S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 487–490 (2010) УДК 517.911
Краткие сообщения MSC 34A12

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ С НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ГРАНИЦЕ

В. В. ИВАНОВ

Abstract. A solvability criterion is given to the Cauchy problem for a system of differential equations in a many-dimensional closed orthant.

Keywords: Cauchy problem, Euler polygonal line, Peano theorem

Обсуждаемый здесь вопрос о разрешимости задачи Коши с начальными условиями на границе множества, где задана система дифференциальных уравнений, интересный для нас прежде всего с чисто математической точки зрения, естественно возникает и во многих областях, имеющих по отношению к математике прикладной характер. Для достаточно произвольного множества, на котором действует система, суть нашего наблюдения можно выразить так: для разрешимости «пограничной» задачи Коши нужно, чтобы вектор поля в каждой граничной точке, а если оно «переменное», то и в каждый момент, принадлежал контингенции множества в этой точке. Стремясь к максимальной простоте нашего небольшого сочинения, мы ограничимся системой

$$\begin{array}{c} \dot{x}_1 = v_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \dot{x}_n = v_n(t, x_1, \ldots, x_n), \end{array} \qquad (*)$$

где для каждого $k = 1, \ldots, n$ функция $v_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ определена и непрерывна в точках неотрицательного «октанта», а точнее — при всех $t, x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

Если, например, все функции $v_1, \ldots, v_n$ неотрицательны в указанном октанте, то проблемы, очевидно, нет — построение ломаных Эйлера, начинающихся в октанте, не встречает никаких препятствий, и мы обычными рассуждениями [1], как в классической теореме Пеано, приходим к выводу о разрешимости

Ivanov, V. V., Solvability of the Initial–Boundary Value Cauchy Problem.

Представлена В. М. Гордиенко 25 декабря 2010 г., опубликована 27 декабря 2010 г.

задачи Коши при любых неотрицательных начальных условиях. К этому простому случаю сводится и немного более широкий класс систем $\dot{x} = Ax + w(t, x)$, где A означает произвольную диагональную матрицу порядка n, а координаты поля w неотрицательны, — полагая $y = e^{-tA}x$, мы легко обнаружим, что для нового набора переменных y получается система только что рассмотренного типа. Иными словами, и для таких систем проблемы разрешимости нет. Приятно и не менее полезно обратить внимание на то обстоятельство, что к этому классу относятся замечательные во многих отношениях дифференциальные уравнения, описывающие функционирование различных биохимических систем [2], например, так называемых гипотетических генных сетей, о которых говорится в программной статье [3] и в многочисленных других работах. Разрешимость задачи Коши для специальных систем из этого класса, построенных с помощью хорошо известных биологам функций Хилла, ранее и на основе других соображений по предложению Г. В. Демиденко была установлена его ученицами Т. В. Котовой, И. А. Мельник и Ю. Е. Хроповой. Тем самым было показано, что компьютерные эксперименты исследователей математических моделей генных сетей имеют под собой прочный логический фундамент.

Оставляя биологические проблемы специалистам, мы приглашаем читателя, не привыкшего просто *верить*, что модель обладает свойствами описываемой ею «живой» системы, вернуться к нашей чисто математической задаче. Посмотрим, что же можно сказать о системе, если для какой-то граничной точки x_0 неотрицательного октанта и какого-то момента $t_0 \geq 0$ нашлось неотрицательное решение $x = x(t)$ системы $(*)$, для которого $x = x_0$ при $t = t_0$. Сказать можно только одно: если номер k таков, что x_0 лежит на грани $x_k = 0$, то $v_k(t_0, x_0) \geq 0$. Геометрически это означает, что разрешимость задачи Коши при любых начальных условиях может быть только при условии, что в каждой граничной точке октанта вектор поля принадлежит контингенции октанта в этой точке. Сформулированный в таком виде, наш простой вывод справедлив всегда, не только для октанта. Как мы сейчас увидим, для октанта верно и обратное утверждение, хотя то же самое относится и к другим множествам.

Теорема. *Задача Коши для системы* $(*)$ *разрешима при любых неотрицательных начальных данных тогда и только тогда, когда для всех* $k = 1, \dots, n$ *и всех* $t, x_1, \dots, x_n \geq 0$ *выполнено условие:* $v_k(t, x_1, \dots, x_n) \geq 0$, *если* $x_k = 0$.

Нет ничего удивительного в том, что этим условиям удовлетворяют системы, возникающиее при моделировании самых разных процессов и явлений — будь то биологические осцилляторы [2], генные сети [3] или глобальная устойчивость гетеротонных систем в моделях коллективного поведения [4]. Трудно поэтому представить, чтобы наша теорема не была уже кем-то доказана...

Доказательство. Вопрос о необходимости условий мы уже обсудили. Для доказательства их достаточности мы сначала *должным* образом непрерывно продолжим векторное поле системы на все пространство, чтобы сослаться на Пеано, согласно которому расширенная система имеет решение при любых начальных условиях, а затем покажем, что если решение «начинается» в точке неотрицательного октанта, оно никогда из него «не выходит» и потому представляет собой решение исходной системы. Предвидя недоумение, нормальное для иного читателя, подчеркнем, что здесь важен *способ* продолжения поля, а главное наше утверждение в том, что такой способ *существует*.

Пусть $m(x)$ означает наименьшую из координат точки x пространства $\mathbb{R}^n$. Предположим, что x не принадлежит неотрицательному октанту, а это значит, что $m(x) < 0$. Тогда точка $x - m(x) \cdot e$, где e означает вектор, «составленный» из единиц, напротив, принадлежит ему. Согласившись с этим бесспорным утверждением, для всех $t \geq 0$ положим

$$v(t, x) := v(t, x - m(x) \cdot e) - m(x) \cdot e.$$

Нет сомнений в том, что поле $v(t, x)$ теперь не только определено, но и непрерывно для всех $t \geq 0$ и $x \in \mathbb{R}^n$. Геометрия нового поля ясна и прозрачна, разумеется, в сравнении с исходным полем, которое мы не трогали, а смысл его в том, что оно заставляет все точки, не лежащие в октанте, приближаться к нему. Впрочем, именно об этом речь впереди.

Рассмотрим повнимательней точку x, где $m(x) < 0$. Если ее наименьшая координата равна x_k, так что $m(x) = x_k$, то k-я координата вектора $x - m(x) \cdot e$, очевидно, равна нулю, остальные же — неотрицательны. В таком случае

$$v_k(t, x) = v_k(t, x - m(x) \cdot e) - m(x) \geq -x_k$$

для любого $t \geq 0$. Иначе говоря, если у какого-нибудь решения $x = x(t)$ расширенной нами системы $(*)$ в какой-то момент t наименьшая координата равна $x_k(t)$ и она меньше нуля, то $\dot{x}_k(t) \geq -x_k(t) > 0$. Как легко теперь понять, функция $m(x(t))$ растет вместе с t, пока остается отрицательной.

В самом деле, если $m(x(t)) < 0$, то, как мы только что отметили, $\dot{x}_k(t) > 0$ для всех k, для которых $m(x(t)) = x_k(t)$, а значит, $x_k(s) > x_k(t)$ для всех $s > t$, достаточно близких к t. С другой стороны, $x_i(t) > m(x(t))$ для номеров i, отличных от любого k, а тогда и $x_i(s) > m(x(s))$ для всех значений s, близких к t. Из этих наблюдений следует, что $m(x(s))$ для каждого $s > t$, близкого к t, совпадает хотя бы с одним из значений $x_k(s)$, так что $m(x(s)) > m(x(t))$. Другими словами, функция $m(x(t))$, если так можно выразиться, возрастает «в точке» t вправо. Тогда, по элементарным топологическим причинам, она возрастает на каждом промежутке, где она отрицательна.

Отсюда немедленно следует нужный нам вывод: как только какое-то решение выглянет из октанта, поле системы тут же вернет его обратно. Поэтому не выглянет. Действительно, представим себе на мгновенье, что $m(x(t_0)) \geq 0$, но $m(x(t)) < 0$ для некоторого $t > t_0$. Если нужно, заменяя t_0 более поздним моментом, мы вправе считать, что $m(x(t_0)) = 0$ и $m(x(t')) < 0$ для всех t' из промежутка $t_0 < t' \leq t$. Но, согласно теореме Больцано — Коши, для некоторых из таких t' непременно окажется $m(x(t)) < m(x(t'))$, а это противоречит уже известному нам характеру монотонности функции $m(x(t))$. Нам остается лишь заметить, что выше для нас трижды была важна непрерывность функции $m(x(t))$, вытекающая из очевидной непрерывности $m(x)$ как функции x и непрерывности $x(t)$ как функции переменной t. Теорема доказана.

Замечание. *Пусть для всех $t, x_1, \ldots, x_n \geq 0$ выполнены условия:*

$v_1(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *если* $x_1 = 0$,

$v_2(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *если* $x_2 = 0$, *а* $x_1 > 0$,

$v_3(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *если* $x_3 = 0$, *а* $x_1, x_2 > 0$,

. . . .

$v_n(t, x_1, \ldots, x_n) > 0$, *если* $x_n = 0$, *а* $x_1, \ldots, x_{n-1} > 0$.

Тогда каждая интегральная линия системы $(*)$ целиком, кроме, возможно, ее левого конца, лежит строго внутри октанта.

Доказательство. Пусть решение $x_1, \dots, x_n$ системы $(*)$ определено на каком-то промежутке с левым концом t_0. Если $x_1(t_0) = 0$, то $\dot{x}_1(t_0) > 0$, а тогда и $x_1(t) > 0$ для всех $t > t_0$, достаточно близких к t_0. Но и в дальнейшем $x_1(t)$ не может стать нулем, поскольку в противном случае наступит такой момент $t_1 > t_0$, когда $x_1(t_1) = 0$ и $x_1(t) > 0$ при $t_0 < t < t_1$. По теореме Лагранжа между каждым из этих t и t_1 непременно есть такое $\xi(t)$, что $\dot{x}_1(\xi(t)) < 0$. Но тогда $\dot{x}_1(t_1) \leq 0$, что противоречит первому условию теоремы. Такие же рассуждения показывают, что в случае $x_1(t_0) > 0$ функция x_1 положительна всюду, где она определена. Учитывая это обстоятельство, легко теперь проследить за второй компонентой решения. Предположим, что $x_2(t) = 0$ в какой-то момент $t > t_0$. Как мы уже знаем, в этот момент у нас $x_1(t) > 0$, а значит, по второму условию теоремы $\dot{x}_2(t) > 0$. Но это невозможно, поскольку при этих условиях непосредственно слева от t функция x_2 была бы обязана стать отрицательной. Поэтому $x_2 > 0$ всюду, где определено решение, кроме, быть может, начального момента t_0. Теперь уже ясно, что аналогичные рассуждения можно продолжать до тех пор, пока не будет исчерпана размерность системы. Иными словами, наше полезное дополнение к теореме строго обосновано.

Пользуясь замечательной возможностью, выражаю свою искреннюю признательность Г. В. Демиденко, руководителю научного семинара «Избранные вопросы математического анализа», в рамках интенсивной и плодотворной жизнедеятельности которого мне довелось узнать много интересного и расширить круг своего общения, В. А. Лихошваю — неиссякаемому источнику невероятно красивых математических задач биологического происхождения, которые вызывают хорошее настроение и горячее желание работать, а еще и особенно В. М. Чересизу, чей живой интерес не только к затронутым здесь вопросам, но и к незатронутым тоже, служит мне вечным стимулом.

Работа выполнена в рамках интеграционного междисциплинарного проекта №107 «Методы исследования дифференциально-разностных уравнений и приложения к задачам биологии и химии», поддержанного Сибирским отделением Российской академии наук.

Список литературы

[1] И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, 1970, Москва, «Наука».

[2] Дж. Марри, *Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях*, 1983, Москва, «Мир».

[3] В. А. Лихошвай, Ю. Г. Матушкин, С. И. Фадеев, *Задачи теории функционирования генных сетей*, Сиб. журн. индустриальной математики, **6**: 2 (2003), 64–80.

[4] В. И. Опойцев, *Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения*, 1977, Москва, «Наука».

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru