

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 7, стр. 87–99 (2010)

УДК 517.925
MSC 34C23 92D25

ДИНАМИКА ОДНОЙ МОДЕЛИ ТИПА «ХИЩНИК-ЖЕРТВА»

Е. П. ВОЛОКИТИН, С. А. ТРЕСКОВ

ABSTRACT. We construct a global bifurcation diagram of the plane differential system

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - xy/(a+x^2), & \dot{y} &= y(\delta - \beta y/x), \\ x(t) &> 0, & y(t) &> 0, & a > 0, & \delta > 0, & \beta > 0, \end{aligned}$$

which describes the predator-prey interaction.

Keywords: bifurcation diagram, predator-prey model.

В работе [1] была рассмотрена плоская автономная система обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющая математическую модель популяции типа «хищник–жертва», следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= rx(1 - \frac{x}{K}) - \frac{mx}{b+x^2}y, \\ \dot{y} &= sy(1 - \frac{y}{hx}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x(t) > 0$, $y(t) > 0$ – популяционные плотности жертвы и хищника, соответственно, r, s, K, h, m – положительные параметры (подробнее см. в [1]).

После масштабирования переменных и параметров, система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - \frac{xy}{a+x^2}, \\ \dot{y} &= y(\delta - \beta \frac{y}{x}), \\ x(t) &> 0, & y(t) &> 0, & a > 0, & \delta > 0, & \beta > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Исследованию системы (2) в рамках качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений была посвящена работа [1]. В этой работе были выяснены некоторые свойства системы (2), такие, например, как наличие

VOLOKITIN, E.P., TRESKOV, S.A., DYNAMICS OF A PREDATOR-PREY MODEL.

© 2010 Волокитин Е.П., Тресков С.А.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00070), Сибирским отделением РАН (междисциплинарный интеграционный проект №107, №119).

Поступила 13 июля 2009 г., опубликована 23 марта 2010 г.

положительно инвариантной области на фазовой плоскости, количество и возможный характер стационаров внутри этой области и т. д. Было показано, что в системе возможно наличие одного или трёх гиперболических стационаров; в случае трёх стационаров один из них является седлом, два других - антисёдлами (устойчивыми или неустойчивыми узлами или фокусами). При исследовании системы изучались встречающиеся в ней локальные бифуркации коразмерности один и два: бифуркация слияния двух или трёх стационаров (the turning point bifurcation, the cusp bifurcation), бифуркация рождения цикла из сложного фокуса (the Andronov-Hopf bifurcation), бифуркация двукратного состояния равновесия с нильпотентной клеткой в линейной части (the Bogdanov-Takens bifurcation) и сопутствующая последней нелокальная бифуркация коразмерности один петли сепаратрисы седла (the loop bifurcation). Особое внимание было уделено вопросу о существовании периодических решений и выяснению их свойств. Эти результаты были впоследствии развиты в работе [2].

В работе [3] были получены результаты, дополняющие исследование модели, проведённое в [1, 2].

В настоящей работе предпринята попытка провести полный параметрический анализ системы (2), принимающий во внимание все перечисленные, а также вновь полученные результаты. В частности, к рассмотрению были привлечены все бифуркации, имеющие место в системе (2), вплоть до коразмерности три. В итоге после такого анализа мы получили перечисление всех возможных грубых фазовых портретов системы (2) и разбиение пространства параметров R_+^3 на области, соответствующие различным грубым фазовым портретам с указанием перестроек фазовых портретов при переходе через границы областей в пространстве параметров. Полученные результаты обеспечивают возможность проведения целенаправленных численных экспериментов.

1. При любых положительных значениях параметров a, β, δ полуполоса $\Pi = \{(x, y) \in R^2 : 0 < x < 1, y > 0\}$ является ω -инвариантным множеством системы (2).

Граница полуполосы Π содержит два стационара системы (2): точки $(0, 0)$ и $(1, 0)$.

Точка покоя $(1, 0)$ при всех значениях параметров является гиперболическим седлом, входящие сепаратрисы которого направлены вдоль оси Ox , а выходящая сепаратриса направлена внутрь полуполосы Π .

Начало координат $(0, 0)$ является неаналитическим сложным состоянием равновесия для системы (2). С целью исследования поведения траекторий в окрестности этого состояния равновесия сделаем замену времени $t = \tau x$. Тогда система (2) превращается в эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2(1-x) - \frac{x^2 y}{a+x^2} \equiv P_2(x, y) + \dots, \\ \dot{y} &= \delta xy - \beta y^2 \equiv Q_2(x, y), \\ x(t) &> 0, y(t) > 0, a > 0, \delta > 0, \beta > 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь точкой по-прежнему обозначается дифференцирование по независимой переменной τ , $P_2(x, y)$, $Q_2(x, y)$ — однородные многочлены второй степени, многочлен заменяет члены степени выше двух.

Для системы (3) начало координат $(0, 0)$ является аналитическим сложным состоянием равновесия: матрица линейного приближения в окрестности точки $(0, 0)$ состоит из нулевых элементов.

Алгоритм исследования таких состояний равновесия предложен в [4]. В результате его применения можно показать следующее:

1) если $\delta \leq 1$, окрестность начала координат в R_+^2 содержит единственный гиперболический сектор, границами которого являются оси координат;

2) если $\delta > 1$, окрестность начала координат в R_+^2 содержит один гиперболический сектор и один параболический сектор, имеющие общую границу: траекторию, выходящую из начала координат под углом $\vartheta = \arctg \frac{\delta-1}{\beta}$. Второй границей гиперболического сектора является ось Oy , второй границей параболического сектора служит ось Ox , исходящие из вершины параболического сектора траектории имеют асимптотику $y = kx^\delta, k \geq 0$.

Описанные возможности изображены схематически на рис. 1. Там показано также поведение траекторий внутри полуполосы Π вблизи экватора.

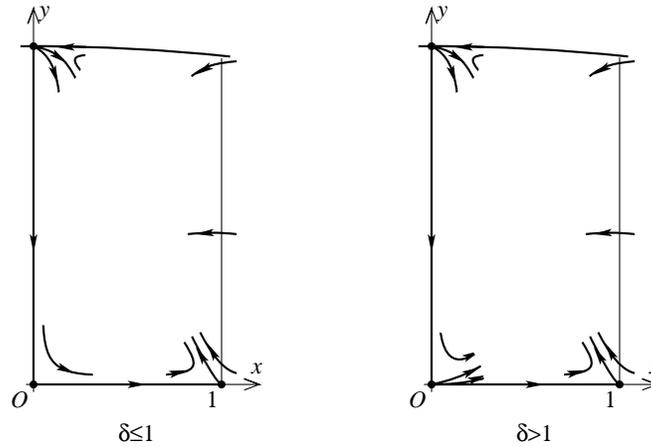


Рис. 1

1. С точки зрения поставленной задачи (проведение полного параметрического анализа) нас в первую очередь интересуют бифуркации коразмерности один, которым в пространстве параметров соответствуют гиперповерхности, образующие границы областей («плёнки» в терминологии Баутина) и отвечающие системам первой степени негрубости, то есть системам с одним из негрубых особых элементов следующего характера, [5]:

I. Двукратное состояние равновесия седло-узел.

II. Сложный фокус первого порядка.

III. Двойной предельный цикл.

IV. Сепаратриса, образующая петлю с не равной нулю седловой величиной.

Условия, задающие локальные бифуркации коразмерности один, касающиеся перестроек фазовых портретов в окрестности стационарных состояний (бифуркация кратности (I), бифуркация Андронова–Хопфа (II)) могут быть заданы с помощью явных аналитических выражений.

Пусть (x_0, y_0) — стационар системы (2). В таком случае координаты x_0, y_0 удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$ax_0^3 - x_0^2 + (a + \delta/\beta)x_0 - a = 0, \quad y_0 = (\delta/\beta)x_0,$$

которая имеет от одного до трёх решений внутри интересующей нас области фазового пространства.

Пусть далее J — матрица линейного приближения системы в окрестности стационара. В таком случае

$$\begin{aligned} F &\equiv x_0^3 - x_0^2 + (a + \delta/\beta)x_0 - a = 0, \quad y_0 = (\delta/\beta)x_0, \\ \det J &= k_1(-a^2\beta + 2a^2\beta x_0 + 2a\delta x_0 - 2a\beta x_0^2 + 4a\beta x_0^3 - \beta x_0^4 + 2\beta x_0^5), \\ \operatorname{tr} J &= k_2(a\delta + ax_0 - 2x_0^2 + \delta x_0^2 + 3x_0^3), \quad k_1 > 0, \quad k_2 > 0. \end{aligned}$$

I. Условия $F = 0, \det J = 0$ после исключения переменной x_0 выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество T , отвечающее наличию в системе кратного стационара. Это множество является кусочно-гладкой поверхностью и может быть задано следующим образом

$$a = \tau^2 - 2\tau^3, \quad \beta = \frac{\delta}{2\tau(1-\tau)^2}.$$

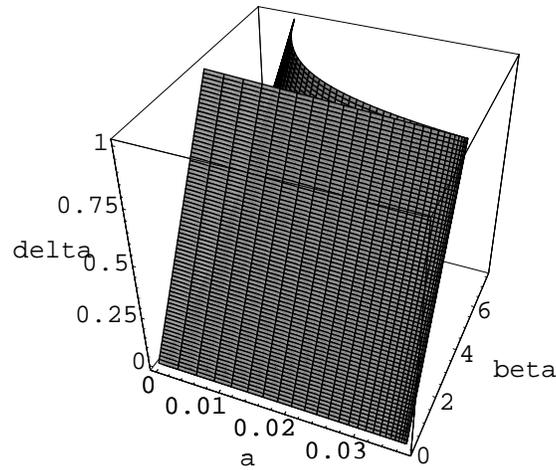


Рис. 2

Рис. 2 даёт представление о строении поверхности T . Точкам внутри ограниченного ею угла отвечает наличие у системы (2) трёх простых стационарных состояний (седла и двух антисёдел), точкам вне этого угла — наличие единственного стационара (узла или фокуса). Точкам на поверхности T , не принадлежащим ребру возврата TT , отвечает наличие в системе одного двукратного (бифуркация коразмерности один) и одного простого состояний равновесия, а точкам на ребре возврата TT — наличие единственного трёхкратного состояния равновесия (бифуркация коразмерности два).

Здесь и далее проверка условий невырожденности для исследуемых бифуркаций проводилась с использованием результатов, изложенных в [6], [2], а также результатов, полученных нами в настоящей работе.

II. Аналогично условия $F = 0, \operatorname{tr} J = 0, \det J > 0$ после исключения переменной x_0 выделяют в пространстве параметров бифуркационное множество H , отвечающее наличию в системе стационара, являющегося сложным фокусом

(собственные числа матрицы линейного приближения являются чисто мнимыми). Это множество является гладкой поверхностью с краем ($\det J = 0$) и может быть задано следующим образом

$$a = \frac{\tau^2(2 - \delta - 3\tau)}{\delta + \tau}, \quad \beta = \frac{\delta(\delta + \tau)}{2\tau(1 - \tau)^2}, \quad 1 - \delta - \tau > 0. \quad (4)$$

Во всех случаях стационар (x_0, y_0) задаётся равенствами

$$x_0 = \tau, \quad y_0 = \delta x_0 / \beta. \quad (5)$$

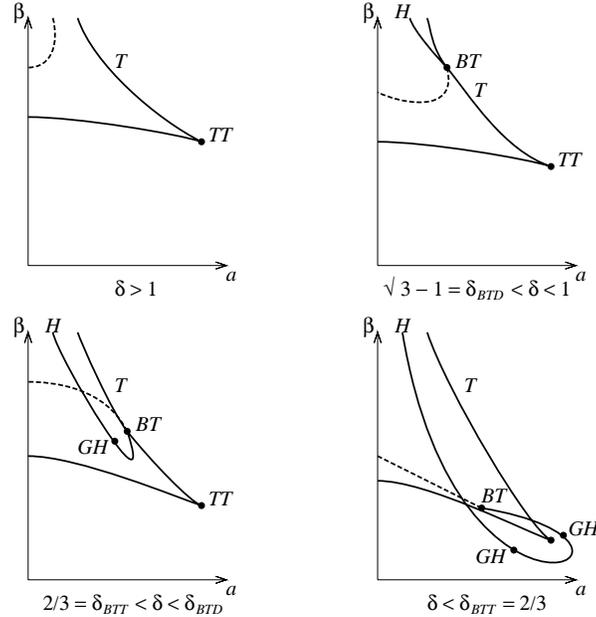


Рис. 3

Поверхность H имеет довольно сложное строение (например, на ней имеется кривая самопересечения, особенности типа «складка», «сборка», «зонтик Уитни»). Поэтому мы не будем приводить здесь её изображение¹.

На рис. 3 схематически приведены сечения поверхностей H и T гиперплоскостями $\delta = c$ при различных значениях c . В этих сечениях поверхности изображаются кривыми, на которые мы будем по-прежнему ссылаться как на кривые H , T . Остальные обозначения, встречающиеся на рисунке, пояснены ниже.

Кривая T имеет характерное остриё, отвечающее ребру возврата. Штриховой линией изображено сечение продолжения поверхности H , определяемое условиями $F = 0$, $\text{tr } J = 0$, $\det J < 0$, с плоскостью $\delta = c$. При соответствующих значениях параметров в системе имеется седло с равной 0 суммой собственных чисел матрицы J .

На рис. 4 показано сечение поверхностей H и T гиперплоскостью $\delta = .25$. Видно, что кривая H имеет точку самопересечения, расположенную в области значений параметров, при которых система имеет три стационара.

¹В работе [5] приведено изображение поверхности, отвечающей бифуркации Андронова-Хопфа, имеющей строение, аналогичное строению поверхности H .

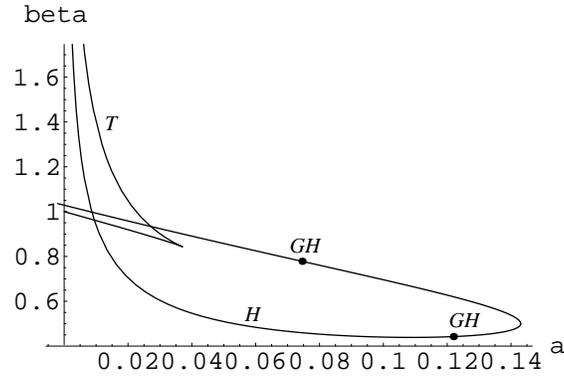


Рис. 4

Условия, определяющие наличие в системе объектов первой степени негрубости типа кратных циклов (III) и гомоклинических траекторий (IV) в нашем случае явным образом заданы быть не могут. Для обнаружения поверхностей, отвечающих соответствующим нелокальным бифуркациям, мы рассматриваем локальные бифуркации более высоких коразмерностей (в нашем случае до порядка три включительно). Локальные бифуркации, имеющие место в системе (2) перечислены в таблице. Используемая терминология в основном заимствована из [8], в скобках приведены другие названия описываемых бифуркаций, встречающиеся в литературе.

Бифуркация	Обозначение
codim 1	
Двукратное равновесие (бифуркация кратности, the turning point)	T
Нейтральное равновесие (бифуркация Андронова-Хопфа)	H
codim 2	
Трёхкратное равновесие (the cusp)	TT
Двукратное нейтральное равновесие (бифуркация Богданова-Тakensа)	HT
Нуль первой ляпуновской величины (the generalized Hopf bifurcation)	GH
codim 3	
Трёхкратное нейтральное равновесие (случай фокуса) (the focus singularity with nilpotent linear part)	HTT
Двукратное нейтральное равновесие с дополнительным вырождением (the cusp singularity with nilpotent linear part)	DHT

Указанные локальные бифуркации также могут быть определены посредством аналитических выражений.

Наличие в системе трёхкратного стационара определяется условием существования трёхкратного корня у уравнения $F = 0$. В пространстве параметров

соответствующее множество образует кривую TT — ребро возврата поверхности T — и может быть задано следующим образом

$$a = 1/27, \beta = 27\delta/8, \delta > 0.$$

Бифуркационное множество HT определяется из условия равенства 0 обоих собственных чисел матрицы J : $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ($F = \det J = \text{tr} J = 0$), является гладкой кривой в пространстве параметров и задаётся в виде

$$a = \tau^2 - 2\tau^3, \beta = \frac{1}{2\tau(1-\tau)}, \delta = 1 - \tau.$$

Бифуркационное множество GH определяется условиями $F = \text{tr} J = l_1 = 0$, $\det J > 0$, где l_1 — первая ляпуновская величина сложного фокуса. Условием невырожденности для этой бифуркации коразмерности два является условие $l_2 \neq 0$, где l_2 — вторая ляпуновская величина.

Напомним, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y)$$

с аналитическими правыми частями, имеющая сложный фокус в точке (x_0, y_0) , подходящим аффинным преобразованием фазовых переменных и масштабированием времени может быть приведена к виду

$$\frac{du}{d\tau} = v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + \dots \quad (6)$$

Мы получили выражения для первой и второй ляпуновской величины сложного фокуса такой приведённой системы, используя алгоритм, предложенный Пуанкаре [9, 10]. Эти выражения имеют вид

$$l_1 = -a_{11}(a_{20} + a_{02}) + b_{11}(b_{20} + b_{02}) + 2a_{20}b_{20} - 2a_{02}b_{02} + 3a_{30} + a_{12} + b_{21} + 3b_{03}, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} l_2 = & 10a_{02}^3a_{11} + 30a_{02}a_{03}a_{11} - 9a_{04}a_{11} - 10a_{02}^2a_{12} - 15a_{03}a_{12} - 15a_{02}a_{13} + \\ & 9a_{14} + 97a_{02}^2a_{11}a_{20} + 27a_{03}a_{11}a_{20} - 72a_{02}a_{12}a_{20} - 21a_{13}a_{20} + 176a_{02}a_{11}a_{20}^2 - \\ & - 80a_{12}a_{20}^2 + 89a_{11}a_{20}^3 + 15a_{02}a_{11}a_{21} - 12a_{12}a_{21} + 18a_{11}a_{20}a_{21} - 3a_{11}a_{22} - \\ & - 75a_{02}^2a_{30} - 18a_{03}a_{30} - 6a_{11}^2a_{30} - 288a_{02}a_{20}a_{30} - 267a_{20}^2a_{30} - 27a_{21}a_{30} - \\ & - 9a_{02}a_{31} - 27a_{20}a_{31} + 9a_{32} + 15a_{11}a_{40} + 45a_{50} + 20a_{02}^3b_{02} + 60a_{02}a_{03}b_{02} - \\ & - 18a_{04}b_{02} + 34a_{02}a_{11}^2b_{02} - 28a_{11}a_{12}b_{02} + 174a_{02}^2a_{20}b_{02} + 24a_{03}a_{20}b_{02} + \\ & + 31a_{11}^2a_{20}b_{02} + 208a_{02}a_{20}^2b_{02} + 18a_{20}^3b_{02} - 30a_{20}a_{21}b_{02} + 12a_{22}b_{02} - \\ & - 63a_{11}a_{30}b_{02} + 66a_{40}b_{02} + 121a_{02}a_{11}b_{02}^2 - 71a_{12}b_{02}^2 + 68a_{11}a_{20}b_{02}^2 - \\ & - 174a_{30}b_{02}^2 + 106a_{02}b_{02}^3 - 18a_{20}b_{02}^3 - 30a_{02}^2b_{03} - 45a_{03}b_{03} - 9a_{11}^2b_{03} - \\ & - 246a_{02}a_{20}b_{03} - 282a_{20}^2b_{03} - 18a_{21}b_{03} - 75a_{11}b_{02}b_{03} - 159b_{02}^2b_{03} - 60a_{02}b_{04} - \\ & - 66a_{20}b_{04} + 45b_{05} + 31a_{02}^2a_{11}b_{11} + 6a_{03}a_{11}b_{11} - 31a_{02}a_{12}b_{11} - 6a_{13}b_{11} + \\ & + 110a_{02}a_{11}a_{20}b_{11} - 70a_{12}a_{20}b_{11} + 79a_{11}a_{20}^2b_{11} - 120a_{02}a_{30}b_{11} - 237a_{20}a_{30}b_{11} + \\ & + 52a_{02}^2b_{02}b_{11} - 3a_{03}b_{02}b_{11} - 3a_{11}^2b_{02}b_{11} + 56a_{02}a_{20}b_{02}b_{11} - 104a_{20}^2b_{02}b_{11} - \\ & - 6a_{21}b_{02}b_{11} - 25a_{11}b_{02}^2b_{11} - 53b_{02}^3b_{11} - 108a_{02}b_{03}b_{11} - 225a_{20}b_{03}b_{11} - \\ & - 15b_{04}b_{11} + 21a_{02}a_{11}b_{11}^2 - 21a_{12}b_{11}^2 + 21a_{11}a_{20}b_{11}^2 - 63a_{30}b_{11}^2 - 4a_{02}b_{02}b_{11}^2 - \\ & - 85a_{20}b_{02}b_{11}^2 - 60b_{03}b_{11}^2 - 18b_{02}b_{11}^3 + 15a_{02}a_{11}b_{12} - 15a_{12}b_{12} + 12a_{11}a_{20}b_{12} - \\ & - 36a_{30}b_{12} - 30a_{20}b_{02}b_{12} - 27b_{03}b_{12} + 27b_{02}b_{13} + 25a_{02}a_{11}^2b_{20} - 25a_{11}a_{12}b_{20} - \\ & - 50a_{02}^2a_{20}b_{20} - 12a_{03}a_{20}b_{20} + 22a_{11}^2a_{20}b_{20} - 192a_{02}a_{20}^2b_{20} - 178a_{20}^3b_{20} - \\ & - 6a_{02}a_{21}b_{20} - 36a_{20}a_{21}b_{20} + 6a_{22}b_{20} - 54a_{11}a_{30}b_{20} + 60a_{40}b_{20} + 110a_{02}a_{11}b_{02}b_{20} - \\ & - 66a_{12}b_{02}b_{20} + 16a_{11}a_{20}b_{02}b_{20} - 138a_{30}b_{02}b_{20} + 120a_{02}b_{02}^2b_{20} - 136a_{20}b_{02}^2b_{20} - \\ & - 66a_{11}b_{03}b_{20} - 180b_{02}b_{03}b_{20} - 25a_{02}^2b_{11}b_{20} - 6a_{03}b_{11}b_{20} - 3a_{11}^2b_{11}b_{20} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 182a_{02}a_{20}b_{11}b_{20} - 265a_{20}^2b_{11}b_{20} - 3a_{21}b_{11}b_{20} - 38a_{11}b_{02}b_{11}b_{20} - 104b_{02}^2b_{11}b_{20} - \\
& 43a_{02}b_{11}^2b_{20} - 124a_{20}b_{11}^2b_{20} - 18b_{11}^3b_{20} - 6a_{02}b_{12}b_{20} - 36a_{20}b_{12}b_{20} - 3b_{11}b_{12}b_{20} + \\
& 9b_{13}b_{20} + 25a_{02}a_{11}b_{20}^2 - 25a_{12}b_{20}^2 - 16a_{11}a_{20}b_{20}^2 - 30a_{30}b_{20}^2 + 50a_{02}b_{02}b_{20}^2 - \\
& 102a_{20}b_{02}b_{20}^2 - 75b_{03}b_{20}^2 - 13a_{11}b_{11}b_{20}^2 - 61b_{02}b_{11}b_{20}^2 - 20a_{20}b_{20}^3 - 10b_{11}b_{20}^3 - \\
& 25a_{02}^2b_{21} - 6a_{03}b_{21} - 3a_{11}^2b_{21} - 102a_{02}a_{20}b_{21} - 107a_{20}^2b_{21} - 3a_{21}b_{21} - \\
& 16a_{11}b_{02}b_{21} - 44b_{02}^2b_{21} - 43a_{02}b_{11}b_{21} - 82a_{20}b_{11}b_{21} - 18b_{11}^2b_{21} - 6b_{12}b_{21} - \\
& 13a_{11}b_{20}b_{21} - 36b_{02}b_{20}b_{21} - 10b_{20}^2b_{21} - 6a_{02}b_{22} - 12a_{20}b_{22} + 3b_{11}b_{22} + 9b_{23} + \\
& 12a_{02}a_{11}b_{30} - 12a_{12}b_{30} + 15a_{11}a_{20}b_{30} - 9a_{30}b_{30} + 24a_{02}b_{02}b_{30} + 24a_{20}b_{02}b_{30} - \\
& 36b_{03}b_{30} + 6a_{11}b_{11}b_{30} + 9b_{02}b_{11}b_{30} + 24a_{20}b_{20}b_{30} + 12b_{11}b_{20}b_{30} - 3b_{21}b_{30} + \\
& 6a_{11}b_{31} + 21b_{02}b_{31} + 15b_{20}b_{31} + 18a_{20}b_{40} + 9b_{11}b_{40} + 9b_{41}.
\end{aligned}$$

Отметим, что найденные нами выражения с точностью до постоянного множителя и равенства $l_1 = 0$ (при вычислении l_2) совпадают с выражениями для ляпуновских величин, найденными другими авторами, см., например [5].

Пусть в системе (2) для стационара (x_0, y_0) имеет место бифуркация Андронова-Хопфа. Согласно (4), (5) имеем

$$a = x_0^2(2 - \delta - 3x_0)/(\delta + x_0), \quad \beta = \delta(\delta + x_0)/(2x_0(1 - x_0)^2), \quad y_0 = \delta x_0/\beta.$$

В таком случае замена переменных

$$\begin{aligned}
u &= -(x - x_0), \\
v &= \frac{x_0(2x_0 - 4x_0^2 + 2x_0^3 - y) - \delta(2xx_0(x_0 - 1) + 2x_0^2 - 2x_0^3 + y)}{2x_0(x_0 - 1)\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}}, \\
\tau &= tx_0\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}
\end{aligned}$$

приводит систему (2) к виду (6)

$$\frac{du}{d\tau} = v + a_{20}u^2 + a_{11}uv + a_{02}v^2 + \dots, \quad \frac{dv}{d\tau} = -u + b_{20}u^2 + b_{11}uv + b_{02}v^2 + \dots$$

где

$$\begin{aligned}
a_{20} &= -(\delta + x_0)(3x_0 - 1)/(2x_0(x_0 - 1)\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}), \\
a_{11} &= (2 - \delta - 3x_0)/(x_0(x_0 - 1)), \\
a_{02} &= 0, \\
b_{20} &= (2\delta^2 - \delta(1 + x_0) - x_0(3x_0 - 1))/(2x_0(x_0 - 1)(1 - \delta - x_0)), \\
b_{11} &= \delta(3 - 3\delta - 4x_0)/(x_0(x_0 - 1)\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}), \\
b_{02} &= \delta/(x_0(x_0 - 1)), \\
a_{30} &= (\delta^2(3x_0 - 1) + 2x_0(1 - 5x_0 + 5x_0^2) + \delta(2 - 11x_0 + 13x_0^2))/ \\
& \quad (2x_0^2(x_0 - 1)^2\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}), \\
a_{12} &= 0, \\
b_{03} &= 0, \\
b_{21} &= \delta(2 + 2\delta^2 - 9x_0 + 9x_0^2 + \delta(-5 + 9x_0))/(2x_0^2(x_0 - 1)^2\sqrt{\delta(1 - \delta - x_0)}).
\end{aligned}$$

Подстановка найденных коэффициентов a_{ij}, b_{ij} в (7) дает (вновь с точностью до положительного множителя) выражение для первой ляпуновской величины сложного фокуса (x_0, y_0) системы (2):

$$\begin{aligned}
l_1 &= 6\delta - 11\delta^2 + 8\delta^3 - 2\delta^4 + 4x_0 - 39\delta x_0 + 42\delta^2 x_0 - 14\delta^3 x_0 - 24x_0^2 + \\
& \quad + 72\delta x_0^2 - 33\delta^2 x_0^2 + 36x_0^3 - 33\delta x_0^3 - 12x_0^4.
\end{aligned}$$

На рис. 5 изображена кривая $l_1 = 0$, а также прямая $x_0 + \delta = 1$, определяющая границу поверхности H . Видно, что бифуркационное множество GH , представляет собой гладкую кривую, содержащую две компоненты связности. Вторая ляпуновская величина l_2 отрицательна во всех точках многообразия

GH (этот факт проверен нами численно), то есть во всех точках кривой GH выполнено условие невырожденности. Отсюда также следует, что сложный фокус системы (2) имеет кратность не выше двух и устойчив, если его кратность равна двум.

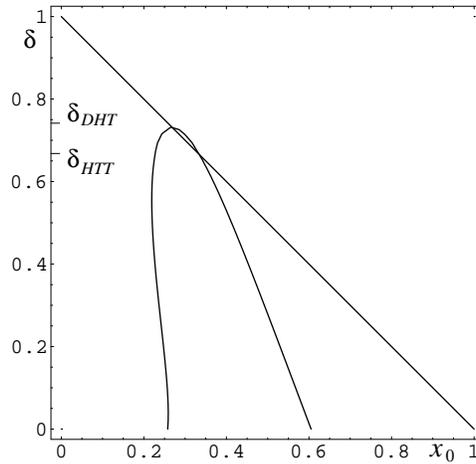


Рис. 5

Бифуркации коразмерности три могут быть обнаружены при проверке нарушения условий невырожденности для бифуркаций коразмерности два.

В [2] показано, что при

$$a = 1/27, \beta = 9/4, \delta = 2/3$$

в системе имеет место бифуркация «трёхкратное нейтральное равновесие (случай фокуса)» (HTT).

Там же показано, что при

$$a = -45 + 26\sqrt{3}, \beta = (5 + 3\sqrt{3})/4, \delta = \sqrt{3} - 1$$

в системе имеет место бифуркация «двукратное нейтральное равновесие с дополнительным вырождением» (DHT).

Параметрические окрестности всех перечисленных локальных бифуркаций хорошо изучены и выяснено, в частности, какие поверхности нелокальных бифуркаций там содержатся. Так, например, бифуркации HT сопутствует нелокальная бифуркация L_1 (L_T) коразмерности один рождения цикла из гомоклинической траектории («малой» левой (правой) петли сепаратрисы), бифуркациям GH, DHT сопутствует бифуркация C — двукратный цикл, бифуркации HTT сопутствует бифуркация L_b рождения цикла из «большой» петли сепаратрисы седла.

Таким образом, мы получаем достоверные сведения о наличии, взаиморасположении и поведении поверхностей, отвечающих нелокальным бифуркациям коразмерности один в районах пространства параметров вблизи множеств локальных бифуркаций. Дальнейшее изучение этих поверхностей проводится на основе общей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также на основе численного моделирования.

Найденные поверхности, отвечающие бифуркациям коразмерности один, разбивают пространство параметров на области, отвечающие различным грубым фазовым портретам системы (2). Это разбиение образует глобальную бифуркационную диаграмму.

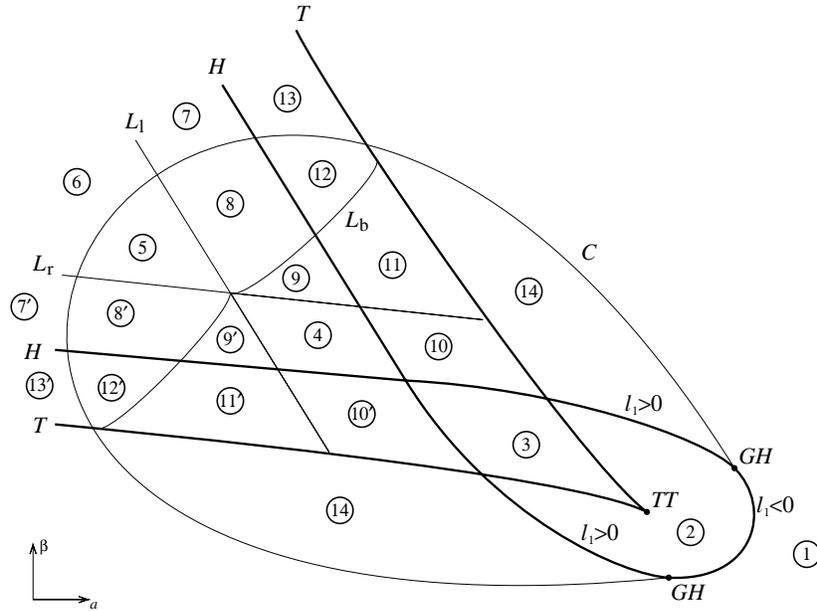


Рис. 6

Мы не будем описывать здесь построенную диаграмму полностью и подробно описывать процесс её построения, поскольку это в известной мере повторяет аналогичные исследования, проделанные в других работах (см. например, [5, 11, 12] и ссылки, приведённые в этих работах)

Чтобы дать представление о строении бифуркационной диаграммы и охарактеризовать полученные результаты, мы приведём «наиболее сложное» сечение бифуркационной диаграммы плоскостью $\delta = c$ при значении c , близком к нулю (рис. 6).

В этом сечении пространство параметров представляется положительным квадрантом плоскости с координатами a, β , бифуркационные множества коразмерности один («плёнки» — границы областей) изображаются кривыми, бифуркационные множества коразмерности два изображаются точками. Мы обозначили эти множества теми же символами, что и отвечающие им бифуркации.

Отметим, что, как обычно принято в подобных случаях, мы даём на рисунке представление лишь о взаиморасположении изображаемых бифуркационных множеств без соблюдения масштаба и иногда даже точной формы кривых. Необходимые уточнения могут быть получены на основе численных экспериментов².

²Следует упомянуть, что такие эксперименты часто требуют вычислений с очень высокой точностью и вряд ли могли бы быть организованы без предварительного плана, основанного на построенной бифуркационной диаграмме.

На рис. 7 приведены схемы грубых фазовых портретов системы (2).

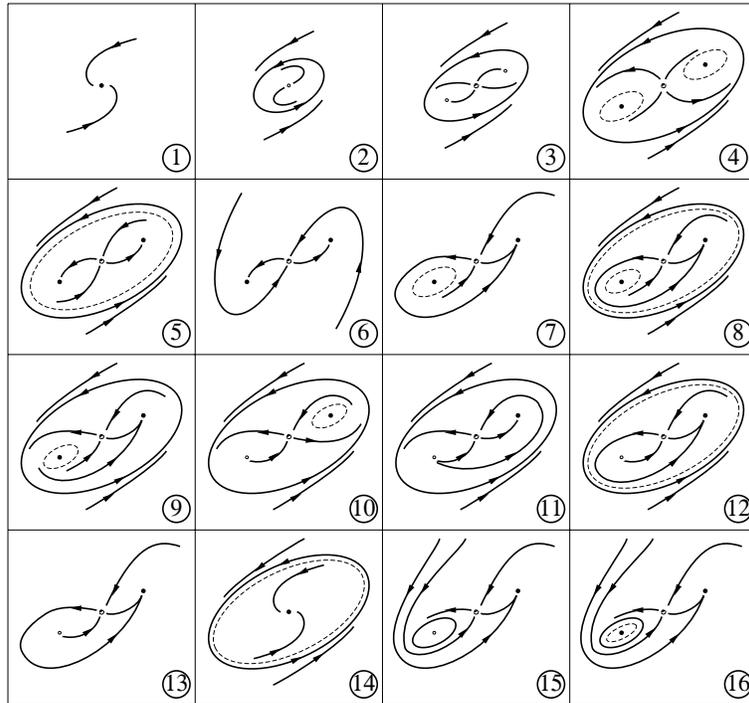


Рис. 7

На этих схемах показано только поведение траекторий, расположенных внутри полуполосы Π , и не учитываются граничные стационары. Устойчивые стационары изображены чёрными кружками, неустойчивые — полыми, для обозначения седла использован наполовину заполненный кружок. Штриховыми линиями изображены неустойчивые циклы.

На приведённом рисунке не даны схемы фазовых портретов, отвечающих областям, помеченным на бифуркационной диаграмме индексами $7'$ – $14'$. Описание этих фазовых портретов получается из описания портретов 7–14 при перестановке местами двух стационаров-несёдел (их «симметричном» отражении относительно седла) и относящихся к ним траекторий.

Для полноты списка возможных фазовых портретов системы (2) на рис. 7 приведены схемы фазовых портретов для областей 15–16 глобальной бифуркационной диаграммы, не попавших в приведённое сечение.

Замечание. Проведенной нами исследование, на наш взгляд, обладает тем преимуществом, что дает более наглядное представление о всех возможных способах динамического поведения исследуемой системы и их взаимосвязи, чем это может быть сделано на основе исследований, проведенных в [1], [2]. В частности, мы обнаружили фазовый портрет системы (2), содержащий три предельных цикла, два из которых содержат внутри себя различные точки покоя; этот факт имеет место при значениях параметров, принадлежащих области 4 построенной нами глобальной бифуркационной диаграммы (см. рис. 8). Вопрос о существовании такого фазового портрета был поставлен в работе [1].

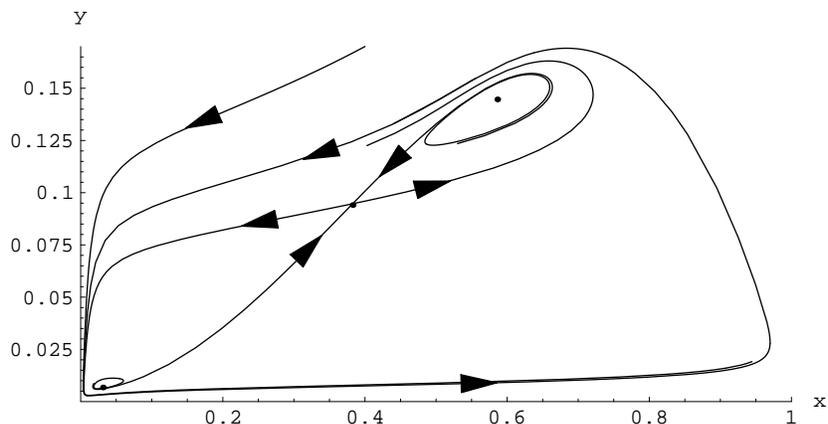


Рис. 8. Траектории системы (2) при значениях параметров $a = 0.007, \beta = 1.01, \delta = 0.25$

Авторы выражают признательность профессору Dongmei Xiao (Shanghai Jiao Tong University) за плодотворную дискуссию и замечания и благодарны рецензенту за внимательное прочтение работы и критические замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Li Y., Xiao D., *Bifurcations of a predator-prey system of Holing and Leslie types*, Chaos, Solitons and Fractals, **34** (2007), 606–620.
- [2] Li Y., Xiao D., *Global dynamics and Hopf bifurcation of a mite predator-prey interaction model*, (в печати).
- [3] Волокитин Е. П., Тресков С. А., *О периодических решениях одной системы «хищник-жертва»*, Сибирские электронные математические известия, **5** (2008), 251–254.
- [4] Veresovskaya F. S., Novozhilov A. S., Karev G. P., *Population models with singular equilibrium*, Math. Biosciences, **208** (2007), 270–294.
- [5] Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., *Методы и приёмы качественного исследования динамических систем на плоскости*, Наука, Москва, 1990.
- [6] Kuznetsov Y. A., *Numerical normalization techniques for all codim 2 bifurcations of equilibria in ODE's*, SIAM J. Numer. Anal., **30**: 4, (1999), 1104–1124.
- [7] Khibnik A. I., Krauskopf B., Rousseau C., *Global study of a family of cubic Liénard equations*, Nonlinearity. 1997. **11**: 6, (1997), 1505–1519.
- [8] Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И., *Портреты бифуркаций*, Знание, Москва, 1989.
- [9] Немыцкий В. В., Степанов В. В., *Качественная теория дифференциальных уравнений*, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, Ленинград, 1949.
- [10] Волокитин Е. П., Тресков С. А., *О ляпуновских величинах сложного фокуса динамической системы на плоскости*, Известия РАЕН. Математика. Математическое моделирование. Информатика и управление. 1997. **1**: 1, (1997), 59–72.
- [11] Быков В. И., Волокитин Е. П., Тресков С. А., *Математическая модель проточного реактора идеального перемешивания: параметрический анализ*, Сиб. журнал промышленной математики. **1**:1, (1998), 57–76.
- [12] Волокитин Е. П., *Параметрический анализ динамической модели процесса кристаллизации*, Сиб. журнал промышленной математики, **3**: 2 (2000), 35–42.

ЕВГЕНИЙ ПАВЛОВИЧ ВОЛОКИТИН
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: volok@math.nsc.ru

СЕРГЕЙ АНДРЕЕВИЧ ТРЕСКОВ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ
E-mail address: treskov@math.nsc.ru