Кроме того, так как $[v]R_1'[u]$, то $[x]R_1'[u]{R_1'}^{-1}[v]$. Следовательно, $[x]R'[v]$, то есть $[v] \in Y$. Таким образом $v \models F$.

Пусть верно $[x] = [x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[t]$, тогда имеем, что $[x] = [x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[t]R_1'[u]$ и $[x] = [x_1]R_1' \dots R_1'[x_n]R_1'[t]R_1'[u]{R_1'}^{-1}[v]$. Следовательно, по определению отношения R' верно $[x]R'[u]$, $[x]R'[v]$. Таким образом $[u]$, $[v] \in Y$, следовательно, $u \models F$ и $v \models F$.

Предположим, что $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_m]{R_1'}^{-1}[t]$. Тогда $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_m]{R_1'}^{-1}[t]R_1'[u]$ и $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_m]{R_1'}^{-1}[t]R_1'[u]{R_1'}^{-1}[v]$. По предложению 3.8 из $[x_{m-1}]R_1'[x_m]{R_1'}^{-1}[t]R_1'[u]$ имеем, что $[x_{m-1}]R_1'[u]$. Следовательно, $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_{m-1}]R_1'[u]$ и $[x]R_1'[x_1]R_1' \dots R_1'[x_{m-1}]R_1'[u]{R_1'}^{-1}[v]$. Таким образом, верно $[x]R'[u]$ и $[x]R'[v]$, следовательно, $u \models F$ и $v \models F$.

$\Box$

По замечанию имеем, что $x \models F$ и $x \models \Box(F \longrightarrow (\Box_1(F \& \Box_1^* F))$. Следовательно, по аксиоме (5) верно: $x \models \Box F$. Так как xRy, то $y \models F$, и свойство (FRi) доказано.

$\Box$

Продолжим доказательство теоремы 3.1.

Из замечания 3.4, следствия предложения 3.6 и предложений 3.7, 3.9 можно заключить, что построенная выше модель $M' = \langle X', R', R'_1, \models' \rangle$ является фильтрацией модели $M^t = \langle X, R, R_1, \models \rangle$ через конечное множество Ψ. Следовательно, по лемме 3.2 получаем, что невыводимая в исчислении $\mathbf{Ind}(\mathbf{R}, \mathbf{R_1})$ формула A_0 опровергается в модели M'. Для доказательства теоремы 3.1 осталось доказать, что модель M' является Ind-моделью с линейным временем:

Теорема 3.10. *Модель $M' = \langle X', R', R'_1, \models' \rangle$ удовлетворяет условиям:*
(1) для любых $[x]$, $[y] \in X'$ верно: $[x]R'[y]$ или $[y]R'[x]$;
(2) для каждого $[x] \in X'$ существует $[y] \in X'$ такой, что $[x]R'_1[y]$;
(3) $\exists[t_0](\forall[x]([t_0]R'[x])$ и $\forall[y]([y]R'[t_0] \Longrightarrow \neg\exists[z]([z]R'_1[y])))$;
(5) если $[x]R'_1[y]$, $[z]R'_1[y]$ и $[z]R'_1[u]$, то $[x]R'_1[u]$;
(6) $[x]R'[y] \iff ([x] = [y]$ или существуют $[x_1], \ldots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]R'_1 \ldots R'_1[x_n]R'_1[y]$ или существуют $[x_1], \ldots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x]R'_1[x_1]R'_1 \ldots R'_1[x_m]{R'_1}^{-1}[y])$.

Доказательство. Условия (1) и (2) следуют из свойства ($\mathrm{M}^t\,1$) и свойства ($\mathrm{M}^t\,2$) порожденной подмодели соответственно, и свойств фильтрации (FRi), $(FR_1 i)$. Свойство (6) следует сразу из определения отношения R'. Пункт (5) следует из предложения 3.8.

Докажем, что модель M' удовлетворяет свойству (3). По свойству ($\mathrm{M}^t\,3$) порожденной подмодели $M^t = \langle X, R, R_1, \models \rangle$ существует $t_0 \in X$ такой, что для любого $y \in X$: если yRt_0, то не существует $z \in X$ такого, что zR_1y. Следовательно, $t_0 \models \Box^*\Box_1^*\bot$ (иначе $t_0 \models \Diamond^*\Diamond_1^*\top$, то есть существует y такой, что yRt_0 и существует zR_1y). Рассмотрим $[t_0]$ и пусть $[y] \in X'$ такой, что $[y]R'[t_0]$. Тогда, поскольку $\Box^*\Box_1^*\bot \in \Psi$, то по свойству фильтрации $(FRii)$ имеем: $y \models \Box_1^*\bot$. Если найдется $[z] \in X'$ такой, что $[z]R'_1[y]$, то из свойства $(FR_1 ii)$ следовало бы $z \models \bot$, что невозможно. Таким образом доказали, что для любого $[y] \in X'$ верно: если $[y]R'[t_0]$, то не существует $[z] \in X'$ такого, что $[z]R'_1[y]$. В частности, не существует $[z]$ такого, что $[z]R'_1[t_0]$.

Докажем теперь, что для любого $[x] \in X'$ верно, что $[t_0]R'[x]$. Пусть существует $[x] \in X'$ такой, что не выполняется $[t_0]R'[x]$. Тогда по свойству (1) верно $[x]R'[t_0]$. Следовательно, по определению отношения R' имеем: $[x] = [t_0]$ или существуют $[x_1], \ldots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]R'_1 \ldots R'_1[x_n]R'_1[t_0]$, или существуют $[x_1], \ldots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x]R'_1[x_1]R'_1 \ldots R'_1[x_m]{R'_1}^{-1}[t_0]$. Заметим, что $[x] \neq [t_0]$, так как отношение R' рефлексивно и по предположению не выполняется $[t_0]R'[x]$. Кроме того неверно, что существуют $[x_1], \ldots, [x_n] \in X'$ такие, что $[x] = [x_1]R'_1 \ldots R'_1[x_n]R'_1[t_0]$, поскольку иначе существует $[x_n]$ такой, что $[x_n]R'_1[t_0]$. Таким образом существуют $[x_1], \ldots, [x_m] \in X'$ такие, что $[x]R'_1[x_1]R'_1 \ldots [x_{m-1}]R'_1[x_m]{R'_1}^{-1}[t_0]$. Так как $[x_{m-1}]R'_1[x_m]$ и $[t_0]R'_1[x_m]$, то из определения отношения R' получаем, что $[x_{m-1}]R'[t_0]$ и $[t_0]R'[x_{m-1}]$. Следовательно, если $[x_{m-1}] = [x]$, то получаем $[t_0]R'[x]$, что противоречит предположению, сделанному выше. Пусть $[x_{m-1}] \neq [x]$, тогда найдется $[x_{m-2}]$ такой, что $[x_{m-2}]R'_1[x_{m-1}]$. Тогда, поскольку $[x_{m-1}]R'[t_0]$, то получаем противоречие с тем, что любого $[y] \in X'$ верно: если $[y]R'[t_0]$, то не существует $[z] \in X'$ такого, что $[z]R'_1[y]$. Таким образом, изначально сделанное предположение о том, что существует $[x] \in X'$ такой, что не выполняется $[t_0]R'[x]$, является неверным. $\Box$

Автор выражает искреннюю признательность и благодарность Л.Л. Максимовой за неоцененимую помощь в работе.

Список литературы

[1] В.Ф.Юн, *Временная логика линейных по времени фреймов с аксиомой индукции*, СЭМИ, **6** (2009), 312–325.
[2] A. Chagrov, M. Zakharyaschev, *Modal logics*, Oxford Logic Guides **35**, Oxford, Clarendon Press, 1977.
[3] D. Gabbay, I. Hodkinson, M.Reynolds, *Temporal logic*, Oxford University Press, 1994.
[4] V.Rybakov,*Discrete linear temporal logic with current time point clasters, deciding algorithms*, Logic and Logic Philosophy, **17**: 1–2, 2008.

Вета Федоровна Юн
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: veta_v@mail.ru