S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 7, стр. 65–75 (2010) УДК 519.172

MSC 05C15

О СОВЕРШЕННЫХ 2-РАСКРАСКАХ ГИПЕРКУБА

К. В. ВОРОБЬЁВ, Д. Г. ФОН-ДЕР-ФЛААСС

Abstract. A vertex coloring of a graph is called *perfect* if the multiset of colors appearing on the neighbours of any vertex depends only on the color of the vertex. The parameters of a perfect coloring are thus given by a $n \times n$ matrix, where n is the number of colors.

We give a recursive construction which can produce many different perfect colorings of the hypercube H_n with 2 colors and the parameters $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfying the conditions $(b,c) = 1, b + c = 2^m$, $c > 1$. In particular, this construction allows one to find many non-isomorphic perfect colorings with the parameters $\begin{pmatrix} k \cdot a & k \cdot b \\ k \cdot c & k \cdot d \end{pmatrix}$. For the parameters $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ satisfying the extra condition $a \geqslant c - (b,c)$, we find a lower bound on the number of produced colorings which is hyperexponential in n.

Keywords: Hypercube, perfect coloring, perfect code.

Введение

Понятие совершенной раскраски естественным образом возникает в теории графов, алгебраической комбинаторике, в теории кодирования. Раскраска вершин графа называется совершенной, если для каждой вершины цветовой набор её соседей зависит только от её цвета. В настоящей работе рассматриваются совершенные раскраски гиперкуба в 2 цвета. В общем виде задача формулируется следующим образом: определить параметры совершенных раскрасок,

---

Vorobev, K.V., Fon-Der-Flaass, D. G., On perfect 2-colorings of the hypercube.

Работа поддержана РФФИ (№ 09-01-00244-а).

Поступила 22 декабря 2009 г., опубликована 10 марта 2010 г.

при которых они существуют, а также дать точное число различных совершенных раскрасок с заданными параметрами. На сегодняшний день ответ на оба эти вопроса ещё не известен. В работе исследуется вопрос о количестве совершенных раскрасок при заданных параметрах, способы их построения. Основным результатом работы является новая конструкция, позволяющая строить совершенные раскраски, найдена нижняя оценка на их число.

1. Постановка задачи

Пусть H_n - это гиперкуб размерности n. Вершины куба – двоичные вектора длины n; вершины смежны, если соответствующие им вектора отличаются ровно в одной координате. Отображение $T : H_n \to \{1, 2, \ldots k\}$ называется совершенной раскраской вершин куба в k цветов с матрицей параметров $(s_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots k\}}$, если оно сюрьективно и для каждых i, j у любой вершины цвета i число соседей цвета j равно s_{ij}.

Соответственно раскраска вершин куба в 2 цвета (для краткости будем называть первый цвет чёрным, а второй белым) называется совершенной с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, если каждая вершина чёрного цвета имеет a соседей чёрного цвета и b соседей белого цвета, а каждая белая вершина имеет c соседей чёрного цвета и d соседей белого. По умолчанию будем считать, что $b \geqslant c$. Нам также понадобятся необходимые условия существования такой совершенной раскраски: $a + b = c + d = n$ (*), $\frac{b+c}{(b,c)} = 2^m$ для некоторого натурального m (**). (Общее определение совершенной раскраски и основные свойства см. в [1].) Далее в тексте, говоря о совершенной 2-раскраске с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, будем подразумевать, что условия (*) и (**) выполнены, в частности, в некоторых случаях вместо d будем писать $a+b-c$. Кроме того, известно, что условие (**) на b, c является и достаточным условием существования (см. [1].) в следующем смысле:

Теорема 1. *Для каждой пары b, c натуральных чисел, удовлетворяющих (**) существует число $a_0 = a_0(b, c)$ такое, что матрица $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}$ является матрицей совершенной раскраски гиперкуба тогда и только тогда, когда $a \geqslant a_0$.*

Наилучшей нижней оценкой на a_0 на сегодняшний день является так называемая граница корреляционной иммунности (она имеет место в случае $b \neq c$): $a_0 \geqslant \frac{3c-b}{4}$. Если $a = \frac{3c-b}{4}$, то говорят, что совершенная раскраска достигает границы корреляционной иммунности (подробнее об этом можно посмотреть в [3], [4]).

В соответствии с введёнными определениями ставится задача: найти $a_0 = a_0(b, c)$ для всех b, c, а также определить, сколько существует различных совершенных раскрасок с заданными параметрами. В данной работе приводится конструкция, которая даёт нижнюю оценку на число совершенных раскрасок с некоторыми заданными параметрами.

2. Известные конструкции

В этом пункте мы перечислим существующие конструкции, которые позволяют получать новые совершенные раскраски гиперкуба из уже имеющихся совершенных раскрасок гиперкуба меньшей размерности.

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$ – эта конструкция по одной существующей совершенной раскраске строит одну совершенную раскраску с новыми параметрами.

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ k\cdot c & k\cdot d \end{pmatrix}$ – эта конструкция также по одной существующей совершенной раскраске строит одну совершенную раскраску с новыми параметрами.

Более подробно о них можно прочитать в [1].

(3) Следующая конструкция является обобщением конструкции 3 из [1] для случая $k = 1$, так как в конструкции 3 не было указано на возможность несколькими способами получить совершенные раскраски с искомой матрицей параметров, это было сделано лишь одним способом.

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-1 & 2b+c \\ c & a+2b+c-1 \end{pmatrix}$, $a \geqslant 1$, $c \geqslant a+1$.

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c-1 & 2c+b \\ b & a+b+c-1 \end{pmatrix}$, $d \geqslant 1$, $c \geqslant a+1$.

Ниже будут приведены описание этой конструкции и необходимые доказательства. Конструкция состоит из двух шагов, представленных здесь двумя леммами.

Лемма 1. *Пусть $T : H_n \to \{0,1\}$ - совершенная раскраска в 2 цвета с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, и пусть $a \geqslant 1$. Тогда существует совершенная раскраска в 3 цвета $X : H_{2n} \to \{+,-,0\}$ с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a-1 & a+1 & 2b \\ a+1 & a-1 & 2b \\ c & c & 2d \end{pmatrix}$, причём количество таких раскрасок не менее $2^{2^{n-1}\cdot\frac{c}{b+c}}$.*

Доказательство. Рассмотрим $2n$-мерный куб H_{2n} со следующей раскраской: $T_1(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n) = T(x_1 + y_1, ...x_n + y_n)$. Нетрудно понять, что получившаяся раскраска в 2 цвета будет совершенной с матрицей $\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{pmatrix}$. Теперь рассмотрим множество M вершин вида $v = (v_1, 0, v_2, 0, ...v_n, 0)$. M есть, по сути, H_n с совершенной раскраской $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Используя то, что граф, индуцированный на чёрных вершинах, будет двудольным и регулярным степени $a \geqslant 1$, по теореме Ф. Холла о системе различных представителей (см. например [2].) на множестве M можно выделить совершенное паросочетание на чёрных вершинах. Таким образом, все чёрные вершины этого множества разбиваются на пары. По построению H_{2n} каждой вершине $v \in M$соответствует множество A_v, определяемое соотношением: $\forall w \in A_v\ \forall i \in \{1,2,\dots n\}\ \ v_i = w_{2i-1} \oplus w_{2i}$, где $\oplus$ - сложение по модулю 2. Из строения A_v понятно, что

$\forall v \forall w\, ((v \neq w) \to (A_v \cap A_w = \emptyset))$ и $\bigcup\limits_{v \in M} A_v = H_{2n}$, а цвет любой вершины из A_v совпадает с цветом v. Множество V будем называть 2-компонентой, если $V = A_v \cup A_w$ для некоторой пары вершин v, w из указанного выше совершенного паросочетания.

Возьмём пару чёрных вершин v и w из заданного выше паросочетания. Рассмотрим A_v, из его строения понятно, что расстояние между любыми двумя его вершинами чётно, а минимальное расстояние равно 2. Зададим на A_v отношение "соседства": две вершины из A_v будем называть "соседними", если расстояние между ними равно 2. Из определения A_v следует, что получившийся граф с вершинами из A_v, и отношением "соседства" вместо смежности, - это n -мерный куб. Покрасим его в 2 цвета ("+", "-") следующим образом. Возьмём вершину $v = (v_1, 0, v_2, 0, ...v_n, 0)$(из A_v), покрасим её в цвет "+", далее рассмотрим какого-нибудь её "соседа" в A_v u. В исходном гиперкубе вершины v, u были на расстоянии 2, значит, есть ровно одна пара вершин v', u', что вместе они образуют цикл длины 4. Заметим, что из определения A_v следует, что вершины v', u' либо одновременно лежат в A_w, либо одновременно лежат вне A_w. В первом случае покрасим вершину u в тот же цвет, что и вершину v (то есть в "+"), иначе в противоположный ("-"). Проделаем такую операцию для всех "соседей" v. Далее применим тот же алгоритм для всех соседей v, и т.д. В итоге всё A_v будет покрашено в 2 цвета ("+" и "-"). Далее введённое отношение "соседства" нам уже не понадобится, поэтому, говоря, что "вершины соседние", будем отождествлять это с "вершины смежны".

Теперь рассмотрим A_w, у каждой вершины $w' \in A_w$ есть ровно 2 соседа из A_v, причём они одного цвета (оба "+" или оба "-"). Тогда покрасим вершину w'в противоположный цвет. Итак, пара A_v, A_w покрашена. Заметим, что мы могли сделать это двумя способами (достаточно положить цвет вершины v равным "-", а не "+"). Проделаем такую операцию для всех пар из совершенного паросочетания. Все вершины $2n$-мерного куба, покрашенные в белый цвет покрасим в цвет 0. В итоге мы получили раскраску H_{2n} в 3 цвета. Осталось только убедиться, что она – совершенная с искомыми параметрами. Заметим, что если у произвольной вершины нашего H_{2n} есть сосед в какой-нибудь 2-компоненте и при этом она сама в ней не лежит, то у неё есть ещё ровно один сосед в этой 2-компоненте, причём его цвет отличен от цвета первого соседа. Теперь рассмотрим произвольную вершину цвета 0. Используя замечание, получаем, что у неё c соседей цвета "+", c соседей цвета "-" и $2d$ соседей цвета 0, так как белая вершина имела столько соседей белого цвета до перекрашивания белых вершин в цвет 0. Рассмотрим теперь произвольную вершину цвета "+". По построению она находится в какой-то 2-компоненте и имеет ровно 2 соседа в этой же компоненте, причём оба цвета "-". Она также имеет соседей ещё в $a - 1$ 2-компоненте, так как до перекрашивания она была чёрной, и у неё было $2a$ чёрных соседей. В итоге получаем, что вершина цвета "+" видит $a - 1$ вершину цвета "+", $a + 1$ вершину цвета "-", $2b$ вершин цвета 0. Аналогично получаются искомые параметры для вершины цвета "-". Когда внутри каждой 2-компоненты мы красили вершины в цвета "+" и "-", мы могли сделать это двумя способами. Так как число чёрных вершин при совершенной раскраске

H_n с матрицей$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равно $2^n \cdot \frac{c}{b+c}$, а число пар в совершенном паросочетании в 2 раза меньше, то число различных полученных раскрасок равно $2^{2^{n-1}\cdot\frac{c}{b+c}}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $X : H_{2n} \to \{+, -, 0\}$ *- совершенная раскраска в 3 цвета с матрицей параметров*
$\begin{pmatrix} a-1 & a+1 & 2b \\ a+1 & a-1 & 2b \\ c & c & 2\cdot(a+b-c) \end{pmatrix}$, $c \geqslant a+1$. *Тогда существует совершенная раскраска с параметрами* $\begin{pmatrix} a-1 & 2b+c \\ c & a+2b-1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Достроим данный куб H_{2n} до куба H_{2n+x}, где $a+1+x=c$. Раскрасим его по правилу:
$T(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z_1, \ldots, z_x) =$ чёрный, если
$(X(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = " + ") \wedge \sum\limits_{i=1}^{x} z_i = 0\,(\mathrm{mod} 2) \vee$
$(X(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = " - ") \wedge \sum\limits_{i=1}^{x} z_i = 1\,(\mathrm{mod} 2)$
$T(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n, z_1, \ldots, z_x) =$ белый, если
$(X(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = " - ") \wedge \sum\limits_{i=1}^{x} z_i = 0\,(\mathrm{mod} 2) \vee$
$(X(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = " + ") \wedge \sum\limits_{i=1}^{x} z_i = 1\,(\mathrm{mod} 2) \vee (X(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) = "0")$

Полученной раскраске соответствует матрица параметров

$$\begin{pmatrix} a-1 & 2b+c \\ c & a+2b+c-1 \end{pmatrix}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1.

Используя леммы 1 и 2 можно также получить конструкцию (3.b).

Заметим, что в конструкции, представленной леммами 1 и 2, никак не использовано условие $b \geqslant c$. Тогда пусть $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - матрица параметров некоторой совершенной раскраски и $b \geqslant c$, $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ - матрица параметров для совершенной раскраски с переименованными цветами, то есть $a' = d, b' = c, c' = b, d' = a$. Применим к этой раскраске конструкцию (3) и получим $2^{2^{n-1}\cdot\frac{c'}{b'+c'}} = 2^{2^{n-1}\cdot\frac{b}{b+c}}$различных совершенных раскрасок с матрицей параметров $\begin{pmatrix} a'-1 & 2b'+c' \\ c' & a'+2b'+c'-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c-1 & 2c+b \\ b & a+b+c-1 \end{pmatrix}$. При этом изменятся условия для применения лемм 1 и 2: $d \geqslant 1$ и $c \geqslant a+1$.

Замечание 2.

Заметим, что описанная выше конструкция не только из одной совершенной раскраски получает $2^{n-1} \cdot \frac{c}{b+c}$ новых, как доказывается в лемме 1, но и разные совершенные раскраски переводит в разные, что нетрудно понять из леммы 1 (так как из разных совершенных раскрасок будут получены разные совершенные паросочетания, которые и дают различия в новых построенных раскрасках).

3. Итеративная конструкция и новые оценки на число совершенных 2-раскрасок гиперкуба

Следующая рекуррентная конструкция позволяет получать большое число совершенных раскрасок с параметрами $\begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ k\cdot c & k\cdot d \end{pmatrix}$ (ранее известная конструкция позволяла получать ровно одну совершенную раскраску с матрицей $\begin{pmatrix} k\cdot a & k\cdot b \\ k\cdot c & k\cdot d \end{pmatrix}$ из совершенной раскраски с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ [1]). Как следствие, эта конструкция позволяет строить большое число совершенных раскрасок $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a \geqslant c-(b,c)$ для всех пар b, c, удовлетворяющих (**).

При описании конструкции нам понадобятся следующие уже известные конструкции (см 2. Известные конструкции):

(1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{pmatrix}$

(2) Описанная в пункте 2.2 конструкция 3 позволяет получать совершенные раскраски с двумя матрицами параметров:

(a) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a-1 & 2b+c \\ c & a+2b+c-1 \end{pmatrix}$, $a \geqslant 1$, $c \geqslant a+1$.

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c-1 & 2c+b \\ b & a+b+c-1 \end{pmatrix}$, $d \geqslant 1$, $c \geqslant a+1$.

Замечание 3. *(О перестановочности 1 и 2-ой конструкций)*

Заметим, что если мы к совершенной раскраске с матрицей $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ применим сначала (1), затем (2.a) или (2.b), то матрица параметров получившихся раскрасок будет такой же, если бы мы сначала применили (2.a) или (2.b), затем (1). Однако получившиеся раскраски могут быть другими, причём в первом случае количество полученных совершенных раскрасок будет больше, чем во втором.

Описание конструкции. Как следует из названия, эта конструкция состоит из некоторого числа шагов. Возьмём совершенную раскраску с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$, $k \geqslant 2$. Заметим, что таких совершенных раскрасок ровно 2, и одна получается из другой переименованием цветов. Применим к ней конструкцию (1), получим совершенную раскраску с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$, к ней применим конструкции (2.a) и (2.b) , в данном случае результаты совпадут: $\begin{pmatrix} 0 & 3k \\ k & 2k \end{pmatrix}$. Применим к получившейся совершенной раскраске сначала конструкцию (1), затем (2.a) и (2.b). В результате получатся две новых совершенных раскраски. К каждой из них вновь применим сначала (1), затем (2.a) и (2.b), и так далее. В итоге все наши преобразования будут представлены в виде бесконечного дерева. Предположим пока, что все переходы обоснованы, то есть условия для переходов (2.a) и (2.b) выполнены, докажем это позже. Несколько первых шагов можно посмотреть на рис. 1 (для удобства все переходы по конструкции (2.a) – это стрелки вверх, а по (2.b) – стрелки вниз):

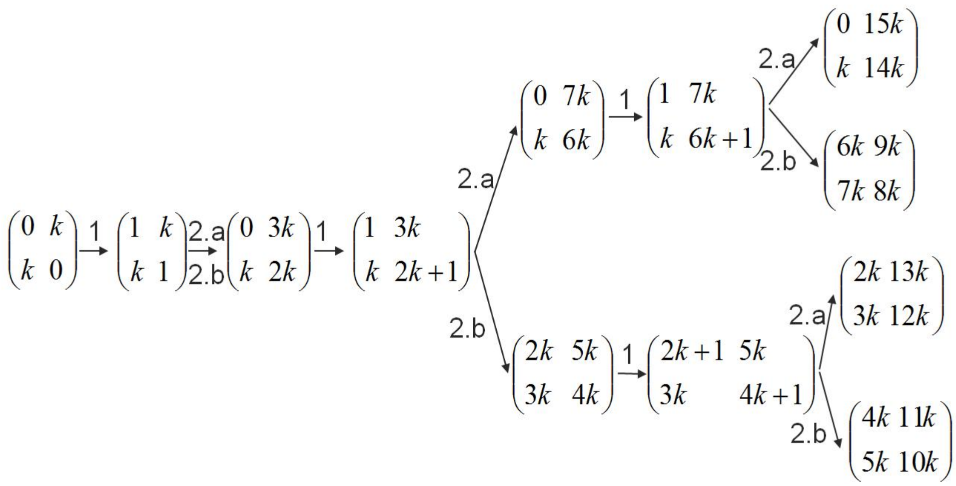

Рис. 1.

Теорема 2. *Множество полученных n-м шаге алгоритма матриц есть в точности множество всех матриц вида* $\begin{pmatrix} (2^{n+1}-\alpha-1)*k & \alpha*k \\ (2^{n+1}-\alpha)*k & (\alpha-1)*k \end{pmatrix}$, $\forall\alpha \neq 2m, 2^n-1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{n+1}-1$.

Доказательство. Если мы докажем, что на n-м шаге получаются все матрицы такого вида, то теорема будет доказана, так как их число равно 2^{n-1}, и оно совпадает с числом матриц, полученных на n-м шаге. Будем доказывать по индукции.

База индукции. После первого шага алгоритма получена матрица $\begin{pmatrix} 0 & 3k \\ k & 2k \end{pmatrix}$, и она исчерпывает множество матриц вида, указанного в формулировке теоремы для случая $n=1$.

Шаг индукции. Считаем, что для $n=l$ утверждение теоремы верно, то есть на l-м шаге получены все матрицы вида $\begin{pmatrix} (2^{l+1}-\alpha-1)*k & \alpha*k \\ (2^{l+1}-\alpha)*k & (\alpha-1)*k \end{pmatrix}$, $\forall\alpha \neq 2m, 2^l-1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{l+1}-1$. Покажем, что теорема будет верна и в случае $n=l+1$. Для этого возьмём произвольное α, такое, что $\alpha \neq 2m, 2^{l+1}-1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{l+2}-1$ и явным образом получим матрицу $\begin{pmatrix} (2^{l+2}-\alpha-1)*k & \alpha*k \\ (2^{l+2}-\alpha)*k & (\alpha-1)*k \end{pmatrix}$. Если $\alpha > 2^{l+1}+2^l$, то применим конструкции (1) и (2.a) к матрице

$\begin{pmatrix} (2^{l+1}-\beta-1)*k & \beta*k \\ (2^{l+1}-\beta)*k & (\beta-1)*k \end{pmatrix}$, где $\beta=\alpha-2^{l+1}$. Если же $\alpha < 2^{l+1}+2^l$, то применим конструкции (1) и (2.b) к матрице $\begin{pmatrix} (2^{l+1}-\beta-1)*k & \beta*k \\ (2^{l+1}-\beta)*k & (\beta-1)*k \end{pmatrix}$, где $\beta=2^{l+2}-\alpha$. Этими случаями описываются все возможности для нечётного числа α. Доказательство шага индукции завершает доказательство теоремы.

Замечание 4. *(О корректности).*

Заметим, что описание алгоритма корректно, то есть все шаги в нём возможны. Для применения конструкции (2.a) и (2.b) требуется два условия: $a \geqslant 1$ и $c \geqslant a+1$ (ясно, что $d \geqslant 1$ следует из $a \geqslant 1$). Глядя на матрицы, к которым мы применяем конструкции (2.a) и (2.b) (а это и есть матрицы, которые даёт алгоритм на предыдущем шаге, за исключением разве что первой матрицы $\begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}$), нетрудно понять, что при $k \geqslant 2$ оба эти условия выполнены.

Замечание 5.

Заметим, что после l-го шага алгоритма в полученных матрицах параметров сумма элементов первой строки (то есть размерность куба) равна $(2^{l+1}-1)k$, а сумма элементов на побочной диагонали равна $2^{l+1}k$.

Теорема 3. *Пусть $(b,c) = k > 1, b+c = k\cdot 2^m$, $a \geqslant c-(b,c)$. Тогда итеративная конструкция позволяет построить $\prod\limits_{i=0}^{m-1} 2^{2^{k\cdot\left(2^i-1\right)-i}\cdot c_i}$, $c_0 = c_1 = 1$, $c_{m-1} = c/k$ совершенных раскрасок с параметрами $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где c_i- некоторая неубывающая последовательность натуральных чисел.*

Доказательство. Заметим, что условия на b, c в условии этого утверждения есть условие (**) при $(b,c) = k > 1$. По замечанию 2 мы знаем, что каждое применение конструкций (2.a) и (2.b) разные раскраски переводит в разные. По лемме 1 и замечанию 1 мы также знаем, сколько разных совершенных раскрасок получается при применении этих конструкций. Таким образом, применяя эти лемму и замечание, мы получаем искомую формулу. Произведение начинается с $i = 0$, так как первую совершенную раскраску мы можем выбрать двумя способами. Вообще говоря, это произведение - это число совершенных раскрасок с матрицей параметров $\begin{pmatrix} c-(b,c) & b \\ c & b-(b,c) \end{pmatrix}$, применив нужное число раз конструкцию (1) мы получим то, что утверждается в теореме. Требуется только пояснить, что c_i зависят от пути по этому дереву, и в общем случае мы знаем только $c_0 = c_1 = 1$, $c_{m-1} = c/k$. В завершение заметим, что указанное выше число совершенных раскрасок есть нижняя оценка на число совершенных раскрасок с указанными параметрами. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай $k = 1$. Он требует отдельного рассмотрения, так как в изложенной выше итеративной конструкции при $k = 1$ часть переходов будут невозможны (не будет выполнено условие $c \geqslant a+1$ для некоторых переходов b.1 и b.2).

Возьмём совершенную раскраску с матрицей параметров $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, то есть совершенный код в H_3. Применим к ней конструкцию (2.b) (это возможно, так как условия выполнены), результат - $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, затем конструкцию (1), результат $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ясно, что мы не сможем применить к $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ последовательность (2.a) и (1), так как $0 < 1$. Однако же представим, что эти переходы возможны, тогда мы получим матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Далее к получившимся результатам так же будем применять сначала (2.a) и (2.b), затем к результатам применим (1). Опять же пока предположим, что все переходы обоснованы. В итоге по аналогии со случаем $k \geqslant 2$, получаем бесконечное дерево, шагом алгоритма будем называть применение к матрице последовательности: сначала "раздваивание" (2.a) и (2.b), затем применение (1) к обоим результатам. Будем считать, что нумерация шагов алгоритма начинается с 2.

Замечание 6. *(О корректности в случае $k = 1$)*

Заметим, что результаты на l-м шаге будут совпадать с результатами на l-м шаге алгоритма для $k \geqslant 2$ при подстановке $k = 1$. То есть в дереве для случая $k = 1$ шаги алгоритма применяются для матриц вида

$$\begin{pmatrix} \left(2^{n+1} - \alpha - 1\right) & \alpha \\ \left(2^{n+1} - \alpha\right) & (\alpha - 1) \end{pmatrix},$$

$\forall \alpha \neq 2m$, $2^n - 1 \leqslant \alpha \leqslant 2^{n+1} - 1$, $n \geqslant 1$. Проанализируем эти матрицы и ответим на вопрос, какие ветви в нашем дереве невозможны, то есть для каких матриц не выполнены условия на применение переходов (2.a), (2.b), (1). Из того, что $\left(2^{n+1} - \alpha\right) \geqslant \left(\left(2^{n+1} - \alpha - 1\right) + 1\right)$, следует что условие $c \geqslant a + 1$ выполнено всегда (именно для этого в случае $k = 1$ в нашем дереве был изменён порядок применения (1) и (2)). Единственная проблема: если $\left(2^{n+1} - \alpha - 1\right) = 0$. Нетрудно понять, что этому случаю соответствуют матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 2^{n+1} - 1 \\ 1 & 2^{n+1} - 2 \end{pmatrix}, \ n \geqslant 1.$$

Заметим, что каждая такая матрица для некоторого $n = m \geqslant 2$ в нашем дереве может быть получена только одним способом – применением конструкции (2.a) к матрице такого же вида при $n = m - 1$. Таким образом все ветви в нашем дереве, переходы по которым мы не можем совершить, выстраиваются в бесконечную цепочку по матрицам указанного выше вида, причём начало этой цепочки – самая первая матрица $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, и переходы происходят только по ветвям (2.a). Далее осталось только заметить, что эти матрицы – это матрицы параметров для совершенных кодов, существование которых доказано и на число их число есть нижние оценки (например см. [3]). Таким образом, переходы по ветви (2.a) между такими матрицами мы совершать не будем, но в дереве их оставим (опираясь на существование совершенных кодов и нижние оценки на их число), а из них все переходы уже могут быть осуществлены.

Итак, мы показали, что итеративная конструкция применима и в случае $k = 1$.

Несколько первых шагов можно посмотреть на рисунке (для удобства все переходы по конструкции (2.a) – это стрелки вверх, а по (2.b) – стрелки вниз). На рис. 2 рассматривается случай $k = 1$, но в матрицах для наглядности оставлен коэффициент k.

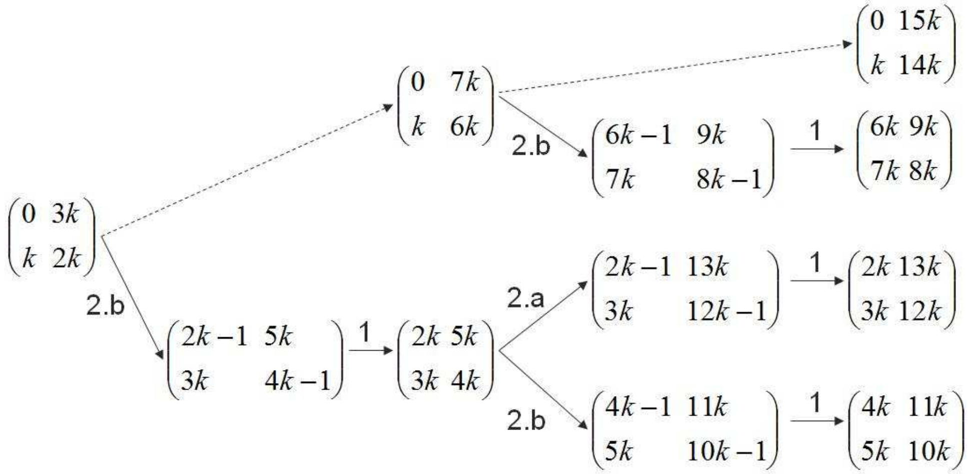

Рис. 2.

Теорема 4. *Пусть* $(b,c)=1, b{+}c=2^m$, $a \geqslant c-(b,c)$, $c>1$. *Тогда итеративная конструкция позволяет построить* $B\left(2^{i_0}-1\right)\cdot \prod\limits_{i=i_0}^{m-1} 2^{2^{\left(2^i-2\right)-i}\cdot c_i}$, $c_{i_0}=1, c_{m-1}=c$ *раскрасок с матрицей параметров* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *где* c_i- *некоторая неубывающая последовательность натуральных чисел,* $i_0 \in \{2,\dots,m-1\}$, *и где* $B(2^{i_0}-1)$-*число различных совершенных кодов в кубе размерности* $2^{i_0}-1$.

Доказательство. Заметим, что второй сомножитель в этом произведении получается из тех же соображений, что и в теореме 3. Опять же c_i зависят от пути по дереву, то есть для каждой пары b,c они свои. Неизвестно также число i_0, оно так же зависит от пути, а именно это "номер" совершенного кода, с которого мы начинаем путь. Опять же, указанное выше число совершенных раскрасок есть нижняя оценка на число совершенных раскрасок с указанными в условии параметрами. Единственная проблема - нам неизвестно точное число совершенных кодов, но вместо него мы можем подставить какую-нибудь хорошую нижнюю оценку на их число, например из [5].

Теорема доказана.

Замечание 7.

Мы не проверяли построенные совершенные раскраски на возможные изоморфизмы между ними. Однако из того, что число совершенных раскрасок, изоморфных данной, не превосходит $2^n n!$, а количество построенных совершенных раскрасок гиперэкспоненциально, мы заключаем, что число попарно неэквивалентных совершенных раскрасок с заданной матрицей параметров также будет гиперэкспоненциальным.

Замечание 8.

С помощью описанной выше итеративной конструкции можно получать совершенные раскраски и с меньшим параметром a. В самом деле, если внимательно посмотреть на описание конструкции, то становится понятно, что во многих случаях можно не применять конструкцию (1), ведь это делается с единственной целью – чтобы было выполнено условие $a \geqslant 1$. Поэтому если оно выполнено, то мы можем не применять конструкцию (1), сразу же делая ветвление по (2.a) и (2.b). Таким образом, могут быть получены совершенные раскраски с $a < c - (b, c)$, пусть и меньшим числом способов.

Список литературы

[1] Д.Г. Фон-Дер-Флаасс, *Совершенные 2-раскраски гиперкуба* , Сибирский математический журнал. Июль-август, **48**: 4 (2007), 923–930.

[2] М. Холл, *Комбинаторика*, М.: Мир, 1970, 64–79.

[3] D.G. Fon-Der-Flaass, *A bound on correlation immunity*, Сибирские Электронные Математические Известия, Siberian Electronic Mathematical Reports, **4** (2007), 133–135.

[4] Д.Г. Фон-Дер-Флаасс, *Совершенные 2-раскраски 12-мерного куба, достигающие границы корреляционной иммунности* , Сибирские Электронные Математические Известия, **4** (2007), 292–295.

[5] Denis S. Krotov, Sergey V. Avgustinovich, *On the number of 1-perfect binary codes: a lower bound*, IEEE Trans. Inf. Theory **54**: 4 (2008), 1760–1765.

[6] К.В. Воробьёв, *О числе совершенных 2-раскрасок гиперкуба*, Материалы XLVI Международной научной студенческой конференции “Студент и научно-технический прогресс”: Математика / Новосиб. гос.ун-т. Новосибирск, 2008, С. 182.

Дмитрий Германович Фон-Дер-Флаасс
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: d.flaass@gmail.com

Константин Васильевич Воробьёв
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: konstantin.vorobev@gmail.com