

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 76–86 (2010)

УДК 510.5

MSC 03D45

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ В КАТЕГОРИИ EQU

Ю. Л. ЕРШОВ

АБСТРАКТ. We give a criterion for equivalence between equilogical and topological spaces. This enables us to prove that a series of interesting categories of topological spaces are complete subcartesian closed subcategories of equilogical spaces.

Keywords: equilogical space, cartesian closed category.

В препринте [1] Д. Скотт определил категорию EQU *эквилогических пространств*, обладающую рядом замечательных свойств.

Объектами EQU являются пары (X, \sim_X) , где X – топологическое (T_0) пространство, а \sim_X – (произвольное) отношение эквивалентности на X . Если (X, \sim_X) и (Y, \sim_Y) – *эквилогические пространства* (т.е. объекты EQU), то *эквивариантным отображением* из (X, \sim_X) в (Y, \sim_Y) называется всякое непрерывное отображение $f : X \rightarrow Y$, сохраняющее эквивалентности (\sim_X) и \sim_Y (т.е. для $\xi, \xi' \in X$ из $\xi \sim_X \xi'$ следует $f(\xi) \sim_Y f(\xi')$). Два эквивариантных отображения f и g из (X, \sim_X) в (Y, \sim_Y) эквивалентны ($f \equiv g$), если для любого $\xi \in X$ $f(\xi) \sim_Y g(\xi)$. *Морфизмами в категории EQU из (X, \sim_X) в (Y, \sim_Y)* являются классы эквивалентности эквивариантных отображений из (X, \sim_X) в (Y, \sim_Y) с естественно определенной композицией (по представителям).

Категория EQU содержит категорию TOP топологических пространств в качестве полной подкатегории, если отождествить топологическое пространство X с *эквилогическим пространством* (X, id_X) .

Основным категорным свойством категории EQU является ее декартова замкнутость (теорема 3.5 в [1]).

ERSHOV, YU.L., TOPOLOGICAL OBJECTS IN CATEGORY EQU .

© 2010 Ершов Ю.Л.

Поддержано совместным Российско-германским грантом РФФИ-DFG №06-01-04002-ННИО а и грантом Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (грант НШ-335.2008.1).

Поступила 19 ноября 2009 г., опубликована 13 марта 2010 г.

Для доказательства этой теоремы Д. Скотт определил еще одну категорию $PEQU$.

Объектами категории $PEQU$ частичных эквивалентных пространств являются пары (P, \sim_P) , где P – топологическое пространство, топология которого является топологией Скотта (полной) алгебраической решетки (см. [2]), а \sim_P – частичное отношение эквивалентности на P (т.е. симметричное и транзитивное отношение; через $\delta(\sim_P)$ будем обозначать множество $\{\xi \mid \xi \sim_P \xi, \xi \in P\}$). Морфизмами категории $PEQU$ из (P, \sim_P) в (Q, \sim_Q) являются классы эквивалентности непрерывных отображений $f : P \rightarrow Q$, сохраняющих частичные эквивалентности (для $\xi, \xi' \in \delta(\sim_P)$ из $\xi \sim_P \xi'$ следует, что $f(\xi), f(\xi') \in \delta(\sim_Q)$ и $f(\xi) \sim_Q f(\xi')$) относительно эквивалентности \equiv , определенной так

$$f \equiv g \iff \forall \xi \in \delta(\sim_P) (f(\xi) \sim_Q g(\xi)).$$

Оказывается (теорема 3.4 в [1]), что категории EQU и $PEQU$ эквивалентны. Эквивалентность определяется следующими двумя функторами $R : PEQU \rightarrow EQU$ и $*$: $EQU \rightarrow PEQU$.

Если (P, \sim_P) – объект $PEQU$, то

$$R((P, \sim_P)) \equiv (\delta(\sim_P), \sim_P \upharpoonright \delta(\sim_P)^2);$$

$\delta(\sim_P) \subseteq P$ – подпространство P , а $\sim_P \upharpoonright (\delta(\sim_P))^2$ – отношение эквивалентности на нем. Распространение R на морфизмы очевидно.

Пусть (X, \sim_X) – объект EQU ; если T_X – топология X (т.е. семейство всех открытых подмножеств X) и $P(T_X)$ – (полная алгебраическая) решетка всех подмножеств T_X , то X^* – это $P(T_X)$ в топологии Скотта. Для $\xi \in X$ пусть $\hat{\xi} \equiv \{U \mid U \in T_X, \xi \in U\}$; $\hat{\xi}$ является элементом X^* . Отображение $\xi \mapsto \hat{\xi}, \xi \in X$ является гомеоморфным вложением X в X^* ; частичное отношение эквивалентности \sim_{X^*} на X^* определим так, что $\delta(\sim_{X^*}) \equiv \hat{X} = \{\hat{\xi} \mid \xi \in X\}$ и $\hat{\xi} \sim_{X^*} \hat{\xi}' \iff \xi \sim_X \xi'$ для любых $\xi, \xi' \in X$. Если $f : X \rightarrow Y$ – эквивариантное отображение из (X, \sim_X) в (Y, \sim_Y) , то индуцированное отображение $\hat{f} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y} \subseteq Y^*$ имеет продолжение (Y^* – инъективное пространство, см. [2, 3]) до непрерывного отображения из X^* в Y^* . Так как любые два таких продолжения, очевидно, эквивалентны относительно \equiv , то это позволяет доопределить функтор $*$ и на морфизмы.

В [1] доказано (теорема 4.3), что категория *вс-областей* является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU и поставлен вопрос (вопрос 2), не будет ли категория *бифинитных областей* так же полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU ?. В настоящей работе дается положительный ответ на этот вопрос. Для этого исследуется вопрос, когда объект из EQU ($PEQU$) изоморфен топологическому объекту.

Первая характеристика довольно очевидна.

Предложение 1. *Объект (X, \sim_X) категории EQU изоморфен топологическому объекту тогда и только тогда, когда существует (непрерывная) ретракция $r : X \rightarrow X$ такая, что $\xi \sim_X r(\xi)$ для всех $\xi \in X$ и ограничение отношения \sim_X на $r(X)$ есть отношение равенства $id_{r(X)}$.*

Пусть $r : X \rightarrow X$ – ретракция с указанными в предложении свойствами; $r(X)$ как подпространство X вместе с $id_{r(X)}$ является топологическим объектом EQU ; тогда эквивариантные отображения $r : X \rightarrow r(X)$ и $id_{r(X)} : (r(X) \rightarrow$

X определяют, очевидно, изоморфизм объектов (X, \sim_X) и $(r(X), id_{r(X)})$ в категории EQU .

Пусть (Y, id_Y) топологический объект EQU , $\varphi : X \rightarrow Y$, $\psi : Y \rightarrow X$ – эквивариантные отображения (из (X, \sim_X) в (Y, id_Y) и из (Y, id_Y) в (X, \sim_X)), реализующие изоморфизм в EQU . Пусть $r \equiv \psi\varphi$; так как $\varphi\psi = id_Y : Y \rightarrow Y$, то $r^2 = \psi\varphi\psi\varphi = \psi\varphi = r$ – ретракция. Условие $r(\xi) \sim_X \xi$ для всех $\xi \in X$ в точности означает, что $r \equiv id_X$. \square

Аналогично доказывается и характеристика топологических объектов в $PEQU$:

Предложение 2. *Объект (P, \sim_P) категории $PEQU$ изоморфен топологическому объекту тогда и только тогда, когда существует эквивариантное отображение $r : P \rightarrow P$ объекта (P, \sim_P) в себя, эквивалентное тождественному id_P , такое, что ограничение \sim_P на $r(\delta(\sim_P))$ совпадает с отношением равенства $id_{r(\delta(\sim_P))}$.* \square

Для решения указанного выше вопроса решающим является выяснение того, когда объект, представляющий в (декартово замкнутой!) категории EQU семейство $EQU(X, Y)$ всех морфизмов из (X, id_X) в (Y, id_Y) , изоморфен топологическому объекту. Следующая теорема позволяет ответить на многие такие вопросы.

Теорема 1. *Для топологического пространства X следующие свойства эквивалентны:*

1. Решетка (T_X, \subseteq) всех открытых подмножеств X является непрерывной;
2. $EQU(X, Y)$ изоморфен топологическому объекту EQU для любого топологического пространства Y ;
3. $EQU(X, \mathbb{S})$ изоморфен топологическому объекту EQU , где $\mathbb{S} = \{\perp, \top\}$ – пространство ("двоеточие") Серпинского.

Для доказательства удобнее работать в эквивалентной категории $PEQU$, где имеется следующее явное описание объекта $PEQU((P, \sim_P), (Q, \sim_Q))$. Пусть $C(P, Q)$ – семейство всех непрерывных отображений из P в Q в топологии поточечной сходимости. Частичное отношение эквивалентности \sim_Q^P на $C(P, Q)$ определяется так:

$$\delta(\sim_Q^P) \equiv \{f \mid f \in C(P, Q), f(\delta(\sim_P)) \subseteq \delta(\sim_Q)\},$$

$$\forall \pi_1 \pi' \in \delta(\sim_P) (\pi \sim_P \pi' \Rightarrow f(\pi) \sim_Q f(\pi'))\};$$

для $f, g \in \delta(\sim_Q^P)$

$$f \sim_Q^P \Leftrightarrow \forall \pi \in \delta(\sim_P) (f(\pi) \sim_Q g(\pi)).$$

Тогда $(C(P, Q), \sim_Q^P)$ – объект $PEQU$, представляющий $PEQU((P, \sim_P), (Q, \sim_Q))$.

Установим импликацию 1. \Rightarrow 2. Рассмотрим сначала случай, когда (Y, id_Y) – объект $PEQU$ (т.е. когда Y – полная алгебраическая решетка топологий Скотта), и установим, что при выполнении свойства 1 для пространства X объект

$$PEQU(X^*, (Y, id_Y)) = (C(X^*, Y), \sim_Y^*),$$

где $\delta(\sim_Y^{X^*}) = \{f \mid f \in C(X^*, Y), \forall \xi, \xi' \in X$

$$((\xi \sim_X \xi') \Rightarrow f(\hat{\xi}) = f(\hat{\xi}'))\}$$

и для $f, g \in \delta(\sim_Y^{X^*})$ ($f \sim_Y^{X^*} \Leftrightarrow f \upharpoonright \hat{X} = g \upharpoonright \hat{X}$) удовлетворяет условиям предложения 2.

Пусть (T_X, \subseteq) является непрерывной решеткой (см.[2]); для $U, V \in T_X$ запись $V \prec U$ будет означать, что для любого покрытия $\{U_i \mid i \in I\}$ множества

$$U(U = \bigcup_{i \in I} U_i)$$

открытыми множествами найдется конечное $I_0 \subseteq I$ такое, что $V \subseteq \bigcup_{i \in I_0} U_i$ (в частности, $V \prec U$ влечет, что $V \subseteq U$). Непрерывность решетки (T_X, \subseteq) означает в точности, что для любого $U \in T_X$ имеет место равенство $U = \bigcup \{V \mid V \in T_X, V \prec U\}$.

Следствие 1. Если (T_X, \subseteq) – непрерывная решетка, $V, U \in T_X$, $V \prec U$; $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, $V_i \in T_X$,. Тогда существует конечное $I_0 \subseteq I$ такое, что

$$V \prec \bigcup_{i \in I_0} U_i.$$

Действительно, пусть $W_i^* \hat{=} \{W \mid W \in T_X, W \prec U_i\}$, $i \in I$. Тогда из непрерывности (T_X, \subseteq) следует, что $U_i = \bigcup \{W \mid W \in W_i^*\}$, $i \in I$. Отсюда $U \subseteq \bigcup_{i \in I} \{W \mid W \in W_i^*\}$. Тогда существуют $W_0, \dots, W_n \in UW_i^*$ такие, что $U \subseteq \bigcup_{j \leq n} W_j$. Пусть $i_0, \dots, i_n \in I$ таковы, что $W_j \in W_{i_j}^*$, $j \leq n$.

$$U \subseteq \bigcup_{j \leq n} W_j \prec \bigcup_{j \leq n} U_{i_j}.$$

□

Топология пространства $C(X^*, Y)$ определяется предбазисом множеств вида $\langle S, a \rangle$, где S – конечное подмножество $T_X(S \in X^*)$, a – компактный элемент $Y(a \in C(Y))$ и $\langle S, a \rangle \hat{=} \{f \mid f \in C(X^*, Y), f(S) \in \uparrow a (\hat{=} \{\eta \mid \eta, a \leq \eta\})\}$.

Пусть $f \in C(X^*, Y)$; определим систему W_f базисных открытых подмножеств $C(X^*, Y)$ следующим образом:

Пусть a – компактный элемент и пусть $U_a^f \hat{=} \{\xi \mid \xi \in X, \hat{\xi} \in f^{-1}(\uparrow a)\}$.

Так как $\hat{U}_a^f \hat{=} \{\hat{\xi} \mid \xi \in U_a^f\} = \hat{X} \cap f^{-1}(\uparrow a)$ и f непрерывно ($\uparrow a$ открыто в Y), то $U_a^f \in T_X$. Полагаем

$$W_f^a \hat{=} \{\langle \{V\}, a \rangle \mid V \prec U_a^f, V \in T_X\}; W_f \hat{=} \bigcup_{a \in C(Y)} W_f^a.$$

Существует наименьшая функция $g \in C(X^*, Y)$ во множестве

$$\cap W_f = \cap \{\langle \{V\}, a \rangle \mid \langle \{V\}, a \rangle \in W_f^a, a \in C(Y)\},$$

а именно $g = \sup \{f_{\langle \{V\}, a \rangle} \mid \langle \{V\}, a \rangle \in W_f^a, a \in C(Y)\}$, где

$$f_{\langle\{V\}, a\rangle}(S) = \begin{cases} a, & \text{если } V \in S(\{V\} \subseteq S) \\ \perp_Y, & \text{если } V \notin S, \end{cases}$$

(для всех $S \in X^* = P(T_X)$).

Очевидно, что $f_{\langle\{V\}, a\rangle} \upharpoonright \hat{X} \leq f \upharpoonright \hat{X}$ (для $\langle\{V\}, a\rangle \in W_1^a$, $a \in C(Y)$); следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \leq f \upharpoonright \hat{X}$.

Проверим, что $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$. Пусть $\xi \in X$, $a \in C(Y)$ и $a \leq_Y f(\hat{\xi})$; тогда $\hat{\xi} \in \hat{U}_a$, $\xi \in U_a$ и (используя непрерывность решетки (T_X, \subseteq)) $\xi \in V$ для некоторого $V \prec U_a$. Тогда $g \in \langle\{V\}, a\rangle$ и, следовательно, $g(\hat{\xi}) \geq g(\{V\}) \geq f_{\langle\{V\}, a\rangle}(\{V\}) = a$. Итак, $g(\hat{\xi}) \geq \sup\{a \mid a \in C(Y), a \leq f(\hat{\xi})\} = f(\hat{\xi})$. Следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \geq f \upharpoonright \hat{X}$ и $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$.

Проверим, что $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$. Пусть $\xi \in X$, $a \in C(Y)$ и $a \leq_Y f(\hat{\xi})$; Тогда $\hat{\xi} \in \hat{U}_a$, $\xi \in U_a$ и по непрерывности решетки (T_X, \supseteq) найдется $V \in T_X$ такое, что $V \prec U_a$ и $\xi \in V$. Тогда $\langle\{V\}, a\rangle \in W_f^a$ и $g \geq f_{\langle\{V\}, a\rangle}$; следовательно, $g(\hat{\xi}) \geq g(\{V\}) \geq f_{\langle\{V\}, a\rangle}(\{V\}) = a$. Итак, $g(\hat{\xi}) \geq \sup\{a \mid a \in C(Y), a \leq f(\hat{\xi})\} = f(\hat{\xi})$. Следовательно, $g \upharpoonright \hat{X} \geq f \upharpoonright \hat{X}$ и $g \upharpoonright \hat{X} = f \upharpoonright \hat{X}$.

Таким образом определено отображение $f \mapsto g$, $f \in C(X^*, Y)$, которое обозначим через $r(g = r(f))$. Из определения r видно, что $r(f)$ зависит только от $f \upharpoonright \hat{X}$, т.е. если $f' \in C(X^*, Y)$ и $f \upharpoonright \hat{X} = f' \upharpoonright \hat{X}$, то $r(f) = r(f')$. Покажем, что отображение r является непрерывным.

Пусть $r(f) \in \langle S, a \rangle$, $S = \{V_0, \dots, V_n\} \subseteq T_x$, $a \in C(Y)$ и $a \notin Y_Y$. Так как

$$r(f)(S) = \sup_{\langle\{V_i\}, a_i\rangle \in W_f} f_{\langle\{V_i\}, a_i\rangle}(S),$$

то найдутся $a_i \in C(Y)$, $i \leq n$ такие, что $\langle\{V_i\}, a_i\rangle \in W_f$ и $a \leq a_0 \sqcup \dots \sqcup a_n$. Тогда $r(f) \in \bigcap_{i \leq n} \langle\{V_i\}, a_i\rangle$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда базисная

окрестность имеет вид $\langle\{V\}, a\rangle$. Итак, пусть $r(f) \in \langle\{V\}, a\rangle$. Так как $r(f)^{-1}(\uparrow a) \cap \hat{X} = f^{-1}(\uparrow a) \cap \hat{X} = \hat{U}_a$, то для любого $\xi \in U_a$ найдется конечное множество $S_\xi = \{V_0^\xi, \dots, V_{n_\xi}^\xi\} \subseteq \hat{\xi}$ такое, что $f(S) \geq a$ для любого $(S_X \supseteq) S \supseteq S_\xi$. Полагаем $V_\xi = \bigcap_{i \leq n_\xi} V_i^\xi$; так как $S_\xi \subseteq \hat{\xi}$, то $\xi \in V_i^\xi$, $i \leq n_\xi$, следовательно, $\xi \in V_\xi$. Но тогда

$$U_a \subseteq \bigcup_{\xi \in U_a} V_\xi.$$

Так как $V \prec U_a$, то по следствию найдутся $\xi_0, \dots, \xi_n \in U_a$ такие, что $V \prec \bigcup_{i \leq n} V_{\xi_i}$. Имеем $f \in \bigcap_{i \leq n} \langle S_{\xi_i}, a \rangle$; пусть $f' \in \bigcap_{i \leq n} \langle S_{\xi_i}, a \rangle$; тогда $U_a^{f'} \geq \bigcup_{i \leq n} V_{\xi_i}$; действительно, если

$$\xi' \in V_{\xi_i} = \bigcap_{j \leq n_{\xi_i}} V_j^{\xi_i},$$

то $V_j^{\xi_i} \in \hat{\xi}'$, $j \leq n_{\xi_i}$; $S_{\xi_i} \subseteq \hat{\xi}'$ и тогда $f'(\hat{\xi}') \geq a$, $\xi' U_a^{f'}$. Но $U_a^{f'} (\geq \bigcup_{i \leq n} V_j^{\xi_i}) > V$,

следовательно, $\langle\{V\}, a\rangle \in W_a^{f'} \leq W^{f'}$ и $r(f') \geq f \upharpoonright \langle\{V\}, a\rangle$, т.е. $r(f') \in \langle\{V\}, a\rangle$. Итак,

$$r\left(\bigcap_{i \leq n} \langle S_i, a \rangle\right) \subseteq \langle\{V\}, a\rangle$$

и r – непрерывное отображение $C(X^*, Y)$ в себя такое, что $f \upharpoonright \hat{X} = r(f) \upharpoonright \hat{X}$ и $r(f) \upharpoonright \hat{X} = r(g) \upharpoonright \hat{X}$ влечет $r(f) = r(g)$ для любых $f, g \in C(X^*, Y)$.

По предложению 2 $PEQU(X^*, Y)$ изоморфен топологическому объекту.

Пусть Y – произвольное топологическое пространство. Тогда Y^* является полной алгебраической решеткой; пусть $r : C(X^*, Y^*) \rightarrow C(X^*, Y^*)$ – непрерывное отображение, определенное выше (с Y^* вместо Y). Отображение r удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) для любого непрерывного отображения $f : X^* \rightarrow Y^*$ $f \upharpoonright \hat{X} = r(f) \upharpoonright \hat{X}$;
- 2) для любых непрерывных отображений $f, g : X^* \rightarrow Y^*$ $r(f) = r(g)$ тогда и только тогда, когда $f \upharpoonright \hat{X} = g \upharpoonright \hat{X}$. Имеем $\delta(\sim_{\hat{Y}^*}) = \{f \mid f \in C(X^*, Y^*), f \upharpoonright \hat{X} \subseteq \hat{Y}\}$; тогда из 1) следует, что из $f \in \delta(\sim_{\hat{Y}^*})$ следует, что $r(f) \in \delta(\sim_{\hat{Y}^*})$ и $f \sim_{\hat{Y}^*} r(f)$. Условие 2 показывает, что r удовлетворяет всем условиям предложения 2 и, следовательно, $PEQU(X^*, Y^*)$ изоморфен топологическому объекту. Импликация 1. \Rightarrow 2 установлена.

Импликация 2. \Rightarrow 3 очевидна.

Установим теперь импликацию 3. \Rightarrow 1. Пусть $PEQU(X^*, \mathbb{S})$ изоморфен топологическому объекту; тогда по предложению 2 существует непрерывное отображение $r : C(X^*, \mathbb{S}) \rightarrow C(X^*, \mathbb{S})$ такое, что для любых $f, g \in C(X^*, \mathbb{S})$ $f \upharpoonright \hat{X} = r(f) \upharpoonright \hat{X}$ и $f \upharpoonright \hat{X} = g \upharpoonright \hat{X}$ влечет $r(f) = r(g)$.

Покажем, что (T_X, \subseteq) – непрерывная решетка. Как отмечалось выше, нужно установить, что $U = \bigcup \{V \mid V \in T_X, V \prec U\}$ для любого $U \in T_X$; это равносильно тому, что для любых $\xi \in U \in T_X$ найдется $V \in T_X$ такое, что $\xi \in V$ и $V \prec U$.

Пусть $U \in T_X$ и $\xi_0 \in U$; пусть $f_U^* \equiv f_{\langle \{U\}, \top \rangle}$; тогда $f_U^* \upharpoonright \hat{X} = \hat{f}_U$, где

$$\hat{f}_U(\hat{\xi}) = \begin{cases} \top, & \text{если } \xi \in U, \\ \perp, & \text{если } \xi \notin U. \end{cases}$$

Пусть $g_U \equiv r(f_U^*)$; так как $g_U \upharpoonright \hat{X} = f_U^* \upharpoonright \hat{X} = \hat{f}_U$, то $g_U(\hat{\xi}_0) = \top$. Тогда найдется окрестность $\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle$, $V_i \in T_X$, $i \leq n$ функции g_U в $C(X^*, \mathbb{S})$ такая, что $\xi_0 \in V \equiv \bigcup_{i \leq n} V_i$. Заметим, что для любого $\xi \in V$ $g_U(\hat{\xi}) = \top$;

следовательно, $V \subseteq U$. Проверим, что $V \prec U$. Пусть $\{U_i \mid i \in I\}$, $U_i \in T_X$, $i \in I$ – покрытие $U (U = \bigcup_{i \in I} U_i)$. Пусть $f \in C(X^*, \mathbb{S})$ – наименьшая функция такая,

что $f(\{U_i\}) = \top$, $i \in I$. Легко видеть, что $f \upharpoonright \hat{X} = \hat{f}_U = f_U^* \upharpoonright \hat{X}$; следовательно, $r(f) = g_U$. Так как $g_U \in \langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle$, то $r^{-1}(\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle)$ открыто и $f \in r^{-1}(\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle)$.

Пусть S_j – конечные подмножества T_X , $j \leq k$ такие, что

$$f \in W \equiv \bigcup_{i \leq n} \langle S_j, \top \rangle \subseteq r^{-1}(\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle).$$

Пусть $V'_j \equiv \bigcap S_j = \bigcap \{U' \mid U' \in S_j\}$, $j \leq k$. Покажем, что

$$V' \equiv \bigcup_{i \leq k} V'_j \supseteq V.$$

Действительно, пусть g_W – наименьшая функция в W ; тогда, как легко видеть, $g_W \upharpoonright \hat{X} = \hat{f}_{V'}$. Но $r(g_W) \upharpoonright \hat{X} = g_W \upharpoonright \hat{X} = \hat{f}_{V'} : r(g_W) \in \langle \{V_0, \dots, V_n\}, \top \rangle$ по

выбору W ; следовательно,

$$V = \bigcap_{i \leq n} V_i \subseteq V'.$$

Далее, $f \in \langle S_j, T \rangle$ влечет существование $i_j \in I$ такого, что $U_{i_j} \in S_j$, $j \leq k$. Но $U_{i_j} \in S_j$ влечет, что $V'_j = \bigcap S_j \subseteq U_{i_j}$, $j \leq k$;

$$V \subseteq V' = \bigcup_{j \leq k} V'_j \subseteq \bigcup_{j \leq k} U_{i_j}.$$

Следовательно, $V \prec U$, и импликация 3. \Rightarrow 1. установлена.

Теорема доказана. \square

Пусть X удовлетворяет условиям теоремы 1, Y – произвольное топологическое пространство. Пусть $r : C(X^*, Y^*) \rightarrow C(X^*, Y^*)$ – отображение, построенное в доказательстве импликации 1. \Rightarrow 2. Объекты $(C(X^*, Y^*) \sim_{\hat{Y}^*}^{X^*})$ и $(C(X^*, Y^*), \sim_{\hat{Y}^*}^{X^*} \upharpoonright r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))^2)$, категории $PEQU$ изоморфны и $R((C(X^*, Y^*), \sim_{\hat{Y}^*}^{X^*} \upharpoonright r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))^2))$ – топологический объект категории EQU , представляющий семейство морфизмов $EQU(X, Y)$. Существует естественное взаимнооднозначное соответствие ρ_0 между $r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$ и семейством $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y ; оно является ограничением на $r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$ отображения $\rho : \delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}) \rightarrow C(X, Y)$, определенного так: если $f \in \delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*})$ (т.е. $f(\hat{X}) \subseteq \hat{Y}$), то $g = \rho(f)$ – то единственное отображение из X в Y , для которого $\hat{f}(\xi) = \widehat{g(\xi)}$ для всех $\xi \in X$. Опишем явно топологию на $C(X, Y)$, которая превращает отображение ρ_0 в гомеоморфизм.

Теорема 2. Пусть X удовлетворяет условиям теоремы 1, Y – произвольное топологическое пространство, тогда

1) Топология на $C(X, Y)$, индуцированная отображением ρ_0 , определена предбазисом множеств вида

$$\prec V, U \succ = \{f \mid f \in C(X, Y), V \prec f^{-1}(U)\}, V \in T_X, U \in T_Y.$$

2) Если X является еще и уравновешенным (*sober*) (см. [2]) пространством, то эта топология совпадает с компактно открытой топологией, т.е. топологией, определенной предбазисом множеств вида $\langle Q, U \rangle = \{f \mid f \in C(X, Y), Q \subseteq f^{-1}(U)\}$, Q – компактное подмножество X , $U \in T_Y$.

1) Из определения отображения r видно, что для любых $V_0, \dots, V_n \in T_X$, $U \in T_Y$ и $f \in \delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*})$ имеет место эквивалентность (*):

$$r(f) \in \langle \{V_0, \dots, V_n\}, \{U\} \rangle \Leftrightarrow \text{существует } i \leq n \text{ такое, что } V_i \prec \rho(f)^{-1}(U).$$

Заметим, что $\langle \{V_i\}, \{U\} \rangle \subseteq \langle \{V_0, \dots, V_n\}, \{U\} \rangle$, $i \leq n$.

Из (*), в частности, следует, что $\rho_0^{-1}(\prec V, U \succ) = \langle \{V\}, \{U\} \rangle \cap r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$, $V \in T_X$, $U \in T_Y$; т.е. ρ_0 – непрерывное отображение из $r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$ (как подпространства $C(X^*, Y^*)$) в $C(X, Y)$ с указанной в 1) топологией.

Далее, для любых $V_0, \dots, V_n \in T_X$, $U_0, \dots, U_m \in T_Y$ справедливо равенство

$$\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \{U_0, \dots, U_m\} \rangle = \bigcap_{j \leq m} \langle \{V_0, \dots, V_n\}, \{U_j\} \rangle.$$

Множества вида $\langle \{V_0, \dots, V_n\}, \{U_0, \dots, U_m\} \rangle$ образуют базис топологии на $C(X^*, Y^*)$. Указанное равенство вместе с эквивалентностью (*) показывает, что индуцированная на $r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$ топология пространством $C(X^*, Y^*)$ определяется предбазисом множеств вида $\langle \{V\}, \{U\} \rangle \cap r(\delta(\sim_{\hat{Y}^*}^{X^*}))$, $V \in T_X$, $U \in T_Y$.

Отсюда следует, что ρ_0 – гомеоморфизм и утверждение 1) доказано.

2) Теорема V-5.6. из [2] утверждает, что, если X является уравновешенным пространством, то (T_X, \subseteq) является непрерывной решеткой тогда и только тогда, когда X является локально компактным пространством, и в случае выполнения этих условий: $V \prec U$ для $V, U \in T_X$ тогда и только тогда, когда существует компактное множество Q такое, что $V \subseteq Q \subseteq U$.

Покажем, что в этом случае топология, на $C(X, Y)$, определенная в 1) совпадает с компактно открытой топологией. Пусть $V \in T_X$, $U \in T_Y$ и $f \in \prec V, U \succ$, т.е. $V \prec f^{-1}(U)$; тогда найдется компактное множество Q такое, что $V \subseteq Q \subseteq f^{-1}(U)$; следовательно, $f \in \langle Q, U \rangle$. Покажем, что $\langle Q, U \rangle \subseteq \prec V, U \succ$; пусть $g \in \langle Q, U \rangle$, тогда $V \subseteq Q \subseteq g^{-1}(U)$ и, следовательно, $V \prec g^{-1}(U)$ и $g \in \prec V, U \succ$. Итак, $\prec U, U \succ$ открыто в компактно открытой топологии. Пусть Q – компактное подмножество X , $U \in T_Y$ и $f \in \langle Q, U \rangle$, т.е. $Q \subseteq f^{-1}(U)$. Так как (T_X, \subseteq) – непрерывная решетка, то $f^{-1}(U) = \bigcup \{V \mid V \in T_X, V \prec f^{-1}(U)\}$; так как Q компактно, то найдутся $V_0, \dots, V_n \in T_X$ такие, что $V_i \prec f^{-1}(U)$, $i \leq n$ и $Q \subseteq V = V_0 \cup \dots \cup V_n$. Но тогда $V \prec f^{-1}(U)$, $f \in \prec V, U \succ$ и очевидно, $\prec V, U \succ \subseteq \langle Q, U \rangle$, т.е. $\langle Q, U \rangle$ открыто в топологии, определенной в 1). Следовательно, эти топологии совпадают. Утверждение 2) доказано.

Теорема доказана. \square

Пример 1. Пусть \mathbb{R} – множество вещественных чисел в обычной топологии. Так как \mathbb{R} локально компактно, то для любого топологического пространства Y пространство $C(\mathbb{R}, Y)$ непрерывных отображений \mathbb{R} в Y с компактно открытой топологией представляет $EQU(\mathbb{R}, Y)$.

Укажем еще широкий класс пространств, удовлетворяющих условиям теоремы 1.

Теорема 3. Если X является α -пространством (определение в [4, 5]), то X удовлетворяет условиям теоремы 1 и топология на $C(X, Y)$, определенная в 1) теоремы 2 совпадает с топологией поточечной сходимости.

Сначала заметим, что если X – α -пространство, то решетка (T_X, \subseteq) непрерывна, т.е. X удовлетворяет условиям теоремы 1. Это является следствием теоремы 3 в [5] и следствием I-2.5 в [2]. Но может быть установлено и непосредственно. Пусть $U \in T_X$, $\xi \in T_X$; тогда существует $\xi_0 \in U$ такой, что $\xi_0 \prec \xi$. Тогда $\xi \in \text{Int} \uparrow \xi_0$; если $U_i \in T_X$, $i \in I$ и $U \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$, то существует $i_0 \in I$ такой, что $\xi_0 \in U_{i_0}$. Но тогда $\text{Int} \uparrow \xi_0 \subseteq \uparrow \xi_0 \subseteq U_{i_0}$, $\xi \in \text{Int} \uparrow \xi_0 \prec U$.

Пусть X – α -пространство, Y – произвольное топологическое пространство и $f \in \prec V, U \succ$, $V \in T_X$, $U \in T_Y$; $V \prec f^{-1}(U)$. Так как X – α -пространство, то $f^{-1}(U) = \bigcup \{\text{Int} \uparrow \xi \mid \xi \in f^{-1}(U)\}$; следовательно, существуют $\xi_0, \dots, \xi_n \in f^{-1}(U)$ такие, что

$$V \subseteq \bigcup_{i \leq n} \text{Int} \uparrow \xi_i.$$

Покажем, что

$$f \in \bigcap_{i \leq n} \langle \xi_i, U \rangle \subseteq \prec V, U \succ.$$

Так как $\xi_i \in f^{-1}(U)$, то $f(\xi_i) \in U$, $f \in \langle \xi_i, U \rangle$, $i \leq n$, $f \in \bigcap_{i \leq n} \langle \xi_i, U \rangle$. Пусть

$$g \in \bigcap_{i \leq n} \langle \xi_i, U \rangle;$$

проверим, что $V \prec g^{-1}(U)$. Пусть $\{V_j, | j \in J$ – открытое покрытие множества $g^{-1}(U)$; так как $g(\xi_i) \in U$, $\xi_i \in g^{-1}(U)$, то найдется $j_i \in J$ такой, что $\xi_i \in V_{j_i}$, $i \leq n$; тогда

$$\bigcup_{i \leq n} V_{j_i} \supseteq \bigcup_{i \leq n} \uparrow \xi_i \supseteq \bigcup_{i \leq n} \text{Int} \uparrow \xi_i \supseteq V;$$

следовательно, $V \prec g^{-1}(U)$ и $g \in \prec V, U \succ$. Итак, множества вида $\prec V, U \succ$ открыты в топологии поточечной сходимости.

Множества вида $\langle \xi, U \rangle$, $\xi \in X$, $U \in T_Y$ являются частными случаями множеств вида $\langle Q, U \rangle$, Q – компактное подмножество X . Как показано в доказательстве утверждения 2) (уравновешенность X для этого не использовалась) множества вида $\langle Q, U \rangle$ открыты в топологии из утверждения 1) теоремы 2. Следовательно, эти топологии совпадают.

Теорема доказана. \square

Пример 2. Декартова замкнутая категория \mathbb{B} бифинитных областей с наименьшим элементом (см. [6]) такова, что ее объекты являются α -пространствами, а объект морфизмов из X в Y есть пространство $C(X, Y)$ непрерывных функций в топологии поточечной сходимости (см. [4]). Следовательно, теорема 3 влечет, что

категория \mathbb{B} является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU ,

что отвечает и на вопрос 2 из [1].

Так как FS -области, введенные А.Юнгом (определение см. в [2], являются α -пространствами, что легко следует из определения и леммы II-2.16 в [2], то как и выше:

категория FS -областей является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU .

Пример 3. Те же соображения, что и выше, показывают, что категория A_0 -пространств \mathbb{A}_0 (см. [7]) является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU .

В [4] автор определил понятие b_0 -пространства (грубо говоря, это не обязательно полная бифинитная область) и отметил декартово замкнутость категории всех таких пространств. Если ретракты b_0 -пространств назвать B_0 -пространствами, то категория B_0 -пространств \mathbb{B}_0 будет декартово замкнутой категорией, состоящей из α -пространств и такая, что объект морфизмов в \mathbb{B}_0 из X в Y есть пространство $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y в топологии поточечной сходимости. Следовательно, справедливо

Предложение 3. Категории \mathbb{B} , $s\mathbb{B}$ (см. [6]) и \mathbb{A}_0 являются полными поддекартово замкнутыми подкатегориями категории \mathbb{B}_0 , категория \mathbb{B}_0 является полной поддекартово замкнутой подкатегорией категории EQU .

В соответствии с пожеланием рецензента укажем соответствие полученных результатов с исследованиями, посвященными вопросам существования правильной топологии на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y . Топология T на $C(X, Y)$ правильная, если топологическое пространство $C_T(X, Y) (= \langle C(X, Y), T \rangle)$ представляет функтор

$$C(_ \times X, Y)(\forall Z(C(Z \times X, Y) \sim C(Z, C_T(X, Y))).$$

Пространство X называется экспоненцируемым [2], если для любого пространства Y на $C(X, Y)$ существует правильная топология.

Приведем характеристику экспоненцируемых пространств из [2]:

ТЕОРЕМА II-4.12. *Для пространства X следующие свойства эквивалентны:*

(1) Решетка (T_X, \subseteq) всех открытых множеств пространства X является непрерывной;

(2) Пространство X экспоненцируемо (в категории TOP_0).

(3) Функтор $-\times X$ сохраняет фактор отображения.

Замечание. Как отмечено в [2], эта теорема по существу установлена в работе [8].

Если использовать следующее

Наблюдение. Если K_0 – полная подкатегория категории K , $F : K \rightarrow Set$ – функтор, представимый объектом X из K_0 , то функтор $F \upharpoonright K_0 : K_0 \rightarrow Set$ представим тем же объектом X ,

то импликация 1. \Rightarrow 2. теоремы 1 из настоящей работы влечет импликацию 1. \Rightarrow 2. теоремы II-4.12 из [2].

Это же наблюдение показывает, что из теоремы 2 настоящей работы следует предложение 5.11 из работы [9].

Возникает естественная

Проблема. Влечет ли существование правильной топологии T на $C(X, Y)$ то, что $EQ\bar{U}(X, Y)$ изоморфен топологическому объекту?

Заметим, что в случае положительного ответа (для конкретных $X, Y \in TOP_0$) имеем $EQ\bar{U}(X, Y) \sim \langle C_T(X, Y), id_{C(X, Y)} \rangle$.

Настоящая статья была написана в конце 90-х, но не была опубликована (было намерение написать книгу по топологии, которая включала бы и этот результат). Осенью 2009 года я решил ее опубликовать и запросил Д.Скотта о том, не решен ли вопрос 2 из [1]. Д.Скотт переадресовал этот вопрос А.Бауэру и А.Симпсону. 22 сентября 2009 года А.Симпсон ответил Д.Скотту и мне, что положительный ответ на этот вопрос может быть получен для счётно базизируемых пространств с использованием промежуточной категории так называемых qcb -пространств и результатов работ [10, 11]. Я благодарен Д.Скотту и А.Симпсону за полученные разъяснения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D.S.Scott, *A new category?*, preprint, Carnegie Mellon University, 1998.
- [2] G.Gierz, K.H.Hofmann, K.Keimel, J.D.Lawson, M.Mislove, D.S.Scott, *Continuons Lattices and Domains*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, **93**, 2003.
- [3] D.S.Scott, *Continuons lattices*, in: Toposes, Algebraic Geometry and Logic, td. F.Lawvere, Lecture Notes Math., Springer Verlag, **274** (1972), 97–136.
- [4] Yu.L.Ershov, *Theory of domains and nearby*, in: Formal Methods in Programming and Their Applications, eds D.Bjorner, M.Broy and I.Pottosin, Lecture Notes Computer Science, Springer Verlag, **735** (1993), 1–7.
- [5] Yu.L.Ershov, *The bounded-complete hull of an α -space*, Theor. Comp. Science, **175** (1997), 3–13.
- [6] A.Jung, *Cartesian Closed Categorien of Domains*, CWI Tract 66 Stichting Math. Centrum Amsterdam, 1989.
- [7] Ю.Л.Ершов, *Теория A -пространств*, Алгебра и логика, **12**: 4 (1973), 369–416.

- [8] B.J.Day, G.M.Kelly, *Topological quotients maps preserved pullbacks or products*, Proc. Camb.Phil. Soc. **67** (1970), 553–558.
- [9] M.Escardo, J.Lawson, A.Simpson. *Comparing cartesian closed categories of (core) compactly generated Spaces*, Topology and Appl. **143**: 1–3 (2004), 109–145.
- [10] M.Menni, A.K.Simpson, *Topological and limit space subcategories of countably based equilogical Spaces*, Math.Str. in Comp. Sci. **12**: 6 (2002), 739–770.
- [11] I.Battenfeld, M.Schröder, A.Simpson, *Compactly generated domain theory*, Festschrift for Klaus Keimel, Math. Str. in Comp. Sci. **16**: 3 (2006), 141–161.

Юрий Леонидович Ершов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ershov@math.nsc.ru