

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 458–460 (2010)

УДК 515.16

MSC 57M25

О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ ЗАЦЕПЛЕНИЙ, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫМ РЕШЕТКАМ

Л. Р. НАБЕЕВА

ABSTRACT. We give a new short proof of the main result of [1], which states that any rectangular $(m \times n)$ -lattice determines a projection of a d -component link, where $d = \gcd(m + 1, n + 1)$.

Keywords: Lattice, medial graph, billiard trajectories, geodesic curves, flat torus.

ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что имеется естественное взаимно-однозначное соответствие между проекциями зацеплений и графами в \mathbb{R}^2 , задаваемое так называемой медиальной конструкцией [2]. Опишем ее. Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ – связный граф с множеством вершин $\mathbb{V}(G)$ и множеством ребер $\mathbb{E}(G)$. Тогда его медиальный граф $M(G) \subset \mathbb{R}^2$ можно задать следующим образом. Внутри каждого ребра графа G выберем точку. Эти точки назовем вершинами графа $M(G)$. Если две такие вершины лежат на двух смежных ребрах $\overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AB_2}$ графа G , то они соединяются ребром графа $M(G)$, которое пересекает G только по своим концам и лежит внутри угла B_1AB_2 , образованного этими смежными ребрами. Все вершины графа $M(G)$ имеют валентность 4. Поэтому объединение циклов графа $M(G)$, построенных по правилу "прямо вперед" [3], является проекцией некоторого зацепления $L(G) \subset \mathbb{R}^3$, число компонент которого равно числу этих циклов.

В дальнейшем под прямоугольной $(m \times n)$ -решеткой мы будем понимать прямоугольник P на плоскости \mathbb{R}^2 , разбитый на mn равных квадратов отрезками, параллельными его сторонам. Будем обозначать ее $P_{m \times n}$.

НАБЕЕВА, Л.Р., THE COMPONENT NUMBER OF LINKS CORRESPONDING TO LATTICES.

© 2010 НАБЕЕВА Л.Р.

Работа выполнена при поддержке РФФИ – Урал 10-01-96035.

Поступила 19 ноября 2010 г., опубликована 4 декабря 2010 г.

1. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. Число компонент проекции зацепления $L(P_{m \times n})$, соответствующего решетке $P_{m \times n}$, равно наибольшему общему делителю чисел $m+1, n+1$.

Полное доказательство этой теоремы опубликовано в работе [1]. Оно носит индуктивный характер и занимает более 10 страниц. В настоящей статье мы даем новое, более короткое и концептуальное, доказательство, использующее траектории прямоугольных бильярдов и геодезические на плоском торе.

Доказательство. Удобно считать, что стороны прямоугольника P параллельны осям координат и вершины решетки расположены в точках с нечетными координатами, причем углы прямоугольника P находятся в точках $(1, 1), (2m+1, 1), (1, 2n+1), (2m+1, 2n+1)$. Включим P в больший прямоугольник Q с углами в точках $(0, 0), (2m+2, 0), (0, 2n+2), (2m+2, 2n+2)$, см. рис. 1 слева для $m=3, n=1$. Тогда вершины медиального графа $M(P_{m \times n})$ решетки $P_{m \times n}$ находятся в серединах сторон составляющих ее квадратов. Поэтому координаты каждой вершины являются целыми числами с нечетной суммой. На рис. 1 справа вершины отмечены. При этом точки, где медиальный граф касается сторон прямоугольника Q , вершинами не считаются.

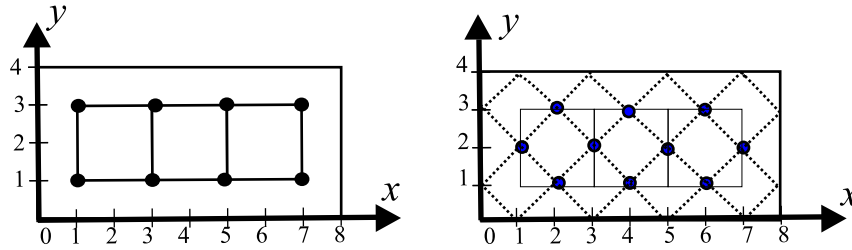


Рис. 1. Прямоугольная решетка и ее медиальный граф.

Прямые, проходящие через середины смежных сторон квадратов, наклонены к осям координат под углом 45 градусов. Отсюда следует, что проекция каждой компоненты зацепления $L(P_{m \times n})$, т. е. цикл графа $M(P_{m \times n})$, ведет себя как траектория бильярда в прямоугольнике Q , которая встречает стороны прямоугольника Q только в целых точках с нечетными суммами координат. Множество таких траекторий и их число обозначим S и t , соответственно.

Чтобы найти t , рассмотрим прямоугольник $T \subset R^2$, составленный из прямоугольника $Q_0 = Q$ и трех его копий Q_1, Q_2 и Q_3 , которые получаются симметриями прямоугольника Q относительно оси x , оси y и начала координат, соответственно. Склеив противоположные стороны прямоугольника T с помощью соответствующих параллельных переносов, мы получим плоский тор \tilde{T} . Снабдим его системой координат, выбрав в качестве меридиана μ и параллели λ ориентированные образы отрезков в пересечении прямоугольника T с осями координат.

Имеется естественная непрерывная проекция $p: \tilde{T} \rightarrow Q$, которая отображает копии $Q_i, 0 \leq i \leq 3$, в Q с помощью тождества и упомянутых выше симметрий. Заметим, что прообраз $p^{-1}(\alpha)$ каждой траектории $\alpha \in S$ состоит из двух ортогональных пар замкнутых геодезических кривых типа $(p, \pm q)$ на торе \tilde{T} , где p, q

– некоторые взаимно простые натуральные числа. См. рис. 2, где изображены два прообраза одной траектории.

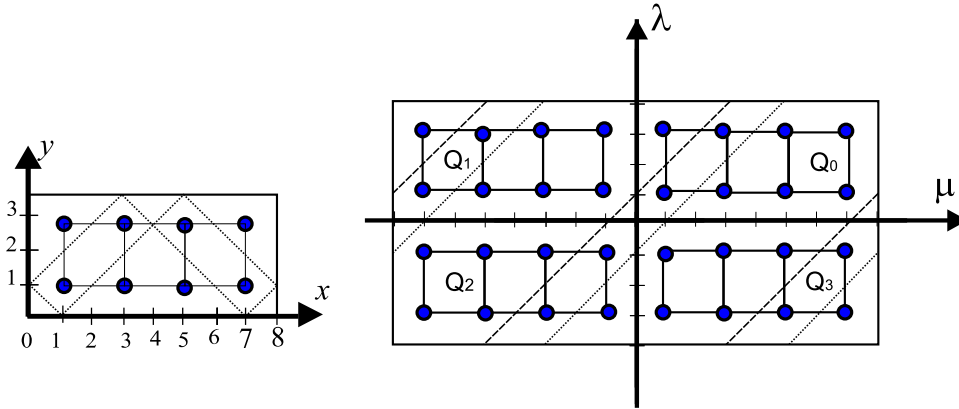


Рис. 2. Прямоугольник T составлен из четырех копий прямоугольника Q , показаны две геодезические типа $(2,1)$, проектирующиеся в траекторию на рисунке слева.

Общее число таких геодезических равно $4t$, по $2t$ геодезических в каждом семействе параллельных геодезических. При этом общее число точек в пересечении геодезических одного семейства с меридианом μ тора \tilde{T} равно числу $2(m+1)$ точек в T вида $(k, 0)$, где k нечетно. Аналогично, эти геодезические пересекают параллель λ тора \tilde{T} в $2(n+1)$ точках. Поскольку каждая геодезическая типа $(p, \pm q)$ пересекает μ в q и λ в p точках, то $2qt = 2(m+1)$ и $2pt = 2(n+1)$. Отсюда следует, что число t равно наибольшему общему делителю чисел $m+1, n+1$. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] X. Jin, F.M. Dong, E.G. Tay, *On the component number of links corresponding to lattices*, Knot theory and its ramifications, **18** (2009), 1711–1727.
- [2] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birkhauser, 1996.
- [3] T. Pisanski, T.W. Tucker, A. Zitnik *Straight-ahead walks in Eulerian graphs*, Discrete Math, **281** (2010), 237–246.

Ли́лия Руслановна На́беева
 Че́лябинский Го́сударственный Уни́верситет,
 Бра́тьев Кашириных, 129,
 454136, Че́лябинск, Росси́я
E-mail address: Liya.nabeyeva@yandex.ru