S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

*Том 8, стр. A.11–A.16 (2011)* УДК 519.65
MSC 65D

# СПЛАЙНЫ КАК ИНСТРУМЕНТ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ (К 80-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Ю. С. ЗАВЬЯЛОВА)

Ю. С. ВОЛКОВ, В. Л. МИРОШНИЧЕНКО, С. И. ФАДЕЕВ

Юрий Семёнович Завьялов родился 3 января 1931 года в Зейском районе (прийск Кировский) Амурской области в семье служащих. В этом же году семья переехала в г. Зею, где Ю. С. Завьялов и закончил среднюю школу. В 1948 году он поступил в Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева, который закончил с отличием по специальности механика.

---

Volkov, Yu.S., Miroshnichenko, V.L., Fadeev, S.I., Splines as a geometric modeling tool (to the 80 anniversary of the birth of Yu. S. Zav'yalov).



*Поступила 28 января 2011 г., опубликована 3 февраля 2011 г.*

Ещё студентом он активно занимался научной работой, после окончания университета поступил в аспирантуру к Е. Д. Томилову и в 1956 году защитил кандидатскую диссертацию «Об интегрировании некоторых уравнений неизэнтропического движения газа». С 1956 года стал работать в Томском университете в должности ассистента, доцента, в течение двух лет исполнял обязанности заведующего кафедрой прикладной и вычислительной математики. В связи с созданием нового факультета (физико-технического) часть кафедры была отделена и преобразована в кафедру математической физики вновь образованного факультета; Ю. С. Завьялов был избран заведующим новой кафедрой в 1962 году.

Томский период научной деятельности Ю. С. Завьялова связан с механикой жидкости и газа и проходил под влиянием идей академика Л. И. Седова, представившего две статьи молодого учёного в Доклады АН СССР [1], [2]. Методами теории касательных преобразований им установлен промежуточный интеграл уравнений одномерного неустановившегося движения идеального газа со специальной функцией распределения энтропии, который впоследствии вошёл в монографии по теоретической газовой динамике. Был найден общий интеграл плоско-параллельного установившегося вихревого сверхзвукового движения газа со специальным видом функции скорости. Интегралы использовались для приближённого решения реальных краевых задач. Результаты нашли применение в исследованиях других специалистов, в частности, в магнитной гидродинамике.

Второй период деятельности Ю. С. Завьялова — новосибирский, начался в Институте математики СО АН СССР в 1963 году с должности старшего научного сотрудника. Всего через год он был избран на должность заведующего лабораторией, позже занимал должности заведующего отделом, заместителя директора по научной работе. В Институте математики научная деятельность Ю. С. Завьялова началась с задачи оптимизации динамических систем, зависящих от параметров. Были разработаны способы минимизации функционалов на множестве решений системы дифференциальных уравнений. Результаты применялись в системах автоматизации проектирования: в электронике при разработке больших интегральных схем, в горном машиностроении при проектировании первой в стране крупно-тоннажной фильтрующей центрифуги для обогащения угля.

Другая задача, которой Ю. С. Завьялову пришлось заниматься, также пришла из практики — возникла потребность внедрения в промышленное производство вычислительной техники. Он первым в стране взялся за разработку и внедрение системы автоматизации проектирования сложных изделий (в авиационном производстве) и технологических процессов с помощью вычислительной техники и станков с числовым программным управлением (ЧПУ). Ключевым звеном этой системы явились методы математического описания кривых и поверхностей сложной геометрической формы.

Достаточно быстро стало ясно, что для кривых и поверхностей достаточно сложной формы теоретически разработанные способы представления многочленами и рациональными функциями не подходят, можно было работать только с кусочными многочленными функциями — сплайнами. Конечно, на тот момент такой объект как сплайны в математической литературе уже существовал, однако теоретической литературы по кусочно многочленным функциям среди обширного множества существующей математической литературы по теории интерполяции и аппроксимации было очень мало. А в нашей стране её вообще не было!

Масса литературы имела отношение к интерполяции и восстановлению функций *одной* вещественной или комплексной переменной *аналитическими* функциями. Интерполяция и аппроксимация *многочленами* и *рациональными* функциями предлагали изобилие возможностей, и было доказано множество теорем о *сходимости* таких схем, когда степень стремится к бесконечности. Однако, как хорошо известно, простая полиномиальная интерполяция на равномерных сетках не сходится при стремлении шага сетки к нулю даже для некоторых очень гладких аналитических функций (например, для функции Рунге $1/(1+x^2)$ на $[-5,5]$).

Для *периодических* функций, заданных на равномерных сетках (с шагом постоянной длины), надёжная схема аналитической интерполяции обеспечивается отрезками рядов Фурье (тригонометрическими многочленами), она идеальна для многих теоретических целей.

Однако в этих схемах нет гибкости (шаг должен быть постоянным), они не применимы для большинства граничных условий и очень чувствительны к ошибкам округления при вычислениях.

А о более трудных задачах интерполяции и аппроксимации функций двух и более переменных известно значительно меньше. Теорема Вейерштрасса утверждает, что *любая* непрерывная функция сколь угодно точно может быть приближена на *любом* компактном множестве многочленами достаточно высокой степени [3]. Конструктивно такая аппроксимация может быть достигнута с помощью многочленов Бернштейна, более того, при этом приближаются и производные. С точки зрения существующей теории всё хорошо, чего нам ещё желать. К тому же многочлены и рациональные функции прекрасно подходят для вычисления на компьютерах. Однако даже для функций одной переменной использование многочленов Бернштейна для вычисления приближения многочленами очень *неэкономично* [3]. На практике значительно шире используются интерполяционные формулы Ньютона и Лагранжа, даже несмотря на то что они могут расходиться.

Примерно в это же время (с появлением и распространением вычислительных машин) с такими же проблемами столкнулись и на Западе в передовых компаниях по производству автомобилей, судов, самолётов. Данное обстоятельство побудило создавать и развивать математическую теорию кусочно-многочленных приближений.

В некоторых задачах требовалось использовать кусочные многочлены пятой степени, а в некоторых приложениях достаточно было кусочно квадратических или даже линейных функций, однако более универсальным и удобным оказалось применение кусочно кубических многочленов для приближения гладких кривых и кусочно бикубических многочленов для представления гладких поверхностей.

Кусочно кубические функции одной переменной с непрерывными наклонами и кривизной на самом деле уже использовались инженерами и конструкторами. Для получения плавных кривых и обводов они использовали тонкие упругие рейки (механические сплайны), к которым в определённых точках $x_i$ прикладывались нагрузки $w_i$ в соответствии с классической механической теорией Эйлера-Бернштейна. Такие механические сплайны малой жёсткости использовались как аналоговые вычислители, чтобы кривые прошли через заданные точки.

Наверно, ещё Эйлеру было известно, что энергия деформации, минимизируемая такими механическими сплайнами, пропорциональна $\int y''^2 dx$ при малых прогибах рейки. Использование механических сплайнов для интерполяции гладких близких к горизонтальным кривых, проходящих через заданное множество точек, соответствует вычислению прогибов тонкой рейки с жёсткостью $k$. Третья производная имеет разрыв $w_i/k = \Delta y_i'''$ в точке $x_i$, и прогиб $y(x)$ приближённо описывается кубическим многочленом между точками $x_i$.

Наверно, нельзя сказать, что такие рассуждения очень глубокие или очень новые. Использование кусочно-многочленных функций высокой степени для приближения гладких функций одной переменной было рассмотрено очень обстоятельно ещё И.Шёнбергом в его важной работе [4], где для случая равномерной сетки на всей числовой прямой были получены очень глубокие результаты. Однако в то время на русском языке не было ещё ни одной статьи, использующей слово “сплайн”. В своих первых работах с кусочно кубическими функциями Ю. С. Завьялов предложил их называть “многозвенниками”, но такое название не прижилось [5]. Его докторская диссертация, посвящённая исследованиям по теории интерполирования многозвенными функциями и её применению для автоматизации проектирования форм летательных аппаратов, была защищена в 1972 году. Она хотя и была первой в стране диссертацией по сплайнам, однако слово “сплайн” использовалось только в английском написании “spline”, а на русском языке использовался термин “многозвенная функция”.

Что оказалось достаточно важным, — интерполяция сплайнами быстро *сходится* на широком множестве сеток, не чувствительна к ошибкам округления, легко программируется, и расчёты с ней быстро выполняются на вычислительных машинах. К тому же, разработанные вычислительные схемы по приближению поверхностей оказались также удобны и эффективны для широкого класса гладких поверхностей и быстро прижились в практике.

Помимо внедрения сплайновых методов в проектировании и производстве, Юрий Семёнович Завьялов в Институте математики создал первую в стране научную школу по теории сплайн-функций. Им и его учениками внесён крупный вклад в теорию аппроксимации сплайн-функциями. В случае одной переменной разработана методика получения точных оценок погрешности аппроксимации, построены формулы локальной аппроксимации, точные на функционалах на классах функций, и формулы, обеспечивающие квазинаилучшие приближения. Много внимания уделено методам практического построения сплайнов, разработаны новые алгоритмы для построения интерполяционных, аппроксимационных и сглаживающих сплайнов, подробно исследованы разные типы краевых условий, установлены оценки погрешностей для многих случаев. На основе сплайн-аппроксимации построены новые формулы численного дифференцирования, в частности, дифференцирования при ошибках в исходных данных и интегрирования сильно осциллирующих функций, более эффективные, чем известные ранее. Разработан новый метод решения краевых задач для дифференциальных и интегральных уравнений — метод сплайн-коллокации, позволяющий, в отличие от разностных методов, строить решения задач во всей области с требуемыми дифференциальными свойствами, заданным порядком точности, с точной аппроксимацией граничных условий. Изучена задача изогеометрической интерполяции кубическими сплайнами, установлены достаточные условия, при которых классический кубический сплайн будет обладать нужными геометрическим характеристиками (положительность, монотонность, выпуклость и т.п.), предложены конструкции обобщённых сплайнов, всегда решающие подобные задачи. В случае многих переменных исследованы вопросы интерполирования: существование и единственность решения, сходимость, разработаны алгоритмы. Установлены вариационные свойства полиномиальных сплайнов и исследованы задачи сглаживания исходных данных. По результатам исследований Ю. С. Завьялова и учеников изданы три монографии [6] – [8].

Отличительной особенностью исследований школы Ю. С. Завьялова является тесная связь с прикладными проблемами вычислительной математики и инженерной практики. На базе сплайнов созданы методы моделирования кривых и поверхностей сложной формы (обводы летательных аппаратов, рабочие колёса гидротурбин и т.п.). Это позволило решать геометрические задачи, возникающие при конструировании и технологической подготовке производства, включая расчёт траекторий режущего инструмента при программировании станков с ЧПУ. Разработано программное обеспечение в виде адаптивной интегрированной системы. Различные варианты этой системы внедрены на Новосибирском авиационном заводе им. В. П. Чкалова для технологической подготовки серийного авиационного производства; Ленинградском металлическом заводе для проектирования и изготовления рабочих колёс гидротурбин; на Кировском заводе (Ленинград) для проектирования и изготовления лопаток циркуляционных насосов; Уфимском филиале НИИД и заводе «Прогресс» (Запорожье) для проектирования и изготовления лопаток газотурбинных двигателей. Создана система для моделирования типовых фигур и манекенов в швейном производстве. Отметим, что развитие теории сплайнов и активное внедрение их приложений широко поддерживалось академиками С. Л. Соболевым, Н. Н. Яненко, Г. И. Марчуком.

Ю. С. Завьялов — автор более 70 научных работ, среди которых 4 монографии. Им подготовлено 16 кандидатов и 2 доктора наук. По его инициативе и под его руководством регулярно проводились школы-совещания по теории и приложениям сплайнов, которые способствовали популяризации и широкому внедрению сплайновых методов в различных отраслях промышленности. За разработку автоматизированной технологии подготовки производства Ю. С. Завьялов в 1981 году удостоен премии Совета Министров СССР. Награждён орденом «Знак Почёта» и медалью «Ветеран труда».

## Список литературы

[1] Ю. С. Завьялов, *О некоторых интегралах одномерного движения газа*, ДАН СССР, **103** (1955), № 5, 781–782.

[2] Ю. С. Завьялов, *Об одном классе плоско-параллельных установившихся вихревых движений газа*, ДАН СССР, **116** (1957), № 3, 363–364.

[3] В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*, Физматгиз, Москва, 1954.

[4] I. J. Schoenberg, *Contribution to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Parts A and B. Quar. Appl. Math., **4** (1946), 45–99, 112–141.

[5] Ю. С. Завьялов, *Применение вычислительных систем для решения сложных задач проектирования в машиностроении*, Вычислительные системы. **38** (1970), ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 3–22.

[6] Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва, 1980.

[7] Ю. С. Завьялов, В. А. Леус, В. А. Скороспелов, *Сплайны в инженерной геометрии*, Машиностроение, Москва, 1985.

[8] В. В. Вершинин, Ю. С. Завьялов, Н. Н. Павлов, *Экстремальные свойства сплайнов и задача сглаживания*, Наука, Новосибирск, 1988.

Юрий Степанович Волков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: volkov@math.nsc.ru

Валерий Леонидович Мирошниченко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: miroshn@math.nsc.ru

Станислав Иванович Фадеев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
*E-mail address*: fadeev@math.nsc.ru