S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. A.7–A.10 (2011) УДК 517.98
MSC 46B04

ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ ЛЮБИМЫХ ПРОСТРАНСТВ АКИЛОВА

В. В. ИВАНОВ

Abstract. The answer is given to the question about the equivalence of the topologies generated by two complete norms in the same vector space. This question was raised in a personal letter from A. N. Kolmogorov to L. V. Kantorovich in 1935.

Keywords: Kantorovich's archive, Hamel basis, Bernstein theorem, Lebesque spaces, Banach norms, Kolmogorov's question

Памяти моего учителя
Глеба Павловича Акилова

Если бы в 1959 году не появилась на свет ставшая впоследствии легендарной монография [1], написанная моим учителем Г. П. Акиловым совместно с его учителем Л. В. Канторовичем, мне никогда бы не позвонил С. С. Кутателадзе и не сообщил бы, что в рабочих тетрадях Л. В. Канторовича он обнаружил любопытную запись № 657, сделанную где-то после ноября 1935 года:

Проблема А. Н. Колмогорова. *Одно и то же множество X двумя способами превращено в пространство типа B. Непременно ли топологии по обеим нормам эквивалентны?*

Вспомним, что в те давние и славные времена пространствами «типа B» называли банаховы пространства — линейные нормированные пространства, обладающие тем замечательным свойством, что в них сходятся все последовательности, удовлетворяющие условию Коши. В пространстве Банаха счастливейшим образом сочетаются алгебра, геометрия и топология. Но и это еще не

Ivanov, V. V., Geometry and Topology of Akilov's Beloved Spaces.

Работа поддержана проектом № 107, утвержденным СО РАН.
Поступила 20 января 2011 г., опубликована 21 января 2011 г.

все — упомянутое выше условие полноты позволяет нам, оставаясь в пределах банахова пространства, надежно опираться на интуицию, идеи и результаты, характерные для той великой и огромной науки, что зовется математическим анализом. Однако теперь нам предлагают забыть об этом богатстве, оставив в стороне не только геометрию, но даже алгебру, и сосредоточиться на одной лишь топологии, порожденной полной нормой.

Здесь наша задача — дать ответ на поставленный вопрос. Ответ оказался отрицательным, но мы не исключаем возможности, что «правильная» постановка вопроса не так уж далека от той, что предложена молодым классиком. Быть может, при учете каких-либо топологических инвариантов банаховых пространств, простых и ясных, ответ на тот же вопрос окажется утвердительным. Впрочем, надо признать, что это будет уже не вопрос Колмогорова...

* * *

Конечно же, на самом деле «наша задача» в другом. Нам не дано знать, каким был бы Глеб Павлович сейчас, в его 90 лет. Но хочется порой не только вспомнить, как было когда-то, но и дать волю фантазии, которой вполне доступен и непозволительно приятен вопрос — как могло быть теперь? Мне ясно видно, как уютно было бы обсуждать с ним те забавные проблемы, которыми когда-то интересовались знаменитые ученые мужи в их юные годы. Невозможно без улыбки представлять себе, как он, растягивая слова, говорит, насколько и почему все это очевидно. Только он не мог об этом говорить, когда он был, потому что никому тогда не пришла бы мысль заглянуть в давние записи его учителя... Они тогда были оба. Они ушли почти вместе...

Глеб Павлович был у нашего потока на матфаке НГУ любимым лектором. Он читал нам трехлетний курс Анализа, где чудесным образом переплетались фрагметы обычного и необычного математического анализа, разнообразные линии функционального анализа, местами классического, местами современного, но всегда в неподражаемой форме. Это был удивительный курс. Например, мы не знали матрицу Якоби, но знали производные Фреше и Гато. Нам совсем незнакома была теорема Стокса, но зато была хорошо знакома топология Макки. Даже в первом семестре, когда мы не умели еще дифференцировать экспоненту, пока нам еще не рассказали о том, как с железной необходимостью возникают функции, исторически получившие статус элементарных, мы уже свободно владели понятием ультрафильтра и легко рассуждали о точных границах пустого множества. Недоумевая и робея, но подчиняясь неумолимым правилам игры, мы неизбежно и торжественно приходили к единственно правильному и очаровательно-парадоксальному выводу, что верхней грани, хотя бы раз, но случается быть меньше нижней, тем самым ярко демонстрируя безусловную логическую зрелость и интеллектуальную добросовестность... Только на первый взгляд могло показаться, что горние выси непостижимых абстракций лишали нас возможности усвоить важные «практические» вещи. Ровно напротив — тот, кто способен был дышать этой хрустальной чистотой, был способен легко постигать и земные тайны...

* * *

Мы будем исходить из предположения, что указанную выше свою проблему А. Н. Колмогоров поставил только перед Л. В. Канторовичем, так что его вопрос остался неизвестным просвещенной математической общественности.

Если вдруг наше предположение окажется верным, то некоторые наши выводы обретут шанс оказаться для кого-то немножко неожиданными. Но лучше представить, что с тех пор не прошли три четверти века, и поразмышлять, как можно было бы рассуждать в те времена... После известного прогресса в понимании логических основ математики, которым прославился XX век, каждый подобный вопрос можно понимать по-разному. Мы обсудим его здесь, оставаясь в рамках «классического» функционального анализа и «традиционной» теории множеств, когда можно опираться на принцип выбора Цермело или на лемму Цорна и не сомневаться в теореме Бернштейна о равномощных множествах, в существовании базиса Гамеля у любого векторного пространства, как и в знаменитых теоремах Банаха.

1. Базисы Гамеля. В каждом векторном пространстве есть базис Гамеля. Более того, любое линейно независимое семейство векторов можно дополнить до базиса. При этом все базисы данного пространства эквивалентны между собой, так что их общую мощность можно назвать, например, алгебраической размерностью векторного пространства. Два векторных пространства линейно изоморфны тогда и только тогда, когда их алгебраические размерности равны. Таким образом, чтобы установить линейную изоморфность двух векторных пространств, нужно всего-лишь найти в каждом из них по базису Гамеля и сравнить их по мощности. Но никто еще не видел базисов Гамеля, например, в пространстве $L_1\,[0,1]$ или $L_\infty\,[0,1]$. Как же их сравнить?

2. Теорема Бернштейна. Согласно этой знаменитой теореме, если множество A эквивалентно части множества B и в то же время B эквивалентно части A, то множества A и B эквивалентны. Для наших целей полезно перевести ее на язык векторных пространств.

Теорема. *Рассмотрим два векторных пространства X и Y над одним и тем же полем. Предположим, что существуют линейная инъекция X в Y и линейная инъекция Y в X. Тогда пространства X и Y линейно изоморфны.*

Доказательство. «Выберем» в пространствах X и Y их базисы Гамеля A и B. Если L линейно и инъективно отображает X в Y, то множество A оно взаимно однозначно преобразует в линейно независимую систему $L\,(A)$ пространства Y. Продолжая эту систему до базиса Гамеля пространства Y, а также учитывая его эквивалентность базису B, мы получаем что система $L\,(A)$, а вместе с ней и множество A, эквивалентны некоторой части множества B. Точно так же устанавливается эквивалентность B какой-нибудь части A, если найдется линейная инъекция Y в X. Итак, при указанных выше условиях, базисы A и B равномощны, а пространства X и Y линейно изоморфны. Теорема доказана.

3. Пространства Лебега. Только что доказанная теорема полезна тем, что позволяет легко устанавливать линейную изоморфность пространств, не предъявляя конкретного линейного изоморфизма.

Докажем, например, что пространства Лебега $L_1[0,1]$ и $L_\infty[0,1]$ линейно изоморфны. Поскольку второе из них содержится в первом, одна линейная инъекция у нас уже есть — это обычное вложение. В качестве инъекции «в другую сторону» можно рассмотреть отображение, которое каждой функции $f\,(x)$, суммируемой на отрезке $0 \le x \le 1$, сопоставляет функцию $g(x)$, определяемую как интеграл исходной функции от 0 до x. Ясно, что функция $g(x)$ даже непрерывна по x на нашем единичном отрезке, а это больше чем нужно.

Точно так же устанавливается линейная изоморфность, например, и таких пространств, как $L_1[0,1]$ и $L_2[0,1]$. Интересно, что между ними, очевидно, нет линейно-топологического изоморфизма, хотя они изморфны, как непросто, но можно доказать, не только линейно, но и в топологическом смысле...

4. Нормы Банаха. Рассмотрим два линейных пространства X_1 и X_2 над одним и тем же числовым полем. Пусть L — линейная биекция X_1 на X_2. Если в пространстве X_1 задана норма $||\cdot||_1$, то отображением L она может быть «перенесена» на X_2. А именно, для каждого $x_2 \in X_2$ мы найдем тот единственный элемент $x_1 \in X_1$, для которого $Lx_1 = x_2$, и просто положим $||x_2||_2 := ||x_1||_1$. Легко проверить, что $||\cdot||_2$ будет нормой на X_2. При этом отображение L становится изометрией нормированных пространств X_1 и X_2.

Таким образом, имея то или иное нормированное пространство, мы легко можем превратить любое линейное пространство той же алгебраической размерности в нормированное пространство, изометричное исходному. При этом, из банаховых пространств получаются снова банаховы, поскольку изометрия, как легко понять, сохраняет полноту.

5. Вопрос Колмогорова. Как мы уже знаем, пространства Лебега $L_1[0,1]$ и $L_\infty[0,1]$ изоморфны в категории векторных пространств. С другой стороны, как хорошо известно, первое из них сепарабельно, а второе — нет. Это значит, что они не изоморфны в категории топологических пространств, поскольку сепарабельность — топологический инвариант. Возьмем теперь «чистенькое» линейное пространство X той же алгебраической размерности, что и у наших двух функциональных пространств, и построим в нем две нормы: одну из них мы перенесем с помощью линейной биекции из пространства $L_1[0,1]$, другую — аналогичным образом из пространства $L_\infty[0,1]$. В обоих случаях пространство X станет банаховым, но в первом из них оно окажется сепарабельным, а во втором — нет. Итак, мы пришли к обещанному выводу.

Теорема. *В линейном пространстве могут уживаться банаховы нормы, которые порождают не изоморфные между собой топологии.*

В конце сочинения, где обычно бывают благодарности, мне остается лишь признаться в той тихой радости, которую принесла мне возможность окунуться в атомосферу давно ушедших лет, вспоминая милые сердцу темы и родные интонации и никуда при этом не спешить... И если мне даже сейчас легко говорить на заданную тему, которой мне не приходилось прежде специально заниматься, то лишь благодаря тому счастливому обстоятельству, что в мои молодые годы рядом со мной был Глеб Павлович. И вот теперь, в ожидании дня рождения моего неповторимого учителя, я еще и еще раз убеждаюсь, что время — самая загадочная на этом свете категория...

Список литературы

[1] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ в нормированных пространствах*, 1959, Москва, «Физматгиз».

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru