S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.1–С.181 (2011)

ИТОГОВЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ ПО ИНТЕГРАЦИОННОМУ ПРОЕКТУ СО РАН И ДВО РАН «ОБРАТНЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МИРОВОГО ОКЕАНА»

Под редакцией В.Г. Романова

2011

Содержание

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.3–С.13 (2011) УДК 517.54, 517.956, 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

ИТОГОВЫЙ НАУЧНЫЙ ОТЧЕТ ПО ИНТЕГРАЦИОННОМУ ПРОЕКТУ СО РАН И ДВО РАН: ОБРАТНЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО И АКУСТИЧЕСКОГО ЗОНДИРОВАНИЯ МИРОВОГО ОКЕАНА

В.Г. РОМАНОВ

Abstract. Investigations of inverse and extremal problems for differential or integro-differential equations are presented. Methods of numerical solutions for these problems are developed. These methods are used in some applied problems related to the electromagnetic and acoustic waves propagation.

Keywords: inverse and ill-posed problems, Cauchy problem, electrodynamics, elasticity, viscoelasticity, transport equation, stability estimates, uniqueness, numerical methods.

1. Введение

Проект направлен на развитие новых и адаптацию уже имеющихся методов определения строения неизвестных сред, в частности, придонных областей мирового океана. В качестве информации использованы измерения электромагнитных и (или) акустических сигналов, зондирующих среду. Возникающие при этом фундаментальные проблемы естественно трактовать как обратные задачи для уравнений математической физики. Одной из задач настоящего проекта является создание новых, более совершенных алгоритмов интерпретации наблюдаемых данных.

Цели исследований были определены следующим образом.

Romanov, V.G., Concluding scientific report for the project of Siberian Division of RAS and Fareast Division of RAS: "Inverse and extremal problems of electromagnetic and acoustic sounding of the world ocean".

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

1) Исследование возможности электромагнитного зондирования неоднородной среды на основе радиационного (фотонного) излучения. Выбранная модель основана на полихроматическом интегро-дифференциальном уравнении переноса вместе с краевыми условиями на внешней границе среды и на внутренних поверхностях между различными веществами, входящими в состав сложной (неоднородной) среды. Одной из проблем проекта является задача определения границ внутренних неоднородностей по излучению, измеряемому вне исследуемой среды. Такими границами являются поверхности разрыва коэффициентов уравнения переноса. Знание этих поверхностей дает неплохое представление о неизвестной внутренней структуре. Эта часть исследований относится к специальной задачи интегральной геометрии, в которой по известным интегралам нужно найти поверхности разрывов неизвестной подынтегральной функции. Особенностью такой задачи является тот факт, что подынтегральная функция зависит от большего числа переменных, чем данные задачи. Отметим, что такая постановка вопроса открывает новые возможности успешного исследования задач томографии.

2) Математические вопросы акустики непосредственно связаны с проблемами исследования начально-краевых задач для гиперболических уравнений. Значительный интерес, с точки зрения теории и приложений, представляют обратные задачи акустики, которые заключаются в определении коэффициентов дифференциальных уравнений, отражающих границ и формы источников колебаний. Предполагалось исследование вопросов единственности, устойчивости и разрешимости новых обратных задач акустики, создание новые конструктивных способов их исследования и построение вычислительных алгоритмов решения.

3) При рассмотрении процессов распространения электромагнитных, акустических и упругих волн во многих случаях необходимо учитывать предисторию процесса (память среды). Для электромагнитных волн это связано с явлением дисперсии волн, а для звуковых и упругих волн с эффектом вязкости среды. Математически учет этих эффектов проявляется в появлении в дифференциальных уравнениях интегральных слагаемых типа оператора свертки с ядром, отвечающим "памяти среды". Определение ядра интегрального оператора по наблюдаемый информации о решениях соответствующих уравнений представляет собой новый класс обратных задач. В проекте предполагалось изучение ряда постановок подобных задач.

4) Проблема видимости (или невидимости) подводных объектов имеет непосредственное отношение к задачам зондирования океана. Она была поставлена во время выполнения проекта, при этом были получены новые научные результаты.

5) Создание методов и алгоритмов, перерабатывающих заданную информацию в изображения объектов, является одной из основной целей исследования. Попутно с этим решаются и некоторые смежные математические проблемы.

В выполнении проекта принимали участие сотрудники Института математики СО РАН (г. Новосибирск), Института прикладной математики ДВО РАН, Института проблем морских технологий ДВО РАН (г. Владивосток).

Отчет представлен в форме обзорных статей, в которых дается математическая постановка рассматриваемых задач и приводятся результаты их исследования. В следующем разделе описываются основные полученные результаты.

2. Основные результаты

Исследована задача одноракурсной томографии, когда зондирующий сигнал измеряется только в одном направлении и требуется найти ортогональные проекции (тени) от внутренней неоднородности на площадку измерений (антенну) [5, 6]. Особенностью полученного результата является тот факт, что прямая визуализация не дает представления о неоднородности, но после предложенной обработки сигнала изображение тени появляется. Также изучен случай наложения проекций одних неоднородностей на другие и показано, что, в зависимости от комбинаций коэффициентов поглощения и рассеяния, возможно как улучшение реконструкции, так и ее ухудшение (ИМ СО РАН, ИПМ ДВО РАН).

Рассмотрена актуальная задача интегральной геометрии, когда интегрирование происходит по неизвестному пучку прямых, а неизвестная функция под интегралом зависят от большего числа переменных, чем заданные интегралы. При ограничениях общего характера доказана теорема единственности и предложен соответствующий численный алгоритм [7, 8]. Указано на связь исследованной проблемы с задачами зондирования неизвестных сред (ИМ СО РАН).

Изучены новые математические постановки задач акустического зондирования океана. Построены численные методы решения обратной задачи акустики. Показано, что использование не только характерных частот источников и приемников, но также и амплитуды принимаемого сигнала позволяет повысить разрешающую способность акустического зондирования. В качестве основного примера рассмотрена линеаризованная двумерная обратная задача определения скорости распространения волн в среде. Рассмотрен случай, когда акустические источники и приемники расположены на поверхности воды, исследуемая неоднородность локализована под водой. Вмещающая водная среда предполагается горизонтально слоистой. Построен алгоритм численного решения двумерной обратной линеаризованной задачи акустики. Задача решена при помощи метода регуляризации в классе функций, представимых в виде конечного ряда Фурье по горизонтальной переменной. Показано, что количество членов ряда Фурье, с одной стороны, является параметром регуляризации обратной задачи, а с другой стороны, определяет количество необходимых приемников для однозначного определения исследуемой неоднородности. Разработан алгоритм численного решения и программа на языке C++. Проведена серия тестовых расчетов. Разработан метод оконтуривания неоднородности на основе обращения волнового поля. Метод основан на идее миграции, рассматриваемой во временной области. Показано, что варьируя местоположение источников и приемников, можно добиться достаточно четкой визуализации неизвестного объекта. Метод обладает численной устойчивостью и может быть обобщен на случай трехмерно-неоднородных сред [29]. Исследована задача определения источников акустических колебаний по измерениям акустического давления. Изучена степень некорректности задачи в зависимости от местоположения и количества точек измерения дополнительной информации. Исследование степени некорректности и построение регуляризирующего алгоритма основано на изучении поведения сингулярных чисел оператора обратной задачи [30]. На основе метода Гельфанда-Левитана-Крейна построен метод решения обратной задачи акустики. Система интегральных уравнений записана в векторной форме. Построена матрица ядра интегрального оператора. Проведена серия численных расчетов [31, 69]. На основе продолжения волнового поля построен алгоритм численного решения задачи электромагнитного зондирования. Построен алгоритм и проведены численные расчеты по задаче продолжения поля. Алгоритм позволяет локализовать неоднородности и оценить их электромагнитные свойства [70] (ИМ СО РАН).

В работах [48, 49, 51, 52] исследованы проблемы построения и улучшения качества акустических изображений, полученных гидролокатором бокового обзора. В рамках феноменологической модели, основанной на нестационарном уравнении переноса излучения, сформулирована задача картографии морского дна. Проведен анализ обратной задачи в случае точечной передающей антенны и учете однократного и многократного рассеяния в среде. Показана эффективность применения методов интерполяции функций с финитным спектром для улучшения качества гидролокационных изображений морского дна и приведены результаты вычислительных экспериментов с реальными данными (ИПМ и ИПМТ ДВО РАН).

Разработан экспериментальный комплекс для накопления многоканальных данных, необходимых для отработки гидролокационных устройств. Выполнен анализ применимости современных гидролокационных устройств для реализации принципа синтезирования апертуры и приведены оценки качества полученных первичных экспериментальных данных [1, 27, 28]. Разработана программа для построения обобщённых акустических "картин"морского дна в виде "мозаики", формируемой из множества первичных гидролокационных изображений, получаемых в процессе многогалсовой съёмки гидролокатором бокового обзора (ИПМТ ДВО РАН).

Рассмотрена задача дифракции акустической волны на локальной неоднородности [3, 56]. Эта задача связана с проблемой видимости акустических объектов. Показано существование акустических анизотропных неоднородностей, которые не рассеивают падающую на них акустическую волну. Такие объекты не могут быть обнаружены методами акустической локации. Описан способ построения подобных неоднородностей. Поставлена экстремальная задача [4] о построении упругих неоднородностей, помещенных в жидкую среду, для которых рассеянное поле давлений минимально (ИМ СО РАН, ИПМ ДВО РАН).

Получены теоремы о разрешимости граничной задачи для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде с френелевскими условиями сопряжения на границе раздела сред [38]-[40]. На основе рекурсивного весового метода Монте-Карло разработан эффективный параллельный вычислительный алгоритм решения краевой задачи и проведен численный анализ влияния рассеяния и френелевского отражения на степень поляризации излучения (ИПМ ДВО РАН).

Проведено исследование структуры фундаментального решения для уравнений второго порядка гиперболического типа [55]. В предположении, что коэффициенты уравнения обладают достаточной высокой, но конечной гладкостью, выписана структура фундаментального решения, установлена гладкость коэффициентов разложения сингулярной части решения и охарактеризована гладкость его регулярной части. Этот результат используется при построении алгоритмов расчета распространения акустических волн в неоднородных средах. Использование точных формул при вычислении сингулярной части решения существенно повышает точность расчетов звукового поля (ИМ СО РАН).

Предложен радиографический метод идентификации химического состава неоднородного вещества [43]-[45]. Наиболее эффективно данный метод может быть использован в тех случаях, когда поиск идет на достаточно небольшом множестве возможных веществ. Выбор значений энергий, которые целесообразно использовать для просвечивания исследуемого тела, может существенно зависеть как от размеров тела, так и от его предполагаемого химического состава. Особенность и новизна подхода состоит в том, что при определенных условиях гарантируется единственность решения поставленной задачи даже для сравнительно больших значений измерительных ошибок. В рамках стационарной модели переноса излучения исследована задача управления томографическим контрастом биологических тканей, облучаемых лазерным источником [53]. Показано, что использование просветляющих иммерсионных жидкостей, уменьшающих уровень рассеяния в среде, не всегда приводит к увеличению томографического контраста (ИПМ ДВО РАН).

Показана возможность эффективного применения индикатора неоднородностей в задачах позитронно-эмиссионной томографии [32, 71, 74]. Предложена математическая модель формирования проекционных данных в позитронно-эмиссионной томографии с учетом однократного комптоновского рассеяния и проведена апробация предлагаемой модели. Создан программный продукт, позволяющий моделировать сигнал, регистрируемый компьютерным томографом на энергиях, при которых становится существенным рассеяние по закону Комптона (ИМ СО РАН, ИПМ ДВО РАН).

Проведен анализ применимости диффузионного приближения для полихроматического уравнения переноса излучения [72, 73] в случае, когда среди видов взаимодействия излучения со средой преобладает комптоновское рассеяние. На ряде аналитических и численных примеров продемонстрирована степень близости решения диффузионного уравнения и осредненного решения уравнения переноса излучения (ИПМ ДВО РАН).

Получены результаты, касающиеся непрерывных свойств решения краевой задачи для стационарного уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред [47]. Показано, что френелевская составляющая в операторе сопряжения существенно усложняет структуру множества непрерывности решения краевой задачи (ИПМ ДВО РАН).

Проведено исследование ряда постановок обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и упругости. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений наличием интегральных членов. Интегральный член в уравнениях электродинамики учитывает дисперсию среды, а интегральные слагаемые в уравнениях упругости учитывают вязкость среды. При этом решения соответствующих уравнений в некоторый момент времени оказываются зависящими от предистории процесса, т.-е. определяют "память"среды. Ядра линейных интегральных операторов, входящих в уравнения, зависят от временной и пространственных переменных. Во многих случаях представляет интерес рассмотрение задач об определении этих ядер по наблюдаемой информации о решениях соответствующих дифференциальных уравнений. Несмотря на различие интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и упругости, постановки для них обратных задач и методы их исследования во многом схожи. Это позволяет проводить их изучение с единых позиций. Оценки устойчивости решения задач об определении ядра интегрального оператора в интегро-дифференциальном уравнении электродинамики, учитывающим дисперсию среды, получены в работах [57]-[60], для вязкоупругой среды в работах [61]-[64]. Результаты проведенных исследований докладывались на конференциях [65]-[68] (ИМ СО РАН).

Ряд фундаментальных проблем проекта относятся к эволюционным уравнениям. В работах [11]-[21], [46] исследования направлены на конструктивное построение решений конкретных обратных задач математической физики. Развиваются аналитические методы исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений. При этом существенным элементом является поиск новых представлений решений и коэффициентов уравнений параболического и гиперболического типов. Такие представления решений и коэффициентов найдены, их приложения к конкретным обратным задачам составляет обширную область исследований. Кроме этого, формулируются и доказываются теоремы конструктивного построения решений обратных задач для общих эволюционных уравнений. Излагаются математические постановки некоторых проблем акустического зондирования, связанные в основном с определением формы излучающих объектов. Обсуждаются и предлагаются способы поиска элементов рассеивателей. При этом упор сделан на акустическое зондирование. Проведено исследование нелинейных задач управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации. Кроме теоретических исследований, предпринята практическая реализация алгоритмов и программ автоматического получения формул, дающих решения задач управления, на основе логической системы символьных вычислений (ИМ СО РАН, ИПМ ДВО РАН).

Ряд задач линейной и нелинейной оптики сводятся к векторной краевой задаче Римана. Корректность задачи Римана полностью определяются ее частными индексами. В работах [22]-[25] предложен метод определения частных индексов в случае определенной симметрии задачи Римана. Отметим, что для рассматриваемых в работах [22]-[23] симметрий других методов для определения частных индексов задачи Римана на данный момент не существует, за исключением задачи Римана с положительно определенным матричным коэффициентом. В работе [26] получено достаточно полное исследование интегрального уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале (ИМ СО РАН, ИПМ ДВО РАН).

Предложен алгоритм совместного определения диэлектрической проницаемости и проводимости среды [36]. Было введено понятие опорной частоты среды и показано, что наиболее эффективно определение этих двух величин происходит на частотах близких к опорной частоте среды. Полученный результат нашёл свое применение на практике [54]. Доказано существование производной функционала невязки по координате точки разрыва среды, получено значение производной. На основе проведенного анализа построены алгоритмы по восстановлению не только упругих характеристик среды, но и мощностей этих слоёв [37, 35] (ИМ СО РАН).

3. Заключение

В ходе выполнения проекта проведен широкий круг исследований, связанных с вопросами электромагнитного и акустического зондирования мирового океана, созданы новые вычислительные алгоритмы и проведено их тестирование на модельных и реальных данных.

Полученные результаты существенно развивают теоретические и алгоритмические проблемы зондирования океана, многие из них имеют приоритетный характер и находятся на фронте мировых научных исследований.

При выполнении проекта осуществлялось сотрудничество научных учреждений Сибирского и Дальневосточного отделений. Созданием численных алгоритмов и программ решения прикладных задач занимались коллективы всех институтов, участвующих в проекте. Из приводимого ниже списка подготовленных в ходе проекта научных работ виден интеграционный характер работы между институтами ДВО РАН и ИМ СО РАН. В частности, совместно получены свидетельства о государственной регистрации баз данных [9, 10]. Выполнены совместно работы [3] - [6], [21, 26, 32].

В ходе выполнения проекта в г. Владивостоке были проведены 3 рабочие совещания (2009, 2010, 2011 гг.), в ходе которых обсуждалось выполнение работ по проекту. Кроме того, сотрудники институтов СО РАН и ДВО РАН, участвующие в выполнении проекта, приняли участие в следующих научных мероприятиях по тематике проекта:

1. XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова, 31 августа - 5 сентября 2010 г., Владивосток.

2. Международная конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике", посвященная 110-летию академика М.А. Лаврентьева. Новосибирск, Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 23-27 августа 2010 г.

3. 8th International ISAAC Congress, Moscow, August 22-27, 2011.

4. I Дальневосточная междисциплинарная молодежная научная конференция "Современные методы научных исследований", Владивосток, 8-12 сентября 2011 г.

5. Всероссийская научная конференция "Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления", Владивосток, 11-17 сентября 2011 г.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ПРОЕКТУ РАБОТ

[1] Агафонов И.Б., Золотарев В.В., Мадисон Е.А. Анализ применимости первичных гидролокационных данных для синтезирования апертуры антенн // Подводные исследования и робототехника, 2011, № 1, с. 32-40.

[2] Агеев А.Л., Костоусов В.Б., Агафонов И.Б., Золотарев В.В. Моделирование и обработка траекторного сигнала гидролокатора с синтезированной апертурой. // 3-я Всероссийская научно-техническая конференция "Технические проблемы освоения Мирового океана", 22 -25 сентября 2009 г., Владивосток. Материалы конференции, с. 351-355.

[3] Алексеев Г.В., Романов В.Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики. // Сиб. журн. индустр. матем., 2011, т. XIV, № 2, с. 15-20. Zbl pre05932294

[4] Алексеев Г.В., Романов В.Г., Сиягина Ю.А., Терешко Д.А. Двухпараметрические задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции. // Всероссийская конференция "Успехи механики сплошных сред", 29.09-05.10 2009 г., Владивосток, 7 с.

[5] Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium. // Journal Inverse and Ill-Posed Problems. 2011, V. 18, No. 8, P. 885-893. MR2787699

[6] Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В. Задача одноракурсного зондирования неизвестной среды. // Сиб. журн. индустр. матем. 2011, Т. 14, № 2(46), с. 21-27.

[7] Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Проблема недоопределенности в задаче интегральной геометрии. // ДАН, 2011, т.438, № 1, с. 7-10.

[8] Аниконов Д.С., Коновалова Д.С. Задача интегральной геометрии о неизвестной границе для пучка прямых. // Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, № 5, с. 962-976.

[9] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Назаров В.Г., Прохоров И.В., Суровенко Н.С., Яровенко И.П. Определение контраста неоднородной среды в рентгеновской томографии. // Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2009613135, зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 16.06.2009. Опубликовано в официальном бюллетене <Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем>. 2009. С. 479-480.

[10] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Назаров В.Г., Прохоров И.В., Суровенко Н.С., Яровенко И.П. База данных радиационных характеристик веществ, представляющих интерес в рентгенодиагностике. // Свидетельство о государственной регистрации базы данных № 2009620348, зарегистрировано в Реестре баз данных 19.06.2009. Опубликовано в официальном бюллетене <Программы для ЭВМ, базы данных, топологии интегральных микросхем>. 2009. С. 334-335.

[11] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики. // Сиб. электр. матем. изв., т. 7, 2010, с. 11-61. http://semr.math.nsc.ru

[12] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для параболических уравнений. // Вестник НГУ, 2011 (в печати).

[13] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений и обратные задачи. // Вестник НГУ. Т. 10, № 2, 2010, с. 25–36.

[14] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром. // Препринт № 244, 2010, СО РАН, Институт математики, 22 с.

[15] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В., Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I. // Сиб. журн. индустр. матем., т. 14, № 1, 2011, с. 27-39. Zbl pre05932281

[16] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II. // Сиб. журн. индустр. матем., т. 14, № 2, 2011, с. 28-33.

[17] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Конструктивные методы в нелинейных задачах теории управления. // Сиб. журнал индустр. матем., т. 13, № 2, 2010, с. 30-45.

[18] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи. // Препринт № 247, 2010, СО РАН, Изд-во Института математики, 14 с.

[19] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений и обратные задачи. // Вестник НГУ, т. 10, № 2, 2010, с. 25-36.

[20] Аниконов Ю.Е., Нещадим М.В. Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром. // Препринт № 244, 2010, СО РАН, Институт математики, 22 с.

[21] Аниконов Ю.Е., Ковтанюк А.Е., Нещадим М.В. Некоторые математические задачи акустического зондирования. // J. Inv. Ill-Posed Problems, V. 18, 2011, p. 877-883. MR2787698

[22] Воронин А.Ф. Метод определения частных индексов симметричных матриц-функций. // Сиб. математич. журнал, т. 52, № 1, 2011, с. 54-69. MR2810250

[23] Воронин А.Ф. О методе определения частных индексов симметричных матриц-функций. // ДАН, т. 437, № 4, 2011, с. 448-451.

[24] Воронин А. Ф. Частные индексы унитарной и эрмитовой матриц-функций. // Сиб. матем. журн., т. 51, № 5, 2010, с. 1010-1016. MR2757924

[25] Воронин А.Ф. Исследование интегрального уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром. // Сиб. журн. индустр. матем., т. 12, № 1, 2009, с. 31-39. MR2657207

[26] Воронин А.Ф., Ковтанюк А.Е., Лаврентьев М.М. Краевая задача Римана в исследовании корректности линейных и нелинейных задач математической физики. // Труды первой международной молодежной школы-конференции "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач", Сиб. электр. матем. изв., 2010, с. 112-122.

[27] Золотарев В.В., Ходоренко М.С. Программные средства представления гидролокационных данных. // Подводные исследования и робототехника, № 2/8, 2009, с. 16-21.

[28] Золотарев В.В., Ходоренко М.С. Разработка программных средств для мозаицирования гидролокационных изображений. // 3-я Всероссийская научно-техническая конференция "Технические проблемы освоения Мирового океана", 22 -25 сентября 2009г., Владивосток. Материалы конференции, с. 307-310.

[29] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Акустическое зондирование методами линеаризации и обращением волнового поля. // Сиб. журнал индустр. математики, т. 7, 2010, С.199-С.206.

[30] С.И. Кабанихин, М.А. Шишленин, Криворотько О.И. Восстановление источника акустических колебаний. // Сиб. журнал индустр. математики, т. 8, 2011 (принята в печать).

[31] Kabanikhin S.I., Shishlenin M.A. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation. // J. Inv. Ill-Posed Problems, v. 18, No 9, 2011, p. 979-996. MR2787706

[32] Казанцев И.Г., Яровенко И.П., Прохоров И.В. Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронно-эмиссионной томографии. // Вычислительные технологии, 2011, т. 16, № 6 (в печати).

[33] Karchevsky A.L. Simultaneous reconstruction of permittivity and conductivity. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2009, v. 17, No. 4, p. 385-402. MR2543250

[34] Karchevsky A.L. Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers. // Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, 2010, v. 18, p. 371-388. MR2729410

[35] Карчевский А.Л. Восстановление продольной и поперечной скоростей и границ тонких слоёв в тонкослоистой пачке. // Сиб. журн. вычисл. матем., 2012, т. 15, № 1, с. 69-84.

[36] Kovtanyuk A.E. Some inverse problems for the polarized-radiation transfer equation. // The Fifth International Conference: "Inverse Problems: Modeling & Simulation", 24-29 May 2010, Antalya, Turkey, Abstracts, Izmir University. P. 177.

[37] Ковтанюк А.Е. Краевая задача для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде. // XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. 31 августа - 5 сентября 2010 г., Владивосток. Сборник докладов [электронный ресурс]; Владивосток: ИАПУ ДВО РАН 2010; - 908 с.; объем 646 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM); ISBN 978-5-7442-1500-2. С. 242-247.

[38] Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. Краевая задача для уравнения переноса поляризованного излучения в слоистой среде. // Дальневост. матем. журн., 2010, т. 10, № 1, с. 50-59.

[39] Kovtanyuk A.E., Prokhorov I.V. A boundary-value problem for the polarized-radiation transfer equation with Fresnel interface conditions for a layered medium. // Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, Volume 235, Issue 8, p. 2006-2014. MR2763121

[40] Kovtanyuk A.E., Nefedev K.V., Prokhorov I.V. Advanced Computing Method for Solving of the Polarized-Radiation Transfer Equation. // Lecture Notes in Computer Sciences: Methods and Tools of Parallel Programming Multicomputers, Springer, v. 6083, 2010, p. 268-276.

[41] Ковтанюк А.Е., Суровенко Н.С., Агафонов И.Б., Золотарев В.В. Восстановление сигналов по неравномерным выборкам. // 3-я Всероссийская научно-техническая конференция "Технические проблемы освоения Мирового океана", 22 -25 сентября 2009г., Владивосток. Материалы конференции, с. 356-360.

[42] Ковтанюк А.Е., Сущенко А.А., Агафонов И.Б., Золотарев В.В. Восстановление акустических сигналов по зашумленным выборкам. // Материалы 7-го Всероссийского симпозиума "Физика геосфер", 5-9 сентября 2011, Владивосток, с. 143-147.

[43] Ковтанюк А.Е., Назаров В.Г., Построение таблиц базы данных томографической различимости различных пар материалов. // Свидетельство о государственной регистрации программ № 2011610124, зарегистрировано в Реестре баз данных 11.01.2011.

[44] Ковтанюк А.Е., Назаров В.Г., Прохоров И.В., Яровенко И.П. Способ идентификации материалов путем многократного радиографического облучения. // Патент на изобретение Российской Федерации №2426102. Опубликовано: 10.08.2011 Бюл. № 22. Приоритет: 11.05.2010.

[45] Назаров В. Г. Определение химического состава неоднородного тела методом мультиэнергетической радиографии. // Сиб. журн. индустр. матем., 2010, т. 13, № 1, с. 72-83. Zbl pre05932230

[46] Нещадим М.В., Чупахин А.П. Об особых решениях в модели движения неоднородной среды. // Тезисы докладов Международной конференция "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике" , посвященная 110-летию академика М.А.Лаврентьева. Новосибирск, Россия, Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 23-27 августа 2010 г.

[47] Прохоров И.В. О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения. // Матем. заметки, 2009, т. 86, № 2, с. 256-272. MR2584559

[48] Прохоров И.В., Золотарев В.В., Агафонов И.Б. О задаче акустической локации морского дна. // XXXV Дальневосточная математическая школа-семинар имени академика Е.В. Золотова. 31 августа - 5 сентября 2010 г., Владивосток. Сборник докладов [электронный ресурс]; Владивосток: ИАПУ ДВО РАН 2010; - 908 с.; объем 646 Мб; 1 опт. компакт-диск (CD-ROM); ISBN 978-5-7442-1500-2. С. 338-344.

[49] Прохоров И.В., Золотарев В.В., Агафонов И.Б. Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане. // Дальневост. матем. журн., 2011, т. 11, № 1, с. 76-87.

[50] Прохоров И.В., Золотарев В.В., Агафонов И.Б. О задаче картографии морского дна. // Материалы 7-го Всероссийского симпозиума "Физика геосфер" , 5-9 сентября 2011, Владивосток, с. 375-379.

[51] Прохоров И.В., Мун В.М., Краевая задача для уравнения переноса амплитудно-модулированного излучения. // Дальневост. матем. журн., 2009, т. 9, № 1/2, с. 150-160. MR2742465

[52] Прохоров И.В., Суровенко Н.С., Агафонов И.Б., Золотарев В.В. Математическое моделирование процессов распространения акустических и электромагнитных полей в случайно-неоднородных средах. // Материалы 3-й Всероссийской научно-технической конференции "Технические проблемы освоения Мирового океана" , 22-25 сентября 2009, Владивосток, с. 244-248.

[53] Прохоров И.В., Яровенко И.П. Анализ томографического контраста при иммерсионном просветлении слоистых биотканей. // Квантовая электроника, 2010, т. 40, № 1, с.77-82.

[54] Пудова М.А., Ельцов И.Н., Карчевский А.Л. Оценка возможности одновременного определения удельной электропроводности и диэлектрической проницаемости разреза скважины по данным ВИКИЗ. // Каротажник, 2010, т. 194, с.83-98.

[55] Романов В.Г. О гладкости фундаментального решения для гиперболического уравнения второго порядка. // Сиб. матем. журн., 2009, т. 50, № 4, с. 883-889. MR2583627

[56] Романов В.Г. Обратная задача дифракции для уравнений акустики. // ДАН, 2010, т. 431, № 3, с. 319-321. MR2682716

[57] Романов В.Г. Оценка устойчивости решения задачи об определении ядра в интегро-дифференциальных уравнениях электродинамики. // ДАН, 2011, т. 439, № 4, с. 451-455.

[58] Романов В.Г. Задача об определении ядра уравнений электродинамики для дисперсных сред. // ДАН, 2011, т. 440, № 1, с. 21-24.

[59] Романов В.Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики. // Сиб. матем. журн., 2011, т. 52, № 4, с. 861-875. Zbl pre05963635

[60] Романов В.Г. Обратные задачи для уравнений электродинамики. // Сиб. электр. матем. изв., 2011, т. 8 (в печати).

[61] Романов В.Г. Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязко-упругости. // Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010, с. 246 - 253.

[62] Романов В.Г. Двумерная обратная задача вязкоупругости. // ДАН, 2011, т. 440, № 3, с. 310-313.

[63] Романов В.Г. Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязкоупругости. // Сиб. журн. индустр. матем. (принята в печать).

[64] Романов В.Г. Трехмерная обратная задача вязкоупругости. // ДАН, 2011, т. 441, № 4 (в печати).

[65] Романов В.Г. Оценка устойчивости решений в обратных задачах электродинамики. //Тезисы докладов VI международной конференции по математическому моделированию, 3-8 июля 2011, Якутск, СВФУ, с. 15-16.

[66] Романов В.Г. Двумерная обратная задача вязкоупругости. // Гольдинские чтения. Материалы конференции, посвященной 75-летию со дня рождения академика РАН С.В. Гольдина, Новосибирск, ИНГГ, 1-5 августа 2011, с. 11.

[67] Romanov V.G. Stability estimates of solutions in some inverse problems. // Abstracts of 8th International ISSAC Congress, Moscow, August 22-27, 2011, p. 305.

[68] Романов В.Г. Двумерная обратная задача вязкоупругости. // Фундаментальные и прикладные вопросы механики и процессов управления. Аннотации докладов Всероссийской конференции, посвященной 75-летию со дня рождения академика В.П. Мясникова, Владивосток, 11-17 сентября 2011, с. 25.

[69] Шишленин М.А. Прямой метод решения обратной задачи акустики. // Сиб. электр. матем. изв., 2010, т. 7, С.123-С.129.

[70] Shishlenin M.A. Direct and inverse problems of electrodynamics. // Abstracts of the 8th International ISAAC Congress, 22-27 August 2011, Moscow, p. 306.

[71] Яровенко И.П. Численные эксперименты с индикатором неоднородности в позитронно-эмиссионной томографии. // Сиб. журн. индустр. матем., 2011, т. 14, № 1, с. 140-149.

[72] Яровенко И.П., О диффузионном приближении для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния. // Дальневост. матем. журн., 2009, т. 9, № 1/2, с. 209-218. MR2742473

[73] Яровенко И.П. Исследование применимости диффузионного приближения для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния. // Дальневост. матем. журн., 2011, т. 11, № 1, с. 99-107.

[74] Яровенко И.П., Ковтанюк А.Е. Моделирование сигнала, регистрируемого рентгеновским томографом для диапазонов энергии, где преобладает комптоновское рассеяние. // Свидетельство о государственной регистрации программ № 2011614227, зарегистрировано в реестре баз данных 30.05.2011.

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.14–С.36 (2011) УДК 517.958, 681.883.054, 551.462.8
MSC 45K05, 85A25, 35Q60, 65N21

ПОСТАНОВКА И ПРОВЕДЕНИЕ МОРСКИХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО НАКОПЛЕНИЮ И АНАЛИЗУ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ОТРАБОТКИ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ГИДРОЛОКАЦИОННЫХ УСТРОЙСТВ

И.Б. АГАФОНОВ, В.В. ЗОЛОТАРЕВ, Е.А. МАДИСОН, М.С. ХОДОРЕНКО

Abstract. A structure of the experimental complex designed to accumulate multi-channel data needed for testing advanced sonar devices is briefly described. The assess of quality of the accumulated primary experimental data are submitted. The analysis of their applicability for realizing the principle of synthetic aperture sonar is performed. Some assistive technologies and software are presented. The tasks to improve the equipment, techniques and algorithms are listed.

Keywords: Synthetic aperture sonar, Multichannel array, Signal processing, Coherence, Sonar data analysis.

Обзор современного состояния и вводные замечания

Вопросы повышения угловой разрешающей способности гидролокационных антенн всегда относились к ключевым задачам гидроакустики [1]. На основе изучения специфики работы гидролокационных устройств и с учётом обозначившихся в мировой практике тенденций в [2] была показана перспективность использования гидролокатора бокового обзора с синтезированной апертурой (ГБО СА) в качестве наиболее эффективного на данный момент дистанционного обзорно-поискового средства. ГБО СА (в англоязычной терминологии SAS – Synthetic Aperture Sonar) сочетают в себе, с одной стороны, характерную для

Agafonov, I.B., Zolotarev, V.V., Madison, E.A., Khodorenko, M.S., Formulation and implementation of marine experiments on the collection and analysis of multi-channel data for development next-generation sonars.

Работа выполнена в рамках гранта конкурса интеграционных проектов ДВО и СО РАН (проект № 09-II-CO-01-004).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

низкочастотных ГБО большую дальность действия и, с другой стороны, очень высокую разрешающую способность, не уступающую разрешению высокочастотных ГБО. Известно [3], что азимутальное разрешение любого локатора напрямую связано с размерами антенны. «Синтезированные» (виртуальные) антенны, формируемые чисто информационным способом, позволяют получить высокую разрешающую способность, недостижимую путём увеличения размеров физической антенны, поскольку размеры последней, как правило, не могут превышать размеров носителя. При синтезировании в качестве физического приемника используются простые антенны малых размеров d_a. Классические оценки [4-5] показывают, что потенциальная линейная разрешающая способность вдоль траектории движения δ_x для фокусированного локатора с синтезированной апертурой не зависит ни от дальности до цели, ни от значения рабочей частоты, но связана только с размером физической антенны простым соотношением:

$$\delta_x \approx d_a/2. \tag{1}$$

В [1-2] также отмечено, что традиционные алгоритмы обработки информации, давно применяемые в радиолокации, находят при гидролокационном синтезировании весьма ограниченное употребление, что обусловлено двумя определяющими факторами.

Первый фактор связан со спецификой среды распространения сигналов. Водная среда в значительно большей степени оказывает влияние на характер распространения гидролокационных сигналов, нежели атмосфера на распространение эхосигналов радиолокационных. Деструктивное влияние водной среды может быть обусловлено не только её турбулентностью – даже в спокойной, но сильно стратифицированной среде (что характерно и для мелководных морей, и для приповерхностного слоя глубокого океана) приходится учитывать такие явления, как интерференция звука на внутренних волнах, многолучёвость распространения и т.д.

Второй фактор связан с трудностями траекторных измерений. Действительно, для эффективного синтезирования требуется знание относительных координат на длине синтезирования с точностью до долей длины волны. Так для низкочастотного (НЧ) гидролокатора класса 100 кГц точность относительного координирования должна быть не хуже $1-2$ миллиметров. Для высокочастотных (ВЧ) локаторов класса 500 кГц требуемая точность координирования уже составляет доли миллиметра. Ни спутниковые, ни инерциальные, ни гидроакустические навигационные системы (ГАНС) такую точность обеспечить не могут.

В 70-90-х годах в литературе по гидроакустике было опубликовано немало статей по синтезированию и гидролокационных апертур. В большинстве ранних теоретических статей [4-5] повторялись радиолокационные подходы, сочетавшиеся с оценками влияния неизбежных деструктивных факторов – погрешностей в определении координат подводного носителя антенны и флуктуирующих акустических характеристик морской среды. Делался вывод о том, что реализация эффективного ГБО СА будет невозможна до тех пор, пока не будет принципиально решена проблема надёжного определения пространственного положения антенны с вышеупомянутой точностью.

Тем не менее, в последние годы появились публикации, свидетельствующие об успешных испытаниях экспериментальных образцов ГБО СА сверхвысокого разрешения, что дало основания ряду авторов [1,6,7] заявить о «революционном прорыве» в области гидролокации. Особого внимания заслуживают результаты деятельности зарубежных фирм целевого назначения и временных творческих коллективов, собранных по инициативе государственных органов и военных ведомств из представителей ведущих научных и научно-производственных организаций (в том числе и из представителей университетской науки) для реализации наукоёмких проектов гидролокационной «техники 21-го века». К таким коллективам можно отнести разработчиков гидролокаторов с синтезированной апертурой (SAS), например [1,7], товарищество фирм "Dynamics Technology, Inc."(DTI) и Raytheon Naval and Marine Systems (RSC), финансируемое агентством передовых оборонных исследовательских проектов Министерства обороны США DARPA (Defense Advanced Research Projects Agency), а также целевое товарищество фирм «GeoAcoustics, Ltd» и «QinetiQ», финансировавшееся Управлением по исследованиям в области электроники DERA (Defence Electronic Research Agency). Продукт первого из названных товариществ «DARPA SAS» по своей главной функции обладает выдающимися тактико-техническими характеристиками: разрешающей способностью 5×5 см в полосе обзора 2×500 м и 10×10 см в полосе обзора 2×1000 м. По сути дела, в нём превзойдена разрешающая способность, характерная для ВЧ ГБО высокого разрешения, но при этом сохранена широкая полоса обзора, характерная для низкочастотных гидролокаторов. Но если «DARPA SAS» остался уникальным опытным образцом, то изделие "GeoSAS» фирм «GeoAcoustics, Ltd» и «QinetiQ» позиционировано не иначе, как «первый коммерчески доступный сонар с синтезированной апертурой» [8]. Этот локатор можно отнести к разряду многофункциональных: помимо антенны и электроники, реализующих главную функцию – синтезирование апертуры, в нём содержаться также все компоненты для реализации очень важной дополнительной функции – получения батиметрических данных.

Наиболее впечатляющих успехов в разработке SAS достигла компания «Kongsberg». Характеристики её гидролокатора «HISAS 1030» по комплексу параметров превосходят характеристики локаторов других фирм [9]. Благодаря применению по каждому борту сдвоенной антенны длиной 1270 мм в «HISAS 1030», помимо режима синтезирования реализован также и интерферометрический режим, что позволило формировать батиметрические данные. Центральным узлом локатора "HISAS 1030"является узкоспециализированный скоростной вычислитель, реализующий алгоритм синтезирования апертуры – алгоритм DPCA (Displaced Phase Centre Analysis). Ради всемерного повышения быстродействия, этот базовый рабочий алгоритм реализован аппаратно, что позволило получать результаты синтезирования в реальном масштабе времени. Гидролокатор «HISAS 1030», помимо названных функций, содержит узел подавления реверберации. Кроме того, «HISAS 1030» опционально в комплексе с инерциальной навигацией может быть использован и как высокоточный 3-мерный измеритель перемещения и скорости. На рис. 1,2 с пояснениями представлены образцы гидролокационных изображений, полученных с помощью гидролокатора «HISAS 1030», работающего в составе автономного подводного аппарата (АНПА) «Hugen». Успехи в создании SAS во многом были обусловле-

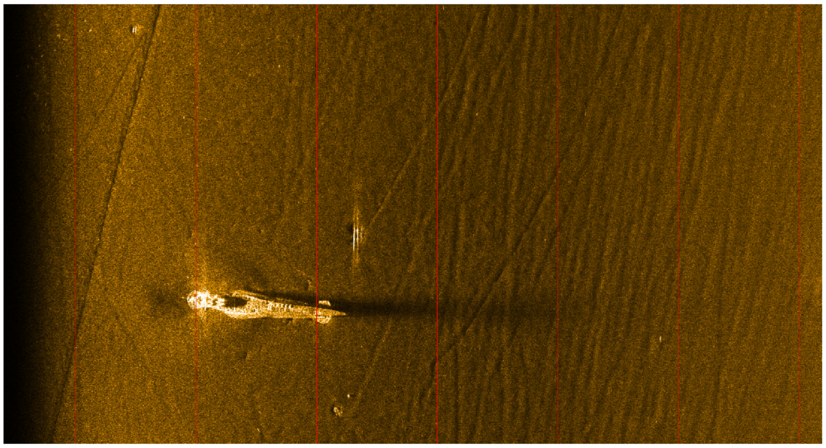


Рис. 1. Обзорное гидролокационное изображение подводной лодки времён II Мировой войны, полученное с помощью гидролокатора «HISAS 1030» на борту АНПА «Hugen».

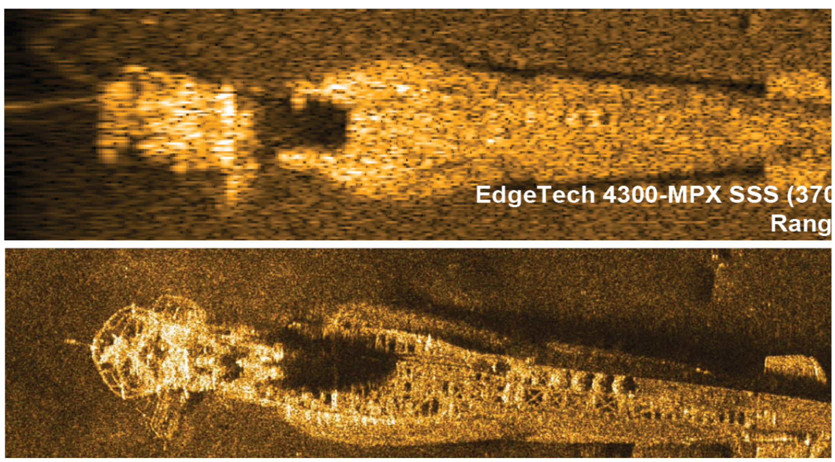


Рис. 2. Детализированные ГБО-изображения той же цели, полученные классическим ГБО высокого разрешения (вверху) и гидролокатором «HISAS 1030» (внизу).

ны отходом от традиционных решений и базировались на новых информационных принципах, в соответствии с которыми недостающая для синтезирования траекторная информация восстанавливалась с помощью алгоритма DPCA из самого эхосигнала. При этом прямые навигационные измерения дополнялись поправками, вычисляемыми в результате действия «микронавигационных» алгоритмов, что позволило получить на протяжении каждого текущего участка синтезирования взаимные (относительные) координаты с точностью до миллиметра. Более того, в процессе навигационной коррекции DPCA частично компенсируются и искажения фазы эхосигналов, прошедших через флуктуирующую среду.

Постановка задачи моделирования. Концепция алгоритма синтезирования

Основной «микронавигационный» алгоритм «смещенного фазового центра» (DPCA – Displaced Phase Centre Analysis), широко использующийся в современной гидролокации для синтезирования апертур [10-11], предполагает наличие многоэлементной приёмной антенны (решетки) с блоками усиления и первичных обработки гидролокационных данных. Элементы решетки располагаются в линию вдоль направления перемещения. Диаграмма направленности (ДН) облучающей антенны перекрывает ДН каждого элемента приёмной решетки. Цель применения алгоритма состоит в компенсации вдольтраекторного (от зондирования к зондированию) смещения носителя антенны, путём вычисления компенсирующего условного смещения в противоположном направлении. Сигнал, поступающий от системы из N приёмных элементов размером D, может быть сопоставлен (приписан) набору размером $D/2$. При этом скорость носителя устанавливается равной

$$v_p = \frac{ND}{2} T_z, \tag{2}$$

где T_z – период зондирования.

Анализ показывает, что для устранения неоднозначностей скорость v_p не должна превышать

$$v_{p_{max}} = \frac{cD}{4X_s} N, \tag{3}$$

где X_s – полоса обзора (с одного борта) и c – скорость звука в воде.

Для адекватного синтезирования апертуры необходимы корректировки фаз эхосигналов, соответствующие геометрии их распространения и форме реальной траектории антенны с учётом возмущений движения. Весьма желателен учёт дестабилизирующих факторов, обусловленных неоднородностью водной среды. В настоящем отчёте нет возможности детально осветить эти вопросы, но в этом направлении с участием авторов был выполнен ряд работ [11-19], определяющих основу данной разработки.

При разработке рабочего макета для проведения экспериментов в натурных (морских) условиях особое внимание было уделено вопросу о количестве приёмных и передающих каналов. Большинство известных изделий SAS имеют по одному каналу излучения. Это означает, что вся площадь обзора облучается единым импульсом без какого-либо углового сканирования. Простые SAS (KIWI SAS, SAMI SAS), а также радиолокационные станции с синтезированием апертуры имеют всего по одному приёмному каналу. Это означает, что:

а) они не могут одинаково эффективно и одновременно работать в режиме обычного бокового обзора (без синтезирования) и в режиме синтезирования апертуры;

б) этим локаторам свойственны ограничения в возможностях компенсации маневра или траекторных погрешностей (что, впрочем, спутниковым РСА и не требуется);

в) в этих локаторах невозможно организовать динамическую перефокусировку по дальности на аппаратном уровне, но и при использовании перефокусировки, программно-реализуемой в режиме СА, неизбежны определённые издержки, сводящиеся, прежде всего, к снижению соотношения «сигнал/шум»;

г) для одноканальных локаторов алгоритм DPCA становится просто неприменимым, и это обстоятельство, пожалуй, можно считать определяющим фактором, делающим одноканальные SAS менее перспективными.

Более интересны по своим тактико-техническим возможностям многоканальные ГБО СА. Характерно, что наилучшие образцы многофункциональны. Они одинаково хорошо работают и в традиционном ГБО-режиме, и в режиме синтезирования апертуры. Большинство недостатков и ограничений из перечня «а»-«г» им не свойственны. Угловые колебания носителя в многоканальных локаторах могут быть скомпенсированы ещё в реальном времени на стадии первичной обработки, что заметно экономит ресурс бортового процессора.

Аппаратное обеспечение метода синтезирования гидролокационной апертуры

Исходя из вышеизложенного, при разработке макета гидролокационного устройства с синтезированием апертуры предпочтение было отдано многоканальному варианту. На первых этапах работ было решено ограничиться только сбором реальных многоканальных данных и их сохранением в максимально неискаженном виде в расчёте на последующую вторичную обработку. И лишь по мере приобретения опыта обработки информации, по мере отработки алгоритмов с учётом особенностей используемого носителя и навигационных датчиков, целесообразно ставить вопрос о переносе части вторичной обработки в блок сигнальной обработки ГБО и на бортовой компьютер системы акустического зрения АНПА.

При подборе технических средств для реализации перечисленных задач и их отдельных этапов учитывались следующие факторы:

- Параметры ЦАП
- Возможности блока сигнальной обработки
- Внешние интерфейсы блока сигнальной обработки
- Форм-фактор системы
- Конфигурируемость и расширяемость системы

В результате была выбрана быстродействующая многоканальная системы для сбора и сигнальной обработки данных на базе модулей, выпускаемых компанией Danville Signal Processing. Система состоит из модуля сигнальной обработки dspstak 21369 и модулей ввода-вывода данных dspstak c192k48. Ниже приведен краткий анализ системы относительно указанных выше факторов. Модуль ввода-вывода dspstak c192k48 содержит кодек AD1938 компании Analog Devices. Этот кодек обеспечивает частоту дискретизации до 192 кГц и разрядность 24 бита. AD1938 может оцифровывать до 4-х каналов, причем в синхронном режиме, что очень важно для правильной регистрации фазовых соотношений между сигналами разных каналов. Важно, что АЦП организованы на базе $\Sigma - Delta$-модуляторов, что даёт дополнительные преимущества в отношении фильтрации помех от наложения спектров (antialiasing filters) и позволяет исключить предварительную аналоговую фильтрацию. Ядром блока сигнальной обработки является сигнальный процессор ASDP-21369, основанный на архитектуре SHARC и поддерживающий операции с плавающей точкой. Эта особенность весьма полезна для задач сигнальной обработки в гидролокационных системах, т.к. использование операций с плавающей точкой оказывается выгодным при реализации быстрых преобразований Фурье и некоторых других алгоритмов обработки. Процессор ADSP-21369 работает на частотах до 400 мГц, чего вполне достаточно с учётом следующих обстоятельств:

(1) В случае применения сигнальных процессоров со сложной архитектурой рабочая частота довольно слабо отражает реальную производительность процессора, особенно для специфичных приложений.
(2) На первых этапах большая часть сигнальной обработки осуществляется средствами ПК.
(3) Если в процессе переноса обработки на модуль dspstak 21369 будет достигнуто 100% потребление ресурсов процессора (что в ближайшее время маловероятно), существует возможность поменять сигнальный процессор. Причем усилия, потраченные на эту замену, будут минимальны в силу выбранной архитектуры системы.

Наличие высокоскоростного интерфейса для связи с компьютером является критическим пунктом для многоканальной системы сбора данных. Простой расчет показывает, что для передачи восьмиканальных необработанных данных, оцифрованных с частотой 192 кГц и разрядностью 24 бита, необходима пропускная способность $4,5$ МБ/сек, а для 16 каналов – 9 МБ/сек. Наиболее популярные интерфейсы, способные обеспечить такую скорость, это Ethernet (100 мегабит и выше) и USB 2.0. Модули сигнальной обработки dspstak 21369 поставляются в двух вариантах: dspstak 21369zx и dspstak 21369zx2. Они отличаются друг от друга только интерфейсом USB. Модуль dspstak 221369zx поддерживает версию протокола 1.1, dspstak 21369zx2 -– версию 2.0. USB 1.1 обеспечивает скорость передачи данных до $1,5$ МБ/сек. Максимальная теоретическая скорость USB 2.0 — 60 МБ/сек. Хотя на практике скорость работы USB 2.0-совместимых устройств значительно ниже (до 40 МБ/сек), этот интерфейс с запасом удовлетворяет потребности по передаче гидролокационных данных на компьютер.

В связи с тем, что размеры носителя в целом и прочного корпуса ГБО, в частности, весьма ограничены, немаловажное значение имеет форм-фактор системы. Размеры модуля цифровой обработки dspstak 21369zx составляют $87,8 \times 100$ мм, что почти равно размерам цифровых плат ГБО (90×96 мм). В перспективе существует возможность использовать модули Danville в еще более компактном форм-факторе — 60×60.

Количество модулей ввода-вывода может варьироваться от 1 до 4. Каждый из модулей c192k48 позволяет оцифровывать до 4 каналов. Таким образом, в максимальной конфигурации система может работать с 16-ю каналами данных, причем все 16 каналов будут оцифровываться синхронно. Установка дополнительных модулей ввода-вывода весьма проста и основана на очень удобном принципе «стекирования», когда очередная плата устанавливается в виде надстройки на уже имеющиеся. При этом модуль сигнальной обработки всегда остаётся нижним. Таким образом при необходимости, количество каналов очень просто может быть увеличено до 16.

Весьма удобна мезонинная конструкция модуля сигнальной обработки. Он состоит из основной платы, которая содержит цепи питания и внешние интерфейсы, а также вычислительного мезонина, который содержит сигнальный

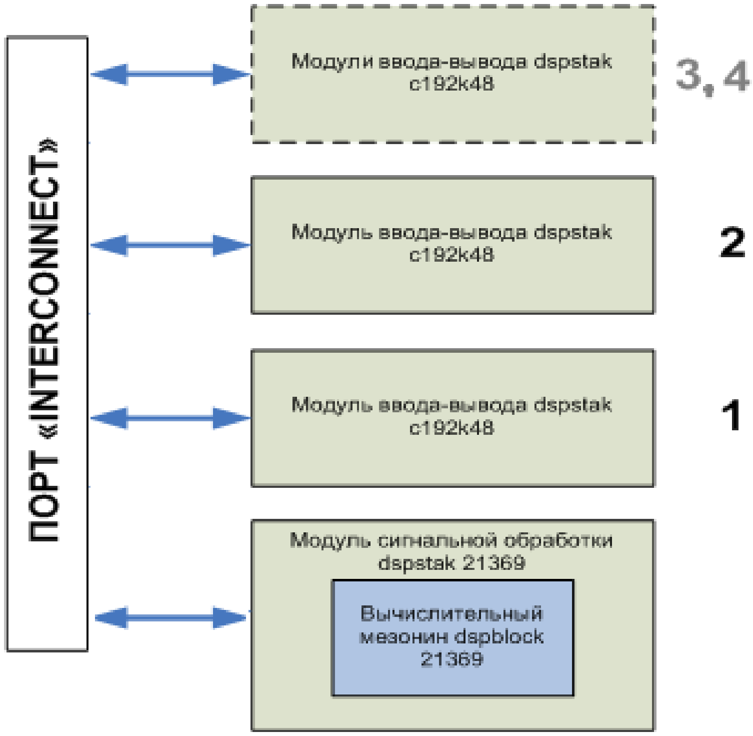


Рис. 3. Блок-схема системы цифровой обработки сигналов на базе модулей Danville Signal.

процессор и память. Такая конструкция позволяет при необходимости поменять процессор с минимальными трудозатратами. При этом в систему не придется вносить никаких дополнительных модификаций за исключением программного обеспечения DSP. Кроме того, существует возможность создания самостоятельной системы в форм-факторе вычислительного мезонина (60×60 мм). Для этого к нему подсоединяются специальные миниатюрные модули питания/внешнего интерфейса и ввода-вывода. Однако в данном случае возможности системы снижаются и её программирование становится более трудоемким.

Система цифровой обработки сигнала в упрощенном виде представлена на рис. 3. Пунктиром обозначены модули ввода-вывода номер 3 и 4, которые в перспективе позволят увеличить количество каналов системы до 16. Все модули, включая модуль сигнальной обработки, соединены друг с другом посредством Interconnect-порта. Он представляет собой 3-рядный (A,B,C) разъем, содержащий 96 контактов, причем ряды A и C дублируют друг друга, т.е. фактическое число контактов составляет 64. Порт Interconnect объединяет в себе следующие элементы:

- Шину питания
- Шину SPI (Serial Peripheral Interface Protocol)
- Высокоскоростные последовательные порты

Рис. 4. Схема взаимодействия сигнального процессора и АЦП.

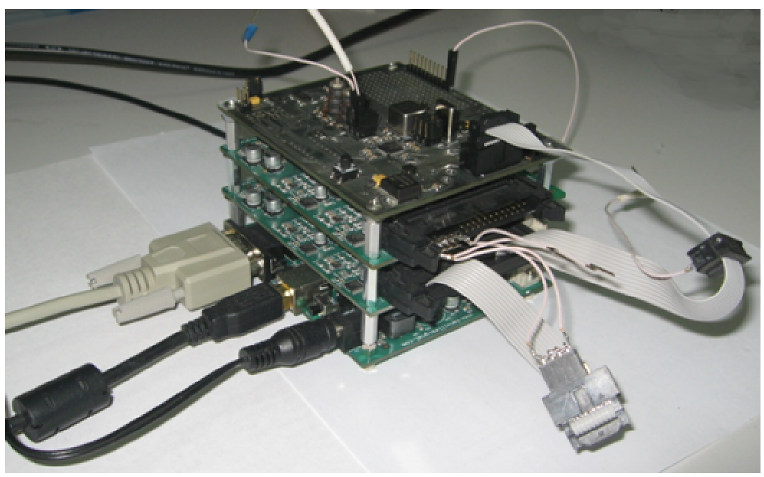


Рис. 5. Внешний вид цифрового блока.

- Линии ввода-вывода общего назначения
- Линии передачи тактирующих частот

На рис. 4 представлено взаимодействие сигнального процессора и АЦП модуля ввода-вывода посредством порта Interconnect. АЦП конфигурируется сигнальным процессором и получает от него управляющие сигналы по интерфейсу SPI. Оцифрованные данные поступают на сигнальный процессор через высокоскоростной последовательный порт, работающий на частоте 24, 576 МГц. Т.к. последовательные порты сигнального процессора ADSP-21369 являются двухканальными, пропускная способность при указанной частоте составляет 6000 кБ/сек. Это позволяет передавать 8 каналов данных (192 кГц, 24 бит), используя всего 1 последовательный порт процессора (процессор ADSP-21369 имеет 8 последовательных портов). Последовательные порты содержит в себе интерфейс DAI (Digital Audio Interface). Внешний вид цифрового блока представлен показан на рис. 5.

Постановка морского эксперимента

Для отработки перспективных алгоритмов обработки гидролокационной информации (в т.ч. и метода синтезирования апертуры) в ИПМТ ДВО РАН был разработан и изготовлен многофункциональный макетный комплекс «Синтез», предназначенный для сбора в условиях натурного морского эксперимента многоканальных данных, необходимых для отработки перспективных гидролокационных устройств различного назначения. В 2010-11 гг. антенная система этого комплекса использовалась в варианте низкочастотного гидролокатора бокового обзора (ГБО) с синтезированной апертурой (СА).

Метод СА, базирующийся на использовании сложных алгоритмов, весьма чувствителен к качеству первичных гидролокационных и навигационных данных [1-5, 8-11]. Отработка алгоритмов на базе реальных данных – процесс трудоёмкий и продолжительный, а при работе в море ещё и весьма затратный. Но накопив некоторый набор первичных гидролокационных данных, эти затраты можно значительно сократить, перенеся часть исследовательских и отладочных работ с морских полигонов в лабораторию, тем самым сделав их независящими от сезона и наличия обеспечивающего судна. При разработке комплекса «Синтез» основополагающим требованием было сохранение многоканальной информации в первичном, «сыром» виде, по возможности ещё не искаженном какой-либо обработкой.

При этом собственно процесс СА переносится на стадию постобработки. Такое временное решение не позволяет получить сиюминутный конечный результат. Но на начальном этапе проектирования этот подход удобен, т.к. позволяет при минимальном вмешательстве в первоначальную структуру эхосигналов гибко изменять алгоритмы постобработки без опасения за потерю достоверности данных, что могло бы произойти, если обработка предшествует накоплению.

Структура макетного комплекса «Синтез»

Структура комплекса показана на рис. 6. Особенностью его конструктивного исполнения является использование в качестве жесткой базовой платформы для размещения антенн комплекса подводного буксируемого модуля гидролокатора EdgeTech 4200-FSL (см.рис. 7). Локатор EdgeTech использовался в эксперименте в качестве контрольного прибора, причём данные его датчиков глубины, курса, дифферента и крена «привязывались» к многоканальной эхоинформации комплекса «Синтез». В качестве датчика координат и скорости использовался «GPS-приёмник Garmin-35»

Требования к основным узлам комплекса Наиболее ответственными элементами комплекса являются приёмная и передающая антенны. Они были разработаны и изготовлены силами сотрудников ИПМТ. Внешний вид антенн показан на рис. 8. Особые требования предъявлялись к 8-канальной приёмной антенна, которая была выполнена в виде линейной фазированной решётки. Эти требования таковы:

- идентичность диаграмм направленности (ДН) всех приёмных секций и их соответствие по азимуту и вертикали соответствующим значениям ДН антенны передающей;

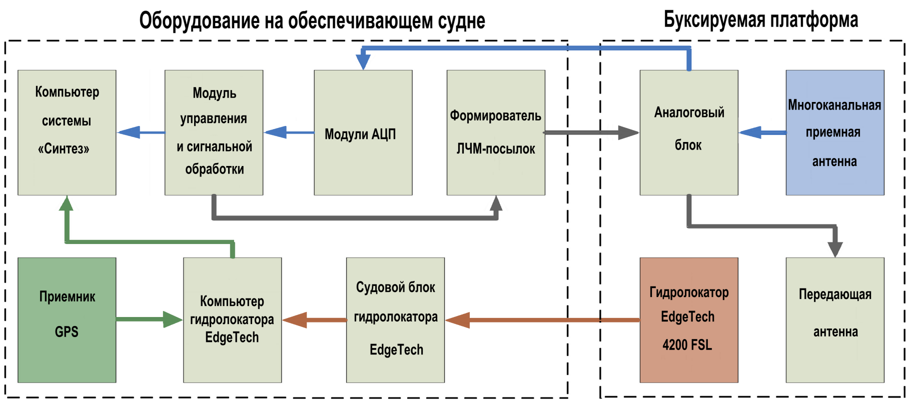


Рис. 6. Структура макетного комплекса «Синтез».

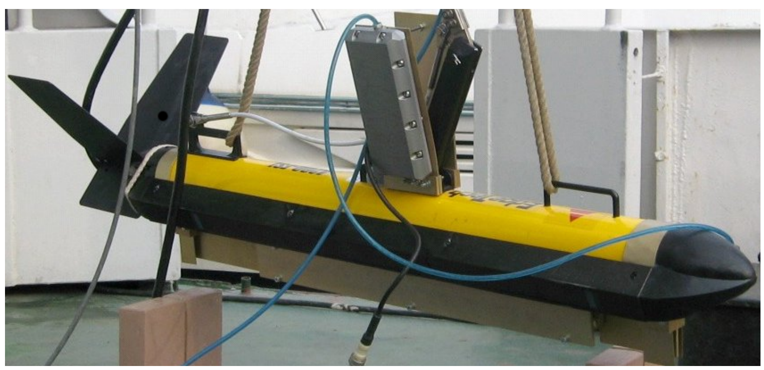


Рис. 7. Подводный буксируемый модуль гидролокатора EdgeTech с размещенными на нем антеннами комплекса «Синтез».

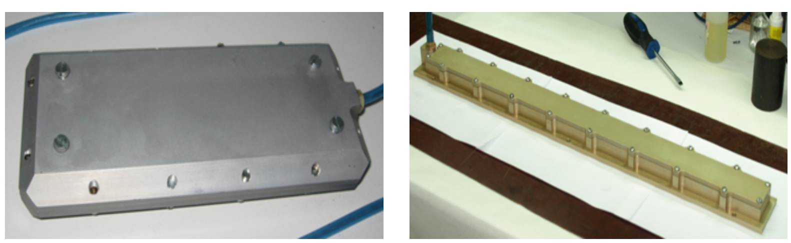


Рис. 8. Внешний вид передающей (слева) и приёмной (справа) антенн комплекса «Синтез».

- идентичность и равномерность частотно- фазовых характеристик приёмных секций;
- минимальный уровень проникновения сигналов между каналами и максимальная помехоустойчивость к воздействию внешних электрических и акустических помех;

Жёсткие требования по идентичности характеристик предъявлялись и к многоканальному усилительному тракту. Выполненный на современной элементной базе, он обладал высокой стабильностью и фазовыми искажениями, не превышающими $0,1^\circ$ в рабочей полосе частот. Использование единого для всех каналов управляющего напряжения временной автоматической регулировки усиления (ВАРУ) обеспечивало идентичность законов изменения коэффициентов усиления во времени.

В комплексе «Синтез» реализована современная тенденция к повышению точности цифровой обработки и минимизации аналоговых узлов приёмного тракта путём повышения разрядности цифрового представления эхо-информации. Работа 24-разрядных АЦП серии Danville Signal dspstak основана на использовании принципа сигма-дельта модуляции. Благодаря характерному для Σ-Δ-АЦП свойству подавлять до 80 дБ частоты, лежащие выше частоты $0.5 f_{samp}$, перед АЦП не потребовалась дополнительная фильтрация. Частота оцифровки $f_{samp} = 192$ кГц в 19 раз превышала ширину спектра эхосигналов и более чем вдвое рабочую частоту, что с большим запасом превышает значение частоты Найквиста-Котельникова для узкополосных сигналов.

Управление модулем сигнальной обработки на базе процессора Danville Signal dspstak осуществляется с клавиатуры судового компьютера. Оцифрованная эхо-информация с выхода модуля пересылается на компьютер через интерфейс USB 2.0 со скоростью потока до 5 Мбайт/с. Кроме того судовой компьютер используется для накопления оцифрованной гидролокационной и навигационной информации и оперативного отображения обстановки на экране.

Точность формирования ЛЧМ-посылок и, как следствие, эффективность ЛЧМ-сжатия существенно повышены благодаря применению специализированных микросхем прямого цифрового синтеза (DDS). Параметры ЛЧМ-обработки также задаются с клавиатуры компьютера.

Лабораторные испытания, выполненные перед началом морского эксперимента, показали, что основные электронные узлы по показателям когерентности удовлетворяют типовым требованиям к аппаратуре цифрового синтезирования апертуры [3].

Серьёзные проблемы выявились при измерении фазовых характеристик многоканальной приёмной антенны. На рис. 9 показаны результаты её обмера в опытовом бассейне. Сферический фронт от «точечного» источника для наглядности был пересчитан в плоский. Чёрными прямыми линиями показаны расчётные графики идеализированных фазовых задержек $\Delta\alpha$ на геометрических центрах каждой из 8 приёмных секций линейной приёмной решётки для углов поворота антенны относительно направления падающей волны 10° и 30°. Оцифровка по горизонтальной оси соответствует номерам элементов решётки при отсутствии поворота. Синими и красными линиями и точками показаны реальные фазовые задержки для каждой секции при названных значениях угла поворота.

Возможной причиной несоответствия идеализированных и реальных характеристик приёмной антенны может быть особенность её конструкции. Фронтальная металлическая диафрагма, разделяющая внутренний объём антенны от внешней среды, создаёт заметную акустическую связь между приёмными секциями. При этом акустическое воздействие от края антенны, повёрнутого ближе к источнику звука, распространяясь по диафрагме, опережает приход

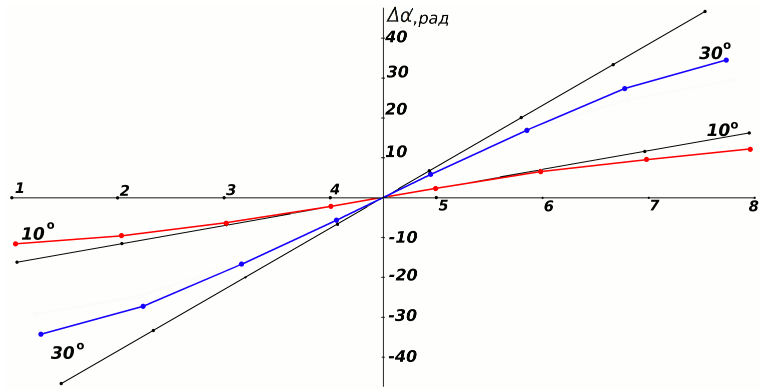


Рис. 9. Результаты обмера 8-канальной приёмной антенны в опытовом бассейне.

основной, водной волны, падающей на более удалённые приёмные секции. Этот эффект может быть учтён при постобработке, но это потребует дополнительных ресурсных затрат.

Результаты натурных экспериментов и обработка данных

В ходе экспериментов было накоплено свыше 17 гигабайт «сырых» данных и первоочередная задача, предшествующая постобработке, свелась к оцениванию их качества на предмет применимости для СА. Оценки использовались также для проверки точности работы аппаратных узлов и эффективности применённых алгоритмов. На основе оценок выработаны требования по усовершенствованию комплекса, методик его использования, технологий визуализации и накопления скоростного потока многоканальных данных.

На качество гидролокационных данных влияние оказывали, прежде всего, погрешности буксировки подводной платформы с антеннами и особенности распространения звука в неоднородной морской среде. Особого учёта требовало несоответствие фактических характеристик приёмной антенны перечисленным жёстким требованиям, необходимым для реализации синтезирования. Первоочередные виды постобработки включали процедуры, позволяющие оценить полученные «сырые» данные на предмет их когерентности, как характеристики, существенной для реализуемости СА. При этом интерес представляла как кратковременная когерентность на интервалах времени Δt, не превышающих периода зондирования T $(100 \div 300$ мс), так и долговременная – на интервалах $\Delta t \gg T$.

Оценочные задачи постобработки решались с помощью специально разработанных программ «ПО постобработки». Основная их особенность – наличие собственного языка сценариев (скриптов), позволяющего легко изменять последовательность и параметры обработки без изменения кода программы, что очень удобно на стадии отработки алгоритмов.

Общая схема постобработки изображена на рис. 10. Зеленым цветом отмечен блок обработки исходных данных, фиолетовым – блок формирования видеосигнала, синим -– блок обработки изображений. Как видно на схеме, в

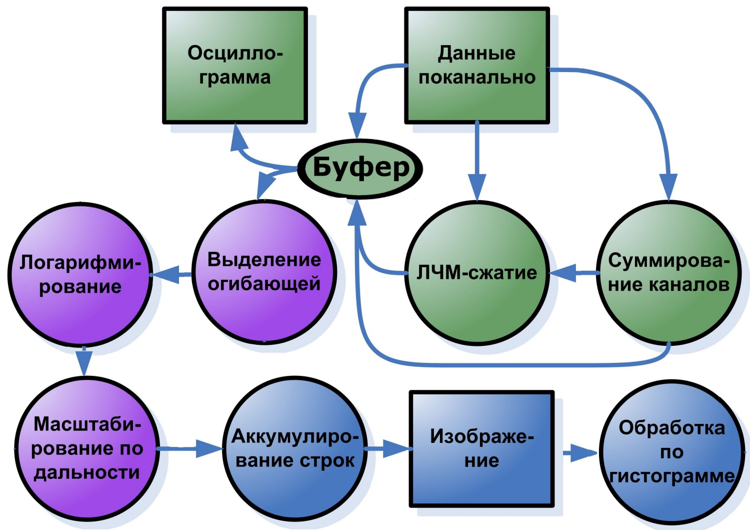


Рис. 10. Схема постобработки многоканальных гидролокационных данных.

блоке обработки исходных данных существуют различные варианты прохождения сигналов. В текущей конфигурации ПО постобработки на выходе этого блока можно получить «сырые» данные для каждого из каналов, результаты ЛЧМ-сжатия для каждого из каналов, синфазного суммирования всех каналов и ЛЧМ-сжатия суммы каналов. Обработанный сигнал может быть просмотрен в виде осциллограммы или направлен далее для формирования видеосигнала строки и изображения.

ЛЧМ-сжатие. На выходе формирователя ЛЧМ-посылок генерируется зондирующий импульс, имеющий в дискретном представлении вид:

$$s(i) = \sin\left(2\pi f_0 t(i) + \frac{1}{2}\mu t^2(i)\right), \tag{4}$$

$$\mu = \frac{f_1 - f_0}{\tau}, \quad N = \tau f_{samp}, \quad t(i) = i/f_{samp}, \quad i = 1, 2, ..., N,$$

где μ – скорость изменения частоты, f_0 и f_1 начальная и конечная частоты импульса, τ -– длительность импульса,N — число отсчетов на импульс, f_{samp} -– частота дискретизации. Согласованный фильтр, определяемый как $h(i) = s(N-i)$, взвешивался окном Ханна

$$w(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), \tag{5}$$

ЛЧМ-сжатие выполняется путем свертки $y(i) = x(i) * h_w(i)$, где $x(i)$ -– входной сигнал. На рис. 11 проиллюстрирован результат ЛЧМ-сжатия эхосигнала одного из каналов.

Суммирование каналов. ДН линейной антенной решетки из 8 элементов с фокусировкой «на бесконечность» формируется путём синфазного сложения сигналов всех каналов. Вывод о степени когерентности сигналов в разных каналах на интервалах времени устанавливается по степени сходства результатов

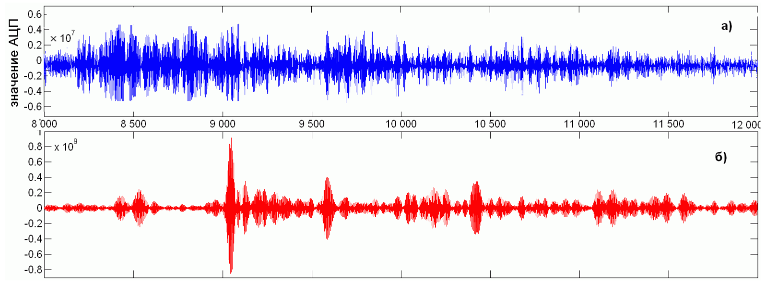


Рис. 11. Результат ЛЧМ-обработки: а) первичный сигнал, б) сигнал, после ЛЧМ-сжатия.

обзора целей такой синфазной решёткой с результатами традиционного ГБО-обзора с «веерообразной» ДН физической антенны.

Масштабирование. Для приведения большого числа отсчётов в исходной «скан-строке» к значениям, приемлемым для отображения на мониторе, использовалось масштабирование с помощью эффективного алгоритма Карла-Фанта.

Аккумулирование представляет собой процедуру формирования эхограммы из скан-строк

Логарифмирование. Операция логарифмирования эхосигналов, типовая при визуализации гидролокационных изображений, ввиду нелинейности не может предшествовать линейной обработке, в которой важна фазовая структура сигнала. Поэтому она, в сочетании с гистограммной обработкой, используется только в качестве завершающей процедуры непосредственно перед отображением для улучшения визуального восприятия на одной эхограмме одновременно как сильных, так и слабых целей.

Гистограммная обработка используется для коррекции контраста и устранения нежелательной постоянной составляющей, проявляющейся после логарифмирования в виде вуали. На рис. 12 показаны эхограммы участка дна до и после применения описанных видов постобработки, а на рис. 13 приведены графики навигационных данных, соответствующие прохождению этого участка. В начале галса на графиках отчётливо видны сильные колебания навигационных параметров. Отмечена связь между поведением навигационных параметров, качеством эхо-изображений и эффективностью применённых видов обработки.

В процессе корреляционного анализа ГБО-информации вычислялось множество взаимных корреляционных функций эхосигналов, взятых как с выходов всех восьми приёмо-усилительных трактов на некотором определённом периоде зондирования, так и эхосигналов, полученных с выходов каждого канала на разных периодах зондирования. На рис. 14 иллюстративно представлены некоторые графики этих функций. Заметно, что уже на 2-3-м циклах зондирования эхосигналы теряют связь со своим предыдущим состоянием (см. рис. 14а). В то же время, когерентность эхосигналов разных каналов (вплоть до 8-го) в пределах одного периода зондирования оставалась достаточно высокой (см. рис. 14б).

Наличие навигационных данных, позволяет ввести в эхосигналы компенсационные поправки, обусловленные траекторными возмущениями в движении

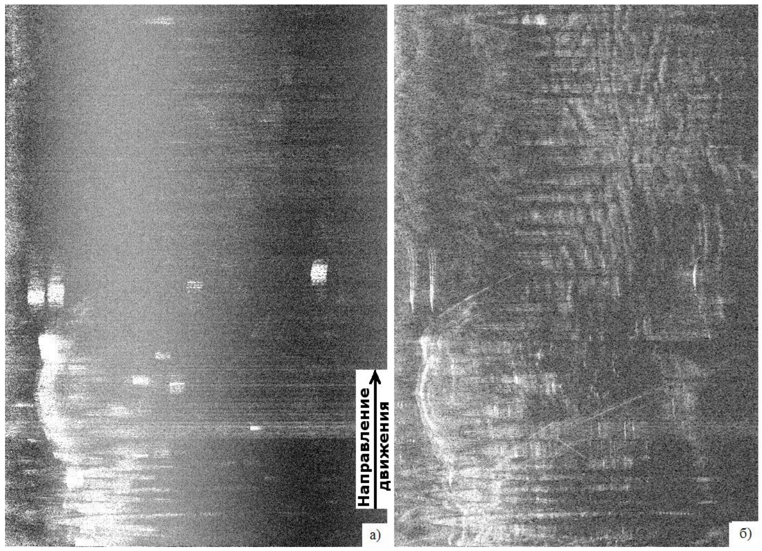


Рис. 12. Пример постобработки: **«а»** – на эхограмме участка дна представлены «сырые» данные 1-го канала, **«б»** – на эхограмме результат ЛЧМ-сжатия суммы всех каналов.

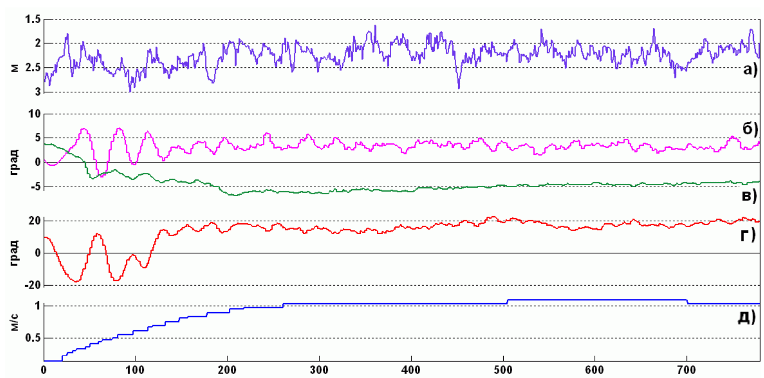
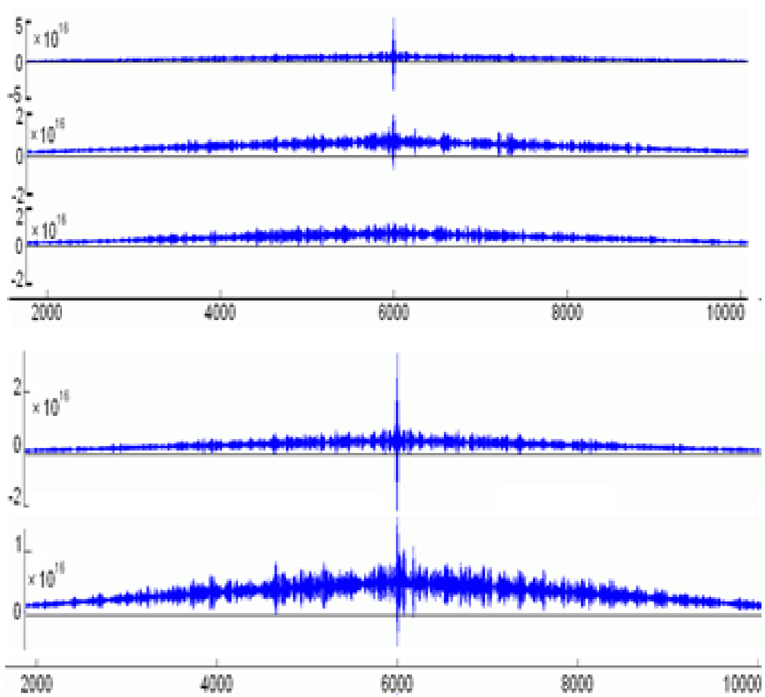


Рис. 13. Графики навигационных данных, соответствующих проходу участка дна (см. рис. 12): **«а»** – заглубление антенны; **«б»** – крен; **«в»** – дифферент; **«г»** – курс; **«д»** – скорость.

антенны. Точность поправок может быть повышена предобработкой навигационных данных. На рис. 15 показаны результаты такой предобработки на примере показаний курсового датчика. Аналогичной предобработке подвергались и данные остальных датчиков. Существенным поводом для её выполнения является несоответствие между частотой обновления показаний датчиков и более высокой частотой их считывания. Предобработка сводилась к интерполяции данных, а затем к их низкочастотной фильтрации. Использование фильтрованных навигационных данных для вычисления фазовых компенсационных поправок представляется корректным в предположении, что они в большей



а

б

Рис. 14. Образцы результатов корреляционного анализа эхосигналов. **«а»** – на разных циклах зондирования: верхний график -– автокорреляционная функция (АКФ) эхосигнала 1-го канала на i-м цикле зондирования; ниже – взаимные корреляционные функции (ВКФ) этого эхосигнала с эхосигналами 1-го же канала, но выбранными на i+2-м, и i+4-м циклах зондирования. **«б»** – на одном цикле зондирования: сверху – АКФ эхосигнала 1-го канала; внизу – ВКФ эхосигналов 1-го и 8-го каналов.

степени соответствуют реальному угловому и линейному перемещению в воде массивной буксируемой платформы, нежели данные первичные. Критерием справедливости этого предположения должно стать повышение (ещё до применения микронавигационных алгоритмов) разрешающей способности обзора при формировании виртуальных апертур хотя бы на 3-4-х циклах зондирования путём когерентного сложения эхосигналов. Для этого необходимо перейти от построчной обработки данных к обработке блочной со скользящим окном из n строк. Первым этапом блочной обработки будет фазовая коррекция сигналов по данным навигационных датчиков, вторым – уточняющая коррекция на базе микронавигационных алгоритмов.

Параллельно с вышеописанным экспериментом вблизи Владивостока в бухте Новик (о. Русский) был поставлен отдельный эксперимент по повышению разрешающей способности ГБО по дальности с помощью классического метода ЛЧМ-сжатия. Принципы, заложенные в алгоритмах ЛЧМ-сжатия не претендуют на новизну, но в аппаратной реализации как процесса формирования

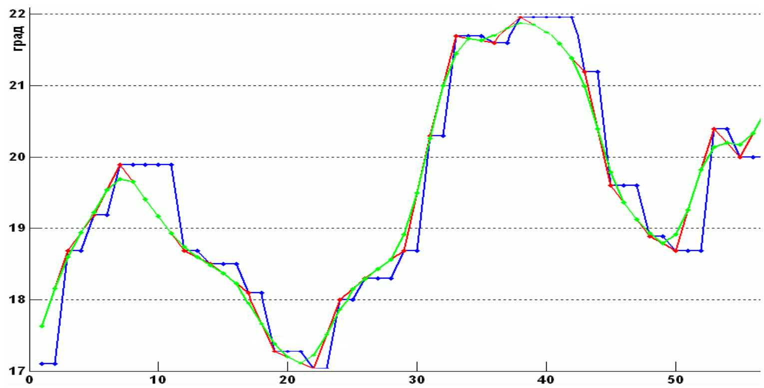


Рис. 15. Пример обработки данных датчика курса (временной масштаб увеличен относительно рис. 13). Синий цвет — необработанные данные, красный — результат линейной интерполяции, зелёный — результат низкочастотной фильтрации.

ЛЧМ-посылок, так и в процессе их обработки был применен ряд новых и современных технических решений. Эксперимент выполнялся на рабочих частотах 428, 5 кГц. При этом полоса пропускания приёмо-передающего тракта и антенны была равна 50 кГц, а девиация частоты в режиме ЛЧМ могла быть задана с управляющего компьютера в диапазоне от ± 5 до ± 25 кГц. Длительность зондирующего сигнала τ также задавалась с управляющего компьютера и диапазон использованных значений был равен $100 \div 1500$ мкс. Таким образом, база зондирующего импульса (ЗИ) в данном эксперименте могла принимать значения от 1 до 75. В ходе эксперимента устанавливались диапазоны дальности обзора от 50 до 200 м по каждому борту. Существенно, что без ЛЧМ-сжатия максимально достижимая дальность действия ГБО не превышала $120 - 130$ м, а использование ЛЧМ-сжатия позволило довести дальность действия до $180 - 200$ м по каждому борту. Для численной и визуальной оценки качества обработки и степени повышения разрешающей способности была изготовлена экспериментальная искусственная цель в виде набора уголковых отражателей (см. рис. 16)

Эхо-изображения формировались в двух вариантах: без ЛЧМ-обработки и с ЛЧМ-обработкой. Ниже приведены с пояснениями небольшие фрагменты эхограмм ГБО, иллюстрирующие эффект такой обработки.

Мозаицирование ГБО-изображений

В комплекс программ по обработке ГБО-изображений входила также разработанная в ИПМТ ДВО РАН программа «Мозаика», главное назначение которой состоит в привязке полученных изображений к карте. Программа мозаицирования позволила наглядно, с максимальным приближением к традициям картографии и аэрофотосъёмки, в равномасштабном и пространственно-ориентированном виде отобразить крупномасштабную гидролокационную обстановку в районе работ, в том числе распределения разнородных грунтов,

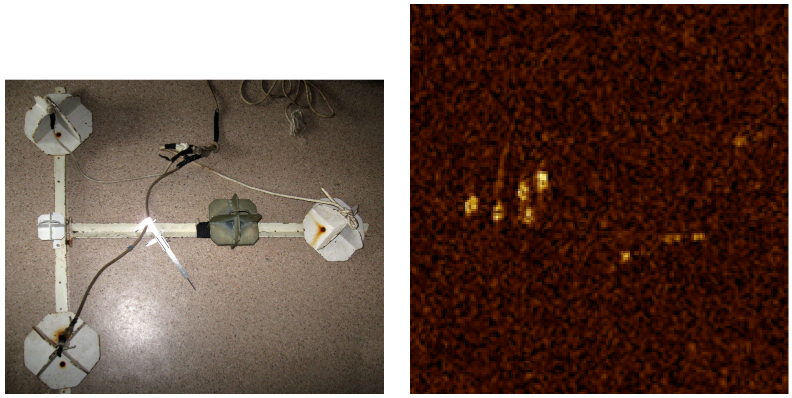


Рис. 16. Внешний вид искусственной цели в виде набора из 5 уголковых отражателей (слева) и ГБО-изображение этой цели (справа), полученное с дистанции 39 м. Обзор правым бортом. Параметры зондирования: девиация частоты ±20 кГц, длительность ЗИ 100 мкс (база ЗИ = 4). Правее цели заметна группа объектов, связанных с этой целью (стальная 5-килограммовая гиря с привязанными к ней кусками пенопласта.

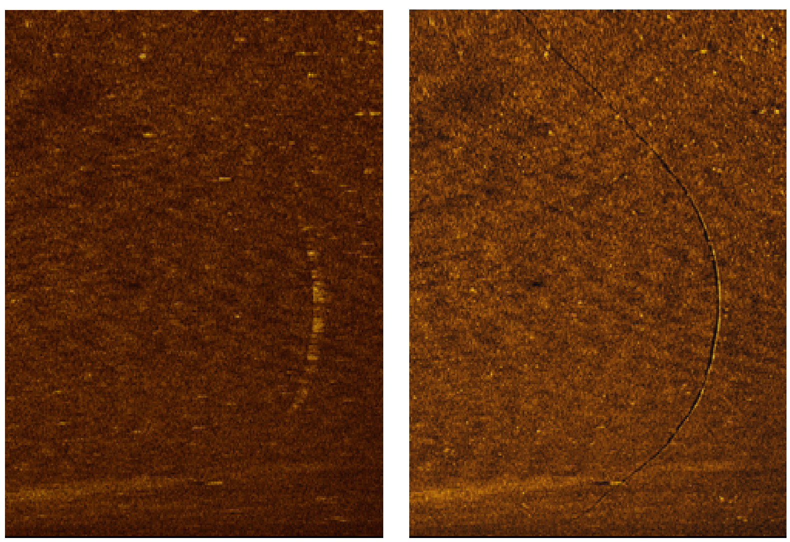


Рис. 17. Эхограмма с изображением стального троса: слева -– ГБО-изображение без ЛЧМ-сжатия; справа -– результат ЛЧМ-сжатия. Обзор левым бортом. Дистанция до объекта 47 м, девиация частоты ±20 кГц, длительность ЗИ 800 мкс (база ЗИ = 32).

наличие массивов подводной растительности, их границы, наличие крупноразмерных искусственных объектов. В процессе мозаицирования пиксели ГБО-изображения по определённым правилам, формируемым на основании сопутствующих координатных данных, выбираются из исходного изображения и накладываются на результирующее изображение в виде электронного планшета,

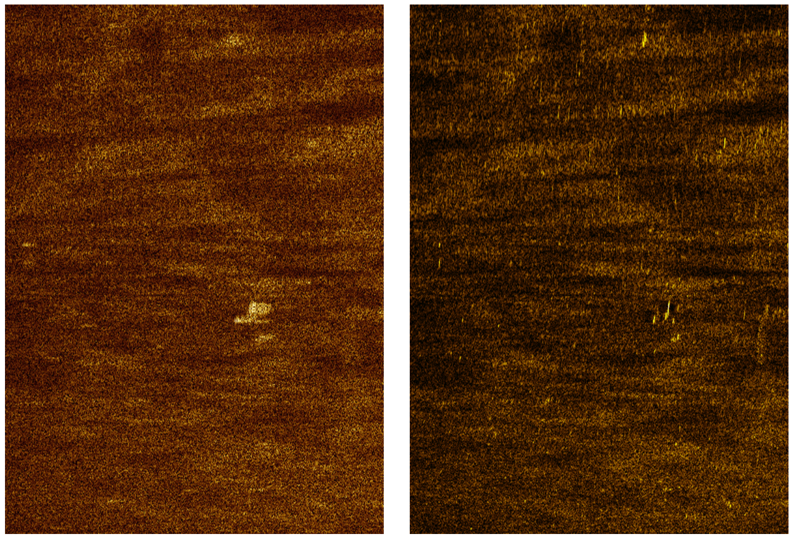


Рис. 18. Эхограмма с ГБО-изображением искусственной цели: слева -– изображение без ЛЧМ-сжатия; справа -– результат ЛЧМ-сжатия. Обзор левым бортом. Дистанция до цели 69 м. Цель из 5 уголковых отражателей зарегистрирована на дистанции 69 м. Девиация частоты ±25 кГц, длительность ЗИ 1000 мкс (база ЗИ = 50).

формируемого в абсолютных географических координатах. Координаты любого пикселя исходного ГБО-изображения $(\varphi_{p,i,j}, \lambda_{p,i,j})$ вычисляются на основании выбираемых из ГБО-файлов (и соответствующих i-му моменту времени) значений широты $\varphi_{\Gamma,i}$ и долготы $\lambda_{\Gamma,i}$ антенны ГБО по следующим формулам:

$$\varphi_{p,i,j} = \varphi_{\Gamma,i} - \sin(k_i + \delta k_i)\frac{D_j}{R_{\varphi_0}}, \tag{6}$$

$$\lambda_{p,i,j} = \lambda_{\Gamma,i} + \cos(k_i + \delta k_i)\frac{D_j}{R_{\varphi_0}\cos(\varphi_0)}, \tag{7}$$

где i -– номер цикла ГБО-зондирования, или, что то же самое, номер ГБО-строки на ГБО-изображении; j -– номер отсчета (пикселя) вдоль строки от момента зондирования до изображения элементарной цели на этой же строке; R_{φ_0} – значение радиуса Земли на средней широте места ГБО-съёмки; D_j -– траверсная дистанция от антенны ГБО до обрабатываемой элементарной цели, соответствующей пикселю с номером j на гидролокационной строке; k_i – значение курса носителя антенны в текущий i-й момент времени; δk_i -– поправка, связанная с особенностями размещения антенны ГБО на носителе, либо (в случае использования ГБО в буксируемом варианте) поправка на режим движения.

Образец мозаицированного ГБО-изображения представлен на рис. 19

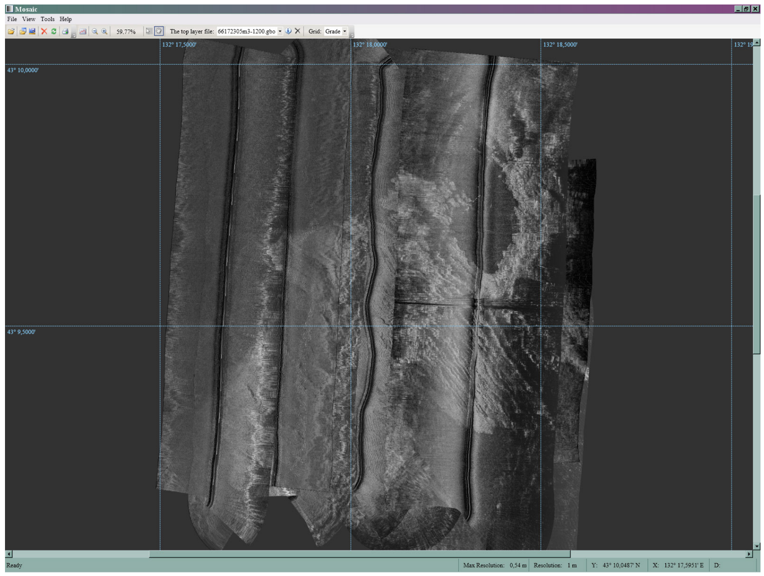


Рис. 19. Вид окна программы «Мозаика».

Выводы

1. Натурные испытания рабочего макета многоканального гидролокационного комплекса «Синтез» показали его работоспособность при эксплуатационно-технических характеристиках, приемлемых для эффективного сбора первичных эхолокационных данных.

2. На интервалах, сравнимых с длительностью зондирующей посылки, временная и межканальная когерентность эхо-сигналов достаточна для практической реализации простых методов обработки. Точность ряда решений, например, ЛЧМ-сжатия, близка к теоретическому пределу. Отработанные технические решения планируется использовать и в других гидролокационных устройствах реального времени.

3. Для повышения качества перемещения антенн комплекса «Синтез» в реальных морских условиях целесообразно использование автономных подводных роботов класса АНПА вместо подверженных дестабилизирующим факторам буксируемых носителей

4. Необходимы дополнительные исследования по вводу компенсационных поправок в эхосигналы на базе предварительно обработанных данных от навигационных датчиков.

5. С целью снижения межканального акустического влияния требуется доработка многоканальной приёмной антенны.

6. Использованные вспомогательные сервисные программные средства требуют дальнейшего развития и расширения.

Список литературы

[1] R.Chatham, E.Chang, M.Nelson, D.Marx, A.Putney, K.Warman, K.Chick, S.Borchardt, “The Synthetic Aperture Sonar Revolution”, The Autonomous Underseas Systems Institute's (AUSI) workshops on Sensors and Sensing Technology for Autonomous Ocean Systems (Waikoloa Hawaii), 2000.

[2] В.В.Золотарев, “Гидролокаторы с синтезированной апертурой для автономного подводного робота”, *Подводные исследования и робототехника*, 2007, №1, 21-26.

[3] *Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны*, ред. В.Т. Горяинова, Радио и связь, М, 1988.

[4] L. J. Cutrona, “Comparison of Sonar System Performance Achievable Using Synthetic Aperture Techniques with the Performance Achievable by More Conventional Means”, *Journal of the Acoustical Society of America*, **58**:2 (1975), 336-348.

[5] Ф.Р. Кастелла, “Применение метода одномерной голографии для построения гидролокационной картографической системы”, *в кн. Акустическая голография, гл. 15*, Судостроение, Л., 1975, 219-236.

[6] W.W.Jr. Bonifant, *Interferometic synthetic aperture sonar processing*, A thesis presented to the Academic Faculty in partial fulfillment of the requirements for the Degree Master of Science in Electrical Engineering, Georgia Institute of Technology, 1999, xxv+166 с.

[7] M.A. Nelson, “DARPA Synthetic Aperture Sonar”, Proceedings of the Adaptive Sensor Array Processing (ASAP) Workshop (15 May 1998), **1**, 141-155.

[8] “GeoSAS”, Product Information Bulletin, QinetiQ GeoAcoustics LTD, Nov 2003, www.geoacoustics.com.

[9] P.E. Hagen, R.E. Hansen, B.L., “Interferometric Synthetic Aperture Sonar for the HUGIN 1000-MR AUV”, UDT Pacific 2006 (San Diego, CA, USA, December 2006).

[10] R.Heremans, A.Bellettini, and M.Pinto, “Milestone: Displaced Phase Center Array”, Saclantcen report: SR-355 (September 28, 2006).

[11] А.Л. Агеев, В.Б. Костоусов, И.Б Агафонов, В.В. Золотарев, “Моделирование и обработка траекторного сигнала гидролокатора с синтезированной апертурой”, Материалы III Всероссийской научно-техн. конференции «Технические проблемы освоения Мирового океана» (Владивосток, 2009), 351-355.

[12] И.В. Прохоров, Н.С. Суровенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев, “Математическое моделирование процессов распространения акустических и электромагнитных полей”, Материалы III Всероссийской научно-техн. конференции «Технические проблемы освоения Мирового океана» (Владивосток, 2009), 244-248.

[13] И.В. Прохоров, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев, “О задаче акустической локации морского дна”, Сб. докладов XXXV Дальневосточной математической школы-семинара им. акад. Е.В.Золотова, ISBN 978-5-7442-1500-2 (ИАПУ ДВО РАН, Владивосток, 2010), 338-344.

[14] И.В Прохоров, В.В. Золотарев, И.Б. Агафонов, “Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане”, *Дальневост. матем. журн.*, **11**:1 (2011), 76-87.

[15] Б.А. Касаткин, С.Б. Касаткин, В.В. Золотарёв, “Способ обнаружения объектов, находящихся в толще донного грунта”, Патент на изобретение №2410721. Приоритет от 07.12.2009.

[16] Л.В. Киселёв, В.В. Золотарёв, И.Б. Агафонов, М.С. Ходоренко и др., “Исследование и разработка методов формирования виртуальных акустических антенн, постановка модельных и натурных экспериментов”, Раздел НИР «Разработка технологии создания интеллектуальных подводных роботов на основе реконфигурируемых системных архитектур и высокоточных методов навигации и управления», 2006, №гос. регистрации 01.2006 06513.

[17] В.В. Золотарев, М.С. Ходоренко, “Разработка программных средств для мозаицирования гидролокационных изображений”, Материалы III Всероссийской научно-техн. конференции «Технические проблемы освоения Мирового океана»

(Владивосток, 2009), 307-310.

[18] В.В. Золотарев, М.С. Ходоренко, “Программные средства представления гидролокационных данных”, *Подводные исследования и робототехника*, 2009, № 2, 16-21.

[19] А.Е. Ковтанюк, Н.С. Суровенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев, “Восстановление сигналов по неравномерным выборкам”, Материалы III Всероссийской научно-техн. конференции «Технические проблемы освоения Мирового океана» (Владивосток, 2009), 356-360.

Агафонов Илья Борисович
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток,Россия
E-mail address: `iks@imtp.dvo.ru`

Золотарев Владимир Витальевич
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток, Россия
E-mail address: `lab32imtp@marine.febras.ru`

Мадисон Евгений Александрович
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток, Россия
E-mail address: `madison@marine.febras.ru`

Ходоренко Максим Сергеевич
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток, Россия
E-mail address: `max@marine.febras.ru`

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.37–С.43 (2011) УДК 517.958
MSC 35R30

КЛАСС НЕРАССЕИВАЮЩИХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ АКУСТИКИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Г.В. АЛЕКСЕЕВ, В.Г. РОМАНОВ

Abstract. Some acoustic models that describe a diffraction of a sound wave on compact inhomogeneities are considered. An existence of anisotropic inhomogeneities for which a scattered field vanishes is discussed. A method of constructing such inhomogeneities is presented.

Keywords: acoustic equation, anisotropic media, compact sources, nonscattering objects.

1. Введение

В последние годы за рубежом появился цикл работ, посвященных описанию так называемых нерассеивающих (или маскировочных) оболочек см. [1-5]. В этих работах исследованы вопросы, связанные с существованием и построением анизотропных оболочек, делающих любой объект внутри себя свободным от электромагнитного или акустического рассеяния. В частности, в [5] доказано существование маскировочных оболочек, имеющих вид трехмерного сферического слоя, для уравнений анизотропной акустики.

Следует однако отметить, что приведенные в [5] формулы, как и формулы в [3], содержат сингулярности, поскольку некоторые из параметров построенных оболочек обращаются в бесконечность в точке, отвечающей внутреннему радиусу сферического слоя. Это существенно усложняет физическую реализацию построенных в [3, 5] решений.

Alekseev, G.V., Romanov, V.G., A class of nonscattering objects for acoustic equations of an anisotropic medium.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (совместный проект с ДВО РАН № 93 — 2009).

Поступила 29 сентября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

2. Модель акустики для анизотропных сред. Обратная задача дифракции

Следуя работе [6], рассмотрим вопрос о существовании таких анизотропных объектов, которые являются нерассеивающими для падающих волн, создаваемых внешними компактно расположенными точечными или объемными источниками.

Стационарное (гармоническое по времени) звуковое поле в неоднородной анизотропной среде в пространстве $\mathbb{R}^3$ описывается уравнением [5]

$$Lp \equiv \operatorname{div}(\tilde{\sigma}\nabla p) + \frac{k_0^2}{\lambda} p = f. \tag{1}$$

Здесь p – звуковое давление, $\lambda(\mathbf{x})$ – переменный коэффициент сжимаемости, $\tilde{\sigma} = \tilde{\rho}^{-1}$ – обратный к тензору плотностей анизотропной среды $\tilde{\rho}(\mathbf{x})$, k_0 — волновое число, f – плотность объемных источников звука. В частном случае, когда $\lambda(\mathbf{x}) = 1$, $\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = I$, где I – единичный тензор, уравнение (1) переходит в классическое уравнение Гельмгольца $L_0 p \equiv \Delta p + k_0^2 p = f$.

Предположим, что $\tilde{\sigma}$ и λ являются гладкими всюду, кроме конечного числа поверхностей класса $\mathbf{C}^1$, на которых они имеют конечный разрыв. В этом случае уравнение (1) выполняется всюду, кроме этих поверхностей, а на поверхностях разрыва должны выполняться условия непрерывности давления и нормальной компоненты скорости. Если S — подобная поверхность разрыва, то соответствующие условия имеют вид

$$[p]_S = 0, \quad \left[\frac{\partial p}{\partial N}\right]_S = 0. \tag{2}$$

В этих равенствах символ $[p]_S$ означает скачок функции p при переходе через поверхность S, $\frac{\partial p}{\partial N}$ — производная по конормали к S, определяемая формулой

$$\frac{\partial p}{\partial N} = \mathbf{n}\tilde{\sigma}\nabla p,$$

в которой $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к S (вектор-строка), ∇p рассматривается здесь как вектор-столбец, а умножение вектора на матрицу производится по правилам линейной алгебры.

Сформулируем задачу дифракции, которую будем рассматривать ниже. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\partial\Omega \in \mathbf{C}^1$. Предположим, что во внешности $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ области Ω имеют место равенства $\lambda(\mathbf{x}) = 1$, $\tilde{\sigma}(\mathbf{x}) = I$, а в области Ω параметры $\tilde{\sigma}$, λ являются функциями класса $\mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$. На тройку $(\Omega, \tilde{\rho}, \lambda)$ ниже будем ссылаться как на анизотропный акустический объект. Предположим также, что функция $f(\mathbf{x})$, входящая в правую часть уравнения (1), принадлежит пространству $D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$. Здесь $D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$ — подпространство пространства обобщенных функций D', все элементы которого имеют компактные носители, содержащиеся строго в Ω_e.

Представим поле давлений p_e в области $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ в виде $p_e = p_{inc} + p_{sc}$. Здесь p_{inc} — заданная функция, описывающая падающую волну, вызывающую акустические колебания жидкой среды. В дальнейшем полагаем, что $p_{inc} = p_f|_{\Omega_e}$, где p_f — решение класической задачи излучения

$$\Delta p_f + k_0^2 p_f = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \;\; p_f \in \Re(\mathbb{R}^3) \tag{3}$$

в свободном пространстве $\mathbb{R}^3$. Здесь $\Re(\mathbb{R}^3)$ обозначает пространство функций p, удовлетворяющих условию Зоммерфельда, имеющему вид

$$\frac{\partial p}{\partial r} - ik_0 p = o(r^{-1}), \quad r = |\mathbf{x}| \to \infty. \tag{4}$$

Функция p_{sc} описывает поле давлений в Ω_e, вызванное рассеянием падающей звуковой волны на препятствии Ω и подлежит определению. Она удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta p_{sc} + k_0^2 p_{sc} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \tag{5}$$

и условию излучения на бесконечности (4).

Падение поля p_{inc} на анизотропный объект $(\Omega, \tilde{\rho}, \lambda)$ вызывает в Ω появление преломленного поля p, удовлетворяющего в области Ω уравнению (1) при $f = 0$, а также следующим условиям непрерывности на границе $\partial\Omega$:

$$p_{inc} + p_{sc} = p, \quad \mathbf{n}\nabla(p_{inc} + p_{sc}) = \mathbf{n}\tilde{\sigma}\nabla p, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \tag{6}$$

Таким образом, задача *акустической дифракции* заключается в построении функций p_{sc} в Ω_e и p в Ω, удовлетворяющих соотношениям (1), (4)-(6).

Вообще говоря, решение задачи дифракции обладает тем свойством, что рассеянное поле отлично от тождественно нулевого. В связи с этим вызывает интерес следующая постановка задачи, которую мы назовем *обратной задачей дифракции*. Существует ли неоднородная анизотропная в области Ω акустическая среда, для которой $p_{sc} \equiv 0$ в Ω_e для любых падающих волн p_{inc}, отвечающих функциям $f \in D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$? Акустический объект $(\Omega, \tilde{\rho}, \lambda)$, обладающий тем свойством, что для него $p_{sc} \equiv 0$ в Ω_e, назовем *нерассеивающим*. Нерассеивающие акустические объекты существуют. Это утверждение вытекает из следующего наблюдения.

Рассмотрим уравнение

$$\Delta_{\mathbf{y}} p + k_0^2 p = f(\mathbf{y}), \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \tag{7}$$

в котором $f \in D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$. Решение уравнения (7), удовлетворяющее условию излучения на бесконечности (4), обозначим $p_{inc}(\mathbf{y})$.

Покажем, что подходящее отображение пространства $\mathbb{R}^3$ на себя приводит к тому, что функции $p = p_{inc}(\mathbf{y})$, $p_{sc} = 0$ дают в новых координатах решение задачи дифракции (1), (4)-(6). В самом деле, пусть $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ — взаимно однозначное и непрерывное отображение пространства $\mathbb{R}^3$ на себя, такое, что $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ вне Ω. Тогда оно также осуществляет взаимно однозначное и непрерывное отображение области Ω на себя. Предположим, что $g \in \mathbf{C}^2(\Omega) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$.

Преобразуем уравнение (7), выполнив в нем замену переменных $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3)$. Обозначим $p_{inc}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = p(\mathbf{x})$. Уравнение для функции p имеет вид

$$\sum_{i,j,k=1}^{3} \Big(\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} G_{ik} G_{jk} + \frac{\partial p}{\partial x_i} \frac{\partial G_{ik}}{\partial x_j} G_{jk} \Big) + k_0^2 p = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega, \tag{8}$$

в котором $G_{ik} = G_{ik}(\mathbf{x})$ — элементы матрицы $G(\mathbf{x})$, обратной к матрице Якоби $\partial\mathbf{g}(\mathbf{x})/\partial\mathbf{x}$:

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad G = \Big(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \Big)^{-1}.$$

В работе [6] показано, что уравнение (8) совпадает по форме с уравнением (1), если для $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega$ функция $\lambda(\mathbf{x})$ и матрица $\tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \tilde{\sigma}^{-1}(\mathbf{x})$ определены равенствами

$$(9)\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{J(\mathbf{x})}, \quad J(\mathbf{x}) = \det\Big(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big), \quad \tilde{\rho}(\mathbf{x}) = \frac{1}{J(\mathbf{x})}\Big(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big)^*\Big(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\Big),$$

в которых символ * соответствует транспонированию матрицы.

Выполнение первого из условий (6) является следствием непрерывности отображения $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ и функции $p_{inc}(\mathbf{y})$ на $\partial\Omega$. Второе условие является следствием непрерывности нормальной производной функции $p_{inc}(\mathbf{y})$ на $\partial\Omega$ и равенства $\mathbf{n} = J\mathbf{n}G$, которое выполняется на внутренней стороне $\partial\Omega$. Действительно, используя формулу $\tilde{\sigma} = JGG^*$, находим

$$(10) \qquad \frac{\partial p}{\partial N} = \mathbf{n}\tilde{\sigma}\nabla p = J\mathbf{n}GG^*\nabla p = \mathbf{n}G^*\nabla p = \mathbf{n}\nabla p_{inc} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial n}.$$

Таким образом, неоднородность, сосредоточенная в Ω, акустические параметры которой определяются при выбранном отображении пространства на себя формулами (9), является нерассеивающим объектом.

Описание нерассеивающих объектов более сложной структуры дается следующей теоремой.

Теорема 1. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с кусочно-гладкой границей (класса $\mathbf{C}^1$ на компонентах гладкости). Разобьем область Ω на конечное число открытых подобластей Ω_k, $k = 1, \dots, m$, разделенных между собой кусочно-гладкими поверхностями S_k, границы этих областей могут содержать в себе и компоненты границы области Ω. Пусть, далее, $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ – непрерывное и взаимно однозначное отображение пространства $\mathbb{R}^3$ на себя, тождественное на $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, и такое, что $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^2(\Omega_k) \cap \mathbf{C}^1(\overline{\Omega_k})$. Тогда функция $p(\mathbf{x}) = p_{inc}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$ удовлетворяет во всех подобластях Ω_k уравнению (1), коэффициенты которого находятся в $\mathbb{R}^3 \setminus (\cup_{k=1}^m S_k)$ по формулам (9), и условиям сопряжения*

$$(11) \qquad [p]_{S_k} = 0, \quad \Big[\frac{\partial p}{\partial N}\Big]_{S_k} = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

в которых N — вектор конормали к поверхности S_k.

В этой теореме доказательства требует только выполнение условий (11). Выполнение первого из этих условий является следствием непрерывности функции $p_{inc}(\mathbf{y})$ и отображения $\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x})$ на образах $\tilde{S}_k = \mathbf{g}(S_k)$ поверхностей S_k. Второе условие является следствием непрерывности нормальной производной функции $p_{inc}(\mathbf{y})$ на $\tilde{S}_k$ и равенства $\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{y}) = J(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})G(\mathbf{x})$, связывающего единичные векторы $\tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{y})$ и $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ нормалей к $\tilde{S}_k = \mathbf{g}(S_k)$ и S_k в соответствующих точках и на соответствующих сторонах поверхностей. Тогда оказываются справедливыми соотношения, аналогичные равенству (10),

$$(12) \quad \frac{\partial p}{\partial N}\Big|_{S_k} = J\mathbf{n}GG^*\nabla p|_{S_k} = \tilde{\mathbf{n}}|_{\tilde{S}_k}G^*\nabla p|_{S_k} = \tilde{\mathbf{n}}\nabla p_{inc}|_{\tilde{S}_k} = \frac{\partial p_{inc}}{\partial \tilde{n}}\Big|_{\tilde{S}_k}.$$

Из (12) и следует выполнение условий (11).

Замечание 1. *Подобная схема построения нерассеивающих объектов применима не только в неограниченном пространстве, но и в бесконечном слое,* *ограниченном некоторыми криволинейными границами, снабженными подходящими граничными условиями (о постановке подобных задач см., например,* [9, 10]*). Необходимо только изменить определение падающего поля.*

3. Сферически-симметричные нерассеивающие объекты

Мы рассмотрим здесь, следуя [7], случай, когда область анизотропии Ω имеет вид сферического слоя с внутренней и внешней границами Γ_i и Γ_e. Будем предполагать, что в сферической системе координат r, θ, φ пара $\tilde{\rho}$ и λ зависит только от r, причем тензор $\tilde{\rho}$ является диагональным и имеет вид $\tilde{\rho} = \mathrm{diag}(\rho_1, \rho_2, \rho_2)$. Здесь функция $\rho_1(r)$ характеризует изменение плотности в направлении изменения переменной r, тогда как $\rho_2(r)$ характеризует изменение плотности в ортогональных направлениях (см. [5], где используются обозначения $\rho_1 = \rho_r$, $\rho_2 = \rho_\varphi = \rho_\theta$). Простой анализ показывает, что в сферических координатах уравнение (1) принимает вид

$$\rho_2(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{\rho_1(r)}\frac{\partial p}{\partial r}\right) + \Delta_{\theta,\varphi} p + \frac{r^2\rho_2(r)}{\lambda(r)}k_0^2 p = f. \tag{13}$$

Здесь $\Delta_{\theta,\varphi}$ – оператор Бельтрами-Лапласа в угловых сферических координатах, определяемый соотношением

$$\Delta_{\theta,\varphi} p = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}.$$

Ниже на четверку $(\Omega, \rho_1, \rho_2, \lambda)$ будем ссылаться как на анизотропную акустическую оболочку.

Как и в секции 2, будем рассматривать падающие поля, создаваемые компактно распределенными в Ω_e точечными или объемными источниками. Указанные источники будем называть допустимыми, а класс всех допустимых источников будем обозначать через F_{ad}. Любой источник из допустимого класса F_{ad} формально можно рассматривать как пару (Q, f). Здесь f – произвольная обобщенная функция из пространства $D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$, а $Q \equiv \mathrm{supp} f \subset \Omega_e$ – носитель обобщенной функции f.

Рассмотрим сначала ситуацию, когда все пространство $\mathbb{R}^3$ занято однородной изотропной средой. Хорошо известно, (см., например, [8]), что поле звукового давления p, создаваемого допустимым источником $(Q, f) \in F_{ad}$, определяется с помощью свертки фундаментального решения оператора Гельмгольца $\varepsilon(\mathbf{x}) = -e^{ik_0|\mathbf{x}|}/(4\pi|\mathbf{x}|)$ и функции f формулой

$$p_f(\mathbf{x}) = [\varepsilon * f](\mathbf{x}). \tag{14}$$

Подчеркнем, что функция $p_f(\mathbf{x})$ является решением в смысле обобщенных функций задачи излучения (3), причем в силу свойства эллиптической регулярности решение p_f задачи (3) является аналитической функцией всюду в $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{Q}$ [8]. В частности, оно удовлетворяет следующим условиям непрерывности на $\partial\Omega$:

$$[p_f] = 0, \quad [\partial p_f/\partial r] = 0 \ \text{ на } \partial\Omega. \tag{15}$$

Положим $p_{inc} = p_f|_{\Omega_e}$. Пусть $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < |\mathbf{x}| < b\}$, где a и b — положительные числа. Выберем непрерывную на полуоси $[0, \infty)$ функцию

$g(\zeta) \in \mathbf{C}^0[0,\infty) \cap \mathbf{C}^1[a,b] \cap \mathbf{C}^2(a,b)$, удовлетворяющую дополнительным условиям

$$g(\zeta) = \zeta, \quad \zeta \in [0,a] \cup [b,\infty); \quad g'(\zeta) > 0, \quad a \le \zeta \le b. \tag{16}$$

Условиям (16) удовлетворяет, например, функция

$$g(\zeta) = \begin{cases} \zeta, & \zeta \in [0,a] \cup [b,\infty), \\ c_1 + c_2\zeta^2, & a \le \zeta \le b, \end{cases}$$

где

$$c_1 = \frac{ab}{a+b}, \quad c_2 = \frac{1}{a+b}.$$

Введем далее в пространстве $\mathbb{R}^3$ замену переменных $(r,\theta,\varphi) \to (\zeta,\theta,\varphi)$ и положим

$$\hat{p}(\zeta,\theta,\varphi) \equiv p_f(g(\zeta)\nu(\theta,\varphi)), \quad \nu(\theta,\varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta). \tag{17}$$

Переходя к новым переменным в уравнении (3) и в (15), легко показываем, что функция $\hat{p}$ является решением следующей задачи:

$$L_0\hat{p} \equiv \Delta_{\mathbf{x}}\hat{p} + k_0^2\hat{p} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega_e, \quad \hat{p} \in \Re(\mathbb{R}^3), \tag{18}$$

$$\frac{1}{g'(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(\frac{g^2(\zeta)}{g'(\zeta)}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\zeta}\Big) + \Delta_{\theta,\varphi}\hat{p} + g^2(\zeta)k_0^2\hat{p} = 0, \;\; \mathbf{x} \equiv g(\zeta)\nu(\theta,\varphi) \in \Omega, \tag{19}$$

$$[\hat{p}]_{\zeta=a} = 0, \;\; \Big[\frac{1}{g'(\zeta)}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\zeta}\Big]_{\zeta=a} = 0, \quad [\hat{p}]_{\zeta=b} = 0, \quad \Big[\frac{1}{g'(\zeta)}\frac{\partial\hat{p}}{\partial\zeta}\Big]_{\zeta=b} = 0. \tag{20}$$

Сравнивая уравнение (19) с уравнением (13),заключаем, что сужение $\hat{p}|_\Omega$ функции $\hat{p}$ на область (сферический слой) Ω является решением в Ω уравнения (13) для анизотропной неоднородной среды с параметрами $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ и $\hat{\lambda}$, определяемыми по функции g формулами (см. доказательство в [7])

$$\hat{\rho}_1(\zeta) = \frac{\zeta^2 g'(\zeta)}{g^2(\zeta)}, \quad \hat{\rho}_2(\zeta) = \frac{1}{g'(\zeta)}, \quad \hat{\lambda}(\zeta) = \frac{\zeta^2}{g^2(\zeta)g'(\zeta)}, \quad \zeta \in [a,b]. \tag{21}$$

Кроме того, на границе $\partial\Omega$ для $\hat{p}$ выполняются условия сопряжения (17). Это позволяет сделать вывод о том, что для анизотропной оболочки $(\Omega, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\lambda})$, определенной формулами (21), рассеянное поле p_{sc} тождественно равно нулю.

На основании приведенных результатов заключаем, что любая функция $g(\zeta) \in \mathbf{C}^0[0,\infty) \cap \mathbf{C}^1[a,b] \cap \mathbf{C}^2(a,b)$, удовлетворяющая условиям (16), "порождает" в области $\Omega = \{(\zeta,\theta,\varphi) : a < \zeta < b\}$ анизотропную и неоднородную акустическую среду с параметрами $\hat{\rho}_1$, $\hat{\rho}_2$ и $\hat{\lambda}$, определяемыми по функции g формулами (21). Отвечающая данной среде оболочка $(\Omega, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\lambda})$ не изменяет во внешности Ω_e падающее поле давлений p_{inc}, создаваемое любым допустимым источником $(Q,f) \in F_{ad}$, где $f \in D'(\mathbb{R}^3, \Omega_e)$ – произвольная обобщенная функция с носителем $Q \equiv \operatorname{supp} f$, расположенным в Ω_e. Это означает, что построенная указанным образом оболочка $(\Omega, \hat{\rho}_1, \hat{\rho}_2, \hat{\lambda})$ не рассеивает падающее поле любого допустимого первичного источника, расположенного вне области Ω. Следовательно, ее невозможно обнаружить путем акустической локации с помощью падающего поля, создаваемого внешним компактно распределенным источником.

Замечание 2. *Отметим, что область* Ω_e *состоит из двух частей: внешней* Ω_e^∞ *к* Ω *и внутренней* Ω_i *к* Ω. *Если, в частности, источник находится в* Ω_e^∞, *то создаваемое им поле проникает как в* Ω, *так и в* Ω_i. *При этом, как оказывается, наличие оболочки* $(\Omega, \rho_1, \rho_2, \lambda)$ *с параметрами (21) приводит лишь к изменению первичного поля в самой оболочке, но не изменяет этого поля в областях* Ω_e^∞ *и* Ω_i. *Именно этот факт и означает, что оболочка обладает маскировочными свойствами в том смысле, что ее нельзя обнаружить стандартными способами с помощью акустической локации.*

Список литературы

[1] Pendry J.B., Shurig D., Smith D.R. Controlling electromagnetic fields. // Science. 2006. V. 312. P. 1780–1782. MR2237570

[2] Shurig D., Pendry J.B., Smith D.R. Calculation of material properties and ray tracing in transformation media. // Opt. Express. 2006. V. 14. P. 9794–9804.

[3] Cummer S.A., Schurig D. One path to acoustic cloaking. // New J. Phys. 2007. V. 9. 45.

[4] Chen H., Wi B.-I., Zhang B., Kong J.A. Electromagnetic wave interactions with a metamaterial cloak. // Phys. Rev. Lett. 2007. V. 99. 063903.

[5] Cummer S.A., Popa B.I., Schurig D. et al. Scattering theory derivation of a 3 D acoustic cloaking shell. // Phys. Rev. Letters. 2008. Vol. 100. 024301.

[6] Романов В.Г. Обратная задача дифракции для уравнений акустики. // Доклады АН. 2010. Т. 431. С. 319-322. MR2682716

[7] Алексеев Г. В., Романов В. Г. Об одном классе нерассеивающих акустических оболочек для модели анизотропной акустики. // *Сибирский журн. индустр. матем.*, 2011. Т. XIV, №2. С. 15-20. Zbl pre05932294

[8] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 400 с. MR0653331

[9] Алексеев Г.В. Метод нормальных волн в подводной акустике. Владивосток: Дальнаука, 2006. 360 с.

[10] Alekseev G.V. Multidimensional inverse source problems of underwater acoustics. // Eur. J. Appl. Math. 1998. V. 9. P. 589-605. Zbl 0917.76080

Геннадий Валентинович Алексеев
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио, 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: alekseev@iam.dvo.ru

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.44–С.50 (2011) УДК 517.958
MSC 13A99

ЗАДАЧИ МАЛОРАКУРСНОЙ ТОМОГРАФИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ СРЕД

Д.С. Аниконов

Abstract. It is considered a tomography problem when one or two directions of radiation is taken in account and shadows of unknown inclusions are sought for. Given data is a density of radiation on the antennas outside of the inclusions. We investigate the case when a direct images (photos) are indistinguishable, but the shadows become clear after using our algorithms.

Keywords: tomography, radiation, location, transport equation.

1. Введение

Под задачей зондирования (томографии) неизвестной среды понимается проблема нахождения ее внутреннего строения путем анализа характеристик физического сигнала, прошедшего через эту среду. Здесь таким сигналом считается радиационное излучение (в частности, фотонное), описываемое стационарным моноэнергетическим уравнением переноса. Рассматриваются варианты использования всего одного или двух направлений излучения. Известной информацией считается плотность потока излучения, измеряемая на некоторой плоской площадке (антенне), удаленной от внутренних включений, плотность которых отличается от плотности окружающей среды. Для одного ракурса наблюдений искомой информацией являются ортогональные проекции (тени) неизвестных включений на площадке измерений. При использование двух ракурсов определяется также приблизительное расположение этих включений

Anikonov, D.S., Tomography problems with little directions of observation.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-08-00286-а), а также в рамках междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №93-2009.

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

в пространстве. Выполнено теоретическое исследование и проведены соответствующие численные эксперименты. Отметим, что имеется большое число публикаций различных авторов по близкой тематике. Однако, во всех известных нам работах речь идет об улучшении уже имеющихся изображений и рассеяние рассматривается лишь как неизбежная и нежелательная помеха. Специфика нашего исследования состоит в том, первоначальное изображение у нас отсутствует, а эффект рассеяния является элементом изучения и использования. Работа направлена на создание алгоритмов томографической локации и может служить основой новых способов ориентирования в произвольных поглощающих и рассеивающих средах. Результаты получены автором совместно с сотрудниками ИПМ ДВО РАН И.В. Прохоровым и В.Г. Назаровым [2,3].

2. Основные обозначения и постановка задач

Рассматривается процесс излучения, описываемый следующим уравнением переноса:

$$(1)\qquad (\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega))+\mu(r)f(r,\omega)=\mu_s(r)\int_\Omega k(r,\omega,\omega')f(r,\omega')d\omega'+J(r,\omega),$$

где G - ограниченная выпуклая область в R^3, с гладкой границей класса C^1 , $\Omega=\{\omega:\omega\in R^3,|\omega|=1\}$. Функции μ,μ_s,k,J характеризуют среду G, в которой происходит процесс переноса излучения. При этом $\mu(r)$ означает коэффициент ослабления, $\mu_s(r)$ - коэффициент рассеяния, $k(r,\omega,\omega')$ - индикатриса рассеяния, $J(r,\omega)$ - плотность внутренних источников. Интеграл в правой части уравнения $N(r,\omega)$ называется интегралом столкновений. Функция $f(r,\omega)$ означает плотность потока частиц в точке r, движущихся в направлении единичного вектора ω.

Обозначим $d(r,\omega)$ длину пересечения луча $L(r,\omega)=\{r+t\omega,t\ge 0\}$ и области G и рассмотрим граничное условие:

$$(2)\qquad f(r-d(r,-\omega)\omega,\omega)=h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega),\quad (r,\omega)\in G\times\Omega,$$

где h означает плотность падающего потока на границе среды G.

Задача определения функции $f(r,\omega)$ из уравнения (1) и краевого условия (2) при известных μ,μ_s,k,J,h называется прямой задачей. Она хорошо изучена многими авторами при довольно общих ограничениях, которые в нашей работе предполагаются выполненными. Для нас важно отметить, что решение уравнения (1) понимается в некотором обобщенном смысле.

Для постановки задачи сделаем следующие предположения. Пусть в области G имеются строго выпуклые подобласти $G_1,G_2,G_3,$, границы которых принадлежат классу C^2. Обозначим $G_4=G\backslash(\overline{G_1}\bigcup\overline{G_2}\bigcup\overline{G_3})$. Для $(r,\omega,\omega')\in G_i\times\Omega\times\Omega,\ \ i=1,2,3,4,$ функции μ,μ_s,k,J равномерно непрерывны по совокупности переменных вместе со всеми своими частными производными первого порядка. На границах областей $G_i,\ \ i=1,2,3,$ коэффициенты уравнения (1) могут иметь ненулевые разрывы первого рода по переменной r, а случай их непрерывности на каких то поверхностях ∂G_i по сути означает отсутствие соответствующих областей, имеющих смысл включений. Неотрицательная и ограниченная функция $h_1(r,\omega)=h(r-d(r,-\omega)\omega,\omega)$ предполагается непрерывной вместе со всеми своими первыми частными производными при $(r,\omega)\in G\times\Omega$.

Предположим, что горизонтальная плоскость $P=\{(r_1,r_2,r_3):r_3=0\}$, пересекает область G, но не имеет общих точек с областями G_1,G_2,G_3.

Для определенности будем считать, что плоскость расположена выше областей G_1, G_2, G_3. Обозначим через D множество, являющееся пересечением плоскости P и области G, через D_1, D_2, D_3 вертикальные проекции областей G_1, G_2, G_3 на плоскость P, $D_4 = D \backslash (\overline{D_1} \bigcup \overline{D_2} \bigcup \overline{D_3})$ $D_0 = D_1 \bigcup D_2 \bigcup D_3 \bigcup D_4$.

В работе рассматриваются следующие задачи.

Задача однoракурсной томографии *Зная значения функции* $f(r,\omega)$ *при* $r \in D, \omega_0 = (\omega_1, \omega_2, 0)$, *найти (полностью или частично) границы* $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$ *множеств* D_1, D_2, D_3.

Для такой же постановки задачи изучается ее качественный аспект.

Задача анализа влияния наложения теней одних объектов на другие *Предполагая, что область* G_3 *содержит две подобласти* G_1, G_2 *определить сравнительное качество реконструкции линий* $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$ *в зависимости от коэффициентов рассеяния и поглощения в областях* G_1, G_2, G_3.

Для постановки следующей задачи сделаем некоторые пояснения. Пусть используются два направления (ракурса) излучения и соответственно меняется предмет поиска. Если раньше определению подлежала только тень объекта на площадке измерений (антенне), то теперь дополнительно анализируется возможность локализации искомого тела в пространстве. Для простоты рассматривается случай, когда в среде G имеется всего одно включение G_1, где G_1 - выпуклая ограниченная область в R^3 с гладкой границей класса C^2, причем $\overline{G_1} \subset G$; $G_2 = G \backslash \overline{G_1}$. Обозначим через $C(T,\omega)$ цилиндр в R^3 с основанием T и осью ω, т. е. объединение точек, лежащих на всех лучах $L(\tau, \pm\omega)$, $\tau \in T$. Пусть P и Q - две плоскости в R^3 не пересекающие G_1, но имеющие непустое пересечение с областью G_2. Единичные нормали к P и Q обозначим $\omega_P = (\omega_{P1}, \omega_{P2}, \omega_{P3})$, $\omega_Q = (\omega_{Q1}, \omega_{Q2}, \omega_{Q3})$ и предположим, что вектора ω_P и ω_Q - линейно независимы.

Рассмотрим две плоские области P_1, Q_1 такие, что $\overline{P_1} \subset P \bigcap G_2$, $\overline{Q_1} \subset Q \bigcap G_2$,, и каждый из цилиндров $C(P_1, \omega_P), C(Q_1, \omega_Q)$ содержит строго внутри область G_1. Для удобства в дальнейшем переменную r будем переобозначать через x, если $r \in P_1$ и через y, если $r \in Q_1$. Обозначим через D_P и D_Q ортогональные проекции области G_1 на плоскости P и Q. Ясно, что $\overline{D_P} \subset P_1$, $\overline{D_Q} \subset Q_1$.,

Задача двуракурсной томографии. *Зная значения функции* $f(x, \omega_P)$, $x \in P_1$ *и* $f(y, \omega_Q)$, $y \in Q_1$, *построить и обосновать алгоритм определения пересечения цилиндров* $C(D_P, \omega_P)$ *и* $C(D_Q, \omega_Q)$, *которое является оболочкой области* G_1.

При интерпретации этой задачи плоские области P_1, Q_1 можно понимать как антенны, ориентированные на искомое тело и принимающие зондирующий сигнал, коллимированный по направлениям, ортогональным плоскостям антенн. Положительное решение этой задачи давало бы приблизительное представление о форме тела G_1 и его местонахождении в пространстве.

3. Исследование задач

Основным математическим соотношением в этой работе является формула для градиента функции $f(r,\omega)$ по переменным r_1, r_2, r_3. Обозначим через G_0 объединение областей G_1, G_2, G_3, G_4. Ясно, что для любой точки $r \in G_0$ и любого направления ω луч $L(r, -\omega)$ пересекает границу ∂G_0 множества G_0 в конечном числе точек $y_j = r - t_j(r, -\omega)\omega, j = 1, \ldots, l(r, -\omega)$, $0 < t_1 ... < t_l$.

Обозначим через $n(y_j)$ единичный вектор внутренней нормали к той поверхности $G_i, i = 1, \dots, 4$, к которой принадлежит точка y_j. Для произвольной функции $F(r, \omega)$ определим ее скачок (величину разрыва) по переменной r в точке (y_j, ω) формулой $[F(y_j, \omega)] = \lim\limits_{t \to t_j+0} F(r + t\omega, \omega) - \lim\limits_{t \to t_j-0} F(r + t\omega, \omega)$.

В этих обозначениях имеет место формула для градиента [1]

$$(3)\ \ \nabla_r f(r, \omega) = \sum_{i=1}^{l(r,-\omega)} - \exp(\int\limits_0^{t_j(r,-\omega)} \mu(r - t'\omega)dt')[\nabla_r f(y_j, \omega)\omega] \frac{n(y_j)}{n(y_j) \cdot \omega} + O(1),$$

где O(1) - ограниченная вектор-функция. Очевидным следствием этого равенства является факт неограниченности градиента функции f только при условии $n(y_j) \cdot \omega = 0$, что эквивалентно компланарности вектора ω плоскости, касательной к ∂G_0 в точке y_j. Именно это свойство и будет положено в основу алгоритмов решения поставленной задачи.

Возьмем произвольную точку $r \in D_j, 1 \le j \le 3$. Обозначим через $\nabla_r^* f(r, \omega)$ градиент следа функции $f(r, \omega)$ на множестве D, и приведем нужное нам следствие из формулы (3)

$$(4)\ \ \nabla_r^* f(r, \omega) = \sum_{i=1}^{l(r,-\omega)} - \exp(\int\limits_0^{t_j(r,-\omega)} \mu(r - t'\omega)dt')[\nabla_r f(y_j, \omega)\omega] \frac{n^*(y_j)}{n(y_j) \cdot \omega} + O^*(1),$$

где $n^*(y_j)$ ортогональная проекция вектора $n(y_j)$ на плоскость P, $O^*(1)$ - вектор- функция, ограниченная во всяком подмножестве D' таком, что $\overline{D'} \subset D$. Будем предполагать, что $D' \supset \overline{D_1} \bigcup \overline{D_2} \bigcup \overline{D_3}$.

Поясним вывод равенства (4) из равенства (3). Во-первых, отметим, что введение множества D' связано с возможной неограниченностью величины $\nabla_r^* f(r, \omega)$ вблизи границы множества D, что может служить помехой для выделения искомых линий. Во-вторых, приходится вместо полного градиента использовать только две первые его компоненты, поскольку таковы данные задачи. Заметим, что третья компонента, неучтенная в равенстве (4), ограничена. Множество D' можно интерпретировать как антенну, на которой установлены коллимированные детекторы излучения.

Предлагаемый способ решения поставленных задачи следует из равенства (4). Прежде всего, заметим, что в его левой части находится градиент, который получается из известной функции при $\omega = \omega_0$. Правая часть может быть неограниченной, только если $n(y_j) \cdot \omega_0 \to 0$. Не трудно понять, что для $r \in D_i,\ i = 1, 2, 3$, последнее свойство выполняется только при $\rho(r, \partial G_i) \to 0$. Следовательно, модуль левой части равенства (4) может указывать на расположение искомых линий $\partial D_1, \partial D_2, \partial D_3$.

В работе используются четыре способа реконструкции:
1. Визуализация значений $f(r, \omega_0)$ при $r \in D'$, называемая здесь прямой видимостью (например, фотография).
2. Изображение значений $|\nabla_r^* f(r, \omega_0)|$ при $r \in D'$ - (прямой градиентный способ).
3. Вычисление первого интегро-дифференциального индикатора

$$Ind_1(r) = \int_{D'} \frac{|\nabla_\xi^* f(\xi, \omega_0)| d\xi}{|r - \xi|^{1+\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1$$

и его последующей визуализации.
4. Вычисление второго интегро-дифференциального индикатора по следующим формулам и его визуализация. Усреднение величины $|\nabla_r^* f(r,\omega_0)|$ осуществляется при помощи свертки с дельтаобразной функцией $\chi(\xi)$, где $\chi(\xi) = c_1(1-|\xi|^2),\ |\xi|<1;\ \chi(\xi)=0,\ |\xi|\geq 1,\ \xi\in R^2$, причем причем интеграл от функции $\chi(\xi)$ по всему пространству R^2 равен единице.

Тогда

$$\chi_\epsilon(\xi) = c_1\epsilon^{-2}\chi(\frac{\xi}{\epsilon}),\ \ Ind_2(r) = \int_{D'}\chi_\epsilon(\xi)|\nabla_\xi^* f(\xi,\omega_0)|d\xi$$

Все рассмотренные задачи сначала изучались теоретически, а потом при помощи компьютерных методов. Эти два способа исследования показали хорошее согласование полученных результатов.

Проведенные теоретические исследования, показали, что величины $|\nabla_r^* f(r,\omega_0)|,\ Ind_1(r),\ Ind_2(r)$ не ограниченны только вблизи искомых линий. Соответственно, в численных экспериментах, множество точек, где эти показатели аномально большие, принималось за приближенное решение поставленной проблемы.

Во всех численных экспериментах прямая визуализация не давала представления о месторасположении искомых линий, а прямой градиентный метод по качеству реконструкции уступал интегро-дифференциальным индикаторам [2,3]. При исследовании проблемы наложения теней одних объектов на другие получен вывод, что это обстоятельство может улучшать или ухудшать качество реконструкции в зависимости от радиационных характеристик включений. Реконструкция осуществлялась при помощи прямого градиентного способа, т.е. производилось изображение значений $|\nabla_r^* f(r,\omega_0)|$ при $r\in D'$. Отметим,что это самый простой, хотя и не лучший способ реконструкции. Однако для намеченной цели он достаточен, поскольку здесь исследуется только влияние одних включений на другие. Важным обстоятельством исследования является учет не только поглощения, но и рассеяния. Именно, только при определенных комбинациях коэффициентов поглощения и рассеяния проявляются упомянутые эффекты.

Для задачи двуракурсной томографии использовался индикатор неоднородности $Ind_1(r)$. Обозначим через $\nabla_P f(x,\omega_P)$ и $\nabla_Q f(x,\omega_Q)$ двумерные градиенты по r следов функции $f(r,\omega)$ при $r=x,\ x\in P_1,\ \omega=\omega_P$ и при $r=y,\ y\in Q_1,\ \omega=\omega_Q$. Для каждого из этих градиентов выпишем индикатор неоднородности:

$$Ind_1(x) = \int_{P_1}\frac{|\nabla_\xi^* f(\xi,\omega_0)|d\xi}{|x-\xi|^{1+\alpha}},\ \ Ind_1(y) = \int_{Q_1}\frac{|\nabla_\xi^* f(\xi,\omega_0)|d\xi}{|y-\xi|^{1+\alpha}},\ \ 0<\alpha<1.$$

При определенных ограничениях, которые в этой работе выполняются, было доказано [2], что $Ind_1(x)\to\infty,\ Ind_1(y)\to\infty$, тогда и только тогда, когда $x\in D_P,\ x\to\partial D_P,\ y\in D_Q,\ y\to\partial D_Q$.

Отсюда следует единственность определения проекций (теней) D_P и D_Q на соответствующие плоскости. При численной реализации этой части алгоритма линии ∂D_P и ∂D_Q соответствуют точкам аномально больших значений функций $Ind_1(x)$ и $Ind_1(y)$.

В целом алгоритм состоит из следующих пунктов:
а) при помощи индикаторов $Ind_1(x)$, $Ind_1(y)$, находятся D_P и D_P;
б) фиксируется любая точка $x \in D_P$;
в) решается система двух линейных уравнений, одно из которых есть $(y - x, [\omega_P, \omega_Q]) = 0$, а другое есть уравнение плоскости Q;
г) из множества полученных решений $y = (y_1, y_2, y_3)$, представляющее собой прямую линию, выбираются те, которые принадлежат D_Q;
д) для любой выбранной точки $y = (y_1, y_2, y_3) \in D_Q$ и ранее фиксированной точки $x \in D_P$ решается система линейных уравнений относительно $t(x),\ t(y)$:

$$t(x)\omega_{P1} - t(y)\omega_{Q1} = y_1 - x_1$$
$$t(x)\omega_{P2} - t(y)\omega_{Q2} = y_2 - x_2$$
$$t(x)\omega_{P3} - t(y)\omega_{Q3} = y_3 - x_3,$$

причем существование решения этой переопределенной системы обеспечивается выполнением пунктов в) и г);
е) выписываются точки $r = x + t(x)\omega_P = y + t(y)\omega_Q$, дающие представление о пространственной локализации области G_1. При этом величины $t(x),\ t(y)$ равны расстояниям от антенн до точки пересечения лучей $L(x, -\omega_P)$ и $L(y, -\omega_Q)$, т.е. означают приблизительные расстояния от антенн до искомого объекта.
Отметим, что указанный алгоритм легко распространить на случай большего числа ракурсов. Однако, в принципе, это не меняет ситуацию. Возможно лишь некоторое уточнение формы и положения области G_1 в пространстве.
В дальнейшем предполагается продолжить исследования по следующим направлениям.

1. Можно отдельно рассмотреть проблему поиска латентного источника излучения, когда уровень радиации от него не превышает радиационного фона окружающей среды. Заметим, что с одной стороны эта проблема является реалистической и востребованной, а с другой стороны вполне вписывается в уже выполненные исследования. По существу, требуется только провести соответствующий численный эксперимент.
2. Как уже выяснено, для наших алгоритмов требуется высокая точность измерений. И это, конечно, является недостатком. Чтобы его устранить, можно применить, во-первых, повторение измерений, а во-вторых, можно повторять обработку, т.е. применять интегро-дифференциальные операторы несколько раз. Иначе говоря, значения индикатора на предыдущем шаге могли бы служить исходной информацией для такого же или другого индикатора на следующем шаге. Эффективность этих подходов можно проверять на численных экспериментах.
3. Наконец, было бы интересно предложить новые виды индикаторов, а также сравнить эффективность различных видов уже введенных индикаторов и, может быть, их комплексов.

Список литературы

[1] Аниконов Д.С., Ковтанюк А.Е., Прохоров И.В. *Использование уравнения переноса в томографии*, Федеральная целевая программа "Государственная поддержка интеграции высшего образования и фундаментальной науки на 1997-2000 годы, Москва, 2000, изд. Логос, С.3-223.

[2] Anikonov D.S., Nazarov V.G., Prokhorov I.V. *Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium*, Journal Inverse and Ill-Posed Problems. 2011, V. 18, Issue 8, Pages 885-893.

[3] Аниконов Д.С., Назаров В.Г., Прохоров И.В. *Задача однораскурсного зондирования неизвестной среды*, Сибирский журнал индустриальной математики. 2011, Т. 14, № 2(46), С. 21-27.

Дмитрий сергеевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anik@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.51–С.73 (2011) УДК 517.9
MSC 35R30

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ И КОЭФФИЦИЕНТОВ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Е. АНИКОНОВ, М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. In this work we give short characteristic of results on presentations of solutions and coefficients of hyperbolic and elliptic equations which may be concerned with mathematical problems of acoustic probing.

Keywords: inverse problems of mathematical physics, analytical methods of solution, acoustic probing.

В работе мы приводим краткую характеристику полученных результатов, по представлению решений и коэффициентов гиперболических и эллиптических уравнений которые могут быть связаны с тематикой акустического зондирования.

В работах [1-3] приводятся новые представления решений и коэффициентов уравнений математической физики, которые являются дифференциально-алгебраическими тождествами. Полученные представления частично использованы при изучении одномерных и многомерных обратных задач. Приведем некоторые из полученных представлений

Лемма 1. *Пусть* $V(x)$, $F(y)$, $G(y)$, $x = (x_1, ..., x_n) \in D$, $y \in \mathbb{R}$ *— произвольные дважды дифференцируемые функции,* B, C *— постоянные, причем* $\nabla V \neq 0$, $B - CV(x) \neq 0$. *Тогда функции* $w(x,t)$, $k(x)$, $A^i(x)$, $i = 1, ..., n$, *определенные*

Anikonov, Yu.E., Neshchadim, M.V., Presentations of solutions and coefficients of hyperbolic and elliptic equations.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект №93).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

формулами

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right),$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2},$$

$$A^i(x) = A_0^i(x) - \frac{1}{|\nabla V(x)|^2} \left(\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(x) \triangle w + \sum_{i=1}^{n} A^i \frac{\partial w}{\partial x_i},$$

где $A_0^i(x)$, $i = 1, ..., n$ *— некоторые функции такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{n} A_0^i \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0.$

Замечание 1. Если $A_0^i(x) = 0$, $i = 1, ..., n$, то в условиях леммы 1 имеет место тождество

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2} \triangle w - \frac{1}{|\nabla V(x)|^2} \left(\frac{2C}{B - CV(x)} + \frac{\triangle V}{|\nabla V(x)|^2} \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_i},$$

где

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right).$$

Замечание 2. К решению $w(x,t)$ можно добавлять $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение уравнения с теми же коэффициентами, то есть

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right) + \widetilde{w}(x,t).$$

Такая процедура часто необходимо для удовлетворения начально-краевых условий и при рассмотрении обратных задач мы существенно это используем.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1 и пусть функция* $V(x)$ *является решением уравнения*

$$\triangle V(x) + \frac{2C}{B - CV(x)} |\nabla V(x)|^2 - \frac{2}{|\nabla V(x)|^2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_j} = 0.$$

Тогда функция

$$w(x,t) = \frac{1}{B - CV(x)} \left(F(t + V(x)) + G(t - V(x)) \right),$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(x) \frac{\partial w}{\partial x_i} \right), \text{ где } k(x) = \frac{1}{|\nabla V(x)|^2}.$$

Лемма 3. *Пусть $V(x,t)$, $F(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, где $\alpha \le t \le \beta$, $x \in D$ и $y \in \mathbb{R}$, причем $|\nabla V| \ne 0$. Тогда для $w(x,t) = F(V(x,t))$ имеет место тождество*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

Следствие 2. *Если функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \dfrac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)^2$, то $w(x,t) = F(V(x,t))$ — решение уравнения $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\Delta w}{|\nabla V|^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)^2$. При этом, если $\dfrac{1}{|\nabla V|^2}\left(\dfrac{\partial V}{\partial t}\right)^2 = \mathrm{const}$, то $V(x,t)$ — функционально-инвариантное решение волнового уравнения.*

Лемма 4. *Пусть $V(x,t)$, $F(y)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, где $\alpha \le t \le \beta$, $x \in D$ и $y \in \mathbb{R}$, причем $|\nabla V| \ne 0$. Если функция $V(x,t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\Delta V}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\right),$$

то $w(x,t) = F(V(x,t))$ есть решение уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{|\nabla V|^2}\left(\frac{\partial V}{\partial t}\right)^2\frac{\partial w}{\partial x_i}\right).$$

Пример. Пусть функция $F(y,t)$ — решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F$. Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой

$$\begin{aligned} w(x,t) \quad = \quad & G^{-1}\left(\frac{u(x)}{4\pi}\int\limits_{|y|=1}\frac{G(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y\right.\\ & \left.+t\int\limits_{|y|=1}\frac{G'(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))w_1(V^{-1}(V(x)+ty))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y\right), \end{aligned}$$

удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad = \quad & \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_j}\\ & +\frac{G''(w)}{G'(w)}\left[\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] + a(x)\frac{G(w)}{G'(w)} \end{aligned}$$

и данным Коши

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ определены соотношениями

$$a_{ij}(x) = \left.\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k} \frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\right|_{y=V(x)}, \quad a_j(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)} \left.\left[\sum_{k=1}^{3} 2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k} \frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k} + \widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}\right]\right|_{y=V(x)},$$

$$a(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)} \Delta \widetilde{u}\Big|_{y=V(x)}, \quad \widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^3.$$

При $u(x) = 1$, $G(z) = z$, $V(x) = x$ получается формула Кирхгофа.

Для гиперболического уравнения рассмотрено несколько обратных задач. Например, рассмотрена нелинейная обратная задача: найти решение $w(x,t)$ и коэффициенты $k(x)$, $\lambda(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(x)\Delta w + f(t)\lambda(x), \tag{1}$$

с условиями

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D, \tag{2}$$

$$w|_{\partial D} = \varphi(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_{\partial D} = \psi(s,t), \quad s \in \partial D, \quad t \geq 0. \tag{3}$$

Здесь D — область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D, $\dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ — производная по нормали границы ∂D области D, функция $f(t) \neq 0$ и непрерывна, непрерывно дифференцируемые функции $w_0(x)$, $w_1(x)$, $\varphi(s,t)$, $\psi(s,t)$ — известны и могут быть произвольными.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi(s,t)$ обратной задачи (1–3) имеет представление*

$$\varphi(s,t) = F(t + v_0(s)) + G(t - v_0(s)) + \widetilde{\varphi}(s,t),$$

где $F(y) \neq 0$, $G(y) \neq 0$, $y \in \mathbb{R}$, $v_0(s) \neq 0$ — дифференцируемые функции, $\widetilde{\varphi}(s,t)$ — фиксированная дифференцируемая добавка, возможно, равная нулю, и пусть $v(x)$ — гармоническая функция, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, такая, что $v|_{\partial D} = v_0(s)$, причем $|\nabla v| \neq 0$, и $\widetilde{w}(x,t)$ — решение начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 \widetilde{w}}{\partial t^2} = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2} \Delta \widetilde{w}, \quad \widetilde{w}|_{\partial D} = \widetilde{\varphi}(s,t),$$

$$\widetilde{w}|_{t=0} = w_0(x) - F(v(x)) - G(-(v(x))), \quad \left.\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x) - F'(v(x)) - G'(-(v(x))),$$

а $u_k(x)$, μ_k — собственные функции и собственные числа задачи на собственные значения

$$\frac{1}{|\nabla v(x)|^2} \Delta u_k + \mu_k u_k = 0, \quad u_k|_{\partial D} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Если последовательность чисел a_k, $k = 1, 2, ...$, определена формальным разложением

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{\partial u_k(s)}{\partial \nu} \int_0^t f(p) \sin(\sqrt{\mu_k}(t-p))dp =$$

$$= \psi(s,t) - \frac{\partial \widetilde{w}(s,t)}{\partial \nu} - (F'(t+v_0(s)) - G'(t-v_0(s))) \frac{\partial v(s)}{\partial \nu},$$

то имеют место формулы

$$w(x,t) = F(t+v(x)) + G(t-v(x)) + \widetilde{w}(x,t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int_0^t f(p) \sin(\sqrt{\mu_k}(t-p))dp,$$

$$k(x) = \frac{1}{|\nabla v(x)|^2}, \quad \lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{\mu_k} u_k(x).$$

Таким образом, как и в линейных задачах, построение решения нелинейной обратной задачи связано с классическими проблемами теории дифференциальных уравнений. При этом, решение $w(x,t)$ представляется в виде суммы трех функций: $F(t+v(x)) + G(t-v(x))$, $\widetilde{w}(x,t)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x) \int\limits_0^t f(p) \sin(\sqrt{\mu_k}(t-p))dp$, каждая из которых несет определенную смысловую нагрузку. Первая функция $F(t+v(x)) + G(t-v(x))$ определяет коэффициент $k(x)$, вторая функция $\widetilde{w}(x,t)$ ответственна за произвол в граничных и начальных условиях, а третья функция определяет функцию источника. Разумеется, основным вопросом здесь является возможность и обоснованность представления краевого условия $\varphi(s,t)$ в виде $F(t+v_0(x)) + G(t-v_0(x)) + \widetilde{\varphi}(s,t)$. Заметим, что функции $F(y)$, $G(y)$ и $v_0(s)$ можно находить из вариационного принципа $\min\|\varphi(s,t) - F(t+v_0(s)) - G(t-v_0(s))\|$, где $\| \, \|$ — некоторая норма.

Для одномерных обратных задач получены связи уравнений третьего порядка с обратными задачами теории рассеяния. Более точно, известно, что обратные задачи теории рассеяния связаны с обратными задачами для гиперболических уравнений. Например, обратная задача: определения функций $F(y,t)$, $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, по соотношениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + q(y)F, \tag{4}$$

$$F|_{y=0} = \theta(t), \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad F|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(y). \tag{5}$$

связана с обратной задачей теории рассеяния и алгоритм ее решения состоит в следующем:

1. Строится функция $\Phi(y,t) = \dfrac{1}{2}(a(t+y) + a(t-y))$, где $a(t) = \theta^{'}(t)$.
2. Находится функция $G(y,t)$ из уравнения Гельфанда-Левитана

$$G(y,t) + \Phi(y,t) + \int_0^y G(y,\tau)\Phi(t,\tau)d\tau = 0.$$

3. Вычисляется $q(y)$ по формуле: $q(y) = 2\dfrac{d}{dy}G(y,y)$.

4. Определяется $F(y,t)$ соотношением

$$F(y,t) = \frac{1}{2}(\theta(t+y) + \theta(t-y)) + \frac{1}{2}\int\limits_{-y}^{y} \theta(t-\tau)G(y,\tau)d\tau.$$

Рассмотрим обратную задачу: найти функции $w(x,t)$, $A(x)$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$, если выполнены соотношения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right), \tag{6}$$

$$w|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad w|_{t=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x), \tag{7}$$

где $\alpha(t)$ — некоторая бесконечно-дифференцируемая функция при $t \geq 0$.

Справедлива

Теорема 2. *Решение обратной задачи* (6)–(7) *дается следующими формулами*

$$A(x) = \frac{1}{{V'}^2(x)}, \quad w(x,t) = \sqrt{V'(x)}F(V(x),t),$$

где функция $V(x)$ *— решение задачи Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка*

$$V''' = 2q(V){V'}^3 + \frac{5(V'')^2}{2V'}, \quad V(0) = 0, \quad V'(0) = 1, \quad V''(0) = 0,$$

а функции $F(y,t)$, $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $y \in \mathbb{R}$, *являются решением обратной задачи* (4)–(5) *и при* $\theta(t) = \alpha(t)$ *определены соотношениями* 1-4.

В заключение описания результатов работ [1-3]ограничимся одним примером одномерной обратной задачи поиска решения и двух взаимосвязанных, определяемых одной функцией, коэффициентов уравнения акустики: Найти функции $w(x,t)$, $a(x)$, $b(x)$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x}, \quad w|_{x=0} = \alpha(t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \beta(t), \quad w|_{t=0} = w_0(x),$$

где $x \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$ и функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $w_0(x)$ известны.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $w_0(x)$ *дважды непрерывно дифференцируемые функции и такие, что* $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$, $w_0(0) = 0$, $w_0'(0) = 1$. *Тогда в окрестности начала координат имеют место формулы*

$$w(x,t) = \frac{1}{1 - V(x)}\left(F(t + V(x)) + G(t - V(x))\right),$$

$$a(x) = \frac{1}{(V')^2}, \quad b(x) = -\frac{1}{V'}\left(\frac{2}{1-V} + \frac{V''}{(V')^2}\right),$$

где

$$F(y) = \frac{\alpha(y)}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^y (\beta(p) - \alpha(p))dp, \quad G(y) = \frac{\alpha(y)}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^y (\beta(p) - \alpha(p))dp,$$

$$V(x) = \psi^{-1}(w_0(x)), \;\; \psi(y) = \frac{1}{1-y}\left(F(y) + G(-y)\right).$$

В работе [4] приводятся новые представления решений и коэффициентов параболических уравнений, которые частично использованы в работе при изучении многомерных обратных задач. В частности полученные представления нашли свое применение в работе [5].

В работе [5] излагаются новые подходы изучения обратных задач для уравнений гиперболического, параболического и эллиптического типа с параметром. Рассматриваются линейные и нелинейные обратные задачи. В случае гиперболических и параболических уравнений, предполагая зависимость решения уравнения от параметра, удается при некоторых ограничениях свести общие линейные обратные задачи к конкретным интегральным уравнениям первого рода типа Абеля с последующим аналитическим продолжением. При этом общность заключается в том, что функция источника зависит не только от пространственных координат но и от времени при ограничении компактности ее носителя. В случае нелинейных обратных задач для эллиптических уравнений, содержащих параметр, выписаны системы и интегродифференциальные уравнения, не содержащие искомого коэффициента, что открывает путь к исследованию таких обратных задач. В одномерном случае сформулирована и доказана теорема существования решения при условии аналитичности.

Дополнительно заметим, что в многофазных средах различные частицы имеют разные коэффициенты диффузии, что приводит к параболическим уравнениям с переменным параметром — коэффициентом диффузии. При этом, разумеется, измерение начально-краевых данных в зависимости от параметра является весьма деликатным делом. Что касается гиперболических уравнений, то переменным параметром здесь может служить набор скоростей различных волн. Для эллиптических уравнений переменный параметр — частота либо коэффициент преобразования по пространственной переменной, как, например, в задаче электроразведки.

Для гиперболического уравнения рассмотрены обратные задачи

в **одномерном случае:**

Найти решение $w = w(x,p,t)$, $-\infty < x < \infty$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,t)$ с компактным носителем в области $x > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda(x,t)\alpha(p),$$

$$w|_{t=0} = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \;\; w|_{x=0} = \varphi(p,t),$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(p,t)$ заданы.

в **двумерном случае**

Найти решение $w = w(x,y,p,t)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x,y,t)$ с компактным носителем в области $x > 0$, $y > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2 \Delta w + \lambda(x,y,t)\alpha(p),$$

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \;\; w|_{y=0} = \varphi(x, p, t),$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(x, p, t)$ заданы.

и в **трехмерном случае**

Найти решение $w = w(x, p, t)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$, $p \geq 0$ и финитную непрерывную функцию $\lambda(x, t)$ с компактным носителем в области $x_3 > 0$, $t > 0$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p^2 \Delta w + \lambda(x, t)\alpha(p),$$

$$w|_{t=0} = \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = 0, \;\; w|_{x_3=0} = \varphi(x_1, x_2, p, t),$$

где функции $\alpha(p) \neq 0$, $p \geq 0$, $\varphi(x_1, x_2, p, t)$ трижды непрерывно дифференцируемы и известны.

Как уже отмечалось удается при некоторых ограничениях свести данные обратные задачи к конкретным интегральным уравнениям первого рода типа Абеля с последующим аналитическим продолжением.

Для эллиптических уравнений, содержащих параметр, рассматриваются обратные задачи для уравнений типа

$$\Delta w + \frac{\omega^2}{c^2(x)} w = 0, \tag{8}$$

которое, например, в рамках лучевого метода, берется за основу количественных и качественных исследований Причем предполагается зависимость решения $w(x, \omega)$ не только от x, но и от ω. В этой связи удобно записать уравнение (8) с переменным комплексным параметром $p = -\dfrac{1}{i\omega}$ в виде

$$p^2 \Delta w = \lambda(x) w, \;\; \lambda(x) = \frac{1}{c^2(x)}. \tag{9}$$

Показано, что обратные задачи для уравнения (9) могут быть редуцированы к исследованию краевых задач для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\varphi_k(x)}{dx} = \sum_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}(x), \quad k = 0, 1, ...$$

и имеет место формула

$$\lambda(x) = \varphi_0^2(x)$$

в случае $n = 1$ и для нелинейных систем уравнений в частных производных

$$\Delta\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi_{k+1-j}}{\partial x_i}, \quad k = 0, 1, ...,$$

и имеет место формула

$$\lambda(x) = |\mathrm{grad}\, \varphi_0|^2$$

в случае $n > 1$.

В одномерном случае удается сформулировать и доказать теорему существования аналитического решения обратной задачи:

Найти в окрестности нуля функции $w(x,p)$, $\lambda(x)$ такие, что

$$p\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda(x)w, \quad \frac{p}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha(p),$$

где $\alpha(p)$ — заданная функция переменной p. (Теорема единственности сходной обратной задачи электроразведки была сформулирована впервые в работе Тихонов А.Н., О единственности решения задачи электроразведки. ДАН СССР, Т. 69, N 6(1949), с. 797–800.)

Методом мажорант удается сформулировать и доказать нижеследующую теорему для $n = 1$.

Теорема 4. *Пусть*

$$\alpha(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k p^k, \ \ |p| < p_0, \quad \alpha_k > 0,$$

аналитическая функция, имеющая в окрестности нуля мажоранту

$$\beta(p) = \frac{1}{c^{\frac{2}{3}} - c^{\frac{1}{3}}p},$$

$c > 0$ *— постоянная. Задача Коши для системы уравнений*

$$\varphi'_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \varphi_j(x)\varphi_{k+1-j}(x), \ \ \varphi_k(0) = \alpha_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

имеет в некоторой окрестности нуля единственное решение $\varphi_k(x)$, *и ряд*

$$\varphi(x,p) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x)p^k$$

сходится. При этом функции $w(x,p)$, $\lambda(x)$, *определенные в окрестности нуля,* $p \neq 0$, *формулами:*

$$w(x,p) = \exp\left[-\frac{1}{p}\int \varphi(x,p)dx\right], \quad \lambda(x) = \varphi_0^2(x),$$

удовлетворяют уравнению

$$p^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \lambda(x)w$$

и краевому условию

$$\frac{p}{w}\frac{\partial w}{\partial x}\bigg|_{x=0} = \alpha(p).$$

Многочисленные представления решений и коэффициентов многомерных эллиптических уравнений с параметром получаются из представлений работ [1-4] для гиперболических и параболических уравнений с последующим преобразованием типа Фурье, Лапласа по временной переменной. Приведем один пример.

Пусть $V(x,p)$, $B(p)$, $C(p)$, $f(p)$, $g(p)$, $\gamma(p)$ — некоторые дифференцируемые функции, $\gamma(p)$ — комплекснозначная, например, $\gamma(p) = ip$. Тогда функция

$$w(x,p) = \frac{1}{B - CV}\left(f(p)e^{\gamma V} + g(p)e^{-\gamma V}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$\gamma^2 w = \frac{\triangle w}{|\nabla V|^2} + \left(\frac{2C}{B - CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}.$$

При этом, если $V(x,p)$ — решение уравнения

$$\triangle V + \frac{2C}{B - CV}|\nabla V|^2 - \frac{2}{|\nabla V|^2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = 0,$$

то $w(x,p)$ решение уравнения

$$\gamma^2 w = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla w}{|\nabla V|^2}\right).$$

Если же $V(x,p)$ — решение уравнения

$$\frac{2C}{B - CV} + \frac{\triangle V}{|\nabla V|^2} = 0,$$

то $w(x,p)$ решение уравнения

$$\gamma^2 w = \frac{1}{|\nabla V|^2}\triangle w.$$

В заключение заметим, что уравнение типа Шредингера с переменным параметром p

$$\alpha\frac{\partial w}{\partial t} = p\Delta w + \lambda(x,t)w,$$

где α комплексная постоянная (переменный параметр p может соответствовать массам различных частиц), заменой $w(x,p,t) = e^{\varphi(x,p,t)}$ приводится к уравнению для функции $\varphi(x,p,t)$, не содержащего коэффициента $\lambda(x,t)$, а именно

$$\Delta\varphi + |\mathrm{grad}\varphi|^2 = \alpha\int\limits_0^1\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial y}\right]_{y=pz}dz.$$

При этом $\lambda(x,t) = \alpha\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{p=0}$. Исследование краевых задач для данного нелинейного интегро-дифференциального уравнения представляется сложным и интересным.

В работе [6] рассматриваются нелинейные задачи управления перевода субстанции из одного состояния в другое при наличии краевой информации. Фактически такого рода задачи управления являются также как и в линейных случаях обратными задачами для дифференциальных уравнений.

Наши исследования связаны в основном с поиском дифференциальных операторов 2-го порядка с тремя коэффициентами не зависящими от времени. Предлагаются конструктивные аналитические способы исследования с применением, в частности, формулы Бюрмана-Лагранжа обращения аналитических функций. Также приводятся многочисленные формулы для решения задач управления при специальных частных случаях начально-краевой информации.

Кроме теоретических исследований предпринята практическая реализация алгоритмов и программ автоматического получения формул, дающих решения задач управления, на основе логической системы символьных вычислений. Составлены и апробированы соответствующие программы. Начата работа по созданию базы данных, позволяющей оперативно, автоматически с использованием логических операций показывать на экране компьютера формулы для решения и динамику их изменения в зависимости от меняющихся параметров управления. Приведены элементы начала работы программного обеспечения.

В работе рассматривается уравнение

$$p\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+q\frac{\partial w}{\partial t}=A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+B(x)\frac{\partial w}{\partial x}+C(x)w,\ \ |p|+|q|\neq 0, \tag{10}$$

где $|x|<x_0$, $0\le t\le T$, p, q — фиксированные постоянные, $|p|+|q|\neq 0$, $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ — некоторые непрерывные функции.

Задача управления заключается в следующем: Найти решение $w(x,t)$ и коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ уравнения (1), если выполнены условия:

Существует решение $w(x,t)$, представимое в форме

$$w(x,t)=U(x)F(V(x),t), \tag{11}$$

где $F(y,t)$ — решение некоторого другого уравнения 2-го порядка

$$p\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}+q\frac{\partial F}{\partial t}=\alpha(y)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\beta(y)\frac{\partial F}{\partial y}+\sigma(y)F, \tag{12}$$

а $U(x)$, $V(x)$ — некоторые, априори также как и решение $F(y,t)$, неизвестные дважды непрерывно-дифференцируемые функции.

Задана начально-краевая информация

$$w|_{t=t_0}=w_0(x),\ \ w|_{t=T}=w_T(x),\ \ w|_{x=0}=\eta_0(t),\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0}=\eta_1(t), \tag{13}$$

где функции $w_0(x)$, $w_T(x)$, $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$ с условием согласования заданы в области $0\le t\le T$, $|x|<x_0$.

В работе рассматриваются два случая, когда уравнение (12) фиксировано, то есть все коэффициенты этого уравнения известны и когда нет. В первом случае три коэффициента $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ уравнения (10) получаются связанными, так как они фактически, как будет показано ниже, определяются двумя независимыми функциями. Во втором случае мы имеем некоторую обратную задачу для уравнения (12) и коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ получаются независимыми. Разумеется при этом нужна более обширная начально-краевая информация.

В частности, получены следующие результаты.

Теорема 5. *Пусть функции* $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$ *задачи управления* (10)–(13) *являются целыми аналитическими, а функции* $w_0(x)$, $w_T(x)$ *дважды непрерывно-дифференцируемыми в области* $|x|<x_0$, *при этом* $\eta_0(0)=w_0(0)=0$, $\eta_0(T)\neq 0$, $\left.\dfrac{\partial w_0}{\partial x}\right|_{x=0}=\eta_1(0)\neq 0$.

Тогда для любого t, $0 \le t \le T$, в некоторой окрестности нуля переменной x имеют место формулы

$$w(x,t) = U(x)F(V(x),t), \;\; A(x) = \frac{1}{{V'}^2}, \;\; B(x) = -\frac{2U'V' + UV''}{U{V'}^3},$$

$$C(x) = \frac{2{U'}^2V' + UU'V'' - UU''V'}{U^2{V'}^3},$$

где

$$F(y,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k(\eta_0(t))}{(2k)!} y^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k(\eta_1(t))}{(2k+1)!} y^{2k+1}, \;\; L \equiv p\frac{\partial^2}{\partial t^2} + q\frac{\partial}{\partial t},$$

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{w_0(x))}{w_T(x)}\right)^k \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\frac{yF(y,T)}{F(y,0)}\right)^k,$$

сходящиеся ряды в окрестностях начала координат, а $U(x) = \frac{w_0(x)}{F(V(x),0)}$.

Задача управления для гиперболического уравнения формулируется следующим образом:

Найти решение $w(x,t)$, $x \ge 0$, $-T \le t \le T$, и коэффициенты $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial w}{\partial x} + C(x)w,$$

если выполнены условия

$$w(x,t) = U(x)F(V(x),t),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \;\; w|_{t=T} = w_T(x), \;\; |x| < x_0,$$

$$w|_{x=0} = \eta_0(t), \;\; \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = \eta_1(t), \;\; 0 \le t \le T,$$

где $\eta_0(0) = 0$, $\eta_0(T) \ne 0$, $\eta_1(0) \ne 0$. Предполагается, что функции $\eta_0(t)$, $\eta_1(t)$ целые аналитические, а $w_0(x)$, $w_1(x)$ дважды непрерывно-дифференцируемы в окрестности $|x| < x_0$ начала координат.

В данном случае функция $F(y,t)$ находится в явном виде, что и отражено в нижеследующей теореме.

Теорема 6. *Функции $V(x), U(x)$ корректно определены в некоторой окрестности начала координат нижеследующими формулами*

$$V(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{w_0(x)}{w_T(x)}\right)^k \lim_{y \longrightarrow 0} \frac{d^{k-1}}{dy^{k-1}} \left(\frac{yF(y,T)}{F(y,0)}\right)^k,$$

$$U(x) = \frac{w_0(x)}{F(V(x),0)} = \frac{w_T(x)}{F(V(x),T)}.$$

где

$$F(y,t) = \frac{1}{2}(\eta_0(t+y) + \eta_0(t-y)) + \frac{1}{2}\int_{t-y}^{t+y} \eta_1(p)dp,$$

и для задачи управления имеют место формулы

$$w(x,t) = U(x)F(V(x),t),\ \ A(x) = \frac{1}{{V'}^2},\ \ B(x) = -\frac{2U'V' + UV''}{U{V'}^3},$$

$$C(x) = \frac{2{U'}^2V' + UU'V'' - UU''V'}{U^2{V'}^3}.$$

Рассмотрена также следующая задача управления оператором гиперболического уравнения 2-го порядка: Найти функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и решение $w(x,t)$ такие, что

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B(x)\frac{\partial w}{\partial x} + C(x)w,\ \ t \geq 0,\ \ -\infty < x < \infty, \tag{14}$$

$$w|_{x=0} = \theta(t),\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \tag{15}$$

где $\theta(t)$ — некоторая бесконечно-дифференцируемая функция при $t \geq 0$, $\theta'(0) = 0$, $\theta(+0) = 1$,

$$w|_{t=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(x), \tag{16}$$

$$w|_{t=T} = w_T(x),\ \ \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=T} = w_T'(x). \tag{17}$$

В данном случае задача управления состоит в переводе состояния (16) в состояние (17) при наличии краевого условия (15).

Доказана следующая теорема

Теорема 7. *Пусть* $F(y,t)$, $q(y) = q(-y)$, $t \geq 0$, $-\infty < y < +\infty$, *решение обратной задачи*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + q(y)F,$$

$$F|_{y=0} = \theta(t),\ \ \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = 0,\ \ F|_{t=0} = 0,\ \ \left.\frac{\partial F}{\partial t}\right|_{t=0} = \delta(y)$$

такое, существует решение $U(x)$, $V(x)$ *системы уравнений*

$$w_T(x) = U(x)F(V(x),T),\ \ w_T'(x) = U(x)\frac{\partial F(V(x),T)}{\partial t},$$

причем $U(0) = 1$, $U'(0) = 0$, $V(0) = 0$, $V'(0) = 1$. *Тогда для задачи управления* (14)–(17) *имеют место формулы*

$$w(x,t) = U(x)F(V(x),t),\ \ A(x) = \frac{1}{{V'}^2},\ \ B(x) = -\frac{2U'V' + UV''}{U{V'}^3},$$

$$C(x) = \frac{q(V)U^2{V'}^3 + 2{U'}^2V' + UU'V'' - UU''V'}{U^2{V'}^3}.$$

В работе [7] приводятся новые представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений. Даются некоторые приложения полученных формул к обратным задачам. Также полученные результаты находят применение в моделировании этнических процессов.

Рассматривается эволюционное уравнение вида

$$A(y)\frac{\partial w}{\partial t} = D(y,t)w + B(t)\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{18}$$

где A, D, B — линейные операторы (возможно дифференциальные), действующие по переменным x и зависящие от переменных y, (y,t), t, соответственно, $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $n\ge 1$, y, $t\in\mathbb{R}^1$, $w=w(x,y,t)$ — комплекснозначная функция. Символы операторов A, D, B обозначаются $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{B}$, и определяются равенствами

$$A(y)e^{i\omega x}=\widehat{A}(y,\omega)e^{i\omega x},\;\; D(y,t)e^{i\omega x}=\widehat{D}(y,t,\omega)e^{i\omega x},\;\; B(t)e^{i\omega x}=\widehat{B}(t,\omega)e^{i\omega x},$$

где $\omega=(\omega_1,...,\omega_n)\in\mathbb{R}^n$, $\omega x=\omega_1x_1+...+\omega_nx_n$.

Оказывается, имеют представления для решения $w=w(x,y,t)$ уравнения (18) и одновременно для символов $\widehat{A}$, $\widehat{D}$, $\widehat{B}$ операторов A, D, B посредством пяти произвольных функций f, g, h, a, b от переменных $(z,\omega)\in\mathbb{R}^{n+1}$:

Теорема 8. *Пусть $f(z,\omega)$, $g(z,\omega)$, $h(z,\omega)$, $a(z,\omega)$, $b(z,\omega)$ — непрерывно-дифференцируемые функции, $a(0,\omega)=0$, $b(0,\omega)=0$, функция $f(z,\omega)$ финитна по переменной ω. Имеют место формулы*

$$w(x,y,t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(a(y,\omega)+b(t,\omega),\omega)\times$$

$$\times e^{\int\limits_0^y g(a(y,\omega)-a(\eta,\omega)+b(t,\omega),\omega)d\eta}\, e^{\int\limits_0^t h(b(t,\omega)-b(\xi,\omega)+a(y,\omega),\omega)d\xi}\, e^{i\omega x}d\omega+\widetilde{w}(x,t), \tag{19}$$

$$\widehat{A}(y,\omega)=\frac{\partial a}{\partial y},\;\; \widehat{B}(t,\omega)=\frac{\partial b}{\partial t},\;\; \widehat{D}(y,t,\omega)=h(a(y,\omega),\omega)\frac{\partial a}{\partial y}-g(b(t,\omega),\omega)\frac{\partial b}{\partial t}, \tag{20}$$

где $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение (18) *с операторами, определенными* (20).

Условие финитности функции $f(z,\omega)$ по ω в теореме 2 является достаточным условием для сходимости интеграла и оно естественно может быть ослаблено с учетом роста других функций. В частности, в соответствии с формулой Леви-Хинчина (см. Линник Ю.В., Островский И.В., Разложения случайных величин и векторов. М.:Наука,1972 г., 480 с.) представления вероятностных мер с учетом безграничной делимости имеет место

Теорема 9. *Пусть в* (19)

$$f(z,\omega)=\exp\left(i<\beta(z),\omega>-\sum_{k,l=1}^{n}a_{kl}(z)\omega_k\omega_l\right),$$

$$g(z,\omega)=g_1(z)g_2(\omega),\;\; h(z,\omega)=h_1(z)h_2(\omega),$$

где

$$g_2(\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(e^{i<\omega,q>}-1-\frac{i<\omega,q>}{1+|q|^2}\right)\mu_1(dq),$$

$$h_2(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(e^{i<\omega,q>} - 1 - \frac{i < \omega, q >}{1+|q|^2} \right) \mu_2(dq),$$

$z \in \mathbb{R}^1$, $\beta(z) = (\beta_1(z), ..., \beta_n(z))$ — вектор, $(a_{kl}(z))$ — положительно определенная матрица, $g_1(z)$, $h_1(z)$ — дифференцируемые функции, $\mu_1(dq)$, $\mu_2(dq)$ — вполне конечные меры на классе борелевских множеств в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие условию

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|q|^2}{1+|q|^2} \mu_k(dq) < \infty, \ \ k = 1, 2.$$

Тогда функция

$$w(x, y, t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(a(y, \omega) + b(t, \omega), \omega) \times$$

$$\times \exp \left(g_2(\omega) \int\limits_0^y g_1(a(y, \omega) - a(\eta, \omega) + b(t, \omega)) d\eta \right) \times$$

$$\times \exp \left(h_2(\omega) \int\limits_0^t h_1(b(t, \omega) - b(\xi, \omega) + a(y, \omega)) d\xi \right) e^{-i\omega x} d\omega$$

корректно определена и при фиксированных (y, t) является функцией распределения некоторой безгранично делимой случайной величины.

В работе [8] излагаются математические постановки некоторых проблем акустического зондирования, связанные в основном с определением формы излучающих объектов. Обсуждаются и предлагаются способы поиска элементов рассеивателей и приводится соответствующая литература, которая может быть здесь полезна. При этом упор сделан на акустическое зондирование, хотя как представляется, соображения приведенные ниже могут быть полезны и в других случаях.

В приложениях часто встречаются ситуации, когда некоторый объект является источником физического поля, например, акустического или совокупности полей. Физическими полями могут быть электромагнитное, акустическое, сейсмическое, тепловое, гравитационное и другие. Способность излучения может определяться разными обстоятельствами: она может быть внутренним свойством излучающего объекта или тело становиться излучающим после внешнего воздействия, или то и другое имеет место одновременно. Основная проблема при этом заключается в восстановлении формы излучающего тела по полю, которое оно создает. Этим вопросам посвящена данная работа. Основное внимание здесь уделяется обратным задачам теории рассеяния — восстановление рассеивателя по данным рассеяния.

Физическая постановка ряда обратных задач теории рассеяния заключается в следующем: в пространстве имеется некоторое тело — рассеиватель, которое облучается электромагнитным, звуковым или другим полем. Тело рассеивает поле; по данным рассеяния нужно определить форму рассеивателя. Часто в физических задачах тело облучается с разных направлений на одной или нескольких частотах так, что при рассеянии получается обширная информация о рассеивателе. Физически достоверной информацией является величина амплитуды рассеянного поля. С математической точки зрения весьма существенно, где и какое поле измеряется, монохроматический источник или нет, каков характер падающей волны и т.п. Так как вопросы рассеяния весьма сложны, то часто при исследованиях и применениях используются асимптотические методы. Обычно параметрами, по которым производят асимптотические разложения, являются частота и расстояние от рассеивателя до пунктов измерения. При этом, оказывается, в асимптотическом разложении измеряемой величины в качестве коэффициентов возникают геометрические характеристики рассеивателя: площадь ортогональной проекции на плоскость, гауссова кривизна границы, характеристическая функция, опорная и др. Эта геометрическая информация очень важна, так как в некоторых случаях позволяет эффективно определить форму рассеивающего тела, т.е. решить обратную задачу рассеяния. В этой связи особенно существенно, что методы геометрии в целом и интегральной геометрии могут быть с успехом использованы, что приводит к новым, а подчас и исчерпывающим результатам. Нужно еще раз подчеркнуть, что геометрические методы работают при асимптотиках. Поэтому здесь важны теоремы существования, единственности и особенно устойчивости решения обратной задачи теории рассеяния.

Многие задачи распространения волн приводят к краевым задачам для уравнения Гельмгольца. Так, если плоская волна $u_0(x,p,\lambda)=\exp(i\lambda<x,p>)$ (λ — частота), распространяющаяся в направлении p, $|p|=1$, падает на рассеиватель K, ограниченный замкнутой поверхностью B, то для рассеянного поля $u(x,p,\lambda)$ имеем внешнюю задачу

$$\Delta u(x,p,\lambda)+\lambda^2 u(x,p,\lambda)=0,\ \ x\in\mathbb{R}^m\backslash K,$$
$$\Gamma(u(x,p,\lambda)+\exp(i\lambda<x,p>))|_B=0,$$
$$u(x,p,\lambda)=O(|x|^{\frac{1-m}{2}}),\ \ \frac{\partial u(x,p,\lambda)}{\partial|x|}-i\lambda u(x,p,\lambda)=o(|x|^{\frac{1-m}{2}}),\ \text{ при } |x|\longrightarrow\infty,$$

где Γ — оператор граничного условия Дирихле, Неймана или импедансного. При $m=3$ точное решение прямой задачи (т.е. нахождение рассеянного поля $u(x,p,\lambda)$ от известной границы B в рассеивателе K) дается формулой Кирхгофа

$$u(x,p,\lambda)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_B\left[u(y,p,\lambda)\frac{\partial}{\partial n_y}\frac{\exp(i\lambda|x-y|)}{|x-y|}-\frac{\partial u(y,p,\lambda)}{\partial n_y}\frac{\exp(i\lambda|x-y|)}{|x-y|}\right]dS_y,$$

где n_y — внешняя нормаль в точке $y\in B$.

В случае более общих уравнений, в том числе и акустики решение $u(x,p,\lambda)$ вычисляется по формуле

$$u(x,p,\lambda)=\int\limits_B\left[u(y,p,\lambda)\frac{\partial}{\partial n_y}G(x,y,\lambda)-\frac{\partial u(y,p,\lambda)}{\partial n_y}G(x,y,\lambda)\right]dS_y, \tag{21}$$

где $G(x,y,\lambda)$ — фундаментальное решение. При этом решение $u(x,p,\lambda)$ может быть вектором, G — матрицей. В частности, в случае динамических уравнений теории упругости с постоянными коэффициентами элементы G_{kj} матрицы G выражаются соотношением

$$G_{kj}=\frac{1}{2\pi\mu}\delta_{kj}\frac{\exp(iK_2|x-y|)}{|x-y|}-\frac{1}{2\pi\rho\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_j}\frac{\exp(iK_1|x-y|)-\exp(iK_2|x-y|)}{|x-y|},$$

где $K_1^2 = \frac{\rho\lambda^2}{a+2\mu}$, $K_2^2 = \frac{\rho\lambda^2}{\mu}$, a, μ — постоянные Ламе.

Обратная задача рассеяния заключается в определении границы односвязного рассеивателя K по данным о рассеянном поле $u(x,p,\lambda)$, известном на некотором множестве M переменных (x,p,λ), т.е. по функции $f(x,p,\lambda) = u(x,p,\lambda)|_M$. В приложениях обычно считается известной на подмножестве функция

$$A(v,p,\lambda) = \lim_{|x|\longrightarrow\infty} |x|\exp(-i\lambda|x|)u(|x|v,p,\lambda), \;\; |v|=1, \;\; |p|=1, \;\; \lambda>0,$$

называемой амплитудой рассеяния, или $|A(v,p,\lambda)|$ — интенсивность рассеянного поля в направлении наблюдения v. Из формулы Кирхгофа имеем

$$A(v,p,\lambda) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_B \exp(-i\lambda < v,y >)\left[i\lambda < n_y, v > u(y,p,\lambda) + \frac{\partial u(y,p,\lambda)}{\partial n_y}\right] dS_y.$$

Рассмотрим задачу Дирихле, считая рассеиватель гладким и строго выпуклым. Применяя приближение Кирхгофа, для амплитуды рассеяния получаем следующее выражение:

$$A(v,p,\lambda) = \frac{i\lambda}{4\pi}\int\limits_{<p,n_y>\geq 0} \exp(i\lambda < p-v,y >)\,(< n_y,v > + |< n_y,p >|)\,dS_y. \quad (22)$$

В частности, амплитуда рассеяния в "прямом"направлении, т.е. при $v=p$, имеет представление

$$A(p,p,\lambda) = \frac{i\lambda}{2\pi}\int\limits_{<p,n_y>\geq 0} < p,n_y > dS_y = \frac{i\lambda}{2\pi}F(p),$$

где $F(p)$ — площадь ортогональной проекции рассеивателя на плоскость, ортогональную направлению p распространения падающей на рассеиватель плоской волны $u_0(x,p,\lambda)$. Таким образом, в приближении Кирхгофа амплитуда рассеяния в "прямом"направлении пропорциональна площади тени рассеивателя.

В случае $v=-p$ (обратное рассеяние) имеет место формула

$$A(-p,p,\lambda) = -\frac{i\lambda}{2\pi}\int\limits_{<p,n_y>\leq 0} \exp(2i\lambda < p,y >) < p,n_y > dS_y = \rho(p,\lambda).$$

Заметим, что если функция $\rho(p,\lambda)$ известна для всех направлений p и частот λ, то, вычисляя $\rho(p,\lambda)+\rho^*(-p,\lambda)$ и применяя формулу Остроградского, получим соотношение:

$$\frac{\rho(p,\lambda)+\rho^*(-p,\lambda)}{\lambda^2} = \int\limits_K \exp(2i\lambda < p,y >)dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \gamma(y)\exp(2i\lambda < p,y >)dy = \Phi(\lambda p),$$

т.е. $\Phi(\lambda p)$ есть преобразование Фурье характеристической функции $\gamma(y)$ рассеивателя K. На практике измерения $\rho(p,\lambda)$ производятся в ограниченном диапазоне частот λ и направлений p.

Другой подход к решению задачи рассеяния — приближение геометрической оптики. В этом случае асимптотическое разложение амплитуды рассеяния при

$\lambda \longrightarrow \infty$ содержит в качестве главного члена разложения слагаемое с гауссовой кривизной границы гладкого строго выпуклого рассеивателя. Так для $v \neq p$ имеет место соотношение

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} |A^*(-v, p, \lambda)|^2 = \gamma(v, p) K^{-1}(\widetilde{y}),$$

где γ — коэффициент отражения, $K(\widetilde{y})$ — гауссова кривизна границы рассеивателя в точке $\widetilde{y}$ с нормалью $n = \frac{v-p}{|v-p|}$.

К геометрическим характеристикам рассеивателя можно прийти согласно следующим образом. Рассмотрим смешанную задачу для гиперболического уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right), \quad x \in K \subset \mathbb{R}^{2m+1},$$

$$u(x,t)|_{t=0} = f_1(x), \quad \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \right|_{x=0} = f_2(x), \quad \Gamma(u(x,t))|_{\partial K} = 0,$$

где $a_{ij}(x)$ — элементы гладкой положительной симметричной матрицы с $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ для $|x| \geq \rho$ (область K рассеивателя содержится в шаре $|x| \leq \rho$). Пусть $u(x,t)$ — решение этой задачи. Положим

$$k^{\pm}(s,p) = \lim_{t \longrightarrow \pm\infty} t u_t((s+t)p, t).$$

Функции $k^{\pm}(s,p)$ характеризуют поведение решения вдоль лучей $x = (s + t)p$ при больших положительных и отрицательных значениях времени. Рассмотрим оператор рассеяния S, который определяется как отображение $S\left(k^-(s,p) \longrightarrow k^+(s,p)\right)$ и допускает представление

$$k^+(s,v) = \int\int S(s - \widetilde{s}, v, p) k^-(\widetilde{s}, p) d\widetilde{s} dp,$$

где ядро $S(s,v,p)$, $s \in \mathbb{R}$, $|p| = |v| = 1$, есть распределение в $D'\left(\mathbb{R} \times S^2 \times S^2\right)$. Оказывается, что для ядра $S(s,v,p)$ имеет место асимптотическое разложение

$$S(s,-p,p) \approx 2\pi \left(\sum_{j=1}^{l} K(y_j)^{-1/2} \right) \delta'(s+2h(p)) + c_1 \delta(s+2h(p)) + (\text{гладкие члены})$$

справедливое для p из некоторого открытого всюду плотного подмножества единичной сферы S^2. В этой формуле y_j — точки на ∂K, в которых $< y_j, p >= h(p)$, $h(p)$ — опорная функция выпуклой оболочки поверхности ∂K; $K(y_j)$ — гауссова кривизна в точке y_j.

Приведем еще один результат, связанный с выпуклой оболочкой рассеивателя. Пусть $\Phi(x)$ — финитная функция от вещественных переменных, $x \in \mathbb{R}^m$, $f(z)$, $z \in \mathbb{R}^m$, определяется равенством

$$f(z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^m \int\limits_{\mathbb{R}^m_x} \Phi(x) \exp(-i < x, z >) dx.$$

Как было показано выше, обратные задачи теории рассеяния приводят к подобны интегралам, причем $\operatorname{supp} \Phi(x)$ играет роль рассеивателя. Поэтому определение $\Phi(x)$, в частности, ее носителя, является важной задачей для теории рассеяния.

По теореме Планшереля-Полиа

$$h(p) = \sup_{x\in\mathbb{R}^m} \lim_{R\longrightarrow\infty} \frac{1}{R} \ln|f(x+iRp)|,$$

где $h(p)$ — опорная функция выпуклой оболочки носителя функции $\Phi(x)$. Таким образом, выпуклая оболочка рассеятеля может быть определена по соответствующим данным рассеяния.

Часто в реальных ситуациях частота λ, как правило, фиксирована и имеется лишь диапазон направлений, для которых измеряется интенсивность излучения. Поэтому представляется целесообразным выделить главную геометрическую интегральную информацию, связанную с интенсивностью излучения, и эту выделенную часть положить в основу способов исследования обратных задач восстановления излучающих множеств.

В соответствии с формулами (21) и (22) задачи излучения, в частности рассеяния, приводят к необходимости изучения проблем, связанных с представлением амплитуды поля в дальней зоне

$$A(n,\lambda,t) = \int\limits_{B(n,t)} \exp(if(\lambda,y,n,t))g(\lambda,y,n,t)dS_y, \tag{23}$$

где $B(n,t)$ — освещенная часть поверхности рассеятеля $B(t)$ в направлении n, f и g — некоторые функции, t — время, λ — частота, n — направление приема излучения. При этом иногда необходимо считать, что форма или положение рассеивателя а также характеристики рассеяния f и g в (23) могут изменяться с течением времени, что и учтено в (23). В случае регулярной выпуклой поверхности $B(t)$ формула (23) может быть переписана следующим образом:

$$A(n,\lambda,t) = \int\limits_{<n,p>\geq 0} \exp(if(\lambda,y(p,t),n))g(\lambda,y(p,t),n)R_1(p,t)R_2(p,t)d\omega_p, \tag{24}$$

где $y(p,t)$ — радиус-вектор поверхности $B(t)$ в точке с нормалью p, $|p| = 1$; $R_1(p,t)$, $R_2(p,t)$ — главные радиусы кривизны поверхности $B(t)$ как функции нормали p и времени t, $d\omega_p$ — элемент площади единичной сферы.

Как отмечалось выше, реально измеряемой информацией является $|A|$. При это асимптотическое разложение (24) приводит к необходимости изучения интегрального уравнения 1-го рода, содержащее геометрические характеристики рассеятеля, а именно

$$\varphi(n) = \int\limits_{\omega} (a\cdot|<n,p>| + b\cdot\chi(<n,p>))\, f(p)d\omega_p \approx |A|. \tag{25}$$

Здесь $\varphi(n)$ — известная функция для некоторых n сферы ω, a, b — постоянные, $\chi(z)$ — функция Хевисайда, $f(p)$ — искомая функция. При этом ядро $a|<n,p>| + b\chi(<n,p>)$ интегрального уравнения (25) можно считать индикатрисой рассеяния, о искомую функцию $f(p)$ характеристикой рассеивателя. В случае выпуклого рассеивателя B искомая функция $f(p)$ оказывается пропорциональной произведению $R_1(p)R_2(p)$ — радиусов кривизны B и интегралы

$$\int\limits_{\omega} |<n,p>|R_1(p)R_2(p)d\omega, \quad \int\limits_{\omega} \chi(<n,p>)R_1(p)R_2(p)d\omega$$

имеют геометрический смысл и равны соответственно площади ортогональной проекции B на плоскость ортогональную вектору n и площади освещенной части поверхности B в направлении n. Поэтому в данном случае задача теории зондирования сводится к поиску решения интегрального уравнения (25) и геометрическим проблемам восстановления выпуклой поверхности по произведению ее радиусов кривизны, известной как проблема Минковского.

В работе [9] приводятся формулы для производящих функций вероятностных процессов. Эти формулы содержат общие нелинейные отображения линейных пространств в себя и обратные. Используя полученные формулы и групповые свойства, удается наметить путь исследования ряда нелинейных многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений типа управления. При этом существенным моментом является применение теории функциональных уравнений.

Производящая функция $F(t,x)$ однородного по времени ветвящегося процесса с условием ветвления удовлетворяет соотношениям

$$F(t+s,x) = F(t,F(s,x)), \ \ F(0,x) = x.$$

В настоящей работе мы существенно используем следующую лемму.

Лемма 5. Пусть $V = V(x)$ — некоторое отображение пространства $\mathbb{C}^n$ в себя, $p \in \mathbb{C}^n$ — постоянный ненулевой вектор. Тогда вектор-функция $F(t,x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x))$ удовлетворяет уравнению

$$F(t+s,x) = F(t,F(s,x))$$

и условию $F(0,x) = x$. Здесь t, $s \in \mathbb{C}$ и V^{-1} — отображение обратное к V.

Отметим, что для построения функции $F(t,x)$ могут быть использованы результаты обращения аналитических функций, в частности, формулы Бюрмана-Лагранжа и Стильтьеса-Пуанкаре-Гуда. Формулировка и доказательство приведенной леммы, с очевидными изменениями, переносятся на бесконечномерные пространства.

Доказано, что функция $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}\,(A(x)) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} B(x),$$

где

$$A(x) = \left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}, \ \ \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_j(t,x)}{\partial x_i}\right), \ \ B(x) = \left.\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0}.$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\,(A(x))$ — второй дифференциал функции $F(t,x)$ по переменным x примененный к вектору $A(x)$.

Полученное дифференциальное уравнение второго порядка при $n = 1$ имеет вид уравнения акустики. Коэффициенты $A(x)$, $B(x)$ в случае, когда $F(t,x)$ задается в виде $F(t,x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x))$ определяются отображением $V(x)$.

Также в работе рассмотрена следующая **обратная задача**:

Найти $F(t,x) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ такую, что

$$F(t,x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x))$$

$$F(0,x) = x, \;\; F(T,x) = f(x) = sx + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \;\; a_n \in \mathbb{C}.$$

Здесь $x = (x_{ij})$ — квадратная матрица переменных x_{ij}, $i,j = 1, ..., n$, и

$$f(x) = sx + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n, \;\; a_n \in \mathbb{C},$$

известный сходящийся степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, $0 < |s| < 1$ — некоторое комплексное число.

Поиск $F(t,x)$ называется обратной задачей потому, что определяются не только решения выписанного выше уравнения второго порядка, но и коэффициенты $A(x)$, $B(x)$. Справедлива

Теорема 10. Пусть отображение $V : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ определено равенством

$$\exp\left(V(x)\right) = \eta \lim_{n \longrightarrow \infty} s^{-n} f^n(x),$$

где $\eta \neq 0$ — некоторое комплексное число, $f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$, $f^1(x) = f(x)$; $T > 0$ — некоторое вещественное число, $p = \dfrac{\ln s}{T} E$, $0 < |s| < 1$, — скалярная матрица $n \times n$. Тогда $F(t,x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x))$,

$$A(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p, \;\; B(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p\right)$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}\left(A(x)\right) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} B(x)$$

и условиям $F(T,x) = f(x)$, $F(0,x) = x$.

В работе [10] приводятся избранные разделы теории конечномерных отображений и примеры обратных задач для эволюционных уравнений, которые в той или иной мере связаны с такими отображениями и их обратимостью. Хорошо известно, что обратные задачи редуцируются к исследованию операторных уравнений первого рода, поэтому обратимость и непрерывность обратных отображений является существенным элементом теории существования, единственности и устойчивости решений обратных задач, особенно многомерных.

В работе [11] рассмотрены уравнения движения сплошной среды со специальной термодинамикой: все термодинамические функции сохраняются вдоль траекторий частиц среды. При некоторых дополнительных предположениях этому условию удовлетворяют, например, температура и соленость в морской воде. Такая модель возникает также в газовой динамике при предположении о постоянстве плотности (тепловые движения газа)

Система уравнений, описывающая такую среду, имеет вид

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \nabla_x h = 0, \;\; \nabla_x \cdot \overrightarrow{u} = 0, \;\; \frac{dh}{dt} = 0.$$

Здесь $\overrightarrow{u} = (u, v, w)$ — скорость среды, h — термодинамическая функция, например, давление для тепловых движений; $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты и t — время, $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla_x$ — полная производная, индекс x при градиенте указывает переменные по которым действует этот оператор.

Система содержит пять уравнений для четырех неизвестных функций $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$, $h = h(t, \overrightarrow{x})$ и является переопределенной. Несмотря на ее простой и даже изящный вид, она до сих пор не приведена в инволюцию, для нее не получены условия совместности.

В представленной работе авторы предлагают исследовать систему в лагранжевых координатах. Произвол в выборе этих переменных позволяет, в двумерном случае, "почти"линеаризовать получающуюся систему, но даже в этом, предельно упрощенном случае, не удается решить в полном объеме задачу о приведении ее в инволюцию. Рассмотрен случай функциональной зависимости координат относительно лагранжевых переменных, что упрощает нелинейное уравнение системы. Уравнения проинтегрированы в частных случаях, описывающих "точки разветвления"алгоритма приведения в инволюцию. Неожиданно в задаче появляется уравнение, описывающее поперечные колебания упругого стержня. Однако, оставшаяся в задаче нелинейность не позволяет в полной мере воспользоваться техникой преобразований Фурье для построения общего решения системы.

Список литературы

[1] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач математической физики.* Сибирские электронные математические известия, **Т. 7**(2010), стр. 11–61. http://semr.math.nsc.ru

[2] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I.* Сибирский журнал индустриальной математики, **Т. 14**, **N 1**(2011), с. 27–39. Zbl pre05932281

[3] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II.* Сибирский журнал индустриальной математики, **Т. 14**, **N 2**(2011), с. 28–33.

[4] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для параболических уравнений.* Вестник НГУ. (2011) в печати.

[5] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об обратных задачах для уравнений математической физики с параметром.* Препринт **N 244**, 2010, СО РАН, Институт математики, 22 с.

[6] Ю.Е.Аниконов, Ю.В. Кривцов, М.В.Нещадим, *Конструктивные методы в нелинейных задачах теории управления.* Сиб. журнал индуст. матем., **Т. 13**, **N 2**(2010), с. 30–45. Zbl pre05932240

[7] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Представления решений, коэффициентов, символов операторов эволюционных уравнений и обратные задачи.* Вестник НГУ. **Т. 10**, **N 2**(2010), с. 25–36.

[8] Ю.Е.Аниконов, А.Е.Ковтанюк, М.В.Нещадим, *Некоторые математические задачи акустического зондирования.* J. Inv. Ill-Posed Problems, **V. 18**(2011), p. 877–883. MR2787698

[9] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи.* Препринт **N 247**, 2010, СО РАН, Изд-во Института математики, 14 с.

[10] Аниконов Ю.Е., В.Г.Бардаков, В.П.Голубятников, М.В.Нещадим, *Конечномерные отображения и обратные задачи.* Препринт **N 265**, 2011, СО РАН, Институт математики, 42 с.

[11] М.В.Нещадим, А.П.Чупахин, *Об особых решениях в модели движения неоднородной среды.* Тез. докладов Межд. конференции "Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике посвященная 110-летию академика М.А.Лаврентьева. Новосибирск, Россия, Институт гидродинамики СО РАН им. М.А. Лаврентьева, 23-27 августа 2010 г.

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `anikon@math.nsc.ru`

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: `neshch@math.nsc.ru`

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН
Sobolev Institute of Mathematics SB RAS

Том 8, стр. С.74–С.84 (2011) УДК 517.968, 517.544
MSC 30E20, 45E05, 45E10, 45F15

ИССЛЕДОВАНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ. ПРИЛОЖЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКУЮ ФИЗИКУ

А.Ф. Воронин

Abstract. In this paper, in the event of a certain symmetry of the Riemann boundary value problem for vector-valued functions will be discussed by the author proposed method for determining the partial indices of this problem. Except order to illustrate the application Riemann boundary value problem for vector functions and the above-mentioned method of determining the private indices of this problem have been considered: the Fredholm integral equations of convolution and systems such equations both segments, as well as semi-infinite interval; the characteristic system of singular integral equations; nonlinear Schrodinger equation.

Keywords: Riemann boundary value problem , partial indices, matrix function, integral equation, convolution, system, well-posedness, nonlinear Schrodinger equation, Cauchy-type singular integral equation.

Введение

Много различных задач сводится к краевой задаче Римана для вектор-функции. Здесь и задачи из классической математической физики, теории вероятности, современной техники и экономики [1]-[14]. К сожалению, теория векторной краевой задачи Римана не достаточно развита для приложений в

Voronin, A.F., Investigation of the Riemann boundary problem for vector functions. Application in mathematical physics.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН выполняемых совместно со сторонними научными организациями (проект №93-2009), а также грантом РФФИ (номер проекта 11-08-00286-а).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

отличие от скалярной задачи. Если корректность скалярной задачи Римана определяется лишь индексом задачи (целым числом), который элементарно вычисляется, то за корректность задачи Римана в векторном случае (для определенности, длина вектора равна n) отвечают n частных индексов (целых чисел), метод вычисления которых, в общем случае, не известен.

В данной работе, в случае определенной симметрии краевой задачи Римана для вектор-функции, будет рассмотрен предложенный автором метод определения частных индексов задачи Римана [15]-[17]. Кроме того, в качестве иллюстрации приложений краевой задачи Римана для вектор функции и вышеназванного метода определения частных индексов этой задачи, рассмотрены [15],[18]-[20] следующие уравнения:

а) интегральные уравнения в свертках и системы таких уравнений как на отрезках, так и на полубесконечном интервале;

б) характеристические системы сингулярных интегральных уравнений;

в) нелинейное уравнение Шредингера.

Для формулировки проблемы введем необходимые обозначения и проведем соответствующие построения. Положим $L_{n\times m}$ — пространство $n\times m$ матриц-функций с элементами из $L_1(R)$, где R — расширенная вещественная прямая $R=(-\infty,\infty)$
$\bigcup\{\pm\infty\}$; $\mathcal{F}f$ — Фурье образ матрицы-функции $f\in L_{n\times m}$:

$$\mathcal{F}f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ixt}\,dt,\ x\in R;$$

$W^{n\times n}$ — алгебра Винера непрерывных матриц-функций вида $c+\mathcal{F}f$, где c — постоянная матрица порядка n и $f\in L_{n\times n}$; $W_+^{n\times n}$ ($W_-^{n\times n}$) — подалгебра в $W^{n\times n}$, состоящая из матриц-функций вида $c+\mathcal{F}f$ таких, что $f(t)=0$ при $t<0$ (при $t>0$).

Если A — некоторая алгебра, то через $\mathcal{G}A$ обозначим группу из обратимых элементов в A.

Будем говорить, что матрица $G\in\mathcal{G}W^{n\times n}$ допускает стандартную факторизацию, если она представляется в виде следующего произведения матриц:

$$G(x)=G_+(x)D(x)G_-(x),\ x\in R, \tag{1}$$

где $G_\pm\in\mathcal{G}W_\pm^{n\times n}$ ($G_\pm$ — факторы), $D(x)$ - диагональная матрица-функция,

$$D(x)=\operatorname{diag}\left((\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_1},...,(\frac{x-i}{x+i})^{\kappa_n}\right),$$

$\kappa_1\ \geq\ \kappa_2\ \geq\ ...\ \geq\ \kappa_n$ — частные индексы матрицы G (целые числа), $\kappa:=\mathrm{Ind}\det\, G(t)\equiv\frac{1}{2\pi}\Delta_R\arg\det\, G(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}\kappa_j$ — суммарный индекс матрицы G.

Если $\kappa_1=\kappa_2=...=\kappa_n=0$ ($D=I$ — единичная матрица), то $G=G_+G_-$ — каноническая факторизация матрицы-функции G.

Под задачей Римана (задача факторизации) будем понимать проблему разложения матрицы $G\in\mathcal{G}W^{n\times n}$ в виде произведения матриц (1).

Факторизация (1) имеет длинную и интересную историю. Первоначальная проблема факторизации была поставлена и частично решена Д. Гильбертом в 1905 г. Полностью, поставленная Гильбертом проблема, была решена в 1908 г. И. Племелем [20]. Дальнейшее развитие проблема факторизации получила в работах Н.И. Мусхелишвили, Н.П. Векуа и Ф.Д. Гахова [3],[21],[22] (библиографию проблемы см. в [3]). Современное состояние теории факторизации матриц-функций дано в обзоре [23].

Задача Римана, ввиду широких приложений, является одной из наиболее востребованных задач комплексного анализа. Важной нерешенной проблемой в теории задачи Римана является проблема вычисления инвариантов задачи — частных индексов матричного коэффициента $G(x)$. Последней проблеме и посвящена первая часть данной работаы.

Здесь будет предложен эффективный метод определения частных индексов матрицы-функции $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$, при условии, что последняя обладает определенным свойством симметрии. Основу метода составляет, предложенный автором, критерий канонической факторизации.

С помощью предложенного в работе метода получены, не известные ранее, эффективные достаточные условия существования канонической факторизации в следующих симметричных классах матриц-функций : унитарных, эрмитовых, ортогональных, круговых, симметрических и др.

1. Предварительные сведения.

Хорошо известна (см.,например, [2, теоремы 7.2,7.3]) следующая :

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathcal{G}W^{n\times n}$. Тогда матрица $G(x)$ допускает стандартную факторизацию (1).*

Любая другая стандартная факторизация матрицы $G(x)$ имеет следующий вид :

$$G(x) = \widetilde{G}_+(x)\, D(x)\, \widetilde{G}_-(x),\ \ x \in R, \tag{2}$$

где

$$\widetilde{G}_\pm \in \mathcal{G}W^{n\times n}_\pm,\ \ \widetilde{G}_+(x) = G_+(x)\,\Omega_+(x),\ \ \widetilde{G}_-(x) = \Omega_-(x)\, G_-(x).$$

Причем, если все частные индексы равны между собой, т.е.

$$\kappa_1 = \kappa_j,\ \ j = 2, ..., n, \tag{3}$$

то $\Omega_- = \Omega_+^{-1}$ — произвольная невырожденная постоянная матрица.

Если условие (3) не выполнено, то $\Omega_\pm$ — рациональные матрицы-функции строго определенного вида из $\mathcal{G}W^{n\times n}_\pm$, соответственно.

Из теоремы 1 следует

Критерий канонической факторизации. *Пусть*

$$G \in \mathcal{G}W^{n\times n},\ \ \kappa \equiv \sum_{j=1}^{n} \kappa_j = 0. \tag{4}$$

Положим

$$(\omega^+_{kj}(x)) := G_+^{-1}(x)\widetilde{G}_+(x),$$

где $\widetilde{G}_+$ и G_+ — факторы в факторизациях (2) и (1), соответственно. Тогда $\omega^+_{n1} \equiv const$. Кроме того, если $\omega^+_{n1} \neq 0$, то факторизации (2) и (1) канонические.

Из критерия видно, что для его практического использования достаточно показать, что $\omega^+_{n1} \neq 0$. Но, мы не имеем априорной информации даже о постоянных матрицах $G_+(x_0), \widetilde{G}_+(x_0)$ в какой либо точке $x_0 \in R$, что существенно затрудняет применение критерия в общем случае. Однако о произведении этих постоянных матриц, матрице $(\omega_{kj}^{+}(x_0))$, априорную информацию можно получить в некоторой точке $x_0 \in R$, если исходная матрица-функция $G(x)$ обладает определенной симметрией.

2. Метод определения частных индексов симметричных матриц-функций.

Пусть матрица-функция $G(x)$ подчинена ограничению (4) и обладает следующим свойством симметрии: существует оператор $F : \mathcal{G}W^{n\times n} \to \mathcal{G}W^{n\times n}$ такой, что

$$FG(x) = G(x),\ x \in R. \tag{5}$$

Оператор F действует на факторизацию матрицы $G(x)$ (на правую часть равенства (1)) по одной из следующих двух формул, либо

$$FG(x) = F_1^{+}G_{+}(x)D(x)F_1^{-}G_{-}(x), \tag{6}$$

где $F_1^{\pm}G_{\pm} \in \mathcal{G}W_{\pm}^{n\times n}$, либо

$$FG(x) = F_1^{+}G_{-}(x)D(x)F_1^{-}G_{+}(x), \tag*{(6)*}$$

где $F_1^{\pm}G_{\mp} \in \mathcal{G}W_{\pm}^{n\times n}$. В формулах (6) и (6)* $F_1^{\pm}$ – некоторые операторы, $F_1^{\pm} : W^{n\times n} \to W^{n\times n}$. При этом, матрица G и операторы $F, F_1^{\pm}$ считаются известными, а матрицы $G_{\pm}, D$ неизвестными. Требуется установить справедливость тождества $D \equiv I$.

Схема алгоритма метода. Рассмотрим здесь, для простоты, лишь случай, когда выполнена формула (6). Обозначим

$$\widetilde{G}_{\pm}(x) := F_1^{\pm}G_{\pm}(x). \tag{7}$$

Тогда формула (6) принимает следующий вид,

$$FG(x) = \widetilde{G}_{+}(x)D(x)\widetilde{G}_{-}(x). \tag{8}$$

Из (5) и (8) с учетом (1) получим

$$G_{+}(x)D(x)G_{-}(x) = \widetilde{G}_{+}(x)D(x)\widetilde{G}_{-}(x).$$

Составим матрицу

$$(\omega_{kj}^{+}(x)) := G_{+}^{-1}(x)\widetilde{G}_{+}(x), \tag{9}$$

как в критерии канонической факторизации. Из (9) и (7) для $x \in R$ имеем

$$(\omega_{kj}^{+}(x)) = G_{+}^{-1}(x)F_1^{+}G_{+}(x). \tag{10}$$

Переходим к анализу правой части формулы (10) с целью установления существования точки $x_0 \in R$ такой, что $\omega_{n1}^{+}(x_0) \neq 0$. Если такая точка $x_0 \in R$ найдена, то согласно критерию все частные индексы матрицы $G(x)$ равны нулю. В противном случае, когда такая точка $x_0 \in R$ не найдена, вопрос о существовании канонической факторизации остается открытым.

3. Результаты применения метода.

В этом разделе представлены некоторые из полученных автором результатов применения метода к симметричным классам матриц-функций.

3.1. Обозначим через KL_1 класс круговых матриц-функций следующего вида, $KL_1 := \{G \in \mathcal{G}W^{2\times 2} \ : \ G(x) = -\overline{G^{-1}(x)}, \ x \in R\}$. Справедлива

Теорема 2. *Пусть* $G \in KL_1$ и $\operatorname{Ind}\det G(x) = 0$. *Если существует точка* $x_0 \in R$ *такая, что* $G(x_0) = I_1 I_2$, где

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ I_2 = \operatorname{diag}(1, -1),$$

то матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

3.2. Положим $KL_2 := \{G \in \mathcal{G}W^{2\times 2} \ : \ G(x) = G^{-1}(-x), \ x \in R\}$. Имеет место

Теорема 3. *Пусть* $G \in KL_2$ *и* $\operatorname{Ind}\det G(x) = 0, \ G(\infty) \neq c_1 I$, где $c_1 = \pm 1$. *Тогда матрица* $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

3.3. Класс эрмитовых матриц-функций. Эрмитова матрица-функция из группы $\mathcal{G}W^{2\times 2}$ имеет следующий общий вид:

$$G(x) = \begin{pmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) \\ \overline{g_{12}(x)} & g_{22}(x) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $g_{kj} \in W^{1\times 1}, \ \operatorname{Im} g_{jj}(x) = 0, \ k, j = 1, 2, \ d(x) := \det G(x) \neq 0, \ x \in R.$

Теорема 4. *Пусть элементы матрицы (11) подчинены дополнительно следующим ограничениям :*

$$g_{jj}(x) = g_{jj}(-x), \ j = 1, 2, \ \overline{g_{12}(x)} = -g_{12}(-x).$$

Если

$$G(\infty) \neq \pm\sqrt{d(\infty)} I_1,$$

то все частные индексы матрицы-функции G *в (11) равны нулю.*

Теорема 4 дополняет известную теорему о частных индексах положительно определенной матрицы-функции [24]. Отметим, что результаты работы [24] можно получить также с помощью предлагаемого выше метода.

Положим далее W_0 — алгебра Винера непрерывных функций вида $\mathcal{F}f$, где $f \in L_1(R)$; W_{0+} (W_{0-}) — подалгебра в W_0, состоящая из функций вида $\mathcal{F}f$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$ (при $t > 0$).

Рассмотрим краевую задачу о нахождении функций $\varphi^{\pm} \in W_{0\pm}$ по краевому условию на контуре совпадающем с R (задача Маркушевича [25]),

$$\varphi^+(x) = a(x)\varphi^-(x) + b(x)\overline{\varphi^-(x)} + c(x), \ x \in R, \tag{12}$$

где

$$a, b \in W^{1\times 1}, \ c \in W_0, \ a(x) \neq 0, \ x \in R.$$

Из теоремы 4 и [10] вытекает

Теорема 5. *Пусть*

$$a(-x) = a(x), \ b(-x) = -\overline{b(x)}.$$

Тогда задача Маркушевича (12) корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво в норме пространства W_0 *относительно коэффициентов* a, b *и* c*).*

3.4. Класс унитарных матриц-функций. Справедлива

Теорема 6. *Пусть* $G \in \mathcal{G}W^{n\times n},\ n > 1$. *Если*

$$G(x) = \overline{G^{\perp}(-x)},\ x \in R,\ (G^{\perp} \equiv (G^{T})^{-1}),$$

то матрица $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

3.5. Положим $KL_3 := \{G \in \mathcal{G}W^{2\times 2}\ :\ G(x) = -A_+(x)\overline{G(-x)}A_-(x),\ x \in R$, где $A_\pm \in \mathcal{G}W_\pm^{2\times 2},\ A_\pm^{-1}(-x) = -\overline{A_\pm(x)}\}$. Имеет место

Теорема 7. *Пусть* $G \in KL_3$ *и* $\operatorname{Ind}\det G(x) = 0$. *Тогда, если* $A_+(\infty)$ =diag(1,-1)I_1, *то матрица* $G(x)$ *допускает каноническую факторизацию.*

Приведем схему доказательства одной из теорем, например, последней теоремы.

Согласно первой части теоремы 1 матрица $G(x)$ допускает стандартную факторизацию (1). Определим операторы $F, F_1^{\pm}$ по следующим формулам,

$$FG(x) = -A_+(x)\overline{G(-x)}A_-(x),\ F_1^+G_+(x) =$$

$$-A_+(x)\overline{G_+(-x)}, F_1^-G_-(x) = \overline{G_-(-x)}A_-(x).$$

Тогда из условия $G \in KL_3$ и факторизации (1) следует цепочка равенств $G = FG = F_1^+G_+DF_1^-G_-$, в виду того, что $D(x) = \overline{D(-x)}$. Значит формулы (5) и (6) выполняются, в последней $F_1^{\pm}G_{\pm} \in \mathcal{G}W_{\pm}^{n\times n}$ по построению.

Подставим выражения для $F_1^+G_+(x)$ в правую часть равенства (10) и рассмотрим полученное равенство в точке $x = \infty$, имеем

$$(\omega_{kj}^+(\infty)) = -G_+^{-1}(\infty)A_+(\infty)\overline{G_+(\infty)}, \tag{13}$$

т.к. $G_+(-\infty) = G_+(\infty)$. Перемножив матрицы в правой части равенства (13) получим требуемое выражение для $\omega_{21}^+(\infty)$,

$$\omega_{21}^+(\infty) = \frac{1}{d_+}(|g_{21}|^2 + |g_{11}|^2), \tag{14}$$

где $(g_{kj}) = G_+(\infty)$, $d_+ = det\, G_+(\infty)$. Из (14) следует, что $\omega_{21}^+(\infty) \neq 0$ в виду того, что $d_+ \neq 0$ по условию. Тогда справедливость теоремы 7 следует из критерия канонической факторизации.

4.Некоторые приложения в математическую физику .

Существование канонической факторизации матричного коэффициента G в (1) гарантирует корректную разрешимость соответствующей краевой задачи Римана (и различных уравнений, которые сводятся к этой задаче). В этом разделе будут рассмотрены некоторые известные приложения краевой задачи Римана в математическую физику (новым здесь является лишь теорема 8).

4.1. Система уравнений Винера-Хопфа. Рассмотрим систему интегральных уравнений Винера-Хопфа :

$$u(t) - \int_0^\infty k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0,\infty), \tag{15}$$

где

$k(t)$ — матрица-функция размера $n \times n$, $u,\ f$ — вектора-столбцы длины n, $k \in L_{n\times n}(R),\ f \in L_{n\times 1}(0,\infty),\ \det(I - \mathcal{F}k(x)) \neq 0,\ x \in R.$

Легко видеть [1, гл. 2, § 5.1], что эта система эквивалентна неоднородной задаче Римана на вещественной оси для вектор-функций $\Phi^{\pm} \in W_{0\pm}^{n\times 1}$:

$$\Phi^{+}(p) = G(p)\Phi^{-}(p) + g(p),\ p \in R,\ g \in W_{0}^{n\times 1}, \tag{16}$$

где

$W_{0\pm}^{n\times 1} = \{\mathcal{F}f\,:\, f \in L_{n\times 1}(R),\ f(t) = 0 \text{ при } \pm t < 0\}$, $W_{0}^{n\times 1} = \{\mathcal{F}f\,:\, f \in L_{n\times 1}(R)\}$.

В данном случае,

$$G(p) = (I - \mathcal{F}k(p))^{-1},\ g(p) = G(p)\mathcal{F}f(p),\ \Phi^{+}(p) = \mathcal{F}u(p), \tag{17}$$

$$\Phi^{-}(p) = -\mathcal{F}\{\theta(-t)\int\limits_{0}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds\}(p),\ (u(t) = f(t) = 0,\ t < 0),$$

θ — функция Хевисайда.

В самом деле, систему (1.1) рассмотрим на всей вещественной оси R. Тогда для $t \in (-\infty, \infty)$ имеем

$$u(t) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds = f(t) - \theta(-t)\int\limits_{0}^{\infty} k(t-s)u(s)\,ds.$$

Применив к вышестоящей системе преобразование Фурье получим неоднородную задачу Римана (16).

Из первой части работы (теоремы 2,3,6,7) вытекает

Теорема 8. *Пусть матрица $G(p)$ удовлетворяет условиям одной из следующих теорем: теореме 2 либо теореме 3 либо теореме 6 либо теореме 7. Тогда система Винера-Хопфа (15) корректно разрешима (решение существует, единственно и устойчиво в норме пространства L_1 относительно правой части f и ядра k).*

4.2. Интегральные уравнения в свертках на конечном интервале. В [4] показано, что следующие интегральные уравнения в свертках 1-го и 2-го рода на конечном интервале $(0, b)$

$$\alpha u(t) - \int\limits_{0}^{b} k(t-s)u(s)\,ds = f(t), \quad t \in (0, b), \tag{18}$$

где

$$k \in L_1(-b, b), \quad f \in L_1(0, b), \quad b > 0,\ \alpha = 0, 1,$$

эквивалентны (при некотором условии) задаче Римана (16) с матричным коэффициентом G порядка два :

$$G(x) = -\frac{1}{1 - \mathcal{F}k_{-}(x)} \begin{pmatrix} 1 & -e^{ixb}\mathcal{F}k_{-}(x) \\ e^{-ixb}(\mathcal{F}k_{+}(x) + 1 - \alpha) & \alpha - \mathcal{F}k(x) \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где

$$k(t) = 0,\ t \overline{\in} (-b, b),\ k_{\pm}(t) = \theta(\pm t)k(t),\ t \in R.$$

Здесь будет рассмотрен лишь случай, когда $\alpha = 1$, а k является периодической функцией на $(-b, b)$ [19],

$$k(t + b) = k(t), \quad t \in (-b, 0). \tag{20}$$

Исследования уравнения (18) в других случаях см. в [26],[27].

Положим

$$N_0 := \{m \in N \,:\, \Lambda^+(x_m) = 0,\ x_m = 2m\pi/b\},$$

где N — множество целых чисел,

$$\Lambda^{\pm}(p) = 1 - \int_{-b}^{b} e^{ipt} k_{\pm}(t)\,dt,\ p \in R.$$

Из соотношения $\lim_{|p|\to\infty} \Lambda^+(p) = 1$ при $p \in R$, следует, что N_0 — конечное множество (с числом элементов — M_0). Ясно, что $M_0 = 0$ при $N_0 = \emptyset$ — пустое множество.

Справедлива следующая теорема корректности задачи (18)-(20).

Теорема 9. *Если $N_0 = \emptyset$, то задача (18)-(20) однозначно разрешима в $L_1(0,b)$, решение устойчиво по правой части f и по ядру k (и по параметру b) в норме L_1.*

В противном случае, если $N_0 \neq \emptyset$, то для разрешимости задачи (18)-(20) в $L_1(0,b)$ необходимо и достаточно выполнение следующих M_0 условий :

$$\mathcal{F}f(x_m) = 0 \text{ при } x_m = 2m\pi/b,\ m \in N_0.$$

Известно (утверждение 1.1 [4]), что число нулей аналитической функции $\Lambda^+(p)$ ($\Lambda^-(p)$) в полуплоскости $Im\,p \geq C_0$ ($Im\,p \leq C_0$) конечно для любой вещественной постоянной C_0. Следовательно существует $y_0 \geq 0$ такое, что для функций $\Lambda^{\pm}(p)$ выполнены неравенства,

$$\Lambda^-(p) \neq 0 \ \text{ при } Im\,p = y_0,\ |\Lambda^+(p)| > 0 \ \text{ при } Im\,p \geq y_0.$$

Обозначим все нули функции $\Lambda^-(p)$ в полуплоскости $Im\,p < y_0$ через $p_1^-, ..., p_n^-$ (n_j — кратность p_j^- -го нуля $j = 1, ..., n$).

Тогда имеет место теорема о представлении общего решения задачи в виде аналитической формулы.

Теорема 10. *Во всех случаях разрешимости в $L_1(0,b)$ задачи (18)-(20) образ Фурье-Лапласа ее общего решения имеет следующую замкнутую форму :*

$$\mathcal{F}u(p) = \mathcal{F}f(p) + (h^+(p) + Q^+(p))\Lambda^+(p) + e^{ipb}(h^-(p) - Q^+(p))\Lambda^-(p),$$

где

$$h(p) = \frac{\mathcal{F}f(p)}{\Lambda^+(p)\Lambda^-(p)}\mathcal{F}k_-(p),\ h^{\pm}(p) = P_0^{\pm}h(p),\ p = x + iy_0,$$

$$Q^+(p) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n_j} c_{lj}(p - p_j^-)^{-l},\ (Q^+ = 0 \text{ при } n = 0) \qquad (21).$$

Коэффициенты c_{jl} ($l = 1, ..., n_j,\ j = 1, ..., n$) в (21) определены следующим образом. Если для $j \in \{1, 2, ..., n\}$ существует $m \in N_0$ такое, что

$$p_j^- = 2m\pi/b,$$

то $n_j = 1,\ c_{j1}$ — произвольная комплексная постоянная, если для всех $m \in N_0$

$$p_j^- \neq 2m\pi/b,\ (\text{или } N_0 = \emptyset),$$

то c_{jl} $(l = 1, ..., n_j)$— *некоторые комплексные постоянные, однозначно определяемые из равенства,*

$$P_0^+\{e^{-ipb}\frac{\mathcal{F}f(p)}{\Lambda^-(p)}\mathcal{F}k_-(p)\} = P_0^+\{e^{-ipb}Q^+(p)\Lambda^+(p)\},\ p = x + iy_0,$$

где обе части равенства — рациональные функции.

В случае однородного уравнения,

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Q_0^+(x)(1 - e^{ixb})\}(t)-$$

общий вид нетривиального решения уравнения (18) при $f = 0$, *где*

$$Q_0^+(x) = \sum_{j=1}^{M_0} c_j(x - x_j)^{-1},\ x_j = 2m_j\pi/b,\ m_j \in N_0,$$

c_j $(j = 1, ..., M_0)$— *произвольные комплексные постоянные,* ($Q_0^+ = 0$ *при* $N_0 = \emptyset$).

Таким образом, из теорем 9-10 можно получить полное исследование задачи (18)-(20), что также важно и в методологическом аспекте.

Из теоремы 9 следует, что условие $N_0 = \emptyset$ является необходимым и достаточным условием корректности задачи (18)-(20). Тогда легко видеть, что

$$||k|| \equiv \int_{-b}^{b} |k(t)|\, dt < 2 \tag{22}$$

— достаточное условие корректности этой задачи.

Отметим, что условие (22) является также достаточным условием корректной разрешимости уравнения 2-го рода (18) в другом частном случае – при четности ядра k [26].

Отметим, что случай когда $\alpha = 0$ (k является периодической функцией на $(-b, b)$) разобран в [27].

4.3. Системы интегральных уравнений 2-го рода в свертках на конечном интервале. Рассматривается система уравнений (20) при $\alpha = 1$, где $k(t)$ — матрица-функция размера $n \times n$, u, f – вектора-столбцы длины n, $k \in L_{n\times n}(-b, b)$, $f \in L_{n\times 1}(0, b)$.

В [5] предлагается следующая

Теорема 11. *Система интегральных уравнений 2-го рода в свертках на конечном интервале (20) коректно разрешима тогда и только тогда когда следующая матрица функция из группы* $\mathcal{G}W^{2n\times 2n}$, $n > 1$, *допускает каноническую факторизацию,*

$$G(x) = \begin{pmatrix} -e^{-ixb}\mathcal{F}k(x) & -I + \mathcal{F}k(x) \\ I + \mathcal{F}k(x)) & -e^{ixb}\mathcal{F}k(x) \end{pmatrix},$$

где I *– еденичная матрица порядка* n.

Легко видеть, что при четном ядре k матрица $I_1G(x)$ (где постоянная матрица I_1 составлена из нуле за исключение неглавной диагонали, на которой стоят еденицы) инвариантна относительно преобразования отражения с транспонированием. Следовательно к матрице G можно применить метод определения частных индексов (сумарный индекс $G(x)$ равен нулю) аналогичным образом, как это было сделано в [15] для $G(x)$ из (19).

4.4. Характеристическая система сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши :

$$A(t)\phi(t) + \frac{B(t)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(s)}{s-t}\, ds = \mathcal{F}f(t), \quad t \in R, \tag{23}$$

где

$$A, B \in W^{n\times n},\ f \in L_{n\times 1}(R),\ \det\left(A(t) \pm B(t)\right) \neq 0,\ t \in R.$$

Если положить $G := (A+B)^{-1}(A-B)$, то система (23), при некоторых дополнительных условиях, сводится эквивалентным образом к задаче Римана (16) [3, глава 6].

Для исследования системы (23) также будет справедлива теорема 8.

4.5. Нелинейное уравнение Шредингера:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + 2\alpha|\psi|^2\psi, \tag{24}$$

с начальными и граничными условиями

$$\psi(x,0) = \psi(x),\ \psi(x,t) = 0,\ |x| \to \infty. \tag{25}$$

Здесь $\psi(x,t)$ — комплекснозначная функция (классическое заряженное поле), $x \in R,\ t \geq 0$, α — вещественный параметр.

Задача (24)-(25) сводится [8] к задаче Римана (16), в которой матрица-функция G имеет следующий вид, $G(p) = a(p)S(p)$, где

$$S(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a(p)} & \frac{\varepsilon\bar{b}(p)}{a(p)} \\ -\frac{b(p)}{a(p)} & \frac{1}{a(p)} \end{pmatrix},$$

– матрица рассеяния, $\frac{1}{a(p)}$ и $\frac{\bar{b}(p)}{a(p)}$ – коэффициенты прохождения и отражения соответственно, $\varepsilon = sign\,\alpha$.

Можно видеть, что при $\varepsilon = -1$ и $\varepsilon = 1$ матрицы $G(p)$ и $diag\,\{1,-1\}G(p)$ – эрмитовы, соответственно. Применяя метод определения частных индексов получим, что у матрицы $G(p)$ все частные индексы равны нулю для $\varepsilon = -1$.

Наиболее содержательные физические приложения уравнение (24) имеет в нелинейной оптике. В то же время оно является достаточно универсальной моделью нелинейного уравнениях [8].

Список литературы

[1] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, *Уравнения типа свертки*, Наука, Москва, 1978. MR0527628

[2] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов*, Успехи мат. наук, **13**: 2(80) (1958), 3–72. MR0102720

[3] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.*, Гостехиздат, М.-Л., 1946.

[4] А. Ф. Воронин, *Полное обобщение метода Винера-Хопфа для интегральных уравнений в свертках на конечном интервале с интегрируемыми ядрами*, Диф. уравнения, **40**: 9 (2004), 1153 – 1160. MR2199969

[5] I. Feldman, I. Gohberg, N. Krupnik,*Convolution equationson finite intervals and factorization of matrix functions*, Integral equations and operator theory, **36**: (2000), 201–211. MR1741493

[6] М. Г. Крейн, *К теории акселерант и S-матриц канонических дифференциальных систем*, ДАН, **6** (1956), 1167–1170. MR0086978

[7] R. G. Newton and P.Jost, *The Construction of Potentials from the S-Matrix for Systems of Differential Equations*, JE Nuovo Cimento 1, **4** (1956), 590-622.

[8] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, Москва, 1986. MR0889051

[9] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: Метод обратной задачи*, Наука, Москва, 1980. MR0573607

[10] А. Б. Шабат *Обратная задача рассеяния*, Диф. уравн., **15**: 10 (1979), 1824 – 1834. MR0553630

[11] П. Я. Полубаринова-Кочина, *Теория движения грунтовых вод*, ГИТЛ, Москва, 1952.

[12] Э. Л. Пресман, *Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова*, Изв. Акад. наук СССР, сер. матем, **33**: 4 (1969), 70–81. MR0256467

[13] В. А. Малышев, *Уравнения Винера-Хопфа и их применения в теории вероятностей, Итоги науки и техн. Сер. Теор. Вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет.*, ВИНИТИ, Москва,**13** (1976), 5–35. Zbl 0451.60047

[14] А. П. Солдатов, *Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.* М.: Высшая школа, 1991. MR1127871

[15] А. Ф. Воронин, *Метод определения частных индексов симметричных матриц-функций* , Сиб. математич. журна, **52**: 1 (2011), 54–69. MR2810250

[16] А. Ф. Воронин, *О методе определения частных индексов симметричных матриц-функций*, Докл. РАН, **437**: 4 (2011), 448–451.

[17] А. Ф. Воронин, *Частные индексы унитарной и эрмитовой матриц-функций*, Сиб. математич. журнал, **51**: 5 (2010), 1010–1016. MR2757924

[18] А.Ф. Воронин, А.Е. Ковтанюк, М.М. Лаврентьев, *Краевая задача Римана в исследовании корректности линейных и нелинейных задач математической физики*, Труды первой международной молодежной школы-конференции. "Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач СЭМИ, (2010), 112-122.

[19] А. Ф. Воронин, *Исследование интегрального уравнения 2-го рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром.*, Сиб. журнал индустр. мат-ки, **12**: 1 (2009), 31–39. MR2657207

[20] J. Plemelj ,*Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe*, Monath. Math. Phys, **19** (1908), 211– 245.

[21] Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа, *Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций*, Труды Тб. математического ин-та, **12**, (1943), 1– 46.

[22] Ф. Д. Гахов, *Краевая задача Римана для системы n пар функций*, Успехи мат. наук, **7**: 4 (1954), 3–54.

[23] I. Gohgberg, M. A. Koashoek, I. M. Spitkovsky, *In: Factorization and Integrable Systems.* Birkhauser, Basel, 2003, 1–95.

[24] Ю. Л. Шмульян, *Задача Римана с положительно определенной матрицей*, Успехи мат. наук, **8**: 2(54) (1953), 143–145.

[25] Г. С. Литвинчук, *Две теоремы об устойчивости частных индексов краевой задачи Римана и их приложение* Изв. вузов. Математика, **67**: 12 (1967), 47–57.

[26] А. Ф. Воронин, *Необходимые и достаточные условия корректности для уравнения второго рода в свертках на конечном интервале с четным ядром*, Сиб. матем. журнал, **49**: 4 (2008), 756–767.

[27] А. Ф. Воронин, *Интегральное уравнение первого рода в свертках на конечном интервале с периодическим ядром.*, Сиб. журнал индустр. мат-ки, **11**: 1 (2008), 46–56.

Анатолий Федорович Воронин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: voronin@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.85–С.94 (2011) УДК 519.6
MSC 65N21, 65M32, 65R32

АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГИДРОАКУСТИКИ

С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН

Abstract. We investigate three methods of solving inverse acoustic problem, namely, Gelfand-Levitan-Krein, linearization and optimization.

Keywords: inverse acoustics problem, Gelfand-Levitan-Krein equation, source problem

1. Введение

Одним из наиболее эффективных способов определения неоднородных объектов (в воде, в воздухе, под поверхностью Земли) является акустическое зондирование, которое эффективно применяется в геофизике (сейсморазведка, геотомография), в медицине (УЗИ), при зондировании атмосферы. Использование не только характерных частот источников и приемников, но и амплитуды (сейсмограмм) позволяет повысить разрешающую способность акустического зондирования. В данной работе мы покажем это на примере двумерной обратной задачи акустики определения скорости либо плотности среды методом Гельфанда-Левитана-Крейна (раздел 2) и методом линеаризации (раздел 3) в случае, когда источники и приемники расположены на части границы исследуемой среды $x = 0$. Переменная x, называемая далее выводящей переменной, соответствует глубине проникновения (в геофизике и в морской акустике). Среда и находящиеся в ней объекты предполагаются гладкими по горизонтальной

Kabanikhin, S.I., Shishlenin, M.A., Algorithms of solving inverse hydroacoustics problems.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН “Обратные и экстремальные задачи электромагнитного и акустического зондирования Мирового океана” и ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

Поступила 10 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

переменной y. Мы покажем, что данное предположение позволяет локализовать и определить свойства объектов достаточно общей структуры. В работе рассмотрена задача локализации источника акустических волн и построен численный метод решения. В разделе 4 приведен алгоритм восстановления источника колебаний.

2. Постановка задачи

Рассмотрим *прямую задачу*

$$c^{-2}(x,y)\,u_{tt} = \Delta u - \nabla \ln \rho(x,y) \cdot \nabla u, \quad x > 0, \quad y \in \mathbb{R}, \quad t > 0; \tag{1}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{2}$$

$$u_x\big|_{x=+0} = h(y,t). \tag{3}$$

Здесь $c(x,y) \geq c_0 > 0$ ($c_0 = \mathrm{const}$) скорость распространения волн; $\rho(x,y) \geq \rho_0 > 0$ ($\rho_0 = \mathrm{const}$) плотность среды; $u(x,y,t)$ акустическое давление.

Общая постановка обратной задачи: найти коэффициенты уравнения (1) используя дополнительную информацию о решении прямой задачи (1)–(3):

$$u\big|_{x=+0} = f(y,t), \quad y \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Хорошо известно [1], что в такой общей постановке решение обратной задачи неединственно. Поэтому мы будем рассматривать обратные задачи в случае, когда среда зондируется несколькими различными источниками.

3. Двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна

Метод Гельфанда-Левитана-Крейна состоит в сведении нелинейной обратной задачи к системе линейных интегральных уравнений первого или второго рода. Метод дает возможность вычисления неизвестного коэффициента $\rho(x,y)$ при известной функции $c(x,y) \equiv 1$ без многократного решения прямой задачи. Полученные в данном разделе формулы допускают обоснование только в классе аналитических по y функций, однако численные расчеты показывают, что полученные формулы достаточно хорошо приближает искомый коэффициент.

Многомерные аналоги уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна были получены в работе [2]. Отметим, что аналитичность по переменной y позволяет обосновать сходимость проекционного метода [3], т.е. метода сведения многомерной обратной задачи к конечной системе одномерных обратных задач.

Рассмотрим двумерную обратную задачу определения плотности $\rho(x,y)$ при известной функции $c(x,y) \equiv 1$ [4]. Рассмотрим последовательность обратных задач

$$u_{tt}^{(k)} = \Delta u^{(k)} - \nabla \ln \rho(x,y) \cdot \nabla u^{(k)}, \tag{5}$$
$$x > 0, \quad y \in (-\pi, \pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$u^{(k)}\big|_{t<0} \equiv 0; \tag{6}$$

$$u_x^{(k)}\big|_{x=+0} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}\,\delta(t); \tag{7}$$

$$u^{(k)}\big|_{y=\pi} = u^{(k)}\big|_{y=-\pi}. \tag{8}$$

Здесь $\mathbb{Z}$ – множество всех целых чисел.

Предположим, что след решения задачи (5)–(8) измеряется на границе $x = 0$:

$$u^{(k)}\big|_{x=0} = f^{(k)}(y,t), \quad y \in (-\pi,\pi), \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

В данной постановке моделируется процесс зондирования среды серией источников вида (7).

Необходимое условие существования решения обратной задачи (5)–(9):

$$f^{(k)}(y,+0) = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}, \quad y \in (-\pi,\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Известно [1, 4, 5], что для задачи (5)–(9) можно получить многомерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна относительно вспомогательной функции $\Phi^m(x,t)$:

$$\Phi^k(x,t) - \frac{1}{2}\sum_m \int\limits_{-x}^{x} {f_m^{(k)}}'(t-s)\Phi^m(x,s)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}}{\rho(0,y)}\,\mathrm{d}y, \tag{10}$$

где $|t| < x$, $k \in \mathbb{Z}$, $f_m^{(k)}(t)$ коэффициенты Фурье функции $f^{(k)}(y,t)$.

Решая систему линейных интегральных уравнений (10) можно затем найти решение обратной задачи (5)–(9) по формуле

$$\rho(x,y) = \frac{\pi^2}{\rho(0,y)}\Big[\sum_m \Phi^m(x,x-0)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}my}\Big]^{-2}, \quad x > 0, \quad y \in (-\pi,\pi).$$

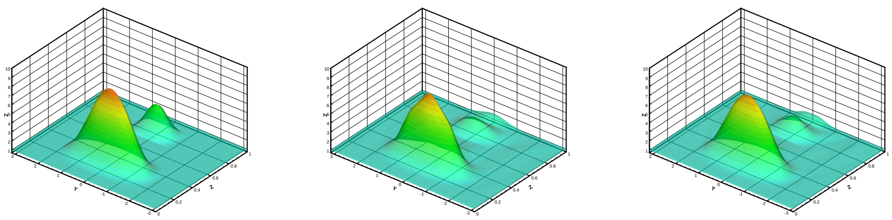


Рис. 1. Слева – точное решение $\rho(x,y)$; в центре приближенное решение при $N = 5$; справа – приближенное решение при $N = 20$

Рассмотрим N–приближение многомерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна (10):

$$2\Phi^{(k)}(x,t) - \sum_{\|m\|\le N} \int\limits_{-x}^{x} {f_m^{(k)}}'(t-s)\,\Phi^{(m)}(x,s)\,\mathrm{d}s = -\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}ky}}{\rho(0,y)}\,\mathrm{d}y,$$

где $|t| < x$, $|k| \le N$.

На рис. 1 приведены результаты численных расчетов двумерного аналога уравнения Гельфанда-Левитана-Крейна. В качестве точного решения была выбрана функция

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 4(\cos(\pi y/2)+1)\exp\{-160(x-0.3)^2\}+1 & x \in (0.1,0.5),\ y \in (-2,2); \\ 1.5(\cos(\pi y)+1)\exp\{-200(x-0.8)^2\}+1, & x \in (0.7,0.9),\ y \in (-1,1); \\ 1, & \text{для остальных } (x,y). \end{cases}$$

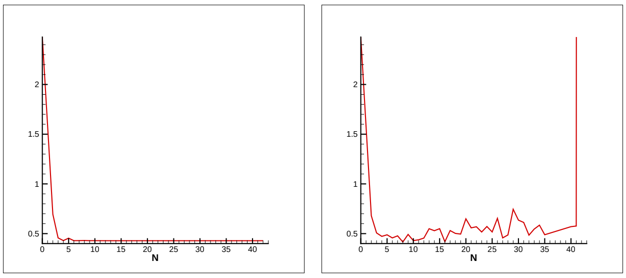


Рис. 2. Зависимость погрешности вычисления функции $\rho(x, y)$ от количества используемых гармоник N. Слева график функции $P(N) = \|\rho_{ex} - \rho_N\|_{L_2}$; справа график функции $P_\varepsilon(N) = \|\rho_{ex} - \rho_{N,e}\|_{L_2}$. Уровень погрешности данных $\varepsilon = \|f - f_\varepsilon\|$ равен 5%

Отметим, что даже при $N = 5$ использование N-приближения дает достаточно хорошее приближение искомого коэффициента $\rho(x, y)$.

Отметим, что при наличии ошибок в данных номер N является параметром регуляризации (см. рис. 2): сначала до $N \leq 5$ погрешность уменьшается, а затем начинает возрастать.

4. Метод линеаризации

Предположим, что плотность среды постоянна и требуется найти скорость распространения волн $c(x, y)$ [3, 5, 6]. Рассмотрим прямую задачу

$$c^{-2}(x, y)\, u_{tt} = \Delta u, \quad x > 0, \quad y \in (-L, L), \quad t > 0; \tag{11}$$

$$u\big|_{t<0} \equiv 0, \tag{12}$$

$$u_x\big|_{x=+0} = r_0 \delta(t). \tag{13}$$

$$u\big|_{y=L} = u\big|_{y=-L} = 0. \tag{14}$$

Обратная задача: найти скорость $c(x, y)$ в уравнении (11) по известной дополнительной информации о решении прямой задачи (11)–(14):

$$u\big|_{x=+0} = f(y, t), \quad y \in (-L, L), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{15}$$

Предположим, что скорость распространения волн имеет следующую структуру:

$$c^2(x, y) = c_0^2(x) + c_1(x, y).$$

Предположим, что $c_1(x, y)$ мала по сравнению с функцией c_0 и проведем линеаризацию [3] обратной задачи (11)–(15). С этой целью представим решение $u(x, y, t)$ начально-краевой задачи (11)–(14) в виде

$$u(x, y, t) = u_0(x, t) + u_1(x, y, t),$$

где $u_0(x, t)$ есть решение следующей начально-краевой задачи:

$$u_{0tt} = c_0^2(x) u_{0xx}, \qquad x > 0, \quad t > 0; \tag{16}$$

$$u_0\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad u_{0x}\big|_{x=0} = r_0 \delta(t). \tag{17}$$

Пренебрегая членом второго порядка малости $c_1\,\Delta u_1$, получаем задачу для определения $u_1(x,y,t)$

(18) $$u_{1tt} = c_0^2(x)\,\Delta u_1 + c_1(x,y)\,u_{0xx}, \qquad x>0,\ y\in(-L,L),\ t>0,$$

(19) $$u_1\big|_{t<0} \equiv 0, \qquad u_{1x}\big|_{x=0} = 0,$$

(20) $$u\big|_{y=L} = u\big|_{y=-L} = 0.$$

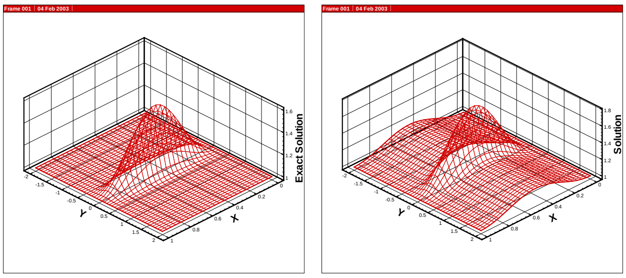


Рис. 3. Численное решение линеаризованной обратной задачи. Слева – точное решение $c_1(x,y)$. Справа – приближенное решение обратной задачи

Предполагается, что supp $\{c_1\}$ находится достаточно далеко от границ $y=\pm L$. В качестве дополнительной информации для определения $c_0(x)$ из соотношений (16), (17) можно взять

(21) $$u_0\big|_{x=0} = f(\hat{y},t), \quad \hat{y}\in(-L+\varepsilon)\cup(L-\varepsilon),$$

поскольку в силу сделанных предположений $f(y,t)$ не зависит от y в некоторой ε-окрестности границы области

Дополнительная информация о решении задачи (18), (20) запишется в виде

(22) $$u_1\big|_{x=0} = g(y,t),$$

где $g(y,t) = f(y,t) - u_0(0,t)$.

Таким образом, решение обратной задачи (11)–(15) можно разделить на следующие этапы:

(1) Решение обратной задачи (16), (17), (21) и определение $c_0(x)$.
(2) Решение прямой задачи (16), (17) и определение u_{0xx}.
(3) Решение линейной обратной задачи (18), (20), (22), т. е. задачи определения $c_1(x,y)$ по заданным u_{0xx} и $g(y,t)$.

5. Задача восстановления источника акустических колебаний

В гидроакустике возникают задачи об определении источника акустических волн [7, 8].

Рассмотрим прямую задачу в области $(x,y)\in\Omega$, $t\in(0,T)$:

(23) $$u_{tt} = c^2(x,y)(u_{xx}+u_{yy}) + q(x,y)\delta(t);$$

(24) $$u|_{t<0} \equiv 0;$$

(25) $$u|_{\Omega} = 0.$$

Обратная задача заключается в определении функции $q(x, y)$ из (23)–(25) по известной дополнительной информации

$$u(x, y, T) = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega. \tag{26}$$

Запишем обратную задачу (23)–(26) в операторном виде

$$A(q) = f.$$

Будем искать минимум целевого функционала

$$J(q) = \|A(q) - f\|^2 =< A(q) - f, A(q) - f >= \int\limits_{\Omega} [u(x, y, T; q) - f(x, y)]^2 \, \mathrm{d}\Omega.$$

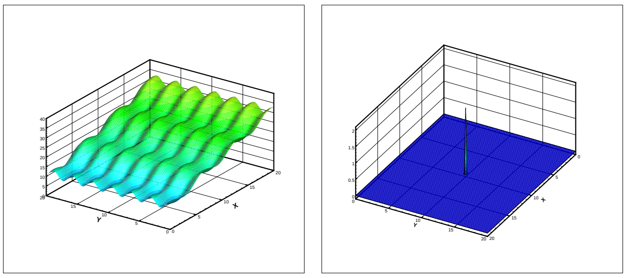


Рис. 4. Слева – скорость волны $c(x, y)$. Справа – точное решение $q(x, y)$

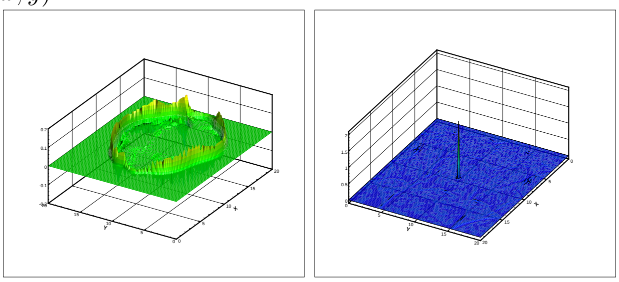


Рис. 5. Слева – данные обратной задачи $f(x, y) = u(x, y, T)$. Справа – приближенное решение $q^{(100)}(x, y)$ полученное после 100 итерации

Для решения задачи минимизации $J(q) \to \inf$ применим метод итераций Ландвебера

$$q^{(n+1)} = q^{(n)} - \alpha[A'(q^{(n)})]^*(A(q^{(n)}) - f), \quad n = 0, 1, \dots.$$

Итерации Ландвебера можно рассматривать как градиентный метод с фиксированным параметром спуска α, поскольку можно показать, что

$$J'(q) = 2\Big[A'(q)\Big]^*(A(q) - f).$$

Пусть функция $\psi(x,y,t)$ является решением *сопряженной* задачи:

$$\psi_{tt} = c^2(x,y)(\psi_{xx} + \psi_{yy}), \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T);$$
$$\psi|_{t=T} = 0, \quad \psi_t|_{t=T} = 2\,c^2(x,y)\,[u(x,y,T) - f(x,y)];$$
$$\psi|_{\Omega} = 0.$$

Тогда градиент функционала определяется по формуле

$$J'(q)(x,y) = c^{-2}(x,y)\,\psi_t(x,y,0).$$

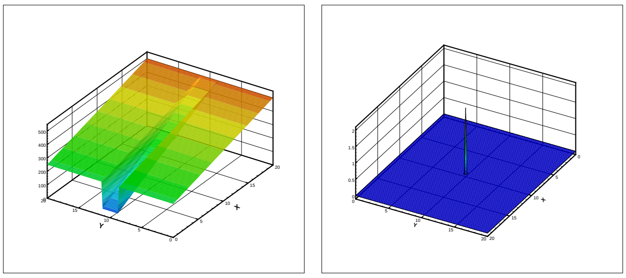


Рис. 6. Слева – скорость волны $c(x,y)$. Справа – точное решение $q(x,y)$

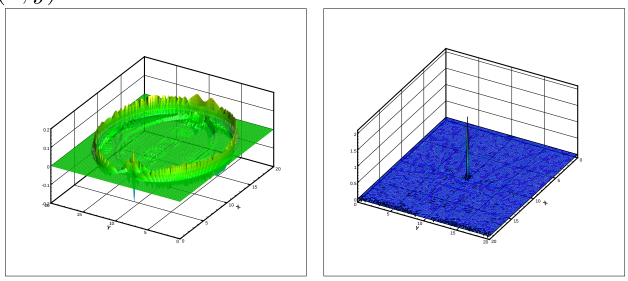


Рис. 7. Слева – данные обратной задачи $f(x,y) = u(x,y,T)$. Справа – приближенное решение $q^{(100)}(x,y)$ полученное после 100 итерации

Алгоритм метода итераций Ландвебера.

(1) Задаем начальное приближение $q^{(0)}(x,y)$.
(2) Пусть $q^{(n)}(x,y)$ известно. Решаем прямую задачу:

$$u^{(n)}_{tt} = c^2(x,y)\big(u^{(n)}_{xx} + u^{(n)}_{yy}\big), \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T);$$
$$u^{(n)}|_{t=0} = q^{(n)}(x,y), \qquad u^{(n)}_t|_{t=0} = 0;$$
$$u^{(n)}|_{\Omega} = 0.$$

(3) Находим значение целевого функционала $J(q^{(n)}) = \|A(q^{(n)}) - f\|^2$.
(4) Если значение функционала $J(q^{(n)})$ меньше наперед заданной погрешности измерения данных, то принимаем $q^{(n)}(x,y)$ за приближенное решение обратной задачи. В противном случае переходим к построению $q^{(n+1)}(x,y)$.

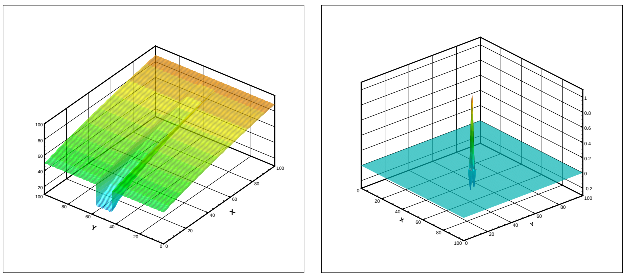


Рис. 8. Слева – скорость волны $c(x, y)$. Справа – точное решение $q(x, y)$

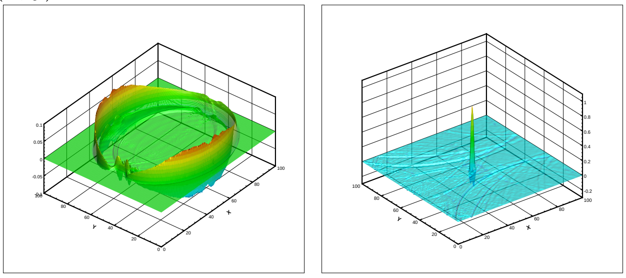


Рис. 9. Слева – данные обратной задачи $f(x, y) = u(x, y, T)$. Справа – приближенное решение $q^{(100)}(x, y)$ полученное после 100 итерации

(5) Решаем сопряженную задачу

$$\psi_{tt}^{(n)} = c^2(x,y)(\psi_{xx}^{(n)} + \psi_{yy}^{(n)}), \qquad (x,y) \in \Omega, \quad t \in (0,T);$$
$$\psi^{(n)}|_{t=T} = 0, \quad \psi_t^{(n)}|_{t=T} = 2\,c^2(x,y)\big[u^{(n)}(x,y,T) - f(x,y)\big];$$
$$\psi^{(n)}|_{\Omega} = 0.$$

(6) Определяем градиент функционала

$$J'(q^{(n)})(x,y) = c^{-2}(x,y)\,\psi_t^{(n)}(x,y,0).$$

(7) Находим приближенное решение на следующем шаге

$$q^{(n+1)}(x,y) = q^{(n)}(x,y) - \alpha J'(q^{(n)})(x,y).$$

Сходимость метода итераций Ландвебера по функционалу следует из известной теоремы для линейных некорректных задач [1].

В численных расчетах (рис. 4–7) зафиксированы следующие параметры: размер области $(x, y, t) \in [0, 20] \times [0, 20] \times [0, 0.12]$, размер сетки по пространству 500×500, шаг по времени выбирается из условия Куранта, начальное приближение выбиралось нулевым $q^{(0)}(x, y) \equiv 0$, параметр спуска $\alpha = 0.1$, точное решение $q(x, y)$ задается формулой (рис. 4):

$$q(x,y) = \begin{cases} 2\cos(\pi\frac{x-10}{0.4})\cos(\pi\frac{y-10}{0.4}), & x, y \in (9.8, 10.2); \\ 0, & \text{для остальных } (x,y). \end{cases}$$

В численных расчетах (рис. 8, 9) зафиксированы следующие параметры: размер области $(x, y, t) \in [0, 100] \times [0, 100] \times [0, 0.6]$, размер сетки по пространству 1000×1000, шаг по времени выбирается из условия Куранта, начальное приближение выбиралось нулевым $q^{(0)}(x, y) \equiv 0$, параметр спуска $\alpha = 0.1$, точное решение $q(x, y)$ задается функцией (рис. 8)

$$q(x,y) = \begin{cases} \cos(\pi \frac{x-50}{4}) \cos(\pi \frac{y-50}{2}) \cos(\pi \frac{y-50}{4}), & |x-50| \le 2,\ |y-50| \le 2; \\ 0, & \text{для остальных } (x,y). \end{cases}$$

Заключение

Изучены новые математические постановки задач гидроакустического зондирования, основанные на численных методах решения обратной задачи акустики. Показано, что использование не только характерных частот источников и приемников, но также и амплитуды принимаемого сигнала позволяет повысить разрешающую способность акустического зондирования.

На основе метода Гельфанда-Левитана-Крейна построен метод решения обратной задачи акустики. Система интегральных уравнений записана в векторной форме. Вмещающая водная среда предполагается горизонтально слоистой. Задача решена при помощи метода регуляризации в классе функций, представимых в виде конечного ряда Фурье по горизонтальной переменной. Показано, что количество членов ряда Фурье, с одной стороны, является параметром регуляризации обратной задачи, а с другой стороны, определяет количество необходимых приемников для однозначного определения исследуемой неоднородности.

Рассмотрена линеаризованная двумерная обратная задача определения скорости распространения волн в среде. Рассмотрен случай, когда акустические источники и приемники расположены на поверхности воды, исследуемая неоднородность локализована под водой. Построен алгоритм численного решения двумерной обратной линеаризованной задачи акустики.

Рассмотрена задача определения источника акустических волн. Построен алгоритм восстановления источника на основе оптимизационного метода. Проведена серия расчетов.

Список литературы

[1] С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

[2] С. И. Кабанихин, *Линейная регуляризация многомерных обратных задач для гиперболических уравнений*, ДАН СССР, **309**(4) 1989, 405–407. MR1037654

[3] С. И. Кабанихин, *Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений*, Наука, Новосибирск, 1988. MR0983888

[4] S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, *Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gelfand-Levitan-Krein equation*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **18**(9) (2011), 979–996.

[5] S. I. Kabanikhin, A. D. Satybaev, M. A. Shishlenin, *Direct Methods of Solving Inverse Hyperbolic Problems*, VSP, The Netherlands, 2004.

[6] С. И. Кабанихин, М. А. Шишленин, *Линеаризованная обратная задача для волнового уравнения*, Обратные задачи и информационные технологии, **1**(2) (2002), 83–113.

[7] С. И. Кабанихин, М. А. Бектемесов, А. Н. Алимова, *Итерационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения*, Вестник КазНПУ серия “Физико-математические науки”, **1**(29) 2010.

[8] J. L. Buchanan, R. P. Gilbert, A. Wirgin, Y. S. Xu, *Marine Acousics. Direct and Inverse Problems*, SIAM, Philadelphia, 2004. MR2065370

Сергей Игоревич Кабанихин
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. акад. Лаврентьева, 6,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kabanikhin@sscc.ru

Максим Александрович Шишленин
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mshishlenin@ngs.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.95–С.110 (2011) УДК 517.958
MSC 13A99

ПОЛИНОМЫ ЭРМИТА В ЗАДАЧЕ ВЕКТОРНОЙ ТОМОГРАФИИ НА ПЛОСКОСТИ

С.Г. Казанцев

Abstract. Singular value decomposition (SVD) is an important analytical and computational tool in connection with regularization of inverse problems. In this paper we derive the analytic singular value decomposition of *the longitudinal ray transform* $\mathcal{R}_1$, which we will treat as operator $\mathcal{R}_1 : \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W) \to L_2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w)$. Here the weight functions are $W(x, y) = e^{x^2+y^2}$ and $w(s) = e^{s^2}$. We construct a new orthogonal basis for the object space $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W)$, that was built with the help of complex bivariate Hermite polynomials. It is known that only the solenoidal part of the vector field can be reconstructed from longitudinal ray transform $\mathcal{R}_1$ in the non-weighted case, $W = 0$. It is interesting that in our case a potential component in the reconstructed field may be available.

Keywords: vector tomography, vector field, Radon transform, longitudinal ray transform, Hermite 2D functions, singular value decomposition (SVD).

1. Введение

В работе получено сингулярное разложение для *продольного лучевого преобразования* $\mathcal{R}_1$ векторных полей на плоскости, которое рассматривается нами как оператор $\mathcal{R}_1 : \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W) \to L_2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w)$. Здесь основное пространство $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W)$ есть гильбертово пространство векторных полей интегрируемых с квадратом на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ с весом $W(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Пространство

Kazantsev, S.G., Hermite polynomials in the plane vector tomography problems .

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00147-а), а также в рамках междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН №93-2009.

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

образов $L_2(\mathbb{R}\times[0,2\pi),w)$ есть также весовое гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\langle f,g\rangle \equiv \langle f,g\rangle_{L_2(\mathbb{R}\times[0,2\pi),w)} = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} f(s,\varphi)\overline{g(s,\varphi)}e^{s^2}dsd\varphi$$

и весовой функцией $w(s)=e^{s^2}$. Для построения сингулярного разложения оператора $\mathcal{R}_1$ на основе комплексных функции Эрмита двух переменных конструируется новый ортогональный базис пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,W)$, вычисляются сингулярные функции и числа.

Известно ([1], [5], [6], [12], [13]), что в безвесовом случае, $W=0$, по известному продольному лучевому преобразованию $\mathcal{R}_1$ однозначно восстанавливается только соленоидальная часть исходного векторного поля. Интересно, что в нашем случае, потенциальная компонента может уже присутствовать в восстановленном векторном поле. Наличие этой компоненты в восстановленном векторном поле обусловлено выбором основного пространства векторных полей. Наиболее полное изложение основных вопросов томографии векторных и тензорных полей приводится в монографии [13]. В ней изучаются вопросы обратимости и устойчивости для различных вариантов лучевого преобразования тензорных полей: продольного лучевого преобразования, поперечного, поперечно-продольного и укороченного поперечного. В работах [2], [3], [8], [9] сингулярные разложения получены для операторов лучевого преобразования и преобразования Радона скалярных функций. В работах [5], [6] были получены сингулярное разложение и формулы обращения для продольного лучевого преобразования векторных и симметричных тензорных полей, определенных в единичном круге.

1.1. **Постановка задачи векторной томографии на плоскости.** Рассмотрим декартову систему координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{x}\equiv\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$. Обозначим класс комплекснозначных функций $a(\mathbf{x})$ через $L_2(\mathbb{R}^2,W)$. Пространство $L_2(\mathbb{R}^2,W)$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и конечной нормой $||\cdot||$,

$$\langle a,\ b\rangle \equiv \langle a,\ b\rangle_{L_2(\mathbb{R}^2,W)} := \iint\limits_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{x})\overline{b(\mathbf{x})}W(\mathbf{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$||a||^2 \equiv ||a||^2_{L_2(\mathbb{R}^2,W)} := \langle\langle a,\ a\rangle\rangle,$$

где $W(\mathbf{x})=e^{x^2+y^2}$ — весовая функция.

Обозначим через $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,W)$ класс (ковариантных) векторных полей $\mathbf{a}^{(1)}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ у которых все компоненты являются функциями из пространства $L_2(\mathbb{R}^2,W)$, скалярное произведение в $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,W)$ определим как

$$\langle\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{b}^{(1)}\rangle \equiv \langle\mathbf{a}^{(1)},\mathbf{b}^{(1)}\rangle_{\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2,W)} := \iint\limits_{\mathbb{R}^2}\mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{x})\boldsymbol{\cdot}\mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x})W(\mathbf{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Здесь через $\boldsymbol{\cdot}$ обозначено поточечное эрмитово скалярное произведение двух векторов,

$$\mathbf{a}^{(1)}\boldsymbol{\cdot}\mathbf{b}^{(1)} = a_1\bar{b}_1 + a_2\bar{b}_2.$$

Мы будем всегда обозначать векторные поля, а также другие связанные с ними понятия, такие как функциональные пространства, жирными буквами. Сначала мы напомним определение классического преобразования Радона $\mathcal{R}$ для скалярных величин (функций) $a(\mathbf{x})$.

Определение 1. *Преобразованием Радона $\mathcal{R}$ функции $a(\mathbf{x})$ называется функция переменных $s \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0, 2\pi)$,*

$$[\mathcal{R}a](s,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} a(s\boldsymbol{\theta} + t\boldsymbol{\theta}^{\perp})\mathrm{d}t, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\theta}^{\perp} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Это преобразование можно распространить на векторные поля $\mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{x})$, применяя его по-компонентно,

$$[\mathcal{R}\mathbf{a}^{(1)}](s,\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{a}^{(1)}(s\boldsymbol{\theta} + t\boldsymbol{\theta}^{\perp})\mathrm{d}t.$$

Определение 2. *Продольным лучевым преобразованием $\mathcal{R}_1$ векторного поля $\mathbf{a}^{(1)} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ называется функция переменных $s \in \mathbb{R},\ \varphi \in [0, 2\pi)$,*

$$[\mathcal{R}_1\mathbf{a}^{(1)}](s,\varphi) := -\sin\varphi[\mathcal{R}a_1](s,\varphi) + \cos\varphi[\mathcal{R}a_2](s,\varphi). \tag{2}$$

В качестве пространства образов преобразований (1) и (2) рассмотрим гильбертово пространство с весом $L_2(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w)$ в котором скалярное произведение определено следующим образом

$$\langle f, g \rangle \equiv \langle f, g \rangle_{L_2(\mathbb{R}\times[0,2\pi),w)} = \int_0^{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(s,\varphi)\overline{g(s,\varphi)}w(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi,$$

а весовая функция имеет вид $w(s) = e^{s^2}$. Таким образом, мы будем изучать преобразования (1) и (2) как операторы

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\ &: L_2(\mathbb{R}^2, W) \to L_2\left(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w\right), \\ \mathcal{R}_1 &: \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W) \to L_2\left(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w\right). \end{aligned}$$

Напомним, что в случае векторных полей с компактным носителем $\mathbb{D}$ оператор $\mathcal{R}_1$ имеет нетривиальное ядро Ker $\mathcal{R}_1$, которое совпадает с подпространством потенциальных векторных полей $\nabla\mathbf{H}_0^1(\mathbb{D})$, то есть потенциальные поля "невидимы"для продольного лучевого преобразования $\mathcal{R}_1$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{D})$.

Наша задача — определить векторное поле $\mathbf{a}^{(1)}$, принадлежащее пространству $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W)$, по известному продольному лучевому преобразованию $g^{(1)}(s,\varphi) := [\mathcal{R}_1\mathbf{a}^{(1)}](s,\varphi)$.

1.2. **Сингулярное разложение оператора.** Сейчас мы дадим определение концепции *сингулярного разложения оператора (singular value decomposition, SVD)*, смотри также [2], [9], [11]. Сингулярное разложение компактного оператора является одним из методов исследования обратных задач в гильбертовых пространств. Пусть H и K — гильбертовы пространства, $\{u_k\}_{k\geq 1}$ — ортонормированный базис в H, а $\{v_k\}_{k\geq 1}$ — ортонормированная система в пространстве K

и A — непрерывный линейный оператор из H в K. Сингулярным разложением оператора A называется его представление

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (u, u_k)_H v_k, \;\; Au_k = \sigma_k v_k,$$

величины $\sigma_k > 0$ называются сингулярными числами оператора A,

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_k \geq ... > 0, \;\; \lim_{k \to 0} \sigma_k = 0.$$

Сопряженный оператор при этом будет имеет вид

$$A^* v = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k (v, v_k)_K u_k, \;\; A^* v_k = \sigma_k u_k.$$

Теорема 1. [11] *Если оператор допускает сингулярное разложение, тогда обобщенный обратный оператор имеет вид*

$$A^+ v = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-1} (v, v_k)_K u_k.$$

Оператор A^+, в общем случае, неограничен. Его можно регуляризовать с помощью усеченного сингулярного разложения

$$T_\gamma v = \sum_{k \leq 1/\gamma} \sigma_k^{-1} (v, v_k)_K u_k,$$

γ — параметр регуляризации.

Сингулярное разложение (SVD) компактного оператора является важным аналитическим и вычислительным инструментом при решении ряда обратных задач, позволяет строить обратное преобразование и оценивать степень некорректности задачи.

2. Скалярные базисные функции в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2, e^{r^2})$

Определение 3. *Определим на плоскости $\mathbb{R}^2$ систему вещественнозначных функций Эрмита двух переменных $\{h_{nk}(x,y)\}$,*

$$h_{nk}(x,y) := (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} e^{-x^2-y^2}, \;\; n = 0, 1, ..., \;\; k = 0, 1, ..., n. \tag{3}$$

Учитывая определение классических полиномов Эрмита одной переменной [7], мы можем записать

$$h_{nk}(x,y) = e^{-x^2-y^2} H_k(x) H_{n-k}(y),$$

где $H_k(\cdot)$ — полиномы Эрмита одной переменной

$$H_k(t) = (-1)^k e^{t^2} \frac{\partial^k}{\partial x^k} e^{-t^2}, \quad \|H_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} H_n^2(x) \mathrm{d}x = n! 2^n \sqrt{\pi}.$$

В качестве примера приведем несколько начальных функций системы (3)

$h_{00}(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$h_{10}(x,y) = 2ye^{-x^2-y^2}, \;\; h_{11}(x,y) = 2xe^{-x^2-y^2}$

$h_{20}(x,y) = (4y^2-2)e^{-x^2-y^2}, \;\; h_{21}(x,y) = 4xye^{-x^2-y^2}, \;\; h_{22}(x,y) = (4x^2-2)e^{-x^2-y^2}.$

Из свойств классических полиномов Эрмита следует, что функции h_{nk} ортогональны на всей плоскости с весовой функцией $W(x,y)=e^{x^2+y^2}$,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{x^2+y^2}h_{nk}(x,y)h_{mq}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi 2^n k!(n-k)!\delta_{nm}\delta_{kq}.$$

Используя известную формулы сложения для полиномов Эрмита [7]

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k\varphi \sin^{n-k}\varphi H_k(x)H_{n-k}(y)=H_n(x\cos\varphi+y\sin\varphi),$$

мы получим формулу

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^k\varphi \sin^{n-k}\varphi h_{nk}(x,y)=e^{-x^2-y^2}H_n(x\cos\varphi+y\sin\varphi). \tag{4}$$

Из определения функций h_{nk} сразу следует, что их частные производные вычисляются следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x}h_{nk}(x,y)=-h_{n+1,k+1},\quad \frac{\partial}{\partial y}h_{nk}(x,y)=-h_{n+1,k}\ .$$

В самом деле,

$$\frac{\partial}{\partial x}h_{nk}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-x^2-y^2}(-1)^k e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)_x^{(k)}(-1)^{n-k}e^{y^2}\left(e^{-y^2}\right)_y^{(n-k)}\right)$$

$$=(-1)^n\left(e^{-x^2}\right)_x^{(k+1)}\left(e^{-y^2}\right)_y^{(n-k)}=-e^{-x^2-y^2}H_{k+1}(x)H_{n-k}(y)=-h_{n+1,k+1}(x,y).$$

Второе равенство проверяется аналогично. Теперь вычислим преобразование Радона функций h_{nk}.

Лемма 1. *Преобразование Радона $\mathcal{R}$ функций Эрмита двух переменных (3) имеет вид*

$$[\mathcal{R}h_{nk}](s,\varphi)=\sqrt{\pi}e^{-s^2}H_n(s)\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=s\boldsymbol{\theta}+t\boldsymbol{\theta}^\perp$, где $\boldsymbol{\theta}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\theta}^\perp=\begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$. Возьмем производную по направлению $\boldsymbol{\theta}^\perp$

$$\frac{d}{dt}h_{nk}(x,y)=-\sin\varphi\frac{\partial h_{nk}}{\partial x}+\cos\varphi\frac{\partial h_{nk}}{\partial y}=\sin\varphi h_{n+1,k+1}(x,y)-\cos\varphi h_{n+1,k}(x,y)$$

и вычислим преобразование Радона от левой и правой частей этого равенства

$$0=\sin\varphi[\mathcal{R}h_{n+1,k+1}](s,\varphi)-\cos\varphi[\mathcal{R}h_{n+1,k}](s,\varphi),$$

откуда следует рекуррентная формула

$$[\mathcal{R}h_{n+1,k+1}](s,\varphi)=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}[\mathcal{R}h_{n+1,k}](s,\varphi).$$

Применив последовательно эту рекуррентную формулу, получим

$$[\mathcal{R}h_{n+1,k+1}](s,\varphi)=\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}[\mathcal{R}h_{n+1,k}](s,\varphi)=\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}[\mathcal{R}h_{n+1,k-1}](s,\varphi)$$

$$=\ldots=\frac{\cos^{k+1}\varphi}{\sin^{k+1}\varphi}[\mathcal{R}h_{n+1,0}](s,\varphi),$$

или

$$[\mathcal{R}h_{nk}](s,\varphi)=\frac{\cos^k\varphi}{\sin^k\varphi}[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi).$$

Чтобы вычислить $[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi)$, воспользуемся формулой сложения (4) и вычислим преобразование Радона от обеих частей этого равенства,

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi[\mathcal{R}h_{nk}](s,\varphi)=[\mathcal{R}e^{-x^2-y^2}H_n(x\cos\varphi+y\sin\varphi)](s,\varphi).$$

Сначала вычислим правую часть

$$[\mathcal{R}e^{-x^2-y^2}H_n(x\cos\varphi+y\sin\varphi)](s,\varphi)$$
$$=\int_{\mathbb{R}}e^{-s^2-t^2}H_n(s\boldsymbol{\theta}\boldsymbol{.}\boldsymbol{\theta}+t\boldsymbol{\theta}^{\perp}\boldsymbol{.}\boldsymbol{\theta})\mathrm{d}t=e^{-s^2}H_n(s)\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}e^{-s^2}H_n(s).$$

Таким образом, имеем равенство

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi[\mathcal{R}h_{nk}](s,\varphi)=\sqrt{\pi}e^{-s^2}H_n(s).$$

Заменим в этом равенстве $[\mathcal{R}h_{nk}](s,\varphi)$ на $\frac{\cos^k\varphi}{\sin^k\varphi}[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi)$. Получаем

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^k\varphi\sin^{n-k}\varphi\frac{\cos^k\varphi}{\sin^k\varphi}[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi)$$
$$=\frac{1}{\sin^n\varphi}[\mathcal{R}h_{n,0}](s,\varphi)\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos^{2k}\varphi\sin^{2n-2k}\varphi$$
$$=\frac{1}{\sin^n\varphi}[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi)(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^n=\frac{1}{\sin^n\varphi}[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi).$$

Окончательно, получаем нужную формулу

$$[\mathcal{R}h_{n0}](s,\varphi)=\sqrt{\pi}e^{-s^2}H_n(s)\sin^n\varphi,$$

■

3. Комплекснозначные функции Эрмита двух переменных H_{nk}

В этом параграфе используется комплексификация плоскости $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2\cong\mathbb{C}^2$, $\mathbf{x}\cong z=x+\mathrm{i}y,\quad \overline{z}=x-\mathrm{i}y,\quad r^2=z\overline{z}=x^2+y^2$. Формальные частные производные $\frac{\partial}{\partial z}$ и $\frac{\partial}{\partial\overline{z}}$ определяются обычным образом

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Имеют место также обратные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial\overline{z}},\quad \frac{\partial}{\partial y}=\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial z}-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\overline{z}}.$$

Определение 4. *Комплекснозначную систему функций $\{H_{nk}\}$ двух переменных z и $\overline{z}$,*

$$H_{nk}(z,\overline{z}):=(-1)^k\frac{\partial^n}{\partial z^k\partial\overline{z}^{n-k}}(e^{-z\overline{z}}),\ n=0,1,...,\ k=0,1,...,n, \tag{6}$$

будем называть комплекснозначными функциями Эрмита двух переменных (bivariate complex-valued Hermite functions).

Из определения (6) следует свойство

$$\overline{H}_{nk} = (-1)^n H_{n,n-k}.$$

Для крайних случаев $k = 0$ и $k = n$ мы имеем, соответственно,

$$H_{n0} = \frac{\partial^n}{\partial \overline{z}^n}(e^{-z\overline{z}}) = (-z)^n e^{-z\overline{z}}, \quad H_{nn} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial z^n}(e^{-z\overline{z}}) = (\overline{z})^n e^{-z\overline{z}}.$$

3.1. **Интегральное представление для функций H_{nk}.** Непосредственно из определения (6) следуют дифференциальные соотношения для комплекснозначных функций Эрмита H_{nk}

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H_{n0} &&= H_{n+1,0} = (-z)^{n+1}e^{-z\overline{z}}\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H_{n1} + \frac{\partial}{\partial z}H_{n0} &&= 0\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H_{n2} + \frac{\partial}{\partial z}H_{n1} &&= 0\\
&\dots\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H_{n,n-1} + \frac{\partial}{\partial z}H_{n,n-2} &&= 0\\
&\frac{\partial}{\partial \overline{z}}H_{nn} + \frac{\partial}{\partial z}H_{n,n-1} &&= 0,
\end{aligned}$$

которые также можно записать в матричном

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\begin{pmatrix} H_{n0}\\ H_{n1}\\ \vdots\\ H_{nn}\end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} 0\\ H_{n0}\\ \vdots\\ H_{n,n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{n+1,0}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

или операторном виде

$$\mathbf{H}_{\overline{z}} + U\mathbf{H}_z = \mathbf{F}, \tag{7}$$

где U — оператор сдвига вправо

$$U\begin{pmatrix} H_{n0}\\ H_{n1}\\ \vdots\\ H_{nn}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ H_{n0}\\ \vdots\\ H_{n,n-1}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_{n0}\\ H_{n1}\\ \vdots\\ H_{nn}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} H_{n+1,0}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

Уравнение (7) есть операторное (матричное) уравнение типа Бельтрами, решение которого представляется в виде обобщенной формулы типа Помпею

$$\mathbf{H}(z,\overline{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}[(\zeta - z)E - (\overline{\zeta} - \overline{z})U]^{-1}\mathbf{F}(\zeta,\overline{\zeta})\mathrm{d}\sigma,$$

где E — единичная матрица, $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Вектор-решение $\mathbf{H}$ имеет компоненты

$$\begin{aligned}
H_{n0}(z,\overline{z}) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta - z} H_{n+1,0}(\zeta,\overline{\zeta})\mathrm{d}\sigma,\\
&\dots\\
H_{nk}(z,\overline{z}) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^k}{(\zeta - z)^{k+1}} H_{n+1,0}(\zeta,\overline{\zeta})\mathrm{d}\sigma,\\
&\dots\\
H_{nn}(z,\overline{z}) &= -\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} \frac{(\overline{\zeta}-\overline{z})^n}{(\zeta - z)^{n+1}} H_{n+1,0}(\zeta,\overline{\zeta})\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

В следующей лемме показано, как комплекснозначные функции $H_{nk}(z,\overline{z})$ выражаются через вещественные функции $h_{nk}(x,y)$, а также приводятся другие формулы с функциями H_{nk}.

Лемма 2. *Имеет место следующие формулы*

$$H_{nk}(z,\overline{z}) = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k} \mathrm{i}^{n-p-q}(-1)^{n-p}C_k^p C_{n-k}^q h_{n,p+q}(x,y), \tag{8}$$

в частном случае при $k=0$ получается известная формула [7]

$$2^n z^n = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{i}^{n-q} C_n^q H_q(x) H_{n-q}(y).$$

$$H_{nk}(z,\overline{z}) = \frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{C}} (\overline{z}\pm \mathrm{i}\overline{\zeta})^k (z\pm \mathrm{i}\zeta)^{n-k} e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma. \tag{9}$$

$$H_{nk}(z,\overline{z}) = (-1)^{n-k}e^{-|z|^2}\sum_{p=0}^{\min(k,n-k)} (-1)^p p! C_k^p C_{n-k}^p \overline{z}^{k-p} z^{n-k-p}, \tag{10}$$

в частности, главная часть функции $H_{nk}(z,\overline{z})$ имеет вид

$$H_{nk}(z,\overline{z}) = (-1)^{n-k}e^{-|z|^2}\Big(z^{n-k}\overline{z}^k + \dots\Big). \tag{11}$$

$$e^{-|z|^2} H_n\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z} + e^{-\mathrm{i}\varphi}z}{2}\right) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} e^{\mathrm{i}(2k-n)\varphi} C_n^k H_{nk}(z,\overline{z}). \tag{12}$$

Доказательство. Выразим производные по z и $\overline{z}$ через производные по x и y и применим формулу бинома Ньютона,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^k}{\partial z^k} &= \frac{1}{2^k}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k = \frac{1}{2^k}\sum_{p=0}^{k} C_k^p (-\mathrm{i})^{k-p}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-p},\\
\frac{\partial^{n-k}}{\partial \overline{z}^{n-k}} &= \frac{1}{2^{n-k}}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^{n-k}}\sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q \mathrm{i}^{n-k-q}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^q\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k-q}.
\end{aligned}$$

Используя эти формулы, получаем

$$
\begin{aligned}
H_{nk}(x,y) &= (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial z^k}\frac{\partial^{n-k}}{\partial \overline{z}^{n-k}}\left(e^{-x^2-y^2}\right)\\
&= (-1)^k \frac{1}{2^n}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-k}\left(e^{-x^2-y^2}\right)\\
&= (-1)^k \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k} C_k^p(-\mathrm{i})^{k-p}\sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q \mathrm{i}^{n-k-q}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p+q}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-p-q}\left(e^{-x^2-y^2}\right).
\end{aligned}
$$

Заметим, что

$$
(-1)^n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{p+q}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-p-q}\left(e^{-x^2-y^2}\right) = h_{n,p+q}(x,y),
$$

поэтому имеет место (8)

$$
H_{nk}(x,y) = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}\mathrm{i}^{n-p-q}(-1)^{n-p}C_k^pC_{n-k}^q h_{n,p+q}(x,y).
$$

Воспользуемся формулой интегрального представления для полиномов Эрмита [7],

$$
H_k(x) = \frac{2^k}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(x \pm \mathrm{i}s)^k e^{-s^2}\mathrm{d}s.
$$

Тогда для $k = p+q$ и $k = n-p-q$ получаем

$$
\begin{aligned}
H_{p+q}(x) &= \frac{2^{p+q}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(x \pm \mathrm{i}s)^{p+q}e^{-s^2}\mathrm{d}s,\\
H_{n-p-q}(y) &= \frac{2^{n-p-q}}{\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}(y \pm \mathrm{i}t)^{n-p-q}e^{-t^2}\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
h_{n,p+q}(x,y) &= e^{-x^2-y^2}H_{p+q}(x)H_{n-p-q}(y)\\
&= \frac{2^n}{\pi}e^{-x^2-y^2}\int\int_{\mathbb{R}^2}(x \pm \mathrm{i}s)^{p+q}(y \pm \mathrm{i}t)^{n-p-q}e^{-s^2-t^2}\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Подставим последнее выражение в формулу (8)

$$
\begin{aligned}
&H_{nk}(z,\overline{z})\\
&=\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}\mathrm{i}^{n-p-q}(-1)^{n-p}C_k^pC_{n-k}^q(x\pm\mathrm{i}s)^{p+q}(y\pm\mathrm{i}t)^{n-p-q}e^{-(s^2+t^2)}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\sum_{p=0}^{k}(-\mathrm{i})^{k-p}C_k^p(x\pm\mathrm{i}s)^p(y\pm\mathrm{i}t)^{k-p}\\
&\qquad\qquad\times\sum_{q=0}^{n-k}C_{n-k}^q(x\pm\mathrm{i}s)^q\mathrm{i}^{n-k-q}(y\pm\mathrm{i}t)^{n-k-q}e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\left[x-\mathrm{i}y\pm\mathrm{i}(s-\mathrm{i}t)\right]^k\left[x+\mathrm{i}y\pm\mathrm{i}(s+\mathrm{i}t)\right]^{n-k}e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{C}}(\overline{z}\pm\mathrm{i}\overline{\zeta})^k(z\pm\mathrm{i}\zeta)^{n-k}e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}
$$

Формула (9) доказана. Теперь докажем формулу (10). Для этого воспользуемся представлением (9),

$$
\begin{aligned}
&H_{nk}(z,\overline{z})\\
&=\frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\sum_{p=0}^{k}\sum_{q=0}^{n-k}C_k^pC_{n-k}^q\overline{z}^{k-p}z^{n-k-q}\mathrm{i}^{p+q}\iint_{\mathbb{R}^2}\overline{\zeta}^p\zeta^qe^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}}{\pi}\sum_{p=0}^{\min(k,n-k)}C_k^pC_{n-k}^p\overline{z}^{k-p}z^{n-k-p}(-1)^p\iint_{\mathbb{R}^2}|\zeta|^{2p}e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=(-1)^{n-k}e^{-|z|^2}\sum_{p=0}^{\min(k,n-k)}(-1)^pp!C_k^pC_{n-k}^p\overline{z}^{k-p}z^{n-k-p}.
\end{aligned}
$$

Для доказательства (12) снова воспользуемся представлением (9), имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^ke^{-\mathrm{i}(n-2k)\varphi}H_{nk}(z,\overline{z})=\\
&=\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\sum_{k=0}^{n}C_n^ke^{-\mathrm{i}(n-2k)\varphi}\left(\overline{z}\pm\mathrm{i}\overline{\zeta}\right)^k\left(z\pm\mathrm{i}\zeta\right)^{n-k}e^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z}+e^{-\mathrm{i}\varphi}z\pm\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{\zeta}+e^{-\mathrm{i}\varphi}\zeta)\right)^ne^{-|\zeta|^2}\mathrm{d}\sigma\\
&=\frac{2^ne^{-|z|^2}}{\pi}\iint_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z}+e^{-\mathrm{i}\varphi}z}{2}\pm\mathrm{i}u\right)^ne^{-u^2-v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\frac{2^ne^{-|z|^2}}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z}+e^{-\mathrm{i}\varphi}z}{2}\pm\mathrm{i}u\right)^ne^{-u^2}\mathrm{d}u\int_{\mathbb{R}}e^{-v^2}\mathrm{d}v\\
&=e^{-|z|^2}H_n\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z}+e^{-\mathrm{i}\varphi}z}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Здесь в конце вычислений использовались уже известные формулы $H_n(x) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x \pm \mathrm{i}u)^n e^{-u^2} \mathrm{d}u$ и $\int_{\mathbb{R}} e^{-v^2} \mathrm{d}v = \sqrt{\pi}$. Из доказанной формулы следует, что

$$C_n^k H_{nk}(z,\overline{z}) = (-1)^{n-k} e^{-|z|^2} \int_0^{2\pi} H_n\left(\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}\overline{z} + e^{-\mathrm{i}\varphi}z}{2}\right) e^{\mathrm{i}(n-2k)\varphi} \mathrm{d}\varphi. \tag{13}$$

■

Теорема 2. *a) Система функций $\{H_{nk}(z,\overline{z})\}$ образует ортогональный базис в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2, W)$,*

$$\langle H_{nk},\ H_{n'k'}\rangle = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} H_{nk}\overline{H_{n'k'}} W(\mathbf{x})\mathrm{d}\sigma = \pi k!(n-k)!\delta_{nn'}\delta_{kk'},$$
$$\|H_{nk}\| = \sqrt{\pi k!(n-k)!}.$$

b) Базисные функции $\{H_{nk}(z,\overline{z})\}$ отображаются преобразованием Радона $\mathcal{R}$ в ортогональную подсистему функций $\{g_{nk}(s,\varphi)\}$ из пространства образов $L_2(\mathbb{R}\times[0,2\pi), w)$, где

$$g_{nk}(s,\varphi) := [\mathcal{R}H_{nk}](s,\varphi) = \frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-k}}{2^n} e^{(n-2k)\mathrm{i}\varphi} e^{-s^2} H_n(s), \tag{14}$$
$$||g_{nk}|| = \pi\sqrt{\frac{2\pi^{1/2}n!}{2^n}}.$$

c) Имеет место сингулярное разложение

$$\left[\mathcal{R}\left(\frac{H_{nk}}{||H_{nk}||}\right)\right](s,\varphi) = \frac{\sigma_{nk}}{||g_{nk}||} g_{nk}(s,\varphi), \tag{15}$$

где сингулярные числа

$$\sigma_{nk} = \frac{||g_{nk}||}{||H_{nk}||} = \sqrt{\frac{2\pi^{3/2}C_n^k}{2^n}}. \tag{16}$$

Таким образом, если функция $a(\mathbf{x}) \in L_2(\mathbb{R}^2, W)$ и $g(s,\varphi) = [\mathcal{R}a](s,\varphi)$ — ее преобразование Радона, тогда имеет место формула обращения

$$a(\mathbf{x}) \overset{L_2(\mathbb{R}^2,W)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_{nk} H_{nk}(z,\overline{z}), \tag{17}$$

где

$$a_{nk} = \frac{(-1)^{n-k}}{2\pi^2 n!} \int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}} g(s,\varphi) e^{(2k-n)\mathrm{i}\varphi} H_n(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi. \tag{18}$$

Доказательство. а) Докажем ортогональность функций $\{H_{nk}\}$. Достаточно показать ортогональность H_{nq} и H_{nk} для $q > k$. Для этого запишем формулы Грина для области в комплексной форме

$$-\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} FG\mathrm{d}\bar{t} = \iint_{\Omega} F_z G\mathrm{d}\sigma + \iint_{\Omega} FG_z\mathrm{d}\sigma\ ,$$
$$\frac{1}{2i}\int_{\partial\Omega} FG\mathrm{d}t = \iint_{\Omega} F_{\overline{z}} G\mathrm{d}\sigma + \iint_{\Omega} FG_{\overline{z}}\mathrm{d}\sigma\ ,$$

где Ω — область с гладкой границей. Положим $F = e^{z\overline{z}} H_{nq}$ и $G = \overline{H}_{nk}$. Так как первая из этих функций полином, а вторая быстро убывают на бесконечности, то формулы Грина можно рассматривать для всей плоскости $\mathbb{C}$, имеем

$$\int\int_{\mathbb{C}} F_z G \mathrm{d}\sigma = -\int\int_{\mathbb{C}} F G_z \mathrm{d}\sigma \ , \tag{19}$$

$$\int\int_{\mathbb{C}} F_{\overline{z}} G \mathrm{d}\sigma = -\int\int_{\mathbb{C}} F G_{\overline{z}} \mathrm{d}\sigma \ . \tag{20}$$

Так как $\overline{H}_{nk} = (-1)^n H_{n,n-k}$, то

$$\langle H_{nq}, H_{nk}\rangle = (-1)^n \int\int_{\mathbb{C}} e^{z\overline{z}} H_{nq} H_{n,n-k} \mathrm{d}\sigma = (-1)^k \int\int_{\mathbb{C}} e^{z\overline{z}} H_{nq} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} \frac{\partial^k}{\partial \overline{z}^k} e^{-z\overline{z}} \mathrm{d}\sigma.$$

В последнем интеграле воспользуемся $(n-k)$ раз формулой Грина (19), получим

$$\begin{aligned}\langle H_{nq}, H_{nk}\rangle &= (-1)^n \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} (e^{z\overline{z}} H_{nq}) \frac{\partial^k}{\partial \overline{z}^k} e^{-z\overline{z}} \mathrm{d}\sigma = \\ &= (-1)^n \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} \left((-1)^{n-q} z^{n-q} \overline{z}^q + \ldots\right) H_{k0} \mathrm{d}\sigma = 0.\end{aligned}$$

Вычислим теперь норму этих функций, для этого проведем те же рассуждения, как и выше, полагая $q = k$

$$\|H_{nk}\|^2 = (-1)^n \int\int_{\mathbb{C}} e^{z\overline{z}} H_{nk} H_{n,n-k} \mathrm{d}\sigma = (-1)^n \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} (e^{z\overline{z}} H_{nk}) \frac{\partial^k}{\partial \overline{z}^k} e^{-z\overline{z}} \mathrm{d}\sigma$$

(применяем формулу Грина (20) k раз)

$$\begin{aligned}&= (-1)^{n-k} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial^k}{\partial \overline{z}^k} \frac{\partial^{n-k}}{\partial z^{n-k}} \left((-1)^{n-k} z^{n-k} \overline{z}^k + \ldots\right) e^{-z\overline{z}} \mathrm{d}\sigma \\ &= k!(n-k)! \iint_{\mathbb{C}} e^{-z\overline{z}} \mathrm{d}\sigma = \pi k!(n-k)!.\end{aligned}$$

b) Используя леммы 1 и 2, получим

$$\begin{aligned}\mathcal{R} H_{nk} &= \mathcal{R}\left(\frac{1}{2^n} \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k} \mathrm{i}^{n-p-q} (-1)^{n-p} C_k^p C_{n-k}^q h_{n,p+q}(x,y)\right) \\ &= \sqrt{\pi} e^{-s^2} \frac{1}{2^n} H_n(s) \sum_{p=0}^{k} \sum_{q=0}^{n-k} \mathrm{i}^{n-p-q} (-1)^{n-p} C_k^p C_{n-k}^q \cos^{p+q}\varphi \sin^{n-p-q}\varphi \\ &= \sqrt{\pi} e^{-s^2} \frac{1}{2^n} H_n(s) \sum_{p=0}^{k} (-1)^{n-p} C_k^p \cos^p\varphi (\mathrm{i}\sin\varphi)^{k-p} \sum_{q=0}^{n-k} C_{n-k}^q \cos^q\varphi (\mathrm{i}\sin\varphi)^{n-k-q} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-s^2} \frac{1}{2^n} H_n(s) (-1)^{n-k} \sum_{p=0}^{k} C_k^p \cos^p (-\mathrm{i}\sin\varphi)^{k-p} e^{\mathrm{i}(n-k)\varphi} \\ &= \sqrt{\pi} e^{-s^2} \frac{(-1)^{n-k}}{2^n} H_n(s) e^{\mathrm{i}(n-2k)\varphi}.\end{aligned}$$

Обозначим

$$g_{nk}(s,\varphi) := \frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-k}}{2^n} e^{(n-2k)\mathrm{i}\varphi} e^{-s^2} H_n(s).$$

Система функций $\{e^{\pm k\mathrm{i}\varphi}e^{-s^2}H_n(s)\}$ является ортогональным базисом в пространстве $L_2(\mathbb{R}\times[0,2\pi),e^{r^2})$, а значит $\{g_{nk}(s,\varphi)\}$ будет ортогональной подсистемой. Вычислим нормы для этих функций

$$||g_{nk}||^2=\frac{\pi}{2^{2n}}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{(2k-n)\mathrm{i}\psi}e^{-s^2}H_n(s)e^{(n-2k)\mathrm{i}\psi}e^{-s^2}H_n(s)e^{s^2}dsd\psi=$$
$$=\frac{2\pi^2}{2^{2n}}\int_{\mathbb{R}}e^{-s^2}H_n^2(s)ds=\frac{2\pi^{5/2}n!}{2^n}.$$

c) Следует из пунктов a) и b). ■

Замечание. В работах Wunsche [14], [15] рассматривается система функций $\{l_{mn}(z,\overline{z})\}$, очень близкая к системе функций (3), которую автор называет $2D-$ *функциями Лагерра (Laguerre $2D-$functions)*

$$l_{mn}(z,\overline{z}):=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}}(-1)^n\sqrt{\frac{n!}{m!}}z^{m-n}L_n^{m-n}(z\overline{z})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}}(-1)^m\sqrt{\frac{m!}{n!}}\overline{z}^{n-m}L_m^{n-m}(z\overline{z}),$$

здесь $L_n^{\alpha}(.)$ — обобщенные полиномы Лагерра [7]. Там же приводится другое представление для $2D$ функций Лагерра (сравнить с формулой 10)

$$l_{mn}(z,\overline{z})=\frac{e^{-\frac{1}{2}z\overline{z}}}{\sqrt{\pi m!n!}}\sum_{j=0}^{\min\{m,n\}}\frac{m!n!}{j!(m-j)!(n-j)!}(-1)^j\overline{z}^{m-j}z^{n-j}$$
$$=\frac{(-1)^{m+n}}{\sqrt{\pi m!n!}}e^{\frac{1}{2}z\overline{z}}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m\partial\overline{z}^n}e^{-z\overline{z}}.$$

Преобразование Радона этих функций вычисляется по формуле

$$[\mathcal{R}l_{mn}](s,\varphi)=\sqrt{2}e^{\mathrm{i}(m-n)\varphi}\frac{1}{\sqrt{2^{m+n}m!n!}}e^{-\frac{1}{2}s^2}H_m(s/\sqrt{2})H_n(s/\sqrt{2}).$$

4. Векторные поля на плоскости

Рассмотрим сначала вспомогательную систему векторных полей

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\ \pm\mathrm{i}\end{pmatrix}H_{nk}(z,\overline{z}),\ n=0,1,...,\ k=0,1,...,n\right\}. \tag{21}$$

Заметим, что эти векторные поля имеют вид $\begin{pmatrix}1\\ \pm\mathrm{i}\end{pmatrix}f(z,\overline{z})$, что позволяет легко вычислять их дивергенцию, а именно

$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}f=\frac{\partial f}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial f}{\partial\overline{z}},$$
$$\operatorname{div}\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}f=\frac{\partial f}{\partial x}-\mathrm{i}\frac{\partial f}{\partial y}=2\frac{\partial}{\partial z}f.$$

Следовательно, например, поле $\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}H_{nk}+\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}H_{n,k-1}=\begin{pmatrix}H_{nk}+H_{n,k-1}\\ \mathrm{i}(H_{nk}-H_{n,k-1})\end{pmatrix}$ будет соленоидальным, так как

$$\operatorname{div}\left[\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}H_{nk}+\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix}H_{n,k-1}\right]=2\frac{\partial}{\partial\overline{z}}H_{nk}+2\frac{\partial}{\partial z}H_{n,k-1}=0.$$

Последнее равенство нулю следует из свойств функций H_{nk}.

Очевидно, также, что система (21) будет образовывать ортогональную систему в пространстве $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W)$ с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \pm\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk} \right\| = \sqrt{2}||H_{nk}|| = \sqrt{2\pi k!(n-k)!}\ .$$

Вычислим продольное лучевое преобразование (2) этих базисных вектор-функций

$$\left[\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk}\right](s,\varphi) = -\sin\varphi[\mathcal{R}H_{nk}](s,\varphi) + \mathrm{i}\cos\varphi[\mathcal{R}H_{nk}](s,\varphi) = \mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi}[\mathcal{R}H_{nk}](s,\varphi).$$

Учитывая (14), получаем

$$\left[\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk}\right](s,\varphi) = \ \mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-k}}{2^n} e^{(n-2k+1)\mathrm{i}\varphi}\frac{H_n(s)}{e^{s^2}}, \tag{22}$$

$$\left[\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk}\right](s,\varphi) = -\mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-k}}{2^n} e^{(n-2k-1)\mathrm{i}\varphi}\frac{H_n(s)}{e^{s^2}}. \tag{23}$$

Перейдем теперь к рассмотрению основной системы векторных полей на плоскости.

Определение 5. *Определим ситему векторных полей* $\{\mathbf{H}^{(1)}_{nk},\ \mathbf{P}^{(1)}_{nk}\}$ *следующим образом*

$$\mathbf{H}^{(1)}_{n0} := 2\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{n0}, \qquad n \geq 0 \tag{24}$$

$$\mathbf{H}^{(1)}_{nk} := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk} + \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{n,k-1},\ n \geq 1,\ k = 1,\dots,n \tag{25}$$

$$\mathbf{H}^{(1)}_{n,n+1} := 2\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nn}, \qquad n \geq 0 \tag{26}$$

$$\mathbf{P}^{(1)}_{nk} := \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{nk} - \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{n,k-1},\ n \geq 1,\ k = 1,\dots,n. \tag{27}$$

Непосредственная проверка показывает, что $\overline{\mathbf{H}^{(1)}_{nk}} = (-1)^n\mathbf{H}^{(1)}_{n,n-k+1}$,

$$\overline{\mathbf{H}^{(1)}_{nk}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \overline{H}_{nk} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \overline{H}_{n,k-1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} H_{n,n-k} + (-1)^n \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} H_{n,n-k+1}$$
$$(-1)^n\mathbf{H}^{(1)}_{n,n-k+1}.$$

Теорема 3. *Для векторных полей (24)–(27) выполняются следующие свойства:*
a) $\{\mathbf{H}^{(1)}_{nk},\ n \geq 0,\ k = 0, 1, \dots, n+1;\ \mathbf{P}^{(1)}_{nk},\ n \geq 1,\ k = 1, \dots, n\}$ *образуют ортогональный базис в пространстве* $\mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W)$*, норма которых вычисляются по формулам*

$$\|\mathbf{H}^{(1)}_{nk}\| = \|\mathbf{P}^{(1)}_{nk}\| = \sqrt{\frac{2\pi(n+1)k!(n-k)!}{k}},$$
$$||\mathbf{H}^{(1)}_{n0}|| = ||\mathbf{H}^{(1)}_{nn}|| = 2\sqrt{2\pi n!}\ .$$

b) При $n \geq 1,\ k = 1, \dots, n$ *векторные поля* $\mathbf{H}^{(1)}_{nk}$ *будут соленоидальными векторными полями,*

$$\mathrm{div}\mathbf{H}^{(1)}_{nk} = 0.$$

c) При $n \geq 1,\ k = 1, \dots, n$ векторные поля $\mathbf{P}^{(1)}_{nk}$ являются потенциальными,

$$\mathbf{P}^{(1)}_{nk} = -\nabla H_{n-1,k-1}.$$

Доказательство. a) По тереме Пифагора

$$\|\mathbf{H}^{(1)}_{nk}\|^2 = \|\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} H_{nk}\|^2 + \|\begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} H_{n,k-1}\|^2 = 2\pi k!(n-k)! + 2\pi(k-1)!(n-k+1)!$$
$$= 2\pi(k-1)!(n-k)!(k+n-k+1) = 2\pi(k-1)!(n-k)!(n+1),$$
$$||\mathbf{H}^{(1)}_{n0}|| = 2||\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} H_{n0}|| = 2\sqrt{2\pi n!}\ .$$

Пункты b) и c) проверяется непосредственным вычислением, в частности, имеем

$$\nabla H_{n-1,k-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z} H_{n-1,k-1} + \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} H_{n-1,k-1} \\ \\ \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial z} H_{n-1,k-1} - \mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} H_{n-1,k-1} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -H_{nk} + H_{n,k-1} \\ -\mathrm{i}H_{nk} - \mathrm{i}H_{n,k-1} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} H_{nk} + \begin{pmatrix}1\\ -\mathrm{i}\end{pmatrix} H_{n,k-1} = -\mathbf{P}^{(1)}_{nk}.$$

■

В заключение сформулируем основную теорему.

Теорема 4. *Продольное лучевое преобразование*

$$\mathcal{R}_1 : \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W) \to L_2\left(\mathbb{R} \times [0, 2\pi), w\right)$$

имеет в этой паре гильбертовых пространств сингулярное разложение

$$\left[\mathcal{R}_1 \frac{\mathbf{H}^{(1)}_{nk}}{||\mathbf{H}^{(1)}_{nk}||}\right](s,\varphi) = \frac{\sigma^{(1)}_{nk}}{||g^{(1)}_{nk}||} g^{(1)}_{nk}(s,\varphi), \quad \left[\mathcal{R}_1 \frac{\mathbf{P}^{(1)}_{nk}}{||\mathbf{P}^{(1)}_{nk}||}\right](s,\varphi) = 0,$$

где сингулярные функции имеют вид

$$g^{(1)}_{nk} := [\mathcal{R}_1 \mathbf{H}^{(1)}_{nk}] = \mathrm{i}\frac{\sqrt{\pi}(-1)^{n-k}}{2^{n-1}} e^{(n-2k+1)\mathrm{i}\varphi} e^{-s^2} H_n(s),$$
$$||g^{(1)}_{nk}|| = 2\pi\sqrt{\frac{2\pi^{1/2} n!}{2^n}},$$

а сингулярные числа вычисляются по формулам

$$\sigma^{(1)}_{n0} := \frac{||g^{(1)}_{n0}||}{||\mathbf{H}^{(1)}_{n0}||} = \sqrt{\frac{\pi^{3/2}}{2^n}}, \quad \sigma^{(1)}_{nk} := \frac{||g^{(1)}_{nk}||}{||\mathbf{H}^{(1)}_{nk}||} = \sqrt{\frac{4k}{n+1}\frac{\pi^{3/2} C^k_n}{2^n}},\ k > 0.$$

Если вектор-функция

$$\mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{x}) \in \mathbf{L}_2(\mathbb{R}^2, W) \ominus \overline{\mathbf{Span}}\left\{\mathbf{P}^{(1)}_{nk}\right\}$$

и $g^{(1)}(s,\varphi) = [\mathcal{R}_1 \mathbf{a}^{(1)}](s,\varphi)$ — ее продольное лучевое преобразование, то имеет место формула обращения

$$\mathbf{a}^{(1)}(\mathbf{x}) \overset{L_2(\mathbb{R}^2,W)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n+1} a_{nk} \frac{\mathbf{H}^{(1)}_{nk}}{||\mathbf{H}^{(1)}_{nk}||},$$

где

$$a_{nk}=\frac{1}{\sigma_{nk}^{(1)}}\langle g^{(1)},\frac{g_{nk}^{(1)}}{||g_{nk}^{(1)}||}\rangle=\mathrm{i}\frac{(-1)^{n-k+1}}{4\pi^2 n!}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}}g^{(1)}(s,\varphi)e^{(2k-n-1)\mathrm{i}\varphi}H_n(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\varphi.$$

Список литературы

[1] H. Braun and A. Hauck, *Tomographic reconstruction of vector fields*, IEEE Transaction on Signal Processing, **39** (1991), N 2, 464–471.

[2] M.E. Davison, *A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space*, Numer. Funct. anal. and optimiz, **3** (1981), 321–340.

[3] M.E. Davison, *The ill-conditioned nature of the limited angle tomography problem*, SIAM J. Appl. Math., **43** (1983), N 2, 428–448.

[4] S.R. Deans, The Radon Transform and Some of Its Applications. Wiley, New York, 1983.

[5] S.G. Kazantsev and A.A. Bukhgeim, *Singular value decomposition of the 2D fan-beam Radon transform of tensor fields*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **12** (2004), N 3, 245–278.

[6] S.G. Kazantsev and A.A. Bukhgeim, *The Chebyshev ridge polynomials in 2D tensor tomography*, J. of Inverse and Ill-Posed Problems, **14** (2006), N 2, 157–188.

[7] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of integrals, sums, series and products*, Academic Press, New-York, 1965.

[8] A.K. Louis, *Orthogonal function expansion and the null space of the Radon transform*, SIAM J.Math. Anal., **15** (1984), 621–633.

[9] P. Maass, *The x-ray transform: singular value decomposition and resolution*, Inverse Problems, (1987), N 3, 729–741.

[10] R.B. Marr, *On the Reconstruction of a Function on a Circular Domain from a Sampling of its Line Integrals*, J. of Mathematical Analysis and Applications, **45** (1974), N 2, 357–374.

[11] F. Natterer and F. Wubbeling, *Mathematical methods in image reconstruction*, Philadelphia, SIAM, 2001.

[12] S.J. Norton, *Tomographic reconstruction of 2-D vector fields: application to flow imaging*, J. of Geophysics, **97** (1987), 161–168.

[13] V.A. Sharafutdinov, *Integral geometry of tensor fields*, Utrecht, VSP, 1994.

[14] A. Wunsche, *General Hermite and Laguerre two-dimensional polynomials*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **33** (2000), N 8, 1603–1629.

[15] A. Wunsche, *Hermite and Laguerre 2D polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **133** (2001), 665–678.

[16] A. Wunsche, *Generalized Zernike or disc polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **174** (2005), N 1, 135–163.

Сергей Гаврилович Казанцев
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kazan@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.111–С.123 (2011) УДК 517.95
MSC 35R30

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МОРСКОЙ СЕЙСМИКИ ДЛЯ ГОРИЗОНТАЛЬНО-СЛОИСТЫХ СРЕД

А.А. КАРЧЕВСКИЙ

Abstract. Possibility of solving of inverse dynamic problem of marine seismics on reconstruction of pressure and shear velocities and gap points in thinly stratified layer is shown. The method of minimization of residual functional is used.

Keywords: inverse dynamic problem of seismics, pressure velocity, shear velocity, gap point of medium, horizontaly stratified medium, thinly stratified layer, residual functional.

1. Введение

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Еще бóльшее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении окончательных результатов обработки с данными акустического каротажа и т.п. На нем основан метод псевдоакустического каротажа, представляющий собой одну из попыток решения обратной динамической задачи для реальных данных.

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежит уравнение акустики. Это

Karchevsky, A.L., Numerical solving of inverse dynamical problem of marine seismics for horizontal horizontaly stratified media.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00746) и совместным проектом СО РАН и ДВО РАН - 2009 - № 93.

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

связано с двумя фактами. Во-первых, математическое решение соответствующих задач хорошо изучено и не вызывает больших сложностей. Во-вторых, практическая сейсморазведка до недавнего времени была направлена на регистрацию, выделение и интерпретацию отраженных P-волн. Последнее позволяло достаточно хорошо приблизить окончательные результаты обработки реальных данных к решению задачи акустики.

Тем не менее, потребности геофизики не исчерпываются теми возможностями, которые у нее были — методы сейсморазведки постоянно развиваются и совершенствуются. Необходимо отметить, что первые работы по многоволновой сейсморазведке появились в России. В этой связи в первую очередь необходимо упомянуть о работах Н.Н. Пузырева [1]-[4] и его учеников. В работах Н.Н. Пузырева [5, 7] дан прекрасный обзор становления и развития многоволновой сейсмики в России. Идеи многоволновой сейсмики быстро развивались, создавалась соответствующая техника. Математически решение обратной динамической задачи сейсмики развивалась во многих работах, среди которых необходимо выделить работы А.С. Алексеева с соавторами [8]-[13].

Теоретические работы по геофизике, успешная апробация некоторых методов многоволновой сейсморазведки на реальных данных пробудили в настоящее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS. В этом случае математическое моделирование и интерпретация собранного геофизического материала требуют развития более сложного математического аппарата, чем существующий. Уравнения акустики для учета влияния обменных волн оказываются неприемлемыми, и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости.

Потребности математического моделирования сейсмических и электромагнитных полей требуют создания методов для численного решения прямых задач, которые быстро решались бы при использовании современной вычислительной техники.

Модель горизонтально-слоистой среды является распространненной моделью среды для математического моделирования и интерпретации геофизических данных в сейсмо- и электоразведке. Известно, что расчет сейсмических и электоромагнитных полей может быть сведен к решению дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений второго порядка. Горизонтально-слоистая модель среды позволяет строить алгоритмы решения прямых задач, которые легко реализуются на компьютере и требуют сравнительно мало времени для вычислений. Это позволяет решать задачи, возникающие в геофизике, которые требуют большого числа решений прямой задачи.

До недавнего времени в морской сейсморазведке регистрация, выделение и интерпретация отраженных P-волн были оправданы пока существовали системы, регистрирующие информацию на поверхности моря, поскольку продольные и поперечные смещения в силу свойств воды являются взаимозависимыми величинами. В настоящее время появились регистрирующие коплексы, которые могут быть расположены на морском дне, т.е. стало возможным разрабатывать методы, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS.

Настоящая работа посвящена тому, чтобы показать, что решение обратной динамической задачи морской сейсмики возможна: решение прямой задачи ищется в частотной области, там же решается и обратная задача методом минимизации функционала невязки.

2. Постановка задачи

Рассмотрим среду — слоистую структуру с границами раздела z_k, $k = \overline{0, N}$, $z_0 = 0$; m-ый слой находится в интервале $[z_{m-1}, z_m]$, последний $N+1$ слой есть $[z_N, \infty)$.

Физические свойства каждого слоя характеризуются параметрами Ламе и плотностью ρ, то есть параметры Ламе и плотность — кусочно-постоянные функции переменной z, $z \in [0; \infty)$. Будем считать, чтот первый слой $[0, z_1]$ — это вода.

Источник вида

$$\hat{f}(t)\nabla\delta(x, y, z - z_*) \tag{1}$$

в начальный момент времени $t = 0$ возбуждает в среде упругие колебания. Будем считать, что источник находится в первом слое. Источник вида (1) служит моделью взрыва или аэрогана.

Поскольку модель среды является горизонтально-слоистой, следовательно, к системе дифференциальных уравнений теории упругости для смещений может быть записана в цилиндрической системе координат и к ней могут быть применены преобразование Фурье-Бесселя по горизонтальной переменной r и преобразование Лапласа по переменной t (см. вывод основных уравнений в Приложении).

В частотной области для определения образов продольных и поперечных смещений u_z и u_r в любой точке интервала $[0, \infty)$ мы имеем: в воде (т.е. в первом слое $[0, z_1]$) для нахождения u_z служит дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - r_p^2\, u_z = 0, \qquad r_p^2 = \nu^2 + p^2/v_p^2, \tag{2}$$

в полупространстве $[z_1, \infty)$ продольные и поперечные смещения u_z и u_r удовлетворяют матричному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial}{\partial z}U + \nu BU\right) - \nu B'\frac{\partial}{\partial z}U - DU = 0, \tag{3}$$

на поверхности воды выполняются следующие краевое условие:

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \tag{4}$$

в точке нахождения источника имеют место условия склейки

$$[u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \qquad \left[\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_*} = 0, \tag{5}$$

в точке z_1 выполняются следующие условия склейки

$$\begin{aligned} [u_z]_{z_1} &= 0, \\ \left.\left(\rho v_s^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} + \nu\rho v_s^2 u_z\right)\right|_{z=z_1+0} &= 0, \\ \left.\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho(v_p^2 - 2v_s^2)u_r\right)\right|_{z=z_1+0} &= \left.\left(\frac{\rho p^2}{r_p^2}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right|_{z=z_1-0}, \end{aligned} \tag{6}$$

в точках z_k $(k = \overline{2, N})$ действуют условия склейки

$$\left[A\frac{\partial}{\partial z}U + \nu BU\right]_{z_k} = 0, \qquad [U]_{z_k} = 0, \tag{7}$$

на бесконечности выполняется условие предельного поглощения

$$U \ \to \ 0 \ \ (z \to \infty). \tag{8}$$

Здесь использовались следующие обозначения: ν и $p = -\alpha + i\omega$ $(\alpha > 0)$ — параметры преобразований Фурье-Бесселя и Лапласа соответственно;

$$U = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \qquad \hat{F}(p, \nu, z, z_*) = f(p)\left(\nu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(z - z_*) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta'(z - z_*)\right),$$

$$A = \rho \begin{bmatrix} v_s^2 & 0 \\ 0 & v_p^2 \end{bmatrix}, \quad B = \rho \begin{bmatrix} 0 & -v_s^2 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \rho p^2 E + \rho\nu^2 \begin{bmatrix} v_p^2 & 0 \\ 0 & v_s^2 \end{bmatrix};$$

λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность и $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$ — продольная и поперечная скорости в среде; обозначение $[g]_z$ использовано для склейки функции g в точке z, т.е. $[g]_z = g(z + 0) - g(z - 0)$; штрих $'$ у матрицы означает операцию транспонирования.

Соотношения (2)-(8) являются прямой задачей и позволяют определять продолные смещения u_z в воде и продольные и поперечные смещения u_z и u_r на интервале $[z_1, \infty)$. В воде поперечные смещения связаны с продольными при помощи следующего соотношения:

$$u_r = -\frac{\nu}{r_p^2}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{9}$$

Предположим, что о решении прямой задачи (2)-(8) известна следующая дополнительная информация:

$$U|_{z=z_1} = U_1 \equiv \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $\nu \in [0, \overline{\nu}]$, $\alpha \in [0, \overline{\alpha}]$, $\omega \in [\underline{\omega}, \overline{\omega}]$, and $\overline{\nu}$, $\overline{\alpha}$, $\underline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ — некоторые постоянные известные из практики.

Предполагаем, что плотность ρ известна во всей полуплоскости $[0, \infty)$.

Обратная задача. Определить неизвестные скорости v_p, v_s и точки разрыва среды z_k, если о решении прямой задачи (2)-(8) имеется дополнительная информация (10).

Обратная задача может быть решена численно при помощи минимизации функционалов невязки:

$$J = \sum_{\omega} \left([u_r(\nu, z_1, p) - u_{r1}(\nu, p)]^2 + [u_z(\nu, z_1, p) - u_{z1}(\nu, p)]^2\right). \tag{11}$$

Обратные задачи в постановках подобных постановке выше, свойства функционалов невязки типа (11) были подробно исследованы в работах [14]-[17]. В частности, на основании этих работ можно легко показать, что обратная задача (2)-(8), (10) может быть расщеплена на две последовательно решаемых обратных задачи, т.е. возможно вначале восстановить скорость продольных волн v_p

и точки разрыва среды z_k, а затем, используя их как известные, восстановить скорость поперечных волн v_s.

Если положить $\nu = 0$, то из (2)-(8) мы получим следующую постановку прямой задачи:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{p^2}{v_p^2} u_z = 0, \qquad z \in (0, z_1), \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - \rho p^2 u_z = 0, \qquad z \in (z_1, \infty), \tag{13}$$

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \qquad u_z \to 0 \quad (z \to \infty), \tag{14}$$

$$\left[\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_*} = 0, \;\; [u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \;\; \left[\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_k} = 0, \;\; [u_z]_{z_k} = 0, \; k = \overline{1, N}. \tag{15}$$

Функцилонал невязки (11) для восстановления неизвестной скорости v_p и точек разрыва среды z_k примет вид

$$J = \sum_{\omega} [u_z(0, z_1, p) - u_{z1}(0, p)]^2. \tag{16}$$

В работе [15] был проведён численный эксперимент: восстанавливались продольные и поперечные скорости тонкослоистой пачки, когда границы тонких слоёв заданы неточно: при средней толщине тонкого слоя 8 метров, координата точки разрыва z_k выбиралась с точностью ± 2 метра. Показано, что восстановление скоростей имеет приемлемую точность. Это говорит о том, что наибольший вклад в вариации функционала невязки вносят вариации продольных и поперечных скоростей в тонкослоистой пачке. Очевидно, что точность восстановления зависила от контраста скоростей в слоях, увеличивалась или уменьшалась мощность слоёв при неточном задании его границ.

Таким образом, на основании ранее полученных результатов будем придерживаться следующей трёхэтапной процедуры решения обратной задачи по восстановлению скоростей v_p, v_s и точек разрыва среды z_k в слоях среды:

(1) зададим начальное приближение v_p^0 и z_k^0 и начнём минимизацию функционала невязки (16), строя минимизационную последовательность $\{v_p\}^n$ и решая прямую задачу (12)-(15); остановим процес минимизации функциона невязки, как только скорость минимизации существенно упадёт; в результате имеем приближение v_p^i;

(2) возьмём в качестве начального приближения v_p^i и z_k^0 для продолжения минимизации функционала невязки (16); строим минимизационную последовательность $\{v_p, z_k\}^n$, решая прямую задачу (12)-(15); прекратим процесс минимизации функциона невязки, используя критерий остановки; имеем значения v_p^s и z_k^s, которые будем считать окончательными приближениями для восстанавливаемых скорости v_p и точки разрыва среды z_k;

(3) используя уже восстановленные скорости v_p и точки разрыва среды z_k, выберем начальное приближение v_s^0 и начнём минимизацию функционала невязки (11); решая прямую задачу (2)-(8), прекратим процесс

минимизации функциона невязки, используя критерий остановки; получаем приближение v_s^l, которое будем считать окончательными для восстанавливаемой скорости v_s.

3. Численный эксперимент

В этом параграфе представлен численный эксперимент по востановлению продольной и поперечных скоростей в тонкослоистой пачке и уточнению местоположения границ тонких слоёв. Мы будем предполагать, что интервал $[z_{s_1}, z_{s_2}]$ является тонкослоистой пачкой ($s_1 \leq n \leq s_2$), вмещающая среда известна, т.е. упругие параметры в $[0, z_{s_1}]$ и в $[z_{s_2}, \infty)$ известны. Плотность ρ известна в полуплоскости $[0, \infty)$. Для численного эксперимента были выбраны пачки, в которых толщина тонких слоёв сотавляет 7-9 метров.

Прежде чем далее описывать численный эксперимент, необходимо указать, как решать прямые задачи (2)-(8) и (12)-(15), как находить градиенты функционалов невязки (11) и (16) при вариациях скоростей v_p, v_s и z_k.

Для решения прямых задач (2)-(8), (12)-(15) используется метод, основанный на сведении дифференциального уравнения второго порядка или системы дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальному уравнению Риккати или к матричному дифференциальному уравнению Риккати соответственно. Данный подход основан на результатах работ [18]-[26]. Используя данный метод для численного решения поставленных выше прямых задач, можно получить аналитические выражения для их решений, а поиск этих решений сведётся к рекурентному пересчёту со слоя на слой, причем данные аналитические выражения могут быть представлены в таком виде, что ошибка округления не будет накапливаться при переходе от слоя к слою. Как вычислить производную $\frac{\partial}{\partial z_k} J$ и градиент функционала невязки (16), можно найти в [27], для исследуемой в этой рабеоте задачи все формулы получены в аналитическом виде. Для функционала невязки (11) можно также получить градиент в аналитическом виде, но строится он иначе (см. [28, 29]).

Как уже упоминалось выше, вопросы численного решения обратных задач по восстановлению упругих постоянных тонкослоистых пачек были исследованы в работах [14]-[17], [27], [30]-[33]. Рассматривались изотропные и анизотропные среды. Были исследованы математические свойства обратных задач и функционала невязки, на основе которых были предложены алгоритмы восстановления продольный и поперечных скоростей в тонкослоистых пачках. Во-первых, установлена возможность расщепления поставленной обратной задачи на серию последовательно решаемых обратных задач по восстановлению только части восстанавливаемых коэффициентов. Во-вторых, предложена стратегия минимизации функционала невязки. Дело в том, что функционал невязки типа (11) или (16) при определённом наборе параметров имеет локальные минимумы и максимумы. Таковыми параметрами являются: значения пространственных и временных частот, их количество, интервалы, из которых они взяты, значение параметра затухания α ($p = -\alpha + i\omega$). Варьируя данные параметры во время минимизации удаётся влиять на поведение функционала невязки, что позволяет “обойти” локальные минимумы и достичь глобального. Данная стратегия использована и в этой работе.

Как уже говорилось, восстановление будет проходить в три этапа. Первый этап — восстановление скорости v_p в тонкослостой пачке. Второй этап — уточнение координат точек разрыва среды z_k тонкослоистой пачки и скорости v_p в ней. Третий этап — восстановление v_s.

Дополнительная информация для обратной задачи насчитывается при помощи решения прямой задачи, затем вносилась случайная ошибка:

$$\tilde{u}(0,p) = u(0,p) \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\xi\right),$$

где P — процент вносимой ошибки, ξ — комплексная случайная величина из единичного круга. Везде ниже в численном эксперименте принято $P = 20$ %.

Первый этап. Восстановление продольной скорости v_p осуществлялось в два шага при помощи ранее разработанной стратегии минимизации функционала невязки. На первом шаге параметры функционала невязки (16) выбирались следующим образом: параметр затухания $\alpha = 10^{-2}$, интервал временных частот — $[10, 30]$ Гц, количество временных частот — 800. В качестве начального приближения выбиралась постоянная $2,8$ км/с во всех слоях. Минимизация велась до тех пор, пока скорость убывания значений функционала невязки не становилась слишком медленной. Второй шаг минимизации — параметры функционала невязки (16) выбирались следующими: параметр затухания $\alpha = 10^{-2}$, интервал временных частот — $[10, 80]$ Гц, количество временных частот — 2000. В качестве начального приближения выбирался результат восстановления на предыдущем шаге.

Второй этап. Уточнение продольной скорости v_p и местоположения точек разрыва среды z_k. На этом этапе параметры функционала невязки (16) выбирались следующими: параметр затухания $\alpha = 10^{-2}$, интервал временных частот — $[10, 80]$ Гц, количество временных частот — 2000.

Третий этап. Восстановление продольной скорости v_s с учётом уже восстановленных v_p и z_k. В качестве начального приближения можно взять любое корреляционное соотношение $v_s^0 = c_1 v_p + c_2$, где постоянные c_1 и c_2 известны из практики (простейшим корреляционным соотношением является $v_s^0 = v_p/\sqrt{3}$). Параметры функционала невязки (11) выбирались следующими: параметр затухания $\alpha = 10^{-2}$, интервал временных частот — $[10, 80]$ Гц, количество временных частот — 2000.

Для мининимизации функционала невязки (16) был использован метод сопряженных градиентов. На превом шаге первого этапа градиент брался в виде

$$J' = (J'_{k_1}, ..., J'_{k_2}),$$

где $J'_{p,k}$ является компонентой градиента функционала невязки при вариации $(v_p)_k$, являющейся значением продольной скорости в слое k, и индексы от k_1 до k_2 — это номера слоёв, в которых восстанавливаются скорости v_p. На втором шаге градиент функционала невязки вибирался так

$$J' = (J'_{k_1}, ..., J'_{k_2}, {j'}_{s_1}, ..., {j'}_{s_2}),$$

где $j'_k = \frac{\partial}{\partial z_k} J$ и индексы от s_1 до s_2 — это номера точек разрыва, которые восстанавливаются.

Следует указать, что для одновременного поиска таких разновеликих величин, как продольные скорости в тонких слоях и координаты точек разрыва, необходимо обезразмерить постановку прямой задачи (12)-(15). Для этого необходимо ввести новые функции и новую переменную:

$$\hat{v}_p = \frac{v_p}{C}, \qquad b = \frac{\rho}{R}, \qquad y = \frac{z}{L},$$

где C — некоторая величина, которая может быть выбрана как средняя скорость в тонкослоистой пачке, R — средняя плотность в тонкослоистой пачке, L — глубина, на которой залегает тонкослоистая пачка.

На рис. 1 представлены два примера восстановления параметров тонкослоистых пачек. Восстановление скоростей в тонкослоистой пачке и координат точек разрыва проходило в предположении, что нам известно количество слоёв, а координаты точек разрыва известны с точностью до ± 1 м, т.е. нам необходимо восстановить продольную и поперечную скорости в тонких слоях и уточнить местоположение границ этих слоёв. Как видно на рисунке, скорости в слоях и координаты разрыва среды восстанавливаются достаточно точно. Наименее точно восстанавливается местоположение границы, когда мал перепад скоростей.

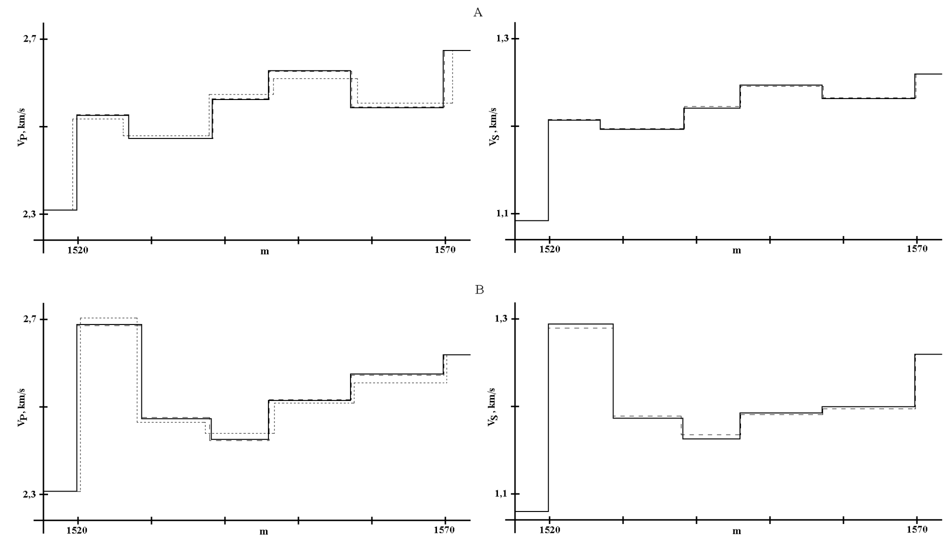


Рис. 1. Примеры восстановления продольной и поперечной скоростей тонкослоистой пачки и местоположения точек разрыва среды z_k. Точное решение обратной задачи для v_p дано сплошной линией; приближение, полученное на первом этапе восстановления дано точечной линией; приближение, полученное после второго этапа восстановления, дано прерывистой линией. Точное решение обратной задачи для v_s дано сплошной линией, восстановленное — прерывистой линией.

Из работы [27] следует, что производная функционала невязки по координате точки границы j_k' может обращаться в нуль, не только в точке минимума, но и в случае, если граница отсутствует, т.е. когда в какой-то точке z_i имеют место следующие равенства:

$$[\rho]_{z_i} = 0, \qquad [v_p^2]_{z_i} = 0.$$

Данное обстоятельство позволяет отказаться от предположения, что количество слоёв в тонкослоистой пачке заранее известно. На рис. 2 приведён пример восстанавления двухслойной пачки. В качестве начального приближения была выбрана пятислойная пачка. Как видно, единственный разрыв был установлен.

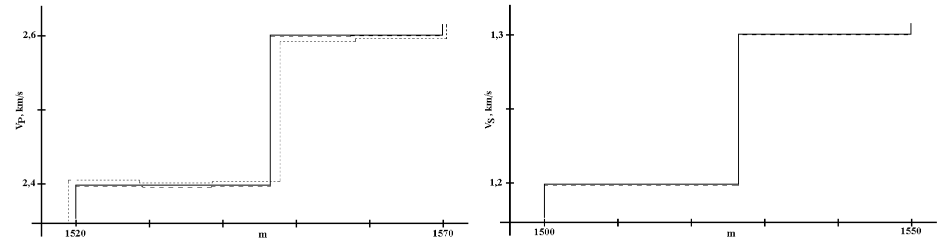


Рис. 2. Пример восстановления продольной и поперечной скоростей двухслойной пачки и местоположения точки разрыва среды, в качестве начального приближения была выбрана пятислойная пачка. Точное решение обратной задачи для v_p дано сплошной линией; приближение, полученное на первом этапе восстановления дано точечной линией; приближение, полученное после второго этапа восстановления, дано прерывистой линией. Точное решение обратной задачи для v_s дано сплошной линией, восстановленное — прерывистой линией.

4. Выводы

На численных примерах показана возможность решения обратной динамической задачи морской сейсмики по восстановлению продольной и поперечной скоростей и точек разрыва среды в тонкослоистой пачке. Скорости и местоположение точек разыва среды могут быть восстановлены с достаточной точностью.

Приложение: Вывод основных уравнений

Поскольку модель среды является горизонтально-слоистой, следователдьно, она обладает цилиндрической симметрией, тогда система дифференциальных уравнений теории упругости для смещений может быть записана в следующей форме:

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_r}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial z}\right) + (\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathbf{u}_r)\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda\frac{\partial\mathbf{u}_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\mu\mathbf{u}_z)\right] - f(t)\delta''(r)\delta(z-z_*),$$

$$\rho\frac{\partial^2\mathbf{u}_z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left((\lambda+2\mu)\frac{\partial\mathbf{u}_z}{\partial z}\right) + \mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\mathbf{u}_z}{\partial r}\right)$$
$$+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\left[\mu\frac{\partial\mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\mathbf{u}_r)\right]\right) - f(t)\delta'(r)\delta'(z-z_*),$$

и к ней может быть применены преобразование Фурье-Бесселя по горизонтальной переменной r и преобразование Лапласа по переменной t

$$u_r(p,\nu,x_3) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{pt}\int\limits_0^\infty \mathbf{u}_r(t,r,x_3)rJ_1(\nu r)drdt,$$
$$u_z(p,\nu,x_3) \;=\; \int\limits_0^\infty e^{pt}\int\limits_0^\infty \mathbf{u}_z(t,r,x_3)rJ_0(\nu r)drdt,$$

после чего приходим к следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A\frac{\partial}{\partial z}U+\nu BU\right)-\nu B'\frac{\partial}{\partial z}U-DU=\hat{F}(p,\nu,z,z_*), \tag{17}$$

где функции $u_r(\nu,z,p)$, $u_z(\nu,z,p)$ являются образами функци поперечных смещений $\mathbf{u}_r(r,z,t)$ и продольных смещений $\mathbf{u}_z(r,z,t)$; ν, $p=-\alpha+i\omega$ $(\alpha>0))$ — параметры преобразований Фурье-Бесселя и Лапласа соответственно, и введены следующие обозначения:

$$U=\begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix},\quad \hat{F}(p,\nu,z,z_*)=f(p)\left(\nu\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\delta(z-z_*)-\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\delta'(z-z_*)\right),$$

$$A=\rho\begin{bmatrix} v_s^2 & 0\\ 0 & v_p^2\end{bmatrix},\quad B=\rho\begin{bmatrix} 0 & -v_s^2\\ v_p^2-2v_s^2 & 0\end{bmatrix},\quad D=\rho p^2E+\rho\nu^2\begin{bmatrix} v_p^2 & 0\\ 0 & v_s^2\end{bmatrix},$$

λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность и $v_p=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, $v_s=\sqrt{(\mu)/\rho}$ — продольная и поперечная скорости в среде, которые являются кусочно-постоянными функциями; обозначение $[f]_z$ использовано для склейки функции f в точке z, т.е. $[f]_z=f(z+0)-f(z-0)$; штрих $'$ у матрицы означает операцию транспонирования.

Для слоистой среды мы можем к матричному дифференциальному уравнению добавить условие поглощения на бесконечности:

$$U \;\to\; 0 \;\; (z\to\infty), \tag{18}$$

и условия склейки

$$\left[A\frac{\partial}{\partial z}U+\nu BU\right]_{z_k}=0,\quad [U]_{z_k}=0,\qquad k=\overline{2,N_l}, \tag{19}$$

означающие, что поля напряжений и смещений непрерывны.

Рассмотрим отдельно первый слой — воду. Поскольку в воде $v_s=0$, из уравнений (17) получим:

$$-\nu\rho v_p^2\frac{\partial u_z}{\partial z}-\rho(p^2+\nu^2v_p^2)u_r \;=\; \nu f(p)\delta(z-z_*), \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_p^2\frac{\partial u_z}{\partial z}+\nu\rho v_p^2u_r\right)-\rho p^2u_z \;=\; -f(p)\delta'(z-z_*), \tag{21}$$

Отсутствие поля напряжений на поверхности воды задаётся краевым условием

$$\left.\left(\rho v_p^2\frac{\partial u_z}{\partial z}+\nu\rho v_p^2u_r\right)\right|_{z=0}=0. \tag{22}$$

На границе "вода/упругая среда" ($z = z_1$) имеют место следующие условия склейки:

$$[u_z]_{z_1} = 0, \tag{23}$$

$$\left.\left(\rho v_s^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} + \nu\rho v_s^2 u_z\right)\right|_{z=z_1+0} = 0, \tag{24}$$

$$\left.\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho(v_p^2 - 2v_s^2)u_r\right)\right|_{z=z_1+0} = \left.\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho v_p^2 u_r\right)\right|_{z=z_1-0}. \tag{25}$$

Перепишем дифференциальные уравнения (20)-(21) в эквивалентном виде, "убрав" дельта-функции, с помощью которых описывается источник, в склейку в точке $z = z_*$. Итак, имеем дифференциальные уравнения

$$-\nu\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \rho(p^2 + \nu^2 v_p^2)u_r \quad = \quad 0, \tag{26}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho v_p^2 u_r\right) - \rho p^2 u_z \quad = \quad 0, \tag{27}$$

и условия склейки

$$[u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \tag{28}$$

$$\left[\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho v_p^2 u_r\right]_{z_*} = 0, \tag{29}$$

Нетрудно видеть, что функцию u_r можно выразить через u_z и получить дифференциальное уравнений только для u_z. Вначале предположим, что $\nu \neq 0$. Следствием уравнения (26) и условия склейки (29) является условие склейки

$$\left[\frac{\partial u_z}{\partial z}\right]_{z_*} = 0. \tag{30}$$

Следствием уравнения (26) и краевого условия (22) является краевое условие

$$\left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{31}$$

Из дифференциальных уравнений (26)-(27) следует дифференциальное уравнение для u_z

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - r_p^2\, u_z = 0, \qquad r_p^2 = \nu^2 - p^2/v_p^2. \tag{32}$$

Следствием уравнения (26) и условия склейки (25) является условие склейки

$$\left.\left(\rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu\rho(v_p^2 - 2v_s^2)u_r\right)\right|_{z=z_1+0} = \left.\left(\frac{\rho p^2}{r_p^2}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right|_{z=z_1-0}. \tag{33}$$

Напомним, что все эти соотношения были получены в предположении, что $\nu \neq 0$, однако, все эти соотношения также имеют место, если в (22), (26), (27) и (29) положить $\nu = 0$, т.е. это говорит о том, что предельный переход при $\nu \to 0$ является непрерывным.

Итак, чтобы определить продольные и поперечные смещения u_z и u_r в любой точке полупространства $[0, \infty)$, мы имеем следующие уравнения и условия:

- в воде для нахождения u_z решается дифференциальное уравнение (32), u_r связано с u_z соотношением (26);
- в полупространстве $[z_1, \infty)$ для нахождения u_z и u_r решается матричное дифференциальное уравнение (17);
- краевое условие на поверхности воды (31);
- в точке z_* действуют условия склейки (28) и (30);
- в точках z_k действуют условия склейки (19);
- в точке z_1 имеют место условия склейки (24) и (33);
- на бесконечности выполняется условие предельного поглощения (18).

Список литературы

[1] *Поперечные и обменные волны в сейсморазведке*, Недра, Москва, ред. Н.Н.Пузырев, 1967.

[2] Н.Н.Пузырев, А.В.Тригубов, Л.Ю.Бродов, Г.В.Ведерников, К.А.Лебедев, И.Р.Оболенцева, Т.В.Нефедкина, Л.Н.Худобина, Б.П.Сибиряков, Т.Н.Куличихина, Г.Н.Лебедева, Л.В.Коржева, *Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн*, Недра, Москва, 1985.

[3] *Многоволновые сейсмические исследования*, Наука, Москва, ред. Н.Н.Пузырев, 1987.

[4] Н.Н.Пузырев, *Методы и объекты сейсмических исследований*, СО РАН, НИЦ ОИГГМ, Новосибирск, 1997.

[5] Н.Н.Пузырев, *Некоторые замечания о путях развития сейсмических методов*, Геофизика **6** (1999), 3-5.

[6] Н.Н.Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Возбуждение и регистрация волн*, Геология и Геофизика **44** (2003), 277-285.

[7] Н.Н.Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Интерпретация данных и результаты*, Геология и Геофизика, **44** (2003), 465-473.

[8] А.С. Алексеев, *Некоторые обратные задачи теории распространения волн*, Известия АН, серия Геофизическая (1962), 1514-1531. MR0151312

[9] А.С. Алексеев, *Обратные динамические задачи сейсмики*, В кн.: *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных*, Москва, 1967, 9-84.

[10] А.С. Алексеев, В.И. Добринский, *Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики*, В кн.: *Математические проблемы геофизики*, ВЦ СО АН, Новосибирск, вып. 6, ч. 2, 1975, 7-53.

[11] А.С. Алексеев, В.И. Добринский, Ю.П. Непрочнов, Г.А. Семенов, *К вопросу о практическом использовании теории обратных динамических задач сейсмики*, Доклады АН СССР, **228** (1976), 1053-1056. MR0469173

[12] А.С. Алексеев, А.В. Авдеев, А.Г. Фатьянов, В.А. Чеверда, *Замкнутый цикл математического моделирования волновых процессов в вертикально-неоднородных средах (прямые и обратные задачи)*, Математическое моделирование, **3** (1991), 80-94. MR1157083

[13] А.С. Алексеев, А.В. Авдеев, А.Г. Фатьянов, В.А. Чеверда, *Волновые процессы в вертикально-неоднородных средах: прямые и обратные задачи.* Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН, № 924, 1991. MR1148585

[14] A.L. Karchevsky, *Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem* , Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **10** (2002), 361-384. MR1931382

[15] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media*, Inverse Problems, *20* (2004), 953-976. MR2067510

[16] A.L. Karchevsky, *Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **12** (2004), 519-634. MR2111535

[17] A.L. Karchevsky, *Analysis of solving of the inverse dynamical problem of seismics for horisontally stratified anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **47** (2006), 1150-1164.

[18] В.И. Дмитриев, *Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде*, Вычислительные методы и программирование, **10** (1968), 55-65.

[19] В.И. Дмитриев, Э.А. Федорова, *Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах*, Вычислительные методы и программирование, **32** (1980), 150-183.

[20] Г.В. Аккуратов, В.И. Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **24** (1984), 272-286. MR0738069

[21] А.Г. Фатьянов, Б.Г. Михайленко, *Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах*, Доклады РАН, **301** (1988), 834-839.

[22] А.Г. Фатьянов, *Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии.* Новосибирск: 1989, Препринт ВЦ СО АН, № 857.

[23] А.Г. Фатьянов, *Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах*, Доклады РАН, **310** (1990), 323-327.

[24] A.L. Karchevsky, *A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **46** (2005), 339-351.

[25] А.Л. Карчевский, *Прямая динамическая задача сейсмики для горизонтально-слоистых сред*, Сибирские Электронные Математические Известия, *2* (2005), 23-61.

[26] A.L. Karchevsky, *A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **48** (2007), 689-695.

[27] A.L. Karchevsky, Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **18** (2010), 371-388. MR2729410

[28] A.L. Karchevsky, *The analytical formulas for the gradient of the residual functional for the coefficient inverse problem for the elasticity system*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **11** (2003), 619-629. MR2029525

[29] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Optimization inversion of seismic data from layered media: an algorithm for gradient*, Russian Geology and Geophysics, *46* (2005), 439-447.

[30] А.Л. Карчевский, *Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости*, Доклады РАН, **375** (2000), 235-238.

[31] А.Л. Карчевский, А.Г. Фатьянов, *Численное решение обратной задачи для системы упругости с последействием для вертикально неоднородной среды*, Сибирский журнал вычислительной математики, **4** (2001), 259-269.

[32] А.Л. Карчевский, *Алгоритм восстановления упругих постоянных анизотропного слоя, находящегося в изотропной горизонтально-слоистой среде*, Сибирские Электронные Математические Известия, **4** (2007), 20-51. Zbl 1132.65316

[33] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer*, Applicable Analysis, **87** (2008), 1179-1212. MR2477603

Андрей Леонидович Карчевский
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: karchevs@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.124–С.134 (2011) УДК 517.958, 519.63, 535.3
MSC 45K05, 85A25, 35Q60, 65N21

О ПРОБЛЕМАХ ПОСТРОЕНИЯ И УЛУЧШЕНИЯ КАЧЕСТВА ГИДРОЛОКАЦИОННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ МОРСКОГО ДНА

А.Е. КОВТАНЮК, И.В. ПРОХОРОВ, А.А. СУЩЕНКО,
И.Б. АГАФОНОВ, В.В. ЗОЛОТАРЕВ

Abstract. The work is devoted to problems of constructing and improving the quality of acoustic images obtained by side-scan sonar. In the framework of a phenomenological model based on the equation of radiative transfer is considered problem of cartography of sea-bed. To improve the quality of images using the elements of the theory of interpolation of functions with finite spectrum. Results of computational experiments with real data are provided.

Keywords: transfer equation, acoustic sounding, interpolation of the functions

Из множества факторов, влияющих на качество гидролокационного изображения, наиболее существенными, наряду с траекторными нестабильностями движения подводного носителя гидролокационной антенны, являются рассеивающие свойства морской среды, вызванные, например, флуктуациями плотности и коэффициента сжимаемости [1]. В связи с этим при математическом моделировании рассматриваемого процесса представляется важным исследование класса моделей, учитывающих многократное рассеяние акустических волн в случайно-неоднородной среде [2,3]. Существуют два основных подхода к рассмотрению проблемы многократного рассеяния звуковых волн: статистический и феноменологический. При статистическом рассмотрении исходят из стохастических волновых уравнений с последующим усреднением по ансамблю реализаций флуктуирующих полей. При феноменологическом подходе

Kovtanyuk, A.E., Prokhorov, I.V., Sushchenko, A.A., Agafonov, I.B., Zolotarev, V.V., On the problems of constructing and improving sonar images of the seabed.

Работа выполнена в рамках гранта конкурса интеграционных проектов ДВО и СО РАН (проект № 09-II-CO-01-004).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

предметом исследования является уравнение переноса, выражающее закон сохранения энергии излучения. Мы будем придерживаться феноменологического подхода, основанного на нестационарном интегро-дифференциальном уравнении переноса для плотности распределения звуковых волн с соответствующими граничными и начальными условиями [4-7].

В первом разделе данной работы исследуется задача определения отражающих свойств морского дна по измерениям, полученным с носителя гидролокатора бокового обзора, движущегося с некоторой постоянной скоростью вдоль заданной траектории [6,7]. Получено уравнение для нахождения коэффициента отражения дна и проанализированы его приближения при использовании точечной передающей антенны и при учете однократного рассеяния.

Во второй части работы рассматривается задача восстановления сильнозашумленных гидролокационных изображений. Для этой цели представляются весьма перспективными приложения задачи интерполяции целых функции с финитным спектром [8-9]. Вначале внимание привлекла возможность выделения и регистрации слабых эхосигналов от удалённых объектов в условиях, когда приёмная антенна гидролокатора вынужденно располагается вблизи от источника электромагнитных и акустических помех, каковым является двигательный комплекс подводного робота, управляемый мощными электронными ШИМ-драйверами. При этом попытки повышения соотношения сигнал/шум на этапе вторичной обработки представлялись особенно актуальными тогда, когда электронные методы подавления помех и шумов были уже исчерпаны, а традиционные методы электрической фильтрации оказывались малоэффективными.

Но по мере решения рассматриваемой задачи, стали отчётливо выявляться и другие, возможно даже более значимые приложения. Известно, что гидроакустический канал (практически безальтернативный в подводной связи и локации) является весьма специфичным вследствие нестационарности, рефракционных и иных физических эффектов, что проявляется в виде многолучёвости, интерференции и может приводить не только к сильным искажениям передаваемой информации, но и иногда к её полной потере. В области гидроакустики и подводных технологий предложено немало решений по учёту и минимизации этих факторов. Рассматриваемая здесь задача восстановления сигнала представляется весьма перспективным дополнением к уже существующим решениям.

1. О задаче картографирования морского дна

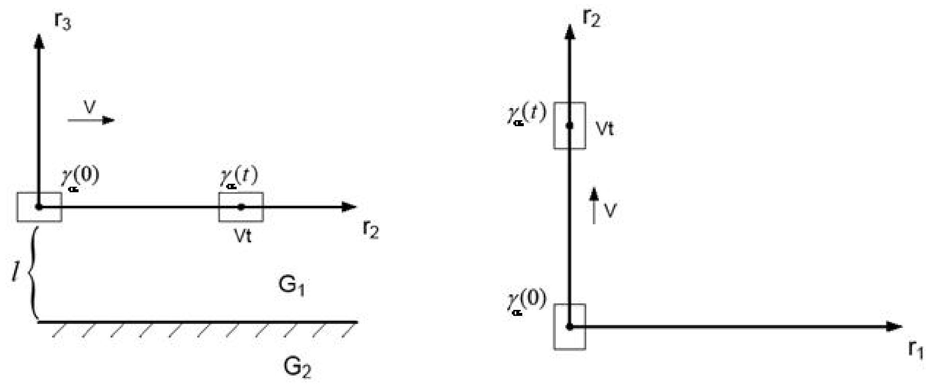
Для простоты будем предполагать, что среда G совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^3$ и состоит всего из двух зон G_1 и G_2 (см. рис. 1а). Область

$$G_2 = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^3 : r_3 < -l\}, \quad l > 0$$

интерпретируется как донная часть океана, а область

$$G_1 = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 : r_3 > -l\} \setminus \gamma_a(t),$$

как водная часть за вычетом некоторой поверхности $\gamma_a(t)$ на которой размещены излучающая и принимающая антенны (см. рис. 1а, 1б). Все точки множества $\gamma_a(t)$ с течением времени перемещаются в пространстве с постоянной



(а) (б)

Рис. 1. Схема движения носителя гидролокатора бокового обзора.

скоростью $\mathbf{V} = (0, V, 0)$, где $V = |\mathbf{V}| = \mathrm{const}$

$$\gamma_a(t) = \{\mathbf{z} + t\mathbf{V}, \mathbf{z} \in \gamma_a(0)\}.$$

Распространение акустических волн в случайно-неоднородной среде может быть описано уравнением переноса излучения [6,7]

$$\left(\frac{1}{v(\mathbf{r})}\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{k}\cdot\nabla_r + \mu(\mathbf{r},\mathbf{k})\right) f(\mathbf{r},\mathbf{k},t) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\mathbf{r},\mathbf{k}',\mathbf{k}) f(\mathbf{r},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}', \tag{1}$$

где, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что волновой вектор $\mathbf{k}$ принадлежит единичной сфере $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $f(\mathbf{r},\mathbf{k},t)$ интерпретируется как плотность энергии волны в момент времени t в точке $\mathbf{r}$ и распространяющейся с волновым вектором $\mathbf{k}$. Коэффициент μ, называемый коэффициентом ослабления, представим в виде:

$$\mu(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \mu_a(\mathbf{r},\mathbf{k}) + \mu_s(\mathbf{r},\mathbf{k}), \quad \mu_s(\mathbf{r},\mathbf{k}) = \int\limits_{\Omega} \sigma(\mathbf{r},\mathbf{k},\mathbf{k}')d\mathbf{k}',$$

где μ_s, μ_a – коэффициенты рассеяния и поглощения, а $\sigma(\mathbf{r},\mathbf{k}',\mathbf{k})$ – сечение рассеяния. Величина σ зависит от флуктуаций плотности среды $\rho(\mathbf{r})$ и ее сжимаемости $\kappa(\mathbf{r})$.

Скорость распространения звуковой волны выражается формулой $v(\mathbf{r}) = v_i = (\rho_i\kappa_i)^{-1/2}$, $\mathbf{r} \in G_i$, где ρ_i, κ_i - плотность и сжимаемость среды в отсутствие флуктуаций.

В момент времени $t = 0$ источники звука в среде отсутствуют и начальное условие имеет вид

$$f(\mathbf{r},\mathbf{k},0) = 0, \quad (\mathbf{r},\mathbf{k}) \in G \times \Omega. \tag{2}$$

Ограничимся лишь случаем, когда отражающие свойства дна на границе раздела $\gamma_d = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3 : z_3 = -l\}$ определяются только диффузным отражением

$$f^-(\mathbf{z},\mathbf{k},t) = \frac{\sigma_d(\mathbf{z})}{4\pi} \int\limits_{\Omega} f^+(\mathbf{z},\mathbf{k}',t)d\mathbf{k}', \quad \mathbf{z} \in \gamma_d, \tag{3}$$

где

$$f^{\pm}(\mathbf{z},\mathbf{k},t)=\lim_{\varepsilon\to+0} f(\mathbf{z}\mp\varepsilon\mathbf{k},\mathbf{k},t),$$

и функция $\sigma_d(\mathbf{z})$ является коэффициентом отражения поверхности γ_d и описывает степень неоднородности дна океана.

На множестве $\gamma_a(t)$ задаются граничные условия:

$$f^{-}(\mathbf{z},\mathbf{k},t)=h(\mathbf{z},\mathbf{k},t),\quad (\mathbf{z},\mathbf{k},t)\in\gamma_a(t)\times\Omega\times[0,T], \tag{4}$$

$$\int\limits_{\Omega} S_a(\mathbf{z},\mathbf{k})f^{+}(\mathbf{z},\mathbf{k},t)d\mathbf{k}=H(\mathbf{z},t),\quad (\mathbf{z},\mathbf{k},t)\in\gamma_a(t)\times\Omega\times[0,T], \tag{5}$$

где $h(\mathbf{z},\mathbf{k},t)$ – плотность энергии передающей антенны, $H(\mathbf{z},t)$ – интенсивность в приемной антенне и функция S_a определяет диаграмму направленности приемных антенн, расположенных по обе стороны поверхности $\gamma_a(t)$. При $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)\in\Omega : k_1>0\}$ функция $S_a(\mathbf{z},\mathbf{k})$ определяет диаграмму направленности «по правому борту», а при $\mathbf{k}\in\{\mathbf{k}=(k_1,k_2,k_3)\in\Omega : k_1<0\}$ — «по левому».

Задача 1. *Определить функцию $\sigma_d(\mathbf{z})$ в некоторой области $\gamma_d'\subset\gamma_d$ из уравнения (1), начального условия (2) и граничных условий (3)-(5), если функции μ,σ известны в области G_1, а функции $H(\mathbf{z},t)$, $h(\mathbf{z},\mathbf{k},t)$ и $S_a(\mathbf{z},\mathbf{k})$ заданы для всех $(\mathbf{z},t)\in\gamma_a(t)\times[0,T]$, $\mathbf{k}\in\Omega$.*

Область γ_d' является подмножеством γ_d, которое может быть озвучено за промежуток времени $[0,T]$ источником расположенным на $\gamma_a(t)$.

Для всех точек на $\gamma_a(t)$ можно получить следующее соотношение [6,7]

$$H(\mathbf{z},t)=\int\limits_{\Omega} S_a(\mathbf{z},\mathbf{k})f^{+}(\mathbf{z},\mathbf{k},t)d\mathbf{k}=H_\gamma(\mathbf{z},t)+H_G(\mathbf{z},t), \tag{6}$$

$$H_\gamma(\mathbf{z},t)=\int\limits_{\gamma_d} S_a\left(\mathbf{z},\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\right)\sigma_d(\mathbf{y})\int\limits_{\Omega} f^{+}\left(\mathbf{y},\mathbf{k}',t-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{z}|}{v}\right)d\mathbf{k}'\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|}\mu(\mathbf{z}-\tau\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|},\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|})d\tau\right)\left|\frac{\mathbf{z}-\mathbf{y}}{|\mathbf{z}-\mathbf{y}|^3}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|d\mathbf{y},$$

$$H_G(\mathbf{z},t)=\int\limits_{G_1} S_a\left(\mathbf{z},\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}\right)\exp\left(-\int\limits_0^{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}\mu\left(\mathbf{z}-\tau'\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|},\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}\right)d\tau'\right)\times$$
$$\times\int\limits_{\Omega}\sigma\left(\mathbf{x},\mathbf{k}',\frac{\mathbf{z}-\mathbf{x}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}\right)f\left(\mathbf{x},\mathbf{k}',t-\frac{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|}{v}\right)\frac{d\mathbf{k}'d\mathbf{x}}{|\mathbf{z}-\mathbf{x}|^2}.$$

Слагаемое H_γ описывает не рассеянную часть принимаемого сигнала и несет в себе информацию о характеристиках дна. Напротив, слагаемое H_G отвечает сигналу, вызванному случайными флуктуациями среды, и в данной задаче является шумом, препятствующим выделению из H полезного сигнала H_γ.

Рассмотрим случай, когда в среде G_1 учитывается только однократное рассеяние и передающая антенна является точечной вида:

$$h(\mathbf{z},\mathbf{k},t)=\frac{\delta(\mathbf{z}-\mathbf{V}t)s_a(\mathbf{z},\mathbf{k})}{|\mathbf{n}(\mathbf{z})\cdot\mathbf{k}|}h_0(t),\quad \mathbf{z}\in\gamma_a(t), \tag{7}$$

где δ – поверхностная дельта-функция и s_a – диаграмма направленности точечной передающей антенны, для полезного сигнала для точек $\mathbf{z}=\mathbf{V}t$ получаем следующее выражение [6,7]

$$\widetilde{H}(\mathbf{z},t)=\widetilde{H}_\gamma(\mathbf{z},t)+\widetilde{H}_G(\mathbf{z},t), \tag{8}$$

Здесь $\widetilde{H}_\gamma$ и $\widetilde{H}_G$ есть отраженная от дна и однократно рассеянная части принимаемого сигнала в точках траектории носителя антенны:

$$\widetilde{H}_\gamma(\mathbf{V}t,t)=\int\limits_{\gamma_d}\int\limits_0^t P(t,t',\mathbf{y})\sigma_d(\mathbf{y})\left|\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{y}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|}\cdot\mathbf{n}(\mathbf{y})\right|dt'd\mathbf{y},$$

$$\widetilde{H}_G(\mathbf{V}t,t)=\int\limits_{G_1}\int\limits_0^t P(t,t',\mathbf{x})\sigma\left(\mathbf{x},\frac{\mathbf{x}-\mathbf{V}t'}{|\mathbf{x}-\mathbf{V}t'|},\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{x}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{x}|}\right)dt'd\mathbf{x},$$

где P при $\mu=\mathrm{const}$ имеет вид

$$P(t,t',\mathbf{y})=S_a\left(\mathbf{V}t,\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{y}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|}\right)\frac{\exp(-\mu(|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|+|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|))}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|^2|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|^2}\times$$
$$\times s_a\left(\mathbf{V}t',\frac{\mathbf{y}-\mathbf{V}t'}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}\right)\times h_0\left(t-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t|}{v}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}{v}\right). \tag{9}$$

Если $\mu\neq\mathrm{const}$, то функция P имеет более сложное строение

$$P(t,t',\mathbf{y})=S_a\left(\mathbf{V}t,\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{y}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|}\right)\frac{1}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|^2|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|^2}\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|}\mu\left(\mathbf{V}t-\tau\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{y}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|},\frac{\mathbf{V}t-\mathbf{y}}{|\mathbf{V}t-\mathbf{y}|}\right)d\tau\right)\times$$
$$\times\exp\left(-\int\limits_0^{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}\mu\left(\mathbf{y}-\tau\frac{\mathbf{y}-\mathbf{V}t'}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|},\frac{\mathbf{y}-\mathbf{V}t'}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}\right)d\tau\right)\times$$
$$\times s_a\left(\mathbf{V}t',\frac{\mathbf{y}-\mathbf{V}t'}{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}\right)\times h_0\left(t-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t|}{v}-\frac{|\mathbf{y}-\mathbf{V}t'|}{v}\right). \tag{10}$$

Соотношение (8) при заданных функциях μ, σ и $\widetilde{H}$ является уравнением, из которого определяется функция σ_d, характеризующая отражающие свойства дна. Представление функции σ_d в графическом виде, например, как полутоновое изображение, где большому значению функции σ_d соответствует более светлый оттенок, можно интерпретировать как гидролокационное изображение морского дна.

Отметим тот факт, что при заданных величинах μ и σ функция $\widetilde{H}_G$ находится по формуле (10), поэтому однократно рассеянная часть измеряемого сигнала может быть вычислена и отфильтрована вычитанием ее из $\widetilde{H}$.

В отличие от уравнения (6), учитывающего многократное рассеяние в среде, уравнение (8) линейное относительно неизвестной функции σ_d, что в значительной мере облегчает исследование задачи.

2. Интерполяционные методы в задаче улучшения качества гидроакустических изображений

Важную роль при моделировании процессов распространения сигналов играют целые аналитические функции экспоненциального типа — функции из класса Винера, являющиеся преобразованиями Фурье от функций с компактными носителями. Такие функции часто называют функциями с ограниченным (или финитным) спектром, то есть спектром, сосредоточенным в ограниченном диапазоне частот. В реальной ситуации сигналы могут быть известны (измерены) лишь на некотором дискретном временном множестве, а требуется определить величину сигнала, вообще говоря, в любой момент времени. Таким образом, возникает задача восстановления сигнала, которая будет трактоваться нами как задача интерполяции целых функций.

Перейдем к описанию математического аппарата, необходимого для формулировки и решения задачи интерполяции.

Пусть $L_2(R)$ обозначает гильбертово пространство комплекснозначных функций со скалярным произведением и нормой. Обозначим через $F : L_2(R) \to L_2(R)$ оператор преобразования Фурье, действующий по формуле

$$(Ff)(\omega) = \widetilde{f}(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx.$$

При этом обратный оператор F^{-1} определяется формулой

$$(F^{-1}\widetilde{f})(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{f}(\omega)e^{2\pi i\omega x}d\omega.$$

В дальнейшем любую функцию $f \in L_2(R)$ будем называть сигналом, а ее преобразование Фурье $\widetilde{f}$ - спектром сигнала f. Под классом Винера будем понимать линейное многообразие в $L_2(R)$, состоящее из всех функций (сигналов) f, спектр которых сосредоточен на интервале $(-\alpha, \alpha)$, то есть $\widetilde{f}(\omega) = 0$, почти всюду на $R\backslash(-\alpha, \alpha)$.

Рассмотрим $M = x_k, k \in Z$ - произвольное неограниченное множество в R, не имеющее конечных предельных точек. Будем полагать, что элементы множества M являются упорядоченными (то есть $x_k < x_{k+1}$, $k \in Z$). Рассмотрим задачу интерполяции в классе W_α, заключающуюся в восстановлении функции $f(x)$ на множестве $C\backslash M$ по заданным ее значениям на множестве M . Решению указанной задачи интерполяции посвящено множество работ. В случае, когда M является равномерной сеткой, задачу интерполяции решает хорошо известная формула Котельникова [10]. Однако, во многих приложениях, связанных с потерей или зашумлением данных, возникает задача интерполяции сигнала с финитным спектром по его значениям на неравномерных сетках. В этих случаях применяются интерполяционные формулы для неравномерных сеток [11,12]. Например, для случая сетки, полученной из равномерной удалением

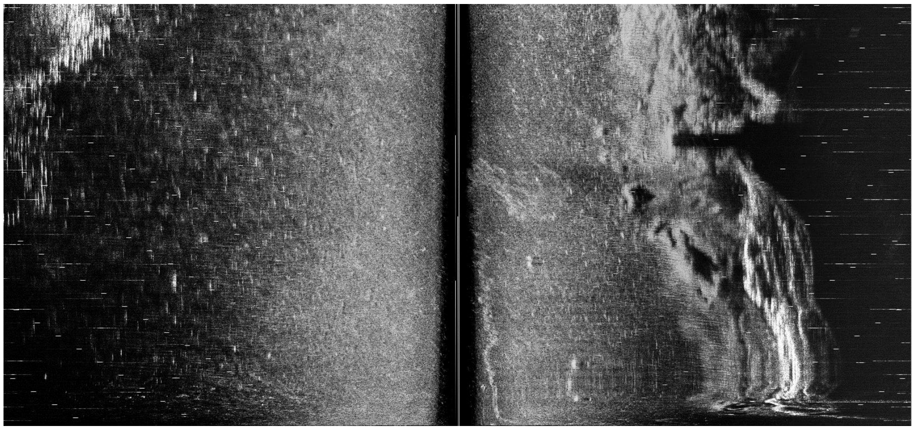


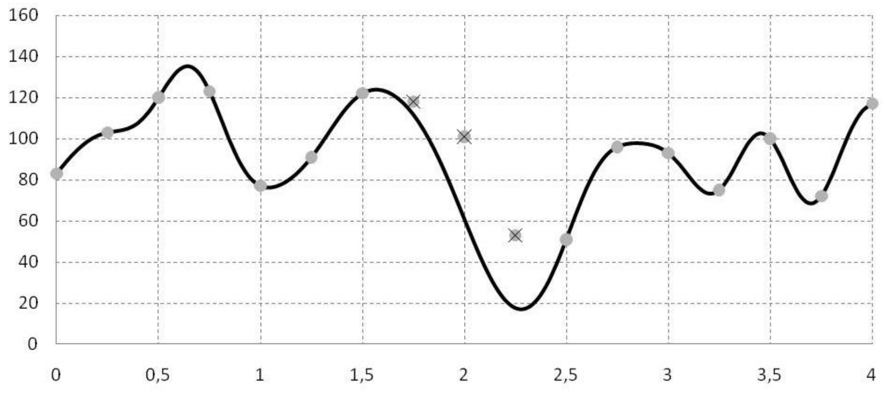
Рис. 2. Пример эхолокационного изображения, полученного с помощью гидролокатора бокового обзора.

конечного числа узлов, можно воспользоваться формулой Айзенберга [12]

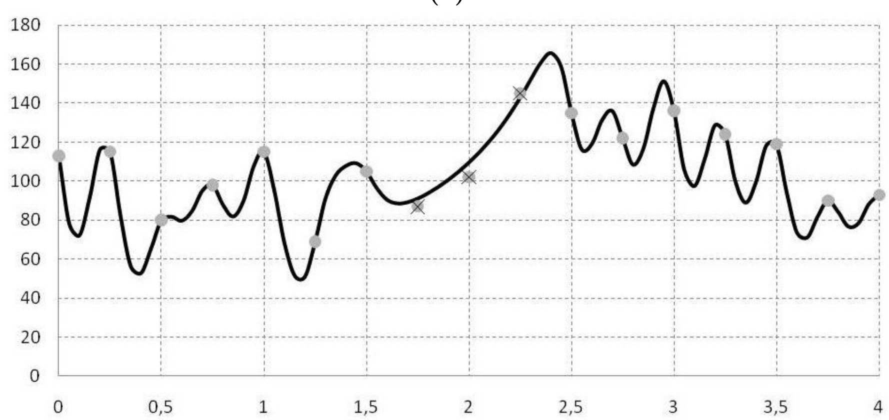
$$f(x) = \lim_{\sigma\to\infty} \lim_{m\to\infty} f(x_k) e^{2\pi i\alpha(z-x_k)} \frac{2i\sigma}{z - x_k + 2i\sigma} \prod_{j=-m, j\neq k}^{m} \frac{(z-x_j)(x_k - x_j + 2i\sigma)}{(x_k - x_j)(z - x_j + 2i\sigma)}. \tag{11}$$

Для проведения вычислительных экспериментов брались выборочные фрагменты "скан-строк"эхолокационного изображения, представленного на рис. 2, полученного с помощью гидролокатора бокового обзора (ГБО) автономного подводного робота. "Скан-строки"по сути являются последовательностью выборок физической огибающей эхосигнала. Вынужденное соседство высокочувствительных приёмных антенн ГБО с силовыми узлами подводного робота нередко приводит к зашумлению, а в ряде случаев и к потере эхосигналов. Фильтрация, выполняемая в процессе первичной обработки, далеко не всегда обеспечивает желаемый результат, поэтому задача восстановления потерянных данных представляется актуальной и на стадии вторичной обработки.

Восстановление данных проводилось по формуле (11). При проведении вычислительных экспериментов предварительно проводилась подборка параметров σ, α, обеспечивающих минимальное среднеквадратичное отклонение восстановленного сигнала от известных экспериментальных данных. На рис. 3(а,б) приводятся графики сигнала и его восстановления по значениям в 14-ти узлах сетки, полученной из равномерной $\{0;\ 0.25;\ 0.5;\ ....\ 3.75;\ 4\}$ удалением 3-х узлов $\{1.75;\ 2;\ 2.25\}$. Точками обозначены экспериментальные данные, полученные в ходе работы прибора, сплошной линией - восстановленный при помощи формулы Айзенберга сигнал. Перечеркнутые точки в центральной части графика - это измеренные данные, которые мы не учитываем при восстановлении сигнала. Тем самым, мы моделируем ситуацию "зашумления"или потери экспериментальных данных. Интерес представляет, насколько график восстановленного сигнала будет близок к "утерянным"значения. Как видно из графиков, формула (11) позволяет описать качественное поведения сигнала на промежутке зашумления/потери данных. В некоторых случаях (см., например, рис. 3(б)), удается восстановить значение сигнала с хорошей точностью.



(а)

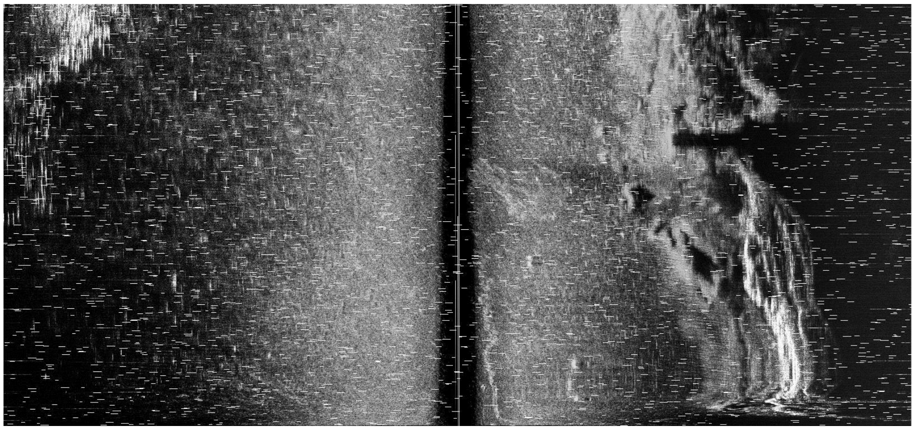


(б)

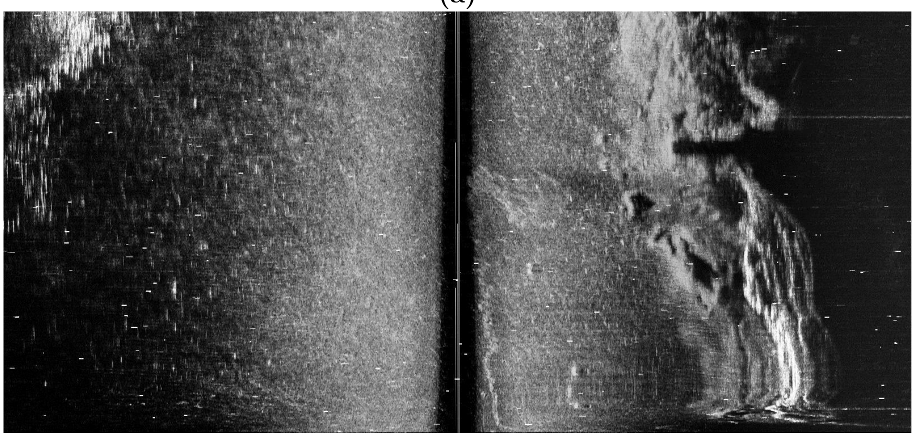
Рис. 3. Экспериментальные значения сигнала (точечный график) и восстановленный сигнал (сплошная линия)

Интерполяционная формула (11) может быть применена в задаче улучшения качества гидроакустических изображений. Для проведения второй серии экспериментов были взяты данные, соответствующие изображению, представленному на рис. 2. Далее, был введен дополнительный случайный шум. Изображение морского дна, соответствующее новым "зашумленным"данным представлено на рис. 4(а). Улучшение качества изображения было реализовано двумя способами: с помощью медианного метода пакета MATLAB (рис. 4(б)), и путем последовательного применения интерполяционной формулы (11) для восстановления "зашумленных"данных и метода наименьших квадратов для сглаживания значений сигнала (рис. 4(в)).

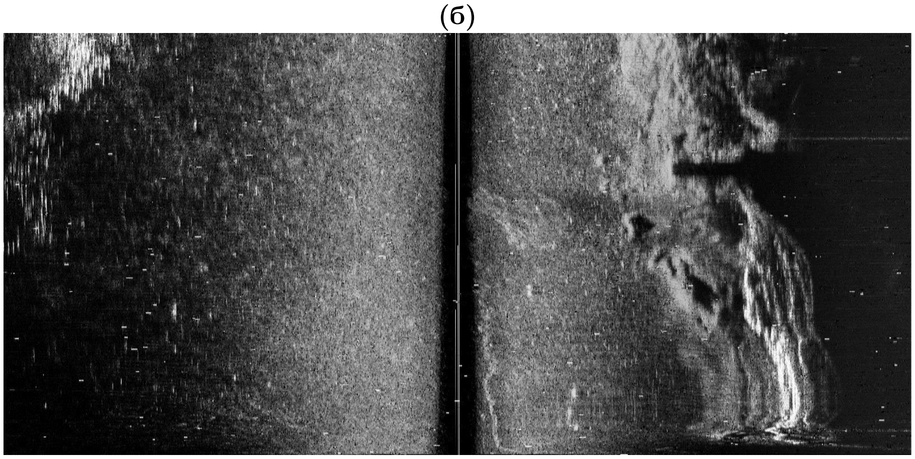
Таким образом, использование интерполяционных методов восстановления сигналов в комбинации с методами улучшения изображений представляется вполне перспективным направлением в задачах картографирования морского дна и улучшения качества гидроакустических изображений.



(а)



(б)



(в)

Рис. 4. **(а)** – эхолокационного изображение, полученное гидролокатором бокового обзора, с дополнительным шумом; **(б)** – результат обработки эхолокационного изображения с помощью медианного метода пакета MATLAB; **(в)** – результат обработки эхолокационного изображения с помощью интерполяционной формулы (11) и метода наименьших квадратов.

Список литературы

[1] Ю.В. Матвиенко, В.А. Воронин, С.П. Тарасов, А.В. Скнаря, Е.В. Тутынин, "Пути совершенствования гидроакустических технологий обследования морского дна с использованием автономных необитаемых подводных аппаратов", *Подводные исследования и робототехника*, **2 №8** (2008), 4-15..

[2] А. Исимару, *Распространение и рассеяние волн в случайно - неоднородных средах.* Т. 1,2, Мир, М., 1981

[3] И.О. Ярощук, О.Э. Гулин, *Метод статистического моделирования в задачах гидроакустики*, Дальнаука, Владивосток, 2002, 352 с.

[4] G. Bal, J.B. Keller, G. Papanicolaou, and L. Ryzhik, "Transport theory for acoustic waves with reflection and transmission at interfaces", *Wave Motion*, **30** (1999), 303–327 MR1711949

[5] G. Bal, "Kinetics of scalar wave fields in random media", *Wave Motion*, **43** (2005), 132-157 MR2186924

[6] И.В. Прохоров, В.В. Золотарев, И.Б. Агафонов, "Задача акустического зондирования во флуктуирующем океане", *Дальневосточный математический журнал*, **11 №1** (2011), 76-87

[7] И.В. Прохоров, В.В. Золотарев, И.Б. Агафонов, "О задаче картографии морского дна", Материалы 7-го Всероссийского симпозиума «Физика геосфер» (5-9 сентября 2011 Владивосток), 375-379

[8] А.Е. Ковтанюк, Н.С. Суровенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев, "Восстановление сигналов по неравномерным выборкам", 3-я Всероссийская научно-техническая конференция «Технические проблемы освоения Мирового океана» (22 -25 сентября 2009 Владивосток.), 356-360

[9] А.Е. Ковтанюк, А.А. Сущенко, И.Б. Агафонов, В.В. Золотарев, "Восстановление акустических сигналов по зашумленным выборкам", Материалы 7-го Всероссийского симпозиума «Физика геосфер» (5-9 сентября 2011 Владивосток), 143-147

[10] В.А. Котельников, "О пропускной способности "эфира"и проволоки в электросвязи", Материалы по радиосвязи к 1-му Всесоюзному съезду по вопросам технической реконструкции связи. Всесоюзный энергетический комитет (Изд-во Управления связи РККА), 1933

[11] Г.В. Алексеев, *Обратные задачи излучения волн и теории сигналов*, Изд-во ДВГУ, Владивосток, 1991

[12] Л.А. Айзенберг, *Формулы Карлемана в комплексном анализе*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, 1990

Ковтанюк Андрей Егорович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: ankov@imcs.dvgu.ru

Прохоров Игорь Васильевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: prh@iam.dvo.ru

Сущенко Андрей Андреевич
Дальневосточный федеральный университет,
ул. Суханова, 8,
690950, Владивосток, Россия

Агафонов Илья Борисович
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток, Россия
E-mail address: iks@imtp.dvo.ru

Золотарев Владимир Витальевич
Институт проблем морских технологий ДВО РАН,
ул. Суханова, 5а,
690950, Владивосток, Россия
E-mail address: lab32imtp@marine.febras.ru

S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.135–144 (2011) УДК 519.65
MSC 35Q20, 78A40

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА НЕОДНОРОДНОГО ТЕЛА

В.Г. НАЗАРОВ

Abstract. Under consideration is the problem of identification the chemical composition of an inhomogeneous body consisting of several homogeneous parts by the method of multi-energy radiography. The internal structure of the body is assumed to be known. At the first stage of the solution, screening of the body is carried out by the collimated beam of X-rays along some specially chosen collection of straight lines at a given set of energies; and, by solving a system of linear algebraic equations, the values of the attenuation coefficients are obtained in each homogeneous part of the body. Then, under some additional assumptions, the possible chemical composition of these parts is found. The proposed method can be used in nondestructive control, customs control, and medicine.

Keywords: radiation transport equation, X-ray tomography, numerical method, determining of the chemical composition of a medium.

Введение

Радиографические методы определения химического состава вещества являются удобным средством исследования в тех случаях, когда требуется выполнить неразрушающий контроль изделия или, когда непосредственный доступ к телу оказывается затруднительным или нежелательным. В этой связи можно отметить работы [1], [2] и патенты [3], [4]. Предлагаемый далее подход к решению задачи, отличается от подхода других исследователей.

Nazarov, V.G., Identification the Chemical Composition of an Inhomogeneous Body.

Работа выполнена в рамках гранта конкурса интеграционных проектов ДВО и СО РАН (проект № 09-II-CO-01-004).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

Предварительные замечания и постановка задачи

Введем следующие обозначения. Пусть неоднородная среда занимает ограниченную область G в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с ортонормированным базисом e_1, e_2, e_3. Для упрощения изложения будем считать, что G выпукла; далее будет видно, что это предположение несущественно. Область G состоит из $q \geq 2$ попарно непересекающихся подобластей $G_1, ..., G_q$, заполненных различными веществами $A_1, ..., A_q$ и подвергается рентгеновскому облучению. Будем считать, что

$$\overline{G} = \bigcup_{i=1}^{q} \overline{G}_i, \; G_0 = \bigcup_{i=1}^{q} G_i, \text{ и } G_i \bigcap G_j = \emptyset, \quad \text{при}\, i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, q.$$

Пусть $r = (r_1, r_2, r_3) \in G -$ точка в $\mathbb{R}^3$, $\omega-$ направление движения фотона, $\omega \in \Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, $E-$ энергия фотона.

Для произвольной точки $r \in G_0$ обозначим через $d(r, \omega)$ расстояние от r до границы ∂G области G в направлении ω и пусть $\xi = r - d(r, -\omega)\omega$, $\eta = r + d(r, \omega)\omega$. Тогда, пара (r, ω) определяет некоторую прямую $\widehat{l}$, которая проходит через точку r в направлении ω и пересекает границу ∂G области G в точках ξ и η.

Ясно, что прямая $\widehat{l}$ имеет непустое пересечение с некоторыми из подобластей $G_1, ..., G_q$. Через $h(\xi, \omega, E)$ обозначим плотность излучения, входящего в G в точке $\xi \in \partial G$ в направлении ω для энергии E, а через $H(\eta, \omega, E)-$ плотность выходящего из G излучения в точке $\eta \in \partial G$.

Построим вышеописанным способом q различных прямых $\widehat{l_1}, ..., \widehat{l_q}$, и для каждой $\widehat{l_i}$ обозначим через ξ_i, η_i, ω_i соответствующие точки и направления, а через $h(\xi_i, \omega_i, E)$ и $H(\eta_i, \omega_i, E)-$ плотности входящего и выходящего из G излучения. В дальнейшем все величины $h(\xi_i, \omega_i, E)$ и $H(\eta_i, \omega_i, E)$, $i = 1, ..., q$ будут считаться известными.

Будем считать, что в G нет внутренних источников излучения и что функция h имеет коллимированный характер по (ξ, ω, E), так, что $h(\xi', \omega', E')$ отлично от нуля лишь для (ξ', ω', E') мало отличающихся от (ξ, ω, E). В этом случае уравнение переноса излучения [5] вдоль заданной прямой можно записать в виде

$$\omega \cdot \nabla_r f(r, \omega, E) + \mu(r, E) f(r, \omega, E) = 0. \tag{1}$$

Здесь $f(r, \omega, E)-$ плотность потока излучения в точке $r \in G$, в направлении $\omega \in \Omega$ для энергии E, $\mu(r, E)$ – коэффициент ослабления излучения в точке r для энергии E. В записи $\omega \cdot \nabla_r$ точка означает скалярное произведение векторов из $\mathbb{R}^3$.

Будем также предполагать, что внутренняя структура тела известна. При необходимости, границы неоднородностей в теле можно определить с помощью известных томографических методов, например, с помощью индикатора неоднородностей, подробное описание которого можно найти в работах [5], [6].

Остановимся на том, что будет пониматься под определением химического состава. В достаточно общем случае можно было бы считать, что химический состав определен, если в результате решения задачи для каждой подобласти G_i указан перечень всех химических элементов $X_{i1}, ..., X_{ip}$, содержащихся в G_i, массовые доли этих элементов $w_{i1},...,w_{ip}$ и плотность материала ρ_i в G_i. В такой постановке задача была успешно решена автором в работе [7] путем просвечивания тела G в окрестности всех значений энергии $E_{i1},...,E_{ip}$, при которых коэффициенты ослабления $\mu(r,E)$ для всех возможных химических элементов $X_{i1},...,X_{ip}$ имеют скачки. Однако, практическая реализация такого алгоритма возможна лишь для тела, размер которого не превышает нескольких микрон. Это обстоятельство вызвано тем фактом, что для всех химических элементов скачки у коэффициента $\mu(E)$ имеют место лишь при сравнительно небольших энергиях E, когда значения $\mu(E)$ велики. Например, для урана (атомный номер Z=92) последний скачек имеет место при E=116 Кэв, где $\mu(E)$=92.72 см$^{-1}$ [8]. По этой причине при радиографическом исследовании тел достаточно больших размеров (сантиметры, десятки сантиметров) приходится использовать излучение с энергией порядка 100 – 1000 кэВ и выше.

Характерные зависимости коэффициента $\mu(E)$ для химических элементов и веществ сложного состава можно найти, например, в [8].

Пусть $E_1 < E_2 < ... < E_N-$ заданный конечный набор значений энергий, $M-$ конечное множество некоторых заданных веществ $M_1,...,M_m$, среди которых могут присутствовать как химические элементы, так и вещества сложного химического состава. Будем считать, что все вещества $A_1,...,A_q$, из $G_1,...,G_q$ соответственно, присутствуют в M, так что $q \leq m$. Для удобства дальнейшего изложения будем считать, что $A_1,...,A_q$ есть вещества $M_1,...,M_q$ соответственно. Для каждого вещества $M_i \in M$ считаем, что нам известны значения его коэффициента ослабления $\mu(M_i,E_k)$ для всех значений энергий $E_k,\ k=1,...,N$.

Сформулируем окончательно рассматриваемую задачу.

Задача. Пусть для заданного набора прямых $\widehat{l_1},...,\widehat{l_q}$, множества M и набора энергий $E_1 < E_2 < ... < E_N$ известны все величины

$$h(\xi_i,\omega_i,E_k) \quad \text{и} \quad H(\eta_i,\omega_i,E_k), \quad i=1,...,q; \quad k=1,...,N. \tag{2}$$

Необходимо из уравнения (1) и данных (2) указать для каждой подобласти G_j находящееся в ней вещество $A_j \in M$.

Подобная постановка задачи представляется оправданной, например, в таможенном деле, когда при досмотре необходимо убедиться в отсутствии среди багажа предметов и материалов, запрещенных к провозу (взрывчатые и отравляющие вещества, наркотики, огнеопасные жидкости и т.п.). Перечень таких веществ заранее известен, сравнительно невелик и может быть полностью внесен во множество M.

Определение химического состава

На первом этапе решения задачи об определении химического состава находятся значения коэффициентов ослабления в каждой из подобластей G_j.

Далее для краткости через l_{ij} обозначим (линейную) меру множества, получающегося при пересечении прямой $\widehat{l_i}$ с подобластью G_j, так что $l_{ij} = mes(\widehat{l_i} \cap G_j);\ \ i,j=1,2,...,q$. Пусть $\mu_{ik} = \mu(r,E_k)$ при $r \in G_i$, $h_{ik} = h(\xi_i,\omega_i,E_k)$, $H_{ik} = H(\eta_i,\omega_i,E_k)$, $i=1,...,q;\ \ k=1,...,N$.

При вышесделанном предположении о коллимированности потока входящего в G излучения $h_{ik} = h(\xi_i,\omega_i,E_k)$, из уравнения (1) для каждой прямой $\widehat{l_i}$ и каждого значения энергии E_k получим равенство

$$H_{ik} = h_{ik} \exp\left(-\sum_{j=1}^{q} l_{ij}\mu_{jk}\right), \tag{3}$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{q} l_{ij}\mu_{jk} = \ln(h_{ik}/H_{ik}); \quad i = 1, ..., q. \tag{4}$$

Для каждого фиксированного $k = 1, ..., N$ семейство равенств (4) будем рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно переменных μ_{jk}. Величины l_{ij}, h_{ik}, H_{ik} согласно ранее сделанным предположениям считаются известными. Если $q \times q$ – матрица $L = ||l_{ij}||$ не вырождена, то система уравнений (4) разрешима относительно переменных μ_{jk}, ее решение единственно и имеет вид

$$\mu_{jk} = \sum_{i=1}^{q} (L^{-1})_{ji} \ln(h_{ik}/H_{ik}); \quad j = 1, ..., q. \tag{5}$$

Далее предполагалось, что прямые $\widehat{l_1}, ..., \widehat{l_q}$ каким-либо образом выбраны так, что матрица L не вырождена.

Пусть теперь $N = 1$, и в результате решения системы (4) нами были найдены коэффициенты ослабления μ_{j1} в каждой из подобластей G_j для энергии E_1. Сравнивая эти величины с коэффициентами ослабления для веществ из множества M мы можем указать по крайней мере один набор веществ $A'_1, ..., A'_q \in M$, соответствующих подобластям $G_1, ..., G_q$.

На практике, при выполнении измерений и вычислений мы всегда сталкиваемся с ошибками. Покажем, каким образом можно обойти эту трудность с помощью многократного просвечивания тела на различных значениях энергии излучения (т.е. при $N > 1$).

Ошибка определения коэффициента $\mu_j(E_k)$ возникает в результате наложения ошибок в определении всех величин, входящих в правую часть равенств (5) (это ошибки измерений), вычислительных ошибок и ошибок выбранной математической модели. Для упрощения изложения основной идеи оставим в стороне вопрос учета каждой из этих ошибок и будем предполагать, что в конечном итоге относительная ошибка определения каждой величины $\mu_{jk}, j = 1, ..., q, \quad k = 1, ..., N$ не превосходит некоторого заданного числа $\delta, 0 < \delta < 1$. Сформулируем конкретнее это предположение.

Пусть $\mu'_{jk} = \mu(M_j, E_k)$ – истинные значения коэффициента ослабления в подобласти G_j для энергии E_k, $\mu_{jk} = \mu_j(E_k)$– значения с ошибками, найденные после всех необходимых измерений и расчетов по формуле (5) и пусть $|\mu'_{jk} - \mu_{jk}|/\mu_{jk} \le \delta, j = 1, ..., q, \quad k = 1, ..., N$. Пусть

$$S_{jk}(\delta) = \{M_i \in M : |\mu(M_i, E_k) - \mu_{jk}|/\mu_{jk} \le \delta\}, \tag{6}$$

т.е. множество $S_{jk}(\delta)$ содержит те и только те вещества из M, для которых соответствующая относительная разница в коэффициентах ослабления на энергии E_k не превосходит δ (напомним, что $\mu(M_i, E_k)$ есть истинное значение коэффициента ослабления вещества M_i на энергии E_k). Из (6) видно, что, в силу сделанных предположений, вещество M_j (истинное значение коэффициента ослабления которого μ'_{jk}, а полученное в результате расчетов – μ_{jk}), которое находится в подобласти G_j обязательно принадлежит множеству $S_{jk}(\delta)$ для любого $k = 1, ..., N$. Проведем просвечивание тела G на всех энергиях $E_k, k = 1, ..., N$, найдем μ_{jk}, затем определим все $S_{jk}(\delta)$. Ясно, что

$$M_j \in S'_j(\delta) = \bigcap_{k=1}^{N} S_{jk}(\delta),\ j = 1, ..., q. \tag{7}$$

Если все множества $S'_j(\delta)$ одноточечные, то задача определения химического состава тела G решена однозначно. В противном случае мы получим несколько возможных решений, допустимых для заданной относительной ошибки δ нахождения коэффициентов ослабления $\mu_{jk}, k = 1, ..., N$.

Некоторые численные эксперименты и примеры

Для выяснения того, насколько удовлетворительно может быть решена задача в реальной ситуации было выполнено две серии численных экспериментов. В качестве M было взято множество из 400 веществ, содержащее все химические элементы от водорода до фермия (Z=100) включительно и вещества сложного химического состава, в том числе ткани человеческого тела, материалы представляющие интерес для дозиметрии, окислы и соли металлов и др. В частности, в M вошли все вещества, представленные на информационном ресурсе [9]. Для всех веществ $M_i \in M$ были вычислены их коэффициенты ослабления $\mu(M_i, E_k)$ на некотором наборе значений энергии $E_1 < E_2 < ... < E_N$ из промежутка 1 кэВ–20 Мэв, который входил в "базовую" сетку значений энергии, использованных при составлении таблиц [8]. Вычисления проводились по схеме изложенной в [8] с использованием формулы

$$\mu(M_i, E) = \rho_i \sum_{k=1}^{r} w_{ik} \frac{\mu_{xik}(E)}{\rho_{xik}},$$

где ρ_i– плотность вещества M_i, $\mu_{xi1}(E), ..., \mu_{xir}(E)$– коэффициенты ослабления химических элементов $X_{i1}, ..., X_{ir}$, входящих в состав вещества M_i, $\rho_{xi1}, ..., \rho_{xir}$– плотности, $w_{i1}, ..., w_{ir}$– массовые доли элементов $X_{i1}, ..., X_{ir}$.

Первая серия проведенных численных экспериментов носила вспомогательный характер и служила для получения предварительной информации о том, насколько сильно различаются между собой коэффициенты ослабления $\mu(M_i, E_k)$, $\mu(M_n, E_k)$ различных веществ $M_i, M_n \in M$ и как меняется их относительная разница $|\mu(M_i, E_k) - \mu(M_n, E_k)|/\mu(M_n, E_k)$ при изменении энергии E_k. Такая информация дает общее представление о том, какой должна быть максимально допустимая относительная ошибка δ в определении коэффициентов μ_{jk} и какой именно набор значений энергии $E_1, ..., E_N$ желательно выбрать при просвечивании тела для того, чтобы задача определения химического состава имела единственное решение. Сформулируем конкретнее эту мысль.

Выберем положительное число ε, какое-нибудь вещество $M_n \in M$ и для них найдем множества

$$T_{nk}(\varepsilon) = \{M_i \in M : |\mu(M_i, E_k) - \mu(M_n, E_k)|/\mu(M_n, E_k) \le \varepsilon\},\ k = 1, ..., N \tag{8}$$

аналогично тому как это делалось для множеств $S_{jk}(\delta)$ в равенстве (6), а затем построим множество

$$T'_n(\varepsilon) = \bigcap_{k=1}^{N} T_{jk}(\varepsilon), \tag{9}$$

аналогичное множеству $S'_j(\delta)$ из равенства (7). Был выполнен ряд расчетов, который показал, что для фиксированного вещества M_n множество $T_{nk}(\varepsilon)$ (которое можно было бы назвать "замкнутой $\varepsilon-$ окрестностью вещества M_n"), как правило, заметно изменяется при изменении энергии E_k. При этом, варьируя набором энергий $E_1 < E_2 < ... < E_N$ можно было добиться того, чтобы множество $T'_n(\varepsilon)$ стало одноточечным даже при сравнительно больших значениях ε.

Приведем пример таких расчетов. В качестве вещества M_n была взята медь, $N = 4$, E_1=200 кэВ, E_2=300 кэВ, E_3=600 кэВ, E_4=1000 кэВ; ε=0.05. Для множества M и этих данных были построены множества $T_{nk}(\varepsilon)$, которые представлены ниже в таблице 1 в упорядоченном виде. При этом, в каждой из колонок для соответствующей энергии E_k указаны коэффициент ослабления $\mu(M_i, E_k)$, см$^{-1}$ вещества M_i и его химическая формула, когда это возможно. В некоторых случаях одно и то же вещество может присутствовать в таблице в виде нескольких своих модификаций. В этом случае после химической формулы для модификации ставится звездочка (например: MoN и MoN *).

Таблица 1. Перечень веществ, входящих в множества $T_{nk}(\varepsilon)$ для меди при ε =0.05 и значения их коэффициентов ослабления, см$^{-1}$ для ряда значений энергии E.

E=60 кэВ	E_1=200 кэВ	E_2=300 кэВ	E_3=600 кэВ	E_4=1000 кэВ
				0.5503 Ho
		1.048 $CaGd_2S_4$	0.7078 хрусталь	0.5483 Ni
		1.047 Te	0.7071 Ni	0.5463 Er_2O_3
		1.047 SnO_2	0.6975 Cd	0.5454 $PbSe$
		1.045 NbC	0.6930 $CuTlSe_2$	0.5431 MoN
	1.455 Zr	1.039 SnO_2	0.6915 Ra	0.5419 $MoN*$
	1.421 $CaLa_2S_4$	1.037 CeC_2	0.6898 Yb	0.5386 Mo_2C
	1.420 ZrC	1.035 NbC	0.6876 Sm	0.5349 $PbTe$
	1.416 Ba	1.027 Ni	0.6859 CeN	0.5330 PbS
	1.408 Ni	1.009 $CdTl$	0.6833 Mo_2C*	0.5304 Dy
14.27 Cu	1.396 Cu	1.002 Cu	0.6832 Cu	0.5287 Cu
14.08 эмульсия	1.353 BaB_6	0.9900 $AgAlTe_2$	0.6809 Gd_2SO_2	0.5256 Co
13.87 бетон		0.9822 $SrSm_2S_4$	0.6767 Co	0.5110 ThB_6
13.58 $CoAs_3$		0.9736 Co	0.6734 Nb	0.5099 Mo_2C*
		0.9552 $CaSm_2S_4$	0.6697 Pm	0.5098 Tb
			0.6678 NbN	0.5086 Dy_2O_3
			0.6572 CdO	0.5039 Cd
				0.5027 Nb
				0.5023 NbN

Часть позиций в таблице не заполнена, поскольку в нее включались лишь вещества из множеств $T_{nk}(\varepsilon)$. Из таблицы видно, что содержимое множеств $T_{nk}(\varepsilon)$ заметно меняется при изменении энергии E_k и в данном случае множество $T'_n(\varepsilon)$ содержит два вещества – медь и никель. Избавиться от никеля в пересечении $T'_n(\varepsilon)$ можно двумя способами. Первый – это уменьшить ε, положив ε=0.037, при этом множества $T_{nk}(\varepsilon)$ уменьшатся и никель исчезнет из множества $T_{n4}(\varepsilon)$ для E_4=1000 кэВ. Второй способ – для прежнего ε=0.05 рассмотреть дополнительно энергию E=60 кэВ, для которой $T_{nk}(\varepsilon)$ не содержит никеля, при этом пересечение $T'_n(\varepsilon)$ будет содержать только медь Заметим, однако, что на этой энергии коэффициент ослабления меди увеличится до 14.27 см$^{-1}$. Отметим, что при построении множеств $T_{nk}(\varepsilon)$ и $T'_n(\varepsilon)$ нам не требуется проводить просвечивание тела.

Процедура построения множества $S'_j(\delta)$ несколько отличается от только что описанной процедуры построения множества $T'_n(\varepsilon)$, поскольку, при построении $S'_j(\delta)$ на каждой энергии E_k "привязка" происходит не к истинному значению $\mu(M_j, E_k)$ коэффициента ослабления вещества M_j в подобласти G_j, а к значению μ_{jk}, найденному с некоторой ошибкой. Однако, нетрудно видеть, что предложенный способ уменьшения множества $S'_j(\delta)$ за счет привлечения к рассмотрению дополнительных значений энергий, на которых производится просвечивания тела, или за счет уменьшения δ будет работать и здесь. Важно только, чтобы относительная ошибка в определении коэффициента ослабления $|\mu'_{jk} - \mu_{jk}|/\mu_{jk}$ всегда не превышала величины $\delta, j = 1, ..., q,\ k = 1, ..., N$. Если при этом множество $S'_j(\delta)$ удастся сделать одноточечным, то поставленная задача будет решена однозначно. Остановимся подробнее на этом существенном вопросе.

Пусть $a, \varepsilon, \delta-$ положительные числа, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta < 1$, $S_a(\delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a|/a \leq \delta\}$ (обозначения ε, δ, S будут служить тем же целям, что и раньше). В работе [11] было доказано следующее

Утверждение 1. Пусть $\delta = \varepsilon/(2+\varepsilon)$, тогда:

а) если $M_a = \{x \in \mathbb{R} : x > 0$ и $a \in S_x(\delta)\}$, то M_a замкнуто, $\sup M_a = a(1+\varepsilon/2)$ и $\inf M_a = a(1-\varepsilon/(2+2\varepsilon))$,

б) $\forall x > 0$ такого, что $a \in S_x(\delta)$, справедливо включение $S_x(\delta) \subset S_a(\varepsilon)$,

в) если $\delta_1 \in \mathbb{R}$ такое, что $\delta < \delta_1 < 1$, то существуют $x > 0$ и $y \in S_x(\delta_1)$ такие, что $a \in S_x(\delta_1)$ и $y \notin S_a(\varepsilon)$, то есть, $S_x(\delta_1) \not\subset S_a(\varepsilon)$).

Прокомментируем этот результат. Пусть $\varepsilon > 0$ – число, для которого множество $T'_n(\varepsilon)$, определенное равенством (9), является одноточечным и соответствует веществу M_n, заполняющему подобласть G_n в G. Будем интерпретировать число a из утверждения 1 как μ_{nk} (напомним, что μ_{nk} есть величина коэффициента ослабления в G_n, найденная с ошибкой), δ – как число, для которого $|\mu'_{jk} - \mu_{jk}|/\mu_{jk} \leq \delta$ для всех $j = 1, ..., q; k = 1, ..., N$, $S_x(\delta)$ – как $S_{nk}(\delta)$ из (6), $S_a(\varepsilon)$ – как $T_{nk}(\varepsilon)$ в (8). Тогда при $\delta = \varepsilon/(\varepsilon+2)$, согласно пункту б) утверждения 1, все множества $S_{nk}(\delta)$ из (6) будут содержать вещество M_n и сами содержаться в $T_{nk}(\varepsilon)$ из (8), а поскольку, по предположению, $M_n = T'_n(\varepsilon)$, то $M_n = S'_n(\delta)$ и вещество M_n в подобласти G_n будет определено однозначно. Отсюда следует [11]

Утверждение 2. Если $\varepsilon > 0$ – число, для которого множество $T'_n(\varepsilon)$, из (9), построенное для вещества M_n из G_n, одноточечно: $T'_n(\varepsilon) = M_n$, то для $\delta = \varepsilon/(\varepsilon+2)$ множество $S'_n(\delta)$ из (7) также одноточечно и $S'_n(\delta) = M_n$.

Таким образом, если при заданном ε условия утверждения 2 выполняются для всех $n = 1, ..., q$, то задача определения химического состава имеет единственное решение, которое может быть найдено путем построения множеств $S'_n(\delta), n = 1, ..., q$.

Из пункта в) утверждения 1 следует, что значение $\delta = \varepsilon/(\varepsilon+2)$ является наибольшим, при котором справедливость утверждения 2 гарантирована. Однако, на практике, при проведении расчетов и построении множеств $S'_n(\delta)$ по результатам конкретно выполненных измерений может оказаться, что задача имеет единственное решение и для значений δ заметно больших, чем $\delta = \varepsilon/(\varepsilon+2)$. В этом можно было убедиться, по результатам анализа второй серии численных экспериментов, подробные таблицы для которых приведены в [11].

Во второй серии численных экспериментов решалась, собственно, задача определения химического состава неоднородного тела G. Область G была шаром радиуса 2 см с центром в точке (0,0,0) и содержала подобласти G_1 и G_2. G и G_2 определялись неравенствами

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 < 4 \quad \text{для} \quad G,$$

$$(r_1 - 1)^2 + r_2^2 + r_3^2 < 0.25 \quad \text{для} \quad G_2,$$

$G_1 = G\backslash\overline{G}_2$. Область G_1 заполнялась никелем, а G_2- медью.

На первом этапе расчетов методом компьютерного моделирования проводилось просвечивание области G коллимированным потоком рентгеновского излучения сначала вдоль ось r_1, а затем вдоль оси r_2, так что при этом $\xi_1 = (-1,0,0)$, $\xi_2 = (0,-1,0)$, $\eta_1 = (1,0,0)$, $\eta_2 = (0,1,0)$, $\omega_1 = e_1$, $\omega_2 = e_2$. Матрицы L и L^{-1} при этом имели вид:

$$L = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0.25 \\ 1 & -0.75 \end{pmatrix}.$$

Плотность потока входящего в G излучения $h(\xi_i, \omega_i, E_k)$ во всех случаях задавалась функцией типа "шапочка" с максимальным значением 1 в точке (ξ_i, ω_i, E_k) и $h(\xi', \omega', E_k) = 0$ при $|\xi' - \xi_i| \geq 0.02$, $|\omega' - \omega_i| \geq 0.02$.

Выходящее излучение $H(\eta_i, \omega_i, E_k)$ вычислялось путем численного решения уравнения переноса с учетом явления рассеяния излучения в веществе. Для расчетов использовался один из методов Монте-Карло [10]. Необходимые для расчетов значения коэффициентов ослабления и рассеяния для никеля и меди для использованных значений энергии E_k брались из таблиц [8].

На втором этапе расчетов, по найденным величинам $H_{ik}, i = 1,2; k = 1,2,3,$ с помощью формулы (5) вычислялись значения μ_{jk}. Затем, для заданного δ, используя формулы (6), строились множества $S_{jk}(\delta)$. И, наконец, по формуле (7) находились множества $S'_j(\delta), j = 1,2,$ которые определяли искомое решение задачи – перечень всех допустимых для данного δ веществ в областях G_1 и G_2.

В первом расчете при нахождении H_{ik} методом Монте-Карло для каждой процедуры просвечивания бралось три члена ряда Неймана и 67 траекторий. Максимальное ослабление (по всем прямым и значениям энергии) проходящего через G излучения (отношение h_{ik}/H_{ik}) происходило при $E_1 = 200$ кэВ и составило 279.6, минимальное ослабление происходило при $E_3 = 1000$ кэВ и составило 8.968. Максимальная относительная ошибка при определении h_{ik} составила 0.01805 при $E_3 = 1000$ кэВ (при этом компьютерные расчеты сравнивались с результатами, полученными по формуле (3)). Максимальная относительная ошибка при определении μ_{jk} составила 0.03501 при $E_3 = 1000$ кэВ. В соответствии с величиной ошибки для μ_{jk} была взята величина $\delta = 0.03502$ и построены множества $S_{jk}(\delta)$. При $j = 1$ эти множества соответствовали подобласти G_1, а при $j = 2$ – подобласти G_2.

В результате, в первом расчетном эксперименте множество $S_1'(\delta)$ содержало только никель, а множество $S_2'(\delta)-$ только медь и задача определения химического состава имела единственное решение.

Используя данные таблицы 1 для энергий 200, 600 и 1000 кэВ можно видеть, что утверждение 2 гарантирует однозначность решения задачи в подобласти 2 лишь при $\delta < 0.02$. Однако, в данном случае, решение оказалось единственным даже при $\delta = 0.03502$. Это произошло благодаря тому, что в данном случае расчетные значения μ_{jk} для подобласти G_2 при 600 и 1000 кэВ оказались меньше (а не больше) истинных значений μ'_{jk}, и, тем самым, никель, создающий здесь главную проблему, не попал в множества $S_{22}(\delta)$ и $S_{23}(\delta)$.

При выполнении второго расчетного эксперимента количество траекторий в методе Монте-Карло было уменьшено до 63. При этом, максимальная относительная ошибка при определении h_{ik} возросла до 0.02043, а для $\mu_{jk}-$ до 0.03977. Величина δ была увеличена до 0.03978. В результате, количество веществ в множествах $S_{jk}(\delta)$ увеличилось и несколько изменился их состав. В результате, $S_1'(\delta)$ стало содержать два вещества – никель и медь, а в $S_2'(\delta)$, как и раньше, осталась только медь. Таким образом получилось, что в этом случае задача имела два допустимых решения.

На основе общих теоретических результатов был получен патент Российской Федерации [12]. Изобретение используется для идентификации материалов путем многоэнергетической радиографии. Сущность изобретения заключается в том, что производят радиографическое просвечивание исследуемого объекта под различными углами, определяют коэффициенты ослабления для материалов, входящих в состав объекта, при этом облучение осуществляют на предварительно заданном наборе энергий, задают множество веществ, подлежащих гарантированной идентификации, затем определяют возможную ошибку δ нахождения коэффициентов ослабления, для каждого уровня энергии и для каждого включения с помощью компьютерной программы определяют возможный набор веществ, соответствующий выбранной погрешности δ, после чего полученные данные обрабатывают с помощью компьютерной программы для идентификации материалов. Техническим результатом изобретения является повышение точности и надежности идентификации материалов, входящих в состав неоднородного тела.

Заключение

Предложенный метод определения химического состава неоднородного тела может быть использован в тех случаях, когда поиск идет на достаточно небольшом множестве возможных веществ. Выбор значений энергий, которые целесообразно использовать для просвечивания исследуемого тела, может существенно зависеть как от размеров тела, так и от его предполагаемого химического состава. При этом, для тел с малой оптической толщиной предпочтительнее использовать сравнительно небольшие энергии, поскольку, возникающие при решении задачи множества $S_{jk}(\delta)$, оказываются также небольшими и, кроме того, их содержимое заметно меняется при изменении энергии. Это обстоятельство позволяет надеяться на получение единственного решения задачи даже при наличии ощутимых измерительных ошибок.

Список литературы

[1] С.В. Найденов, В.Д. Рыжиков, “Об определении химического состава методом мультиэнергетической радиографии”, *Письма в ЖТФ*, **28**:9 (2002), 6-13.

[2] Д.В. Зотьев, М.Н. Филиппов, А.Г. Ягола, “Об одной обратной задаче количественного рентгеноспектрального микроанализа”, *Вычисл. методы и программирование*, **4** (2003), 26-32.

[3] В.М. Федосеев, “Рентгеновский способ обнаружения вещества по значению его эффективного атомного номера”, *Патент РФ № 2095795*, 1997.

[4] А.Н. Румянцев, В.И. Мостовой, В.К. Сухоручкин, Г.В. Яковлев, “Способ обнаружения и неразрушающего анализа веществ, содержащих ядра легких элементов”, *Патент РФ № 2095796*, 1997.

[5] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, И.В. Прохоров, *Использование уравнения переноса в томографии*, М., Логос, 2000.

[6] D.S. Anikonov, V.G. Nazarov, I.V. Prokhorov, *Poorly visible media in X-ray tomography*, Utrecht, Boston, VSP, 2002 Zbl 1051.65128.

[7] В.Г. Назаров, “Определение химического состава и структуры неоднородной среды методом рентгеновской томографии”, *ЖВМиМФ*, **47**:8 (2007), 1413-1422 MR2378186.

[8] J.H. Hubbell, S.M. Seltzer, “Tables of X-ray mass attenuation coefficients and mass energy-absorption coefficients 1 Kev to 20 Mev for elements Z = 1 to 92 and 48 additional substances of dosimetric interest”, *NISTIR*, 1995, №5632.

[9] Д.С. Аниконов, А.Е. Ковтанюк, Н.В. Кольев, А.А. Кононенко, В.Г. Назаров, И.В. Прохоров, И.П. Яровенко, “База данных радиационных характеристик веществ, представляющих интерес в рентгенодиагностике”, *http://sxray.iam.dvo.ru/*.

[10] В.Г. Назаров, И.П. Яровенко, Н.В. Солнышко, “Численные эксперименты в теории переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния”, *СибЖИМ*, **VIII**:2(22) (2005), 135-143 MR2220148.

[11] В.Г. Назаров, “Определение химического состава неоднородного тела методом мультиэнергетической радиографии”, *СибЖИМ*, **XIII**:1(41) (2010), 72-83 Zbl pre05932230.

[12] А.Е. Ковтанюк, В.Г. Назаров, И.В. Прохоров, И.П. Яровенко, “Способ идентификации материалов путем многократного радиографического облучения”, *Патент РФ № 2426102*, 2010.

Назаров Василий Геннадиевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: naz@iam.dvo.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.145–С.159 (2011) УДК 517.958, 519.63, 535.3

MSC 45K05, 85A25, 35Q60, 65N21

КРАЕВЫЕ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ОПТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

И.В. ПРОХОРОВ, И.П. ЯРОВЕНКО

Abstract. We present a survey devoted to the study of boundary and extremum problems for the equation of radiative transfer. The continuous properties of the solutions of the stationary radiation transfer equation with generalized conjugation conditions are studied. We establish the solvability of boundary value problem for the transport equation of the amplitude-modulated radiation. The control problems of the optical properties of biological tissues irradiated by a laser source is considered.

Keywords: radiation transfer theory, inverse problems, tomography, extremum problems.

Введение

В сообщении представлен обзор результатов работ [1-3]. В первом разделе рассматривается краевая задача для стационарного интегродифференциального уравнения переноса излучения с условиями сопряжения, в которых содержится оператор, моделирующий френелевское и диффузное отражение на границах раздела многокомпонентной среды [1]. Оператор сопряжения представляет собой линейную комбинацию двух ограниченных операторов. Один из них, определяется с помощью показателей преломления контактных сред на основе формул Френеля, а другой – интегрального типа, задается посредством индикатрисы отражения. Определена структура множества непрерывности решения краевой задачи и показано, что определяющую роль в формировании этого множества играет френелевская составляющая в операторе сопряжения.

Prokhorov, I.V., Yarovenko, I.P., Boundary-value and extremal problems for the transfer equations of the optical radiation.

Работа выполнена в рамках гранта конкурса интеграционных проектов ДВО и СО РАН (проект № 09-II-CO-01-004).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

Широкое множество физических процессов описываются интегродифференциальными уравнениями переноса с периодической зависимостью по времени. Например, перенос модулированного по интенсивности лазерного излучения в достаточно широком диапазоне частот модуляции [4,5] и т.п.. Кроме того, уравнения такого типа возникают при решении нестационарных уравнений переноса с помощью различных интегральных преобразований. Во втором разделе статьи рассматривается краевая задача для амплитудно-модулированного излучения в неоднородной среде, где помимо внешнего краевого условия, на границе раздела сред ставятся обобщенные условия сопряжения [2]. Отличительной особенностью решений уравнения переноса модулированного излучения является то, что для них несправедлива теорема сравнения и как следствие принцип максимума [6] для вещественной и мнимой частей решения уравнения переноса. Однако в предположение, что в каждой точки среды нормы альбедо однократного рассеяния и оператора сопряжения меньше единицы, удается получить оценки для модуля комплекснозначного решения, аналогичные стационарному случаю [1,7].

Одним из важных направлений современной биомедицинской диагностики является развитие методов улучшения качества визуализации структуры биотканей [4,5]. Основная проблема оптической томографии связана с особенностями распространения света в биотканях: прошедшее через объект световое поле характеризуется значительным преобладанием многократно рассеянной составляющей над нерассеянной (баллистической). Зачастую, именно последняя является носителем полезной информации при визуализации внутренней структуры среды. Решение этой проблемы может быть достигнуто путем увеличения проникновения баллистических фотонов вглубь исследуемого объекта. С этой целью на поверхность кожи наносят растворы глюкозы, глицерина и некоторых других иммерсионных жидкостей. Раствор, диффундируя вглубь ткани, приводит к выравниванию показателей преломления основной ткани и рассеивателей, следствием чего является контролируемое уменьшение коэффициента рассеяния и увеличение баллистической составляющей в распространяющемся сигнале [4].

Распространено мнение, что полное выравнивание коэффициентов преломления базового вещества и рассеивателей, приводящее к исчезновению рассеяния дает наилучшее качество визуализации исследуемой среды. Действительно, в большинстве случаев это утверждение оправдано и подтверждено численным моделированием и физическими экспериментами [4,5]. Однако многое здесь зависит непосредственно от постановки проблемы, выбора методов диагностики, от структуры среды и ее характеристик. В третьем параграфе данной статьи аналитическими и численными методами исследуются задачи управления оптическими свойствами биологических тканей с целью повышения томографического контраста среды [3]. Показано, что полное выравнивание показателей преломления не всегда приводит к увеличению той доли баллистической составляющей в измеряемом сигнале, которая вызвана присутствием в среде инородного включения.

1. Непрерывные свойства решений краевых задач для уравнения переноса с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред в $\mathbb{R}^3$

Пусть G выпуклая ограниченная область в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через $G_i, i = 1, ..., p$ попарно непересекающиеся области такие, что: $G_0 = G_1 \cup G_2 ... \cup G_p \subset G$ и $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Границу области G ($\partial G = \overline{G} \setminus G$) будем называть внешней границей G_0, а множество $\partial G_0 \setminus \partial G$, представляющее собой объединение границ разделов областей G_i, будем обозначать через γ и называть внутренней границей множества G_0. Области G_i можно интерпретировать как неоднородности или включения, входящие в состав многокомпонентной среды G, где происходит процесс распространения излучения.

Поверхность ∂G_0 предполагается гладкой класса C^2. Если $z \in \partial G$, то через $n(z)$ будем обозначать единичный вектор внешней нормали в точке z, если же $z \in \gamma$ и лежит на границе контакта двух областей G_i, G_j, $i < j$, то нормаль $n(z)$ выбирается внешней к поверхности ∂G_j (с большим индексом).

Пусть Ω единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $\Omega = \{\omega \in \mathbb{R}^3 : |\omega| = 1\}$, а $\Omega_\pm(z)$ — полусферы, $\Omega_\pm(z) = \{\omega \in \Omega : \operatorname{sgn}(\omega \cdot n(z)) = \pm 1\}$, и пусть $\Gamma^\pm = \partial G \times \Omega_\pm(z)$. Будем использовать обозначения:

$$f^\pm(z,\omega) = f(z \mp 0\omega, \omega), \text{ где } f(z \pm 0\omega, \omega) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(z \pm \varepsilon\omega, \omega),\ (z,\omega) \in \gamma \times \Omega \cup \Gamma^\pm.$$

Рассмотрим следующую краевую задачу. Требуется определить функцию $f(r,\omega)$, $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega$, из уравнения

$$\omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \mu(r) f(r,\omega) = \mu_s(r) \int_\Omega S(r, \omega \cdot \omega') f(r,\omega') d\omega' + J(r,\omega), \tag{1.1}$$

граничного условия

$$f^-(z,\omega) = h(z,\omega), \quad (z,\omega) \in \Gamma^-, \tag{1.2}$$

и условия сопряжения

$$f^-(z,\omega) = (Bf^+)(z,\omega), \quad (z,\omega) \in \gamma \times \Omega. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.1) часто называют уравнением переноса излучения или линейным уравнением Больцмана. Функция $f(r,\omega)$ интерпретируется как плотность потока частиц в точке r, летящих в направлении ω. Функции μ, μ_s, S и J называются коэффициентом ослабления, коэффициентом рассеяния, индикатрисой рассеяния и плотностью внутренних источников, соответственно. Функция h описывает поток излучения поступающий из вне в среду G через поверхность ∂G, а оператор сопряжения B моделирует перенос излучения через границы раздела сред γ.

Относительно функций, входящих в уравнение (1.1), предполагается, что: $\mu(r), \mu_s(r) \in C_b(G_0)$, $J(r,\omega) \in C_b(G_0 \times \Omega)$, где $C_b(X)$ — пространство ограниченных и непрерывных на множестве X функций с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Пусть $\mu_s \geq 0$ на G_0 , а μ удовлетворяет неравенству: $0 < \underline{\mu} \leq \mu(r) \leq \overline{\mu}$, где $\underline{\mu}$, $\overline{\mu} = \text{const}$. Функция S — неотрицательная, ограниченная и непрерывная на

$G_0 \times [-1,1]$, и удовлетворяет условию нормировки для любых $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega$

$$\int\limits_{\Omega} S(r,\omega \cdot \omega')d\omega' = 1. \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что функция $h(z,\omega)$ в условии (1.2) принадлежит $C_b(\Gamma^-)$ и неотрицательная, а оператор B в условии сопряжения (1.3) является линейной комбинацией операторов сопряжения френелевского типа B_{fr} и диффузного B_d, то есть

$$(B\phi)(z,\omega) = \beta_{fr}(z,\omega)(B_{fr}\phi)(z,\omega) + \beta_d(z,\omega)(B_d\phi)(z,\omega). \tag{1.5}$$

В соотношении (1.5) оператор B_{fr} задается формулой [6]:

$$(B_{fr}f^+)(z,\omega) = R(z,\nu)f^+(z,\omega_R) + T(z,\nu)f^+(z,\omega_T). \tag{1.6}$$

Здесь

$$\omega_R = \omega - 2\nu n, \quad \omega_T = \psi(z,\nu)n + \widetilde{\kappa}(z,\nu)(\omega - \nu n), \quad \nu = \omega \cdot n(z), \tag{1.7}$$

$$\widetilde{\kappa}(z,\nu) = \begin{cases} \kappa_i/\kappa_j, & \text{если} \quad z \in \partial G_i \cap \partial G_j,\ 0 < \nu(z) \le 1, \\ \kappa_j/\kappa_i, & \text{если} \quad z \in \partial G_i \cap \partial G_j,\ -1 \le \nu(z) < 0, \end{cases}$$

$$\psi(z,\nu) = \begin{cases} \mathrm{sgn}(\nu)\sqrt{1-\widetilde{\kappa}^2(z,\nu)(1-\nu^2)}, & \text{если} \quad 1-\widetilde{\kappa}^2(z,\nu)(1-\nu^2) \ge 0, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$R(z,\nu) = \frac{1}{2}(R_{\parallel}^2(z,\nu) + R_{\perp}^2(z,\nu)),\ T(z,\nu) = \frac{1}{2}(T_{\parallel}^2(z,\nu) + T_{\perp}^2(z,\nu))\frac{\widetilde{\kappa}(z,\nu)\nu}{\psi(z,\nu)}, \tag{1.9}$$

где константы κ_i обозначают показатели преломления сред G_i и

$$R_{\parallel}(z,\nu) = \frac{\widetilde{\kappa}(z,\nu)\psi(z,\nu) - \nu}{\widetilde{\kappa}(z,\nu)\psi(z,\nu) + \nu}, \quad R_{\perp}(z,\nu) = \frac{\psi(z,\nu) - \widetilde{\kappa}(\nu)\nu}{\psi(z,\nu) + \widetilde{\kappa}(z,\nu)\nu}, \tag{1.10}$$

$$T_{\parallel}(z,\nu) = \frac{2\psi(z,\nu)}{\widetilde{\kappa}(z,\nu)\psi(z,\nu) + \nu}, \quad T_{\perp}(z,\nu) = \frac{2\psi(z,\nu)}{\psi(z,\nu) + \widetilde{\kappa}(z,\nu)\nu}. \tag{1.11}$$

Вектора ω_R(или ω_T) характеризуют направление потока излучения падающего на поверхность ∂G_j и в результате зеркального отражения (или соответственно преломления по закону Снеллиуса [8] меняющего свое направление на ω. Коэффициенты R и T в (1.6) характеризуют отражательную и пропускательную способность границы раздела сред G_i и G_j при френелевском отражении (преломлении) для неполяризованного излучения [1,2]. В силу (1.8), при $1-\widetilde{\kappa}^2(z,\nu)(1-\nu^2) < 0$ из (1.9) получаем, что $T(z,\omega) = 0$, $R(z,\omega) = 1$. В оптике этот случай называется полным внутренним отражением [1].

Оператор B_d в (1.5), описывающий диффузное отражение, имеет вид

$$(B_d\phi)(z,\omega) = \int\limits_{\Omega} S_d(z,\omega,\omega')\phi(z,\omega')d\omega', \tag{1.12}$$

где функция $S_d(z,\omega,\omega')$, называемая индикатрисой отражения, ограничена и непрерывна на $\gamma \times \Omega \times \Omega$ и удовлетворяет условию нормировки (1.4) для всех $(z,\omega) \in \gamma \times \Omega$. Функции $\beta_{fr}, \beta_d \in C_b(\gamma \times \Omega)$, $(\beta_{fr}(z,\omega), \beta_d(z,\omega) \ge 0$, $\beta_{fr}(z,\omega) + \beta_d(z,\omega) \le 1)$ определяют френелевскую и диффузную составляющую в отраженном свете.

Пусть лучи $L_{r,\omega} = \{r + \omega t : t > 0\}$ и $L_{r,-\omega} = \{r - \omega t : t > 0\}$ при любых $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega$ пересекают ∂G_0 в конечном числе точек $z_i(r,\omega) =$

$r + t_i(r,\omega)\omega$, $i = 1, ..., q(r,\omega)$, и $z_i(r,-\omega) = r - t_i(r,-\omega)\omega$, $i = 1, ..., q(r,-\omega)$, соответственно, причем $\sup\limits_{r,\omega \in G_0 \times \Omega} q(r,\omega) < \infty$. Это условие называется условием обобщенной выпуклости [6]. Будем считать, что при фиксированных r, ω функции $t_i(r,\omega)$ упорядочены по возрастанию, т.е. $t_i(r,\omega) < t_{i+1}(r,\omega)$. Для краткости через $d(r,\omega)$ будем обозначать расстояние от точки r до внешней границы ∂G в направлении ω, то есть $d(r,\omega) = t_{q(r,\omega)}(r,\omega)$.

С каждой точкой $r \in G_0$ будем связывать пока произвольное множество направлений $\Omega_0(r) \subset \Omega$. Потребуем лишь, чтобы оно было плотное в Ω и $\mathrm{mes}_2(\Omega \backslash \Omega_0(r)) = 0$, где через символ mes_n обозначена мера Лебега в $\mathbb{R}^n$. Нашей целью является построение множества $G_0 \times \Omega_0(r)$ на котором решение краевой задачи $f(r,\omega)$ непрерывное.

Через $\Omega_0^+(z)$ и $\Omega_0^-(z)$, где $z \in \partial G_0$, обозначим множества единичных векторов, порожденные множеством $\Omega_0(r)$. А именно, элемент $\omega \in \Omega_0^+(z)$ если существует такая точка $r \in G_0$, что справедливо представление $z = r + t_1(r,\omega)\omega$, и аналогично $\omega \in \Omega_0^-(z)$ если существует $r \in G_0$, что справедливо $z = r - t_1(r,-\omega)\omega$. Учитывая введенные обозначения, построим множества

$$\Gamma_0^{\pm} = \{(z,\omega) \in \partial G \times \Omega_0^{\pm}(z)\}, \quad \Gamma_{\gamma,0}^{\pm} = \{(z,\omega) \in \partial G_0 \times \Omega_0^{\pm}(z)\}$$

и определим множество $D(G_0 \times \Omega_0(r))$ в котором будем искать решение краевой задачи.

Будем говорить, что функция $f(r,\omega) \in D(G_0 \times \Omega_0(r))$ если: при любых $(r,\omega) \in G_0 \times \Omega_0(r)$ функция $f(r + t\omega, \omega)$ абсолютно непрерывна по переменной t, $t \in (-t_1(r,-\omega), t_1(r,\omega)]$ и функции f, $\omega \cdot \nabla_r f \in C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$.

Введем в рассмотрение оператор $L : D(G_0 \times \Omega_0(r)) \to C_b(G_0 \times \Omega_0(r))$ по формуле

$$(Lf)(r,\omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r,\omega) + \mu(r) f(r,\omega).$$

и на множестве $D(G_0 \times \Omega_0(r))$ определим норму

$$\|f\|_D = \max\left\{\|f^-\|, \left\|\frac{Lf}{\mu}\right\|\right\}. \tag{1.13}$$

Пространство D с нормой (1.13) образует банахово пространство [1].

Пусть $\Omega'(z)$, $z \in \partial G_0$ подмножество единичной сферы и $\overline{\Omega}'(z) = \Omega$, $\mathrm{mes}_2(\Omega \setminus \Omega'(z)) = 0$. Дополнительно потребуем, что если $z \in \partial G$, то множество $\Omega'(z)$ содержит только те элементы ω из $\Omega'(z)$, которые удовлетворяют неравенству $n(z) \cdot \omega > 0$. Множество $\Omega''(z)$ определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Omega''(z) &= \{\omega \in \Omega : \omega_R(z,\omega), \omega_T(z,\omega) \in \Omega'(z)\}, \text{при } z \in \gamma, \\ \Omega''(z) &= \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega < 0\} \text{ при } z \in \partial G, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где ω_R и ω_T определены в (1.7).

Конкретизируем множество $\Omega_0(r)$. Оно строится рекуррентным образом. Пусть

$$\Omega_1(r) = \{\omega \in \Omega : n(z) \cdot \omega \neq 0, \text{ где } z = r - t_1(r,-\omega)\omega\}, \tag{1.15}$$

а множество $\Omega_1^+(z)$ образовано такими единичными векторами ω, для которых существует хотя бы одна точка $r \in G_0$ такая, что $z = r + t_1(r,\omega)\omega$, причем $\omega \in \Omega_1(r)$ и $n(z) \cdot \omega \neq 0$. Далее построим следующую цепочку множеств для $i = 1, 2, ...$:

$$\Omega_i^+(z) = \{\omega \in \Omega_i(r) : \ r \in G_0, \ z = r + t_1(r,\omega)\omega, \ n(z) \cdot \omega \neq 0\}, \quad z \in \partial G_0, \tag{1.16}$$

$$\Omega_i^-(z) = \begin{cases} \{\omega \in \Omega :\ n(z)\cdot\omega < 0\}, & z \in \partial G; \\ \{\omega \in \Omega :\ \omega_R(z,\omega) \in \Omega_i^+(z) \text{ если } \beta_{fr}(z,\omega) \neq 0, & \\ \omega_T(z,\omega) \in \Omega_i^+(z) \text{ если } \beta_{fr}(z,\omega), T(z,\omega) \neq 0\}, & z \in \gamma. \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\Omega_{i+1}(r) = \{\omega \in \Omega_i(r) : \omega_R(z,\omega), \omega_T(z,\omega) \in \Omega_i^-(z),\ z = r - t_1(r,-\omega)\omega\},\ r \in G_0. \tag{1.18}$$

Для всех $r \in G_0$ имеют место включения $\Omega_1(r) \supseteq \Omega_2(r) \supseteq \Omega_3(r)\ldots.$

Прокомментируем приведенное построение множеств $\Omega_i(r)$. Из определения функции расстояния вытекает, что $t_1(r,-\omega)$, имеющая ненулевой разрыв $[t_1]_{\omega'}$ в некоторой точке (r^*,ω^*), $(\omega^* \neq \omega')$, имеет его и для всех (r',ω^*) таких, что r' лежит на луче $L_{r^*,-\omega^*}$. Поэтому $G_0 \times \Omega_2(r)$ представляет собой множество непрерывности функции $t_1(r,-\omega)$, в котором помимо точек ее разрыва, удалены также такие точки (r',ω''), что r' лежит на лучах $L_{r,\omega''}$, образованных в результате "зеркального отражения и преломления по закону Снеллиуса указанных разрывов от поверхности раздела сред". Множество $G_0 \times \Omega_3(r)$ получается из $G_0 \times \Omega_1(r)$, удалением точек, которые появляются в результате "однократных и двухкратных переотражений" разрывов функции расстояния t_1.

Пусть $\Omega_0(r) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n(r)$, $\overline{\Omega}_0(r) = \Omega$ и $\mathrm{mes}_2(\Omega \setminus \Omega_0(r)) = 0$. Таким образом, множество $\Omega_0(r)$ построено.

Имеет место теорема [1].

Теорема 1. *Пусть оператор сопряжения B определяется соотношением (1.5), и* $\beta_{fr}(z,\omega)+\beta_d(z,\omega) \le \mathrm{const} < 1$, *тогда краевая задача (1.1)-(1.3) имеет единственное решение, которое на* $G_0 \times \Omega_0(r)$*:*

1) при $\overline{\lambda} = \|\mu_s(r)/\mu(r)\| < 1$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(r,\omega)| \le \frac{1}{1-\overline{\lambda}} \max\left\{\|h\|, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|\right\}; \tag{1.19}$$

2) при выполнении условий $\overline{\lambda} \le 1$, $J \equiv 0$ *удовлетворяет неравенству*

$$f(r,\omega) \le \|h\|. \tag{1.20}$$

2. Краевая задача для уравнения переноса амплитудно-модулированного излучения

В этом разделе при физической интерпретации рассматриваемой модели будем иметь ввиду перенос оптического излучения. Если гармонический источник излучения амплитудно-модулирован на частоте ν, то световое поле в среде G, описываемое в терминах яркости излучения, будет иметь две составляющие: постоянную и переменную на частоте модуляции источника. Переменная составляющая поля $f(r,\omega)$ удовлетворяет следующему интегро-дифференциальному уравнению переноса [9]

$$\omega\cdot\nabla_r f(r,\omega) + \left(\mu(r) + \frac{i\nu}{c(r)}\right) f(r,\omega) = \mu_s(r)\int\limits_{\Omega} S(r,\omega\cdot\omega') f(r,\omega')d\omega' + J(r,\omega). \tag{2.1}$$

Функция $f(r,\omega)$ характеризует волну фотонной плотности в точке r, распространяющуюся в направлении ω и возбуждаемую гармоническим источником амплитудно-модулированным на частоте ν. Модуль $|f| = \sqrt{(\mathrm{Re} f)^2 + (\mathrm{Im} f)^2}$ комплекснозначной функции $f(r,\omega)$ имеет смысл амплитуды волны, а аргумент $\arg(f)$ — фазы волны.

Вещественные функции c, μ, μ_s, S в уравнении (2.1) описывают оптические свойства среды G.Величина $c(r)$, характеризующая скорость света, выражается через показатель преломления среды $\kappa(r)$ и скорость света в вакууме c_0, соотношением $c(r) = c_0/\kappa(r)$. Комплекснозначная функция J характеризует распределение внутренних источников в среде. Для удобства введем в рассмотрение комплексный коэффициент ослабления $\widetilde{\mu}(r)$, определяемый формулой:

$$\widetilde{\mu}(r) = \mu(r) + i\frac{\nu\kappa(r)}{c_0}. \tag{2.2}$$

Определим банахово пространство $L_\infty(X)$, состоящее из измеримых и ограниченных (почти всюду на X) комплекснозначных функций, с нормой $\|\phi\|_\infty = \sup\limits_{x\in X}\mathrm{vrai}\,|\phi(x)|$.

К классу $D_\infty(G_0 \times \Omega)$ будем относить функции, обладающими следующими свойствами: f и $\omega \cdot \nabla_r f \in L_\infty(G_0 \times \Omega)$.

Для любой функции $f \in D_\infty$ ее следы $f^\pm$ на $\Gamma^\pm_\gamma$ существуют и являются элементами пространств $L_\infty(\Gamma^\pm_\gamma)$. Граничные условия для уравнения (2.1) имеют вид (1.2) и (1.3), где h комплекснозначная функция из пространства $L_\infty(\Gamma^-)$, а оператор $B : L_\infty(\Gamma^+) \to L_\infty(\Gamma^-)$ определяется формулой (1.5).

Введем в рассмотрение оператор $\widetilde{L} : D(G_0 \times \Omega) \to L_\infty(G_0 \times \Omega)$ по формуле

$$(\widetilde{L}f)(r, \omega) = \omega \cdot \nabla_r f(r, \omega) + \widetilde{\mu} f(r, \omega), \tag{2.3}$$

где функция $\widetilde{\mu} = \mu + i\dfrac{\nu\kappa}{c_0}$ принадлежит пространству $L_\infty(G)$ и ее реальная часть удовлетворяет условию

$$0 < \underline{\mu} \le \mu(r) \le \overline{\mu}, \quad \underline{\mu}, \overline{\mu} = \mathrm{const}, \tag{2.4}$$

почти всюду на G. Пространство D_∞ с нормой

$$\|f\|_{D_\infty} = \max\left\{\|f^-\|_\infty, \left\|\frac{\widetilde{L}f}{\mu}\right\|_\infty\right\}. \tag{2.5}$$

банахово и справедлива теорема [2]

Теорема 2. *Пусть* $\overline{\lambda} < 1$ *и* $\|B\| < 1$, *тогда для решения* $f \in D_\infty$ *краевой задачи (2.1),(1.2),(1.3) справедливо*

$$|f(r, \omega)| \le \max\left\{\|h\|_\infty, \left\|\frac{J}{\mu}\right\|_\infty (1 - \overline{\lambda})^{-1}\right\} \tag{2.6}$$

почти всюду в $G \times \Omega$.

В частности, из (2.6) при $J = 0$ вытекает неравенство $\|f\|_\infty \le \|h\|_\infty$, означающее, что существенная верхняя грань модуля решения краевой задачи внутри области не превосходит его верхней грани на границе.

3. Экстремальные задачи для уравнения переноса в слоистых средах

Будем предполагать, что неоднородная среда, в которой происходит процесс распространения излучения, имеет плоскую геометрию, заполняет область $G = \{z : z \in (z_0, z_p)\}$ и состоит из p веществ $G_i = \{z : z \in (z_{i-1}, z_i)\}$, $i = 1, ..., p$. Для каждого вещества G_i задан коэффициент преломления n_i, коэффициенты ослабления и рассеяния: $\mu(z) = \mu_i$, $\mu_s(z) = \mu_{s,i}$, $z \in G_i$.

Для описания распространения излучения в среде, имеющей плоскопараллельное строение, используется стационарное уравнение переноса, которое в отсутствии внутренних источников излучения может быть записано в виде [3,6]

$$\nu f_z(z,\nu) + \mu(z) f(z,\nu) = \mu_s(z) \int\limits_{-1}^{1} S(z,\nu,\nu') f(z,\nu') d\nu'. \qquad (3.1)$$

Функция $f(z,\nu)$ имеет смысл плотности потока излучения в точке $z \in G$ в направлении составляющем с положительным направлением оси симметрии среды G угол, косинус которого равен ν, $\nu \in [-1,1]$. Фазовая функция рассеяния $S(z,\nu,\nu')$ определяет характер рассеяния фотона на частицах среды.

На границе области G задается плотность потока входящего в среду излучения:

$$f(z_0,\nu) = h(\nu),\ \nu > 0, \quad f(z_p,\nu) = h(\nu),\ \nu < 0. \qquad (3.2)$$

На контактных границах $z = z_i$, $i = 1,...,p-1$ ставятся условия сопряжения:

$$\begin{array}{ll} f(z_i+0,\nu) = R_i(\nu) f(z_i+0,-\nu) + T_i(\nu) f(z_i-0,\psi_i), & \nu \in [-1,0), \\ f(z_i-0,\nu) = R_i(\nu) f(z_i-0,-\nu) + T_i(\nu) f(z_i+0,\psi_i), & \nu \in (0,1]. \end{array} \qquad (3.3)$$

Здесь $f(z_i \pm 0,\nu) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0} f(z_i \pm \varepsilon,\nu)$ – предельные значения функции $f(z,\nu)$ на границах раздела сред z_i. Коэффициенты $R_i(\nu), T_i(\nu)$ характеризуют отражательную и пропускную способность поверхности раздела $z = z_i$ и для неполяризованного излучения определяются формулами, аналогичным (1.9)-(1.11) $(R_i(\nu) = R(z_i,\nu))$.

Рассматривается задача оптической томографии кожного покрова в случае in vivo. В этом варианте томографии имеем следующие характерные условия эксперимента. Источник и детектор находятся на одной границе, например на $z = z_0$ и определение характеристик среды производится не "на просвет", а по отраженному и рассеянному излучению: $f(z_0,\nu)$, $-1 \le \nu < 0$.

Пусть коэффициент преломления в j-м слое равен

$$n_j = c_j n_{c,j} + (1-c_j) n_{0,j}, \qquad (3.4)$$

где $n_{c,j}$, $n_{0,j}$ – показатели преломления рассеивающих микронеоднородностей и базового вещества в j-м слое, а c_j есть относительная концентрация рассеивающих частиц. Для простоты будем предполагать, что коэффициент рассеяния для j–го зависит от $\dfrac{n_{c,j}}{n_{0,j}}$ посредством следующего соотношения [5]

$$\mu_{s,j} = \sigma_j \left(1 - \frac{n_{c,j}}{n_{0,j}}\right)^2, \qquad (3.5)$$

а коэффициент поглощения $\mu_a = \mu - \mu_s$ не зависит от $\dfrac{n_{c,j}}{n_{0,j}}$. Величина σ_j в (3.5) определяется плотностью и размерами рассеивателей в веществе G_j.

Во многих важных практических случаях индикатриса рассеяния $S(z,\nu,\nu')$ в отдельно взятом j-м слое зависит только от угла θ между падающим и рассеянным фотоном и хорошо аппроксимируется функцией Хеньи-Гринштейна [4]:

$$S_j(\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - {g_j}^2}{(1 + {g_j}^2 - 2 g_j \cos\theta)^{3/2}}. \qquad (3.6)$$

Фактор анизотропии рассеяния g_j определяется характеристиками рассеивающих центров в j-м слое. Случай $g_j = 0$ соответствует изотропному рассеянию, а $g_j = 1$ — полному рассеянию вперед.

Для большинства биологических тканей индикатриса рассеяния S имеет вытянутую вперед форму и значения g лежат в пределах от 0.6 до 0.9, а в некоторых случаях, например для крови, могут достигать 0.995 [4]. Известно, что введение в ткань иммерсионного агента, наряду с уменьшением коэффициента рассеяния, приводит к увеличению анизотропии рассеяния [10], но обычно эта зависимость проявляется значительно слабее [11].

В первом приближении можно ограничиться случаем когда g_j зависит от $n_{0,j}$ линейно

$$g_j(n_{0,j}) = g_j^{(0)} + (g_j^{(c)} - g_j^{(0)})\frac{n_{c,j} - n_{0,j}}{n_{c,j} - n_{0,j}^{(0)}},, \quad n_{0,j}^{(0)} \leqslant n_{0,j} \leqslant n_{c,j}, \tag{3.7}$$

где $n_{0,j}^{(0)}$ и $g_j^{(0)}$ показатель преломления базового вещества и фактор анизотропии рассеяния до введения иммерсионной жидкости, а $g_j^{(c)}$ параметр анизотропии при $n_{0,j} = n_{c,j}$.

Будем считать, что в нашей задаче слой $G_j = (z_j, z_{j+1})$ является просветляющим и содержит одно инородное включение. Таким образом, вместо одного слоя G_j, получаем три $G_j^- = (z_j, z_j^*), G_j^* = (z_j^*, z_{j+1}^*), G_j^+ = (z_{j+1}^*, z_{j+1})$, где область G_j^* интерпретируется как включение или макронеоднородность. Через f и f^* обозначим решения краевой задачи (1.1)-(1.3) для двух наборов неоднородных сред

$$\{G_1, G_2, ..., G_p\} \quad \text{и} \quad \{G_1, ..., G_{j-1}, G_j^-, G_j^*, G_j^+, G_{j+1}, ..., G_p\},$$

соответственно. Причем функции h и h^* из условия (3.2) (для f и f^*) равны между собой, и коэффициенты ослабления, рассеяния и преломления во всех слоях, кроме G_j^* для функции f^* совпадают с соответствующими коэффициентами для f.

Если разность $f^* - f$ при $z = z_0$ и $\nu \in [-1, 0)$ равна нулю, то это фактически означает, что включение G_j^* не оказывает влияние на выходящее из среды излучение, другими словами оно невидимо в отраженном и рассеянном средой свете. С математической точки зрения это можно трактовать как неединственность решения обратной задачи, заключающейся в определении характеристик макронеоднородности G_j^* по решению прямой задачи (3.1)-(3.3), известному на границе z_0. Если же $f_b^* - f_b = 0$ на этой границе, где f_b^*, f_b соответствующие баллистические составляющие измеряемых сигналов, то включение невидимо для томографических систем, детектирующих нерассеянную часть фотонов, которая сформировалась только за счет отражения (и переотражения) от внутренних границ раздела сред z_i. Увеличение доли нерассеянных фотонов, вызванных наличием макронеоднородности G_j^*, нарушает условие $f_b^* - f_b = 0$ и должно благоприятно сказаться при реконструкции включения в среде.

Задача 1. *Требуется найти оптимальное значение коэффициента преломления $n_{0,j}$ базового вещества в среде $G_j^- \cup G_j^+$ из соотношений (3.1)-(3.3) и экстремального условия*

$$J_1(n_{0,j}) = \frac{|f_b^*(z_0 - 0, \nu) - f_b(z_0 - 0, \nu)|}{f^*(z_0 - 0, \nu)} \to \max, \tag{3.8}$$

если n_j, $\mu_{s,j}$, S_j и g_j в $G_j^- \cup G_j^+$ определяются соотношениями (3.4)-(3.7), соответственно, а функция $h(\nu)$ и все остальные характеристики среды G известны.

Направление ν в условии (3.8) может быть выбрано из различных соображений, в частности, руководствуясь методикой проводимых экспериментов по определению структуры среды [3]. Мы ограничимся случаем когда в (3.8) $\nu = -1$ и рассмотрим некоторую вспомогательную задачу.

Задача 2. *Требуется найти оптимальное значение коэффициента преломления $n_{0,j}$ базового вещества в среде $G_j^- \cup G_j^+$ из соотношений (3.1)-(3.3) и экстремального условия*

$$J_2(n_{0,j}) = \frac{|f_b^*(z_j - 0, -1) - f_b(z_j - 0, -1)|}{f_b^*(z_j + 0, 1)} \to \max, \tag{3.9}$$

если n_j, $\mu_{s,j}$ в $G_j^- \cup G_j^+$ определяются из (3.4),(3.5) и все остальные характеристики сред G_j^-, G_j^*, G_j^+ известны.

Функционал J_2 представляет собой разность между баллистическими потоками выходящими из слоя G_j для среды, содержащей макронеоднородность G_j^* и без нее. Причем, эта разность для удобства нормирована на величину $f_b^*(z_j + 0, 1)$. Задача 2 имеет локальный характер, позволяющий рассматривать ее вне зависимости от других слоев. Кроме того, функция J_2 в экстремальном условии (3.9) содержит только баллистическую составляющую. В этом смысле она проще задачи 1 и допускает аналитическое решение при сделанных ниже предположениях.

Пусть $f_b(z_{j+1} - 0, -1) = f_b^*(z_{j+1} - 0, -1) = 0$. Последнее предположение зачастую оправдано, например, при достаточно большой оптической толщине среды G_j^+, т.е. $\mu_j |z_{j+1} - z_{j+1}^*| \gg 1$. Учитывая это, имеем $f_b(z_j - 0, -1) = 0$ и

$$f_b^*(z_j - 0, -1) \approx f_b^*(z_j + 0, 1) R_j^* \exp(-2\mu_j |z_j^* - z_j|) \times \\ \times \left(1 + \frac{(1 - R_j^*)^2}{\exp(2\mu_j^* |z_{j+1}^* - z_j^*|) - R_j^{*2}}\right). \tag{3.10}$$

Через μ_j^* и n_j^* обозначены коэффициент ослабления и преломления включения G_j^*, а через R_j^* коэффициент отражения на границе сред G_j^-,G_j^* в направлении $\nu = 1$. Будем рассматривать наиболее трудный и интересный для томографии случай, когда искомое включение небольшое, то есть его оптическая толщина $\mu_j^* |z_{j+1}^* - z_j^*|$ стремится к нулю. Тогда, учитывая (3.10), целевая функция в (3.9) приобретает сравнительно простой вид

$$J_2(n_{0,j}) \approx \widetilde{J}_2(n_{0,j}) = 2\exp(-2\mu_j |z_j^* - z_j|) \frac{R_j^*}{1 + R_j^*} \tag{3.11}$$

Решение задачи 2 с целевой функцией $\widetilde{J}_2$, где $\mu_{s,j}$ дается соотношением (3.5), в конечном итоге сводится к нахождению корней уравнения пятой степени относительно переменной $n_{0,j}$. Один из корней этого уравнения $n_{0,j} = (n_j^* - c_j n_{c,j})/(1 - c_j)$ соответствует обращению в ноль коэффициента R_j^* и, следовательно, нулю и минимуму функции $\widetilde{J}_2$. Из четырех других только два вещественны. Они являются локальными максимумами функции $\widetilde{J}_2$ и могут быть выражены в радикалах.

Таблица 1. Оптические характеристики биоткани

Слой	Толщина (мм)	κ_i	$\mu_{s,i}$ (мм$^{-1}$)	$\mu_{a,i}$ (мм$^{-1}$)	g_i
Эпидермис (G_1)	0.1	1.35	45	0.15	0.8
Дерма (G_2^-)	l	1.4	20	0.073	0.76
Стекло (G_2^*)	0.2	n_2^*	0.22	0.18	0.0
Дерма (G_2^+)	$1.2 - l$	1.4	20	0.073	0.76

Для того, чтобы наглядно проанализировать зависимость оптимального решения экстремальной задачи 2 от характеристик среды, выпишем асимптотическое выражение для корня уравнения $\widetilde{J}_2'(n_{0,j}) = 0$, находящегося вблизи $n_{c,j}$ и доставляющего максимум функции $\widetilde{J}_2(n_{0,j}) = 0$. В пренебрежении членами второго порядка малости относительно величины обратной к толщине слоя G_j^-, имеем

$$n_{0,j} = n_{c,j} + \frac{n_{c,j}^2 n_j^*(n_{c,j} + n_j^*)(1-c)}{2(n_{c,j} - n_j^*)(n_{c,j}^2 + n_j^{*2})\sigma_j |z_j^* - z_j|}, \tag{3.12}$$

где σ_j определено в (3.5).

Несложный анализ формулы (3.12) показывает, что при увеличении $|z_j^* - z_j|$ оптимальное значение коэффициента преломления базового вещества, как и ожидалось, стремится к показателю преломления рассеивающих частиц. Однако, на близость величин $n_{0,j}$ и $n_{c,j}$ может существенно повлиять разность $n_{c,j} - n_j^*$, которая содержится в знаменателе второго слагаемого выражения (3.12). Причем, если эта разность больше нуля, то оптимальный коэффициент базового вещества больше коэффициента преломления рассеивающих микронеоднородностей среды, а если она меньше нуля, то соответственно, $n_{0,j} < n_{c,j}$.

Для решения экстремальной задачи 1 нам необходимо знать решение $f(z_0 - 0, \nu)$ краевой задачи (3.1)-(3.3). Основная проблема состоит в том, что указанная краевая задача не имеет аналитического решения, поэтому прежде всего нам потребуется численный метод нахождения функции f. Для этих целей мы использовали одну из модификаций весового метода Монте-Карло называемую методом сопряженных блужданий [3].

При компьютерном моделировании экспериментов рассматривалась двухслойную среду толщиной 1.5мм, состоящую из слоев эпидермиса (G_1) и дермы (G_2) с толщинами 0.1мм и 1.4мм, соответственно. Предполагалось, что иммерсионный агент вводится в дерму, которая содержит инородное включение G_2^*, представляющее собой стекло с заданными показателем преломления и коэффициентами рассеяния и поглощения. Таким образом, среда подлежащая просветлению на самом деле содержит четыре слоя G_1, G_2^-, G_2^*, G_2^+.

Параметры сред G_1, G_2^-, G_2^*, G_2^+ до просветления имели характерные значения для кожи человека в спектральном диапазоне порядка 600-700нм [3] (см. таблицу 1).

В дерме концентрация рассеивающих частиц обычно составляет 30 процентов, а соответствующий им показатель преломления равен 1.46, т.е. $c_2 = 0.3$, $n_{c,2} = 1.46$. Согласно данным таблицы $n_2 = 1.4$, поэтому, в силу предположения (3.4), показатель базового вещества до просветления должен быть равен $n_{0,2}^{(0)} = (n_2 - c_2 n_{c,2})/(1 - c_2) \approx 1.37$.

Таблица 2. Результаты численного эксперимента при $n_2^* = 1.48$

Глубина залегания включения в просветляющем слое	Точка максимума функции $J_1(n_{0,2})$	Точка максимума функции $\widetilde{J}_2(n_{0,2})$
$l = 0.05$мм	$n_{0,2} = 1.410$	$n_{0,2} = 1.417$
$l = 0.1$мм	$n_{0,2} = 1.430$	$n_{0,2} = 1.426$
$l = 0.5$мм	$n_{0,2} = 1.455$	$n_{0,2} = 1.449$

Численные эксперименты проводились по следующей схеме. Показатель преломления $n_{0,2}$ менялся в пределах от $n_{0,2}^{(0)}$ до $n_{c,2}$ с шагом 0.005. В соответствии с соотношениями (3.4)-(3.7), это приводило к изменению других характеристик слоев G_2^- и G_2^+, оставляя неизменными параметры сред G_1, G_2^*. На дискретной сетке значений $n_{0,2}$ в точке $(z,\nu) = (z_0, -1)$ вычислялось решение прямой задачи f^*, а затем целевая функция $J_1(n_{0,2})$, в которой баллистические составляющие f_b и f_b^* находились аналитически. Решая прямую задачу мы предполагали, что слабоколлимированное в направлении $\nu = 1$ излучение поступает в среду G только через границу $z = z_0$: $h(\nu) = e^{-2(1-\nu)^2}$, $\nu > 0$, $h(\nu) = 0$, $\nu < 0$.

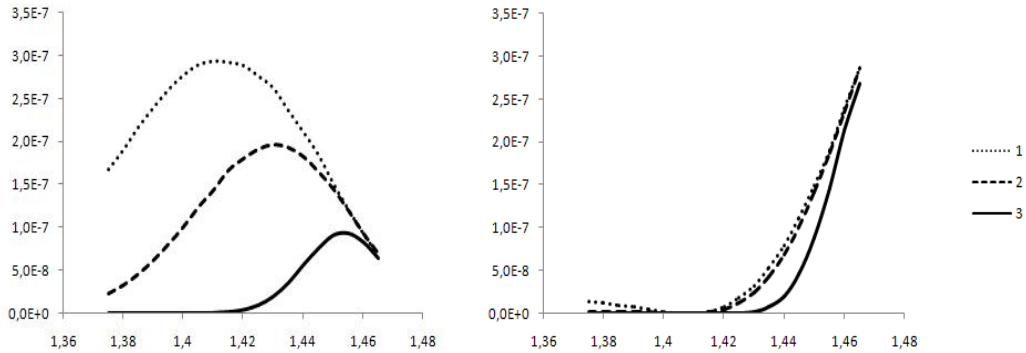
Из полученного дискретного набора значений функции J_1 выбиралось максимальное, а соответствующее ему значение показателя преломления базового вещества просветляющего слоя принималось за приближенное решение задачи 1.

Были проведены серии экспериментов. В первой серии варьировалось местоположение инородного включения в среде G_2, таким образом, что слой G_2^- имел в этой серии увеличивающуюся толщину $l = 0.05, 0.1, 0.5$(мм), а толщина слоя G_2^+, напротив, уменьшалась $1.2 - l = 1.15, 1.1, 0.7$. Показатель преломления макронеоднородности n_2^* выбирался равным 1.48. Индикатриса рассеяния в каждом слое вычислялась по формуле (3.6), причем параметр анизотропии $g_2(n_{0,2})$ в просветляющем слое менялся от $g_2^{(0)} = 0.76$ до $g_2^{(c)} = 0.8$.

На рисунке 1а представлены графики функции $J_1(n_{0,2})$ при $n_{0,2} \in [1.37, 1.47]$ для $l = 0.05, 0.1, 0.5$. Нетрудно видеть, что максимум целевой функции смещается "в право" при увеличении l и стремится к показателю преломления рассеивающих частиц $n_{c,2} = 1.46$, что согласуется с качественным поведение асимптотической формулы (3.12) для оптимального решения. Конкретные оптимальные значения коэффициента преломления базового вещества в просветляющем слое, полученные в этой серии экспериментов, оказались близки к соответствующим приближенным решениям вспомогательной экстремальной задачи 2 с целевой функцией $\widetilde{J}_2$ (см. табл. 2).

Вторая серия экспериментов была аналогична первой с той лишь разницей, что показатель преломления включения n_2^* был меньше показателя преломления рассеивающих частиц $n_{c,2}$ и равнялся 1.42. В этом случае, согласно результатам решения вспомогательной задачи, оптимальный показатель преломления должен быть больше $n_{c,2}$, но в силу физических предположений относительно параметра анизотропии и коэффициента рассеяния решение задачи ищется на промежутке $[n_{0,2}^{(0)}, n_{c,2}]$. Поэтому, как видно из рисунка 1б, максимум функции $J_1(n_{0,2})$ достигается на конце интервала в точке $n_{0,2} = n_{c,2}$ для всех трех случаев $l = 0.05, 0.1, 0.5$(мм).

Отметим, что расширение возможного диапазона изменения параметра анизотропии $g_2(n_{0,2})$ от $[0.76, 0.8]$ до $[0.76, 1]$ и, следовательно, изменение фазовой



(а) (б)

Рис. 1. На рисунках (а) и (б) изображены графики целевой функции $J_1(n_{0,2})$ для показателей преломления инородного включения $n_2^* = 1.48$ и $n_2^* = 1.42$, соответственно, при различном местоположении включения в просветляющем слое: **1** — при $l = 0.05$мм; **2** — при $l = 0.1$мм; **3** — при $l = 0.5$мм;

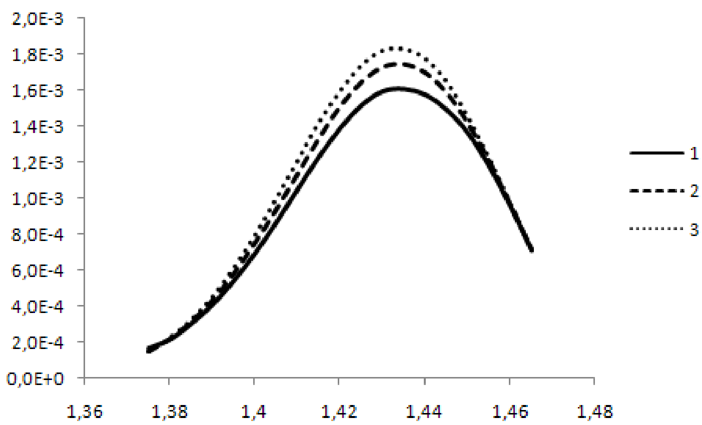


Рис. 2. На рисунке изображены графики целевой функции $J_1(n_{0,2})$ для среды с исключенным эпидермисом при глубине залегания инородного включения $l = 0.1$мм для различных вариантов диапазона изменения параметра анизотропии рассеяния в дермисе: **1** — при $0.76 \leqslant g \leqslant 0.8$; **2** — при $0.76 \leqslant g \leqslant 0.9$; **3** — при $0.76 \leqslant g \leqslant 1$;

функции рассеяния (3.6), практически не изменили график целевой функции $J_1(n_{0,2})$. Хотя следовало бы ожидать, что увеличение числа фотонов рассеянных вперед должно приводить к увеличению баллистической составляющей в отраженном сигнале. На наш взгляд одной из причиной этого является то, что в рассматриваемой постановке задачи первый слой не является просветляющим и изменение параметра анизотропии в нем не происходит. Это приводит к заметному подавлению баллистической составляющей излучения в эпидермисе.

Чтобы подтвердить это предположение была проведена серия экспериментов с модельной средой из таблицы 1 в случае когда эпидермис (G_1) был исключен из нее. Глубина залегания стекла в дерме предполагалась равной $l = 0.1$мм.

В этом случае действительно наблюдается увеличение доли баллистической составляющей при увеличении параметра анизотропии (см. рис. 2). Тем не менее положение точки максимума функции $J_1(n_{0,2})$ остается практически неизменным.

Таким образом, результаты экспериментов показывают, что оптимальный коэффициент преломления просветляющей жидкости существенным образом зависит от характеристик искомой макронеоднородности и необязательно близок к показателю преломления рассеивателей излучения в среде.

Список литературы

[1] И.В. Прохоров, "О структуре множества непрерывности решения краевой задачи для уравнения переноса излучения", *Математические заметки*, **86**:2 (2009), 256-272 MR2584559.

[2] И.В Прохоров, В.М. Мун, "Краевая задача для уравнения переноса амплитудно-модулированного излучения", *Дальневост. матем. журн.*, **9**:1-2 (2009), 150-160 MR2742465.

[3] И.В. Прохоров, И.П. Яровенко, "Анализ томографического контраста при иммерсионном просветлении слоистых биотканей", *Квантовая электроника*, **40**:1 (2010), 77–82.

[4] В.В. Тучин, "Исследование биотканей методами светорассеяния", *Успехи физических наук*, **167**:5 (1997), 517-539.

[5] Д.А. Зимняков, В.В. Тучин, "Оптическая томография тканей", *Квантовая электроника*, **32**:10 (2002), 849–867.

[6] Т.А. Гермогенова, *Локальные свойства решений уравнений переноса*, М., Наука, 1986 MR0934207.

[7] И.В. Прохоров, "О разрешимости краевой задачи для уравнения переноса излучения с обобщенными условиями сопряжения на границе раздела сред", *Известия РАН. Серия математическая*, **67**:6 (2003), 169–192 MR2032094.

[8] М. Борн, Э. Вольф, *Основы оптики*, М., Наука, 1973.

[9] S. R. Arridge, "Optical tomography in medical imaging", *Inverse Problems*, **15**:2 (1999), R41–R93 MR1684463.

[10] И.В. Меглинский, "Моделирование спектров отражения оптического излучения от случайно-неоднородных многослойных сильно рассеивающих и поглощающих свет сред методом Монте-Карло", *Квантовая электроника*, **31**:12 (2001), 1101–1107.

[11] А.Н. Башкатов, Э.А. Генина, В.В. Тучин, *Исследование оптических и диффузионных явлений в биотканях при воздействии осмотически активных иммерсионных жидкостей*, Саратовский гос. ун-т, Саратов, 2005.

Прохоров Игорь Васильевич
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: prh@iam.dvo.ru

Яровенко Иван Петрович
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690041, Владивосток, Россия
E-mail address: yarovenko@iam.dvo.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.160–171 (2011) УДК 517.958
MSC 35R30

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В.Г. РОМАНОВ

Abstract. Investigations of some inverse problems for integro-differential equations of electrodynamics and viscoelasticity are presented. Stability estimates of solutions and uniqueness theorems for these problems are stated.

Keywords: stability estimates, uniqueness, electrodynamics, viscoelasticity.

1. Введение

Ниже излагаются результаты исследования ряда постановок обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и упругости. Эти уравнения отличаются от обычных уравнений наличием интегральных членов. При этом интегральный член в уравнениях электродинамики учитывает дисперсию среды, а интегральные слагаемые в уравнениях упругости учитывают вязкость среды. При этом решения соответствующих уравнений в некоторый момент времени оказываются зависящими от предистории процесса, т.-е. определяют "память"среды. Ядра линейных интегральных операторов, входящих в уравнения, зависят от временной и пространственных переменных. Во многих случаях представляет интерес рассмотрение задач об определении этих ядер по наблюдаемой информации о решениях соответствующих дифференциальных уравнений. При этом всегда приходится делать некоторые гипотезы о

Romanov, V.G., Inverse problems for integrodifferential equations of electrodynamics and viscoelasticity.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (совместный проект с ДВО РАН № 93 — 2009).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

структуре разыскиваемых ядер. Одной из таких гипотез является предположение, что ядро интегрального оператора представимо в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от временной переменной и известна, а вторая зависит только от пространственных переменных и подлежит определению. Именно эта гипотеза используется ниже при изучении обратных задач.

Несмотря на различие интегро-дифференциальных уравнений электродинамики и упругости, постановки для них обратных задач и методы их исследования во многом схожи. Это позволяет проводить их изучение с единых позиций, что и демонстрируется в дальнейшем.

2. Обратные задачи для уравнений электродинамики с дисперсией

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\Big(\varepsilon_0(x)E(x,t)+\int\limits_{-\infty}^{t}\varepsilon(x,t-s)E(x,s)\,ds\Big)-\mathrm{rot}H(x,t)+j(x,t)=0,\\ &\mu_0(x)\frac{\partial}{\partial t}H(x,t)+\mathrm{rot}E(x,t)=0;\quad (x,t)\in\mathbb{R}^4.\end{aligned}\tag{1}$$

В этих уравнениях $\varepsilon_0(x)$, $\mu_0(x)$ — коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемости среды, а коэффициент $\varepsilon(x,t)$ — характеризует дисперсию среды. Свертка $\varepsilon*E$ отвечает некоторой "памяти"среды. Функция $j(x,t)$ представляет собой сторонний (внешний) ток. Уравнения (1) описывают распространение электромагнитных волн в дисперсных средах.

Ниже мы будем рассматривать систему уравнений (1) для случая, когда $\mu_0(x)=1$, и при нулевых начальных условиях

$$(E,H)_{t<0}=0.\tag{2}$$

Предположим, что функция $\varepsilon(x,t)$ представима в виде $\varepsilon(x,t)=k(t)\varepsilon_0(x)p(x)$, в котором $k(0)=1$ и $k(t)$ является известной функцией. Допустим, что $\mu_0(x)=1$, а носители функций $\varepsilon_0(x)-1$, $p(x)$ принадлежат некоторой компактной открытой области $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$.

Предположим, что риманова метрика $d\tau=\sqrt{\varepsilon_0(x)(dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2)}$ имеет неположительную кривизну в Ω. Пусть, кроме того, область Ω выпукла относительно геодезических. При выполнении этих условий каждая пара точек x и y в $\bar\Omega$ может быть соединена единственной геодезической. Обозначим через $\Gamma(x,y)$ геодезическую, соединяющую пару точек x и y, а через $\tau(x,y)$ ее риманову длину.

2.1. **Обратная задача для случая многих наблюдений.** Рассмотрим следующую обратную задачу. Пусть сторонний ток имеет вид импульсного диполя сосредоточенного в точке $y\in\mathbb{R}^3$ и имеющего направление j^0, т.-е. $j(x,t)=j^0\delta(x-y,t)$. Естественно принять, что $j^0\neq 0$.

Постановка обратной задачи. Пусть функция $H(x,t,y)$ задана для всех $(x,y)\in(\partial\Omega\times\partial\Omega)$ и для значений $t\le\tau(x,y)+\eta$, т.-е.

$$H(x,t,y)=f(x,t,y),\quad (x,y)\in(\partial\Omega\times\partial\Omega),\quad t\le\tau(x,y)+\eta,\tag{3}$$

где $\eta>0$ — произвольное малое фиксированное число, требуется по функции $f(x,t,y)$ найти $\varepsilon_0(x)$, $p(x)$ в Ω.

Сформулированная выше задача приводится к двум последовательно решаемым более простым задачам. Приведем некоторые аргументы, поясняющие последнее утверждение.

В случае, когда $\varepsilon_0(x) \equiv 1$, $\varepsilon(x,t) \equiv 0$, решение задачи (1), (2) имеет вид

$$
\begin{aligned}
H(x,t) &= \operatorname{rot}\Big[\frac{j^0}{4\pi|x-y|}\,\delta(t-|x-y|)\Big] \\
&= \frac{j^0\times\nu}{4\pi|x-y|}\Big[\delta'(t-|x-y|)+\frac{1}{|x-y|}\,\delta(t-|x-y|)\Big], \\
E(x,t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{j^0}{4\pi|x-y|}\,\delta(t-|x-y|)\Big]+\nabla\mathrm{div}\Big[\frac{j^0}{4\pi|x-y|}\,\theta_0(t-|x-y|)\Big] \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big\{\frac{\nu(\nu\cdot j^0)-j^0}{|x-y|}\,\delta'(t-|x-y|)+\frac{3\nu(\nu\cdot j^0)-j^0}{|x-y|^2}\,\delta(t-|x-y|) \\
&\quad +\frac{3\nu(\nu\cdot j^0)-j^0}{|x-y|^3}\,\theta_0(t-|x-y|)\Big\},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

в котором $\nu=(x-y)/|x-y|$, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда.

В дальнейшем мы принимаем, что точка $y\in\partial\Omega$ и является переменным параметром задачи, а ненулевой вектор $j^0=j^0(y)$ и направлен в точке y в касательной плоскости к $\partial\Omega$.

Лемма 1. *При сделанных выше предположениях о функциях $\varepsilon_0(x)$, $\varepsilon(x,t)$ и достаточно высокой их гладкости (скажем, $\mathbf{C}^\infty(\Omega\times\mathbb{R})$), решение задачи (1), (2) может быть представлено при малых $\eta>0$ в виде, аналогичном (4), а именно,*

$$
\begin{aligned}
&H(x,t,y)=\alpha_H(x,y)\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_H(x,y)\delta(t-\tau(x,y))+\hat H(x,t,y),\\
&E(x,t,y)=\alpha_E(x,y)\delta'(t-\tau(x,y))+\beta_E(x,y)\delta(t-\tau(x,y))+\hat E(x,t,y),\\
&\qquad\qquad t\le\tau(x,y)+\eta.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь $\alpha_H(x,y)$, $\beta_H(x,y)$, $\alpha_E(x,y)$, $\beta_E(x,y)$ являются решениями уравнений

$$
\begin{aligned}
&(2\nabla\tau(x,y)\cdot\nabla+\Delta\tau(x,y)+\varepsilon_0(x)p(x))\alpha_H(x,y)-\nabla\varepsilon_0(x)\times\alpha_E(x,y)=0,\\
&(2\nabla\tau(x,y)\cdot\nabla+\Delta\tau(x,y)+\varepsilon_0(x)p(x))\beta_H(x,y)-\Delta\alpha_H(x,y)\\
&+k'(0)\varepsilon_0(x)p(x)\alpha_H(x,y)-\nabla p(x)\times\alpha_E(x,y)-\nabla\varepsilon_0(x)\times\beta_E(x,y)=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x)\alpha_E(x,y)+\nabla\tau(x,y)\times\alpha_H(x,y)=0,\\
&\varepsilon_0(x)\beta_E(x,y)+\varepsilon_0(x)p(x)\alpha_E(x,y)+\nabla\tau(x,y)\times\beta_H(x,y)-\mathrm{rot}\alpha_H(x,y)=0,
\end{aligned}
$$

удовлетворяющие при стремлении x к y вдоль геодезической $\Gamma(x,y)$ предельным условиям

$$
\lim_{x\to y}[\alpha_H(x,y)\tau(x,y)]=\frac{j^0(y)\times\nu(y)}{4\pi},
$$

$$
\lim_{x\to y}[\beta_H(x,y)\tau(x,y)]=\frac{j^0(y)\times\nu(y)}{4\pi},
$$

в которых $\nu(y)$ — единичный вектор касательной к $\Gamma(x,y)$ в точке y. Функции $\hat H(x,t,y)$, $\hat E(x,t,y)$ — некоторые регулярные при $x\neq y$ функции переменных (x,t) и, кроме того, $\hat H(x,t,y)=0$, $\hat E(x,t,y)=0$ для всех $t<\tau(x,y)$.

Доказательство этой леммы дано в [5].

Из формулы (5) следует, что

$$f(x,t,y) = \alpha_H(x,y)\delta'(t-\tau(x,y)) + \beta_H(x,y)\delta(t-\tau(x,y)) + \hat{f}(x,t,y).$$

Здесь $\hat{f}(x,t,y)$ — регулярная часть функции $f(x,t,y)$. Заметим, что $\alpha_H(x,y) \neq 0$ для всех $(x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega)$ и $x \neq y$ (см. ниже следствие из леммы 2). Пусть точки $x \in \partial\Omega$, $y \in \partial\Omega$ фиксированы. Рассмотрим функцию $f(x,t,y)$ как функцию переменной t. Эта функция тождественно равна нулю при $t < \tau(x,y)$ и имеет ненулевую сингулярную часть при $t = \tau(x,y)$, так как $\alpha_H(x,y) \neq 0$. Следовательно, $\tau(x,y) = \sup\{\tau\}$, $\{\tau\} = \{\tau \in \mathbb{R} |\, u(x,t,y) = 0, \text{если } t < \tau\}$. Далее, заметим, что

$$\alpha_H(x,y) = \lim_{t\to\tau(x,y)+0} \int\limits_{-\infty}^{t} (t-s) f(x,s,y)\, ds, \quad (x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega).$$

Поэтому поставленную выше обратную задачу можно переформулировать так: найти $\varepsilon_0(x)$, $p(x)$ внутри Ω по заданным функциям $\tau(x,y)$, $\alpha_H(x,y)$ для всех $(x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega)$. Последняя в свою очередь сводится к двум последовательно решаемым задачам:

Задача 1. Найти $\varepsilon_0(x)$ внутри Ω по функции $\tau(x,y)$, заданной для любой пары точек x, y, принадлежащих $\partial\Omega$.

Задача 2. При известной функции $\varepsilon_0(x)$ найти $p(x)$ внутри Ω по заданной функции $\alpha_H(x,y)$ для $(x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega)$.

Задача 1 носит название *обратной кинематической задачи* и хорошо изучена (см., например, книги [10, 11]). Оценки устойчивости ее решения были получены в случае двумерного пространства Р.Г. Мухометовым в [3], а для случае пространства более высокой размерности в работах [4, 2, 1]. Рассмотрим здесь задачу 2.

Имеет место следующая лемма [5].

Лемма 2. *Для функции $|\alpha_H(x,y)|$ имеет место формула*

$$|\alpha_H(x,y)| = \frac{|j^0(y) \times \nu(y)| \sqrt{\det(\frac{\partial\zeta}{\partial x})}}{4\pi\tau(x,y)} \exp\Big(-\frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma(x,y)} p(\xi)\, d\tau\Big), \tag{6}$$

в которой $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \nu(y)\tau(x,y)$ — римановы координаты точки x, а $\det(\frac{\partial\zeta}{\partial x})$ — якобиан перехода от римановых координат к декартовым.

Из формулы (6) для $(x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega)$ вытекает равенство

$$\int\limits_{\Gamma(x,y)} p(\xi)\, d\tau = -2 \ln \frac{4\pi\tau(x,y)|\alpha_H(x,y)|}{|j^0(y) \times \nu(y)| \sqrt{\det(\frac{\partial\zeta}{\partial x})}} \equiv g(x,y), \tag{7}$$

которое сводит рассматриваемую задачу 2 к задаче интегральной геометрии, изученной в работах [12, 2, 1]. Приведем результат, связанный с устойчивостью ее решения, следуя работе [11].

Пусть функция $x = \chi(\xi)$ осуществляет взаимно однозначное отображение класса $\mathbf{C}^2$ единичной сферы S^2 с центром в начале координат на $\partial\Omega$ так, что положительная ориентация на $\partial\Omega$ соответствует положительной ориентации на S^2. Пусть далее θ, φ — сферические координаты точки ξ и $\Upsilon = [0,\pi] \times [0, 2\pi]$ — область изменения переменных θ, φ. Пусть точки $x \in \partial\Omega$ и $y \in \partial\Omega$ отображаются в точки $\xi(\theta_1, \varphi_1)$ и $\xi(\theta_2, \varphi_2)$, соответственно. Тогда $x = \chi(\xi(\theta_1, \varphi_1)) \equiv x(\theta_1, \varphi_1)$, $y = \chi(\xi(\theta_2, \varphi_2)) \equiv y(\theta_2, \varphi_2)$. Обозначим также $g(x(\theta_1, \varphi_1), y(\theta_2, \varphi_2)) \equiv \bar{g}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$. Тогда равенство (7) может быть записано в виде

$$\int\limits_{\Gamma(x(\theta_1,\varphi_1),y(\theta_2,\varphi_2))} p(\xi)\, d\tau = \bar{g}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2),\ ((\theta_1, \varphi_1), (\theta_2, \varphi_2)) \in \Upsilon \times \Upsilon.$$

Дополнительно обозначим $\tau(x(\theta_1, \varphi_1), y(\theta_2, \varphi_2)) \equiv \bar{\tau}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$ и через $I(\bar{g}, \bar{\tau})$ определитель

$$I(\bar{g}, \bar{\tau}) = \det \begin{pmatrix} 0 & \bar{g}_{\theta_1} & \bar{g}_{\varphi_1} \\ \bar{g}_{\theta_2} & \bar{\tau}_{\theta_1\theta_2} & \bar{\tau}_{\varphi_1\theta_2} \\ \bar{g}_{\varphi_2} & \bar{\tau}_{\theta_1\varphi_2} & \bar{\tau}_{\varphi_1\varphi_2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Если $\partial\Omega \in \mathbf{C}^2$, $\varepsilon_0(x) \in \mathbf{C}^2(\Omega \cup \partial\Omega)$, $p(x) \in \mathbf{C}^1(\Omega \cup \partial\Omega)$ и семейство геодезических регулярно в Ω, то выполнена следующая оценка устойчивости решения*

$$\int\limits_{\Omega} p^2(x)\varepsilon_0^{3/2}(x)\, dx \leq -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{\Upsilon\times\Upsilon} I(\bar{g}, \bar{\tau})\, d\theta_1 d\varphi_1 d\theta_2 d\varphi_2.$$

2.2. **Обратная задача для случая одного наблюдения.** Возьмем в качестве стороннего тока $j(x,t)$ функцию $j = j_0\delta(t)\delta(x_1)$, в которой $j_0 = (0,0,1) = \mathbf{e_3}$, $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Здесь и в дальнейшем, $\mathbf{e_k}$ означает единичный орт оси x_k, $k = 1,2,3$. Предполагается, что плоскость $x_1 = 0$, на которой локализована дельта-функция $\delta(x_1)$, не принадлежит замыканию области Ω, для определенности принимается, что Ω лежит в полуплоскости $\mathbb{R}^3_d = \{x |\, x_1 \geq d\}$ при некотором $d > 0$. Также полагается $\varepsilon_0(x) = 1$ вне Ω.

Введем в рассмотрение функцию $\tau(x)$ как решение задачи Коши

$$|\nabla\tau(x)|^2 = \varepsilon_0(x); \quad \tau|_{x_1=0} = 0.$$

Пусть $G = G(T)$ — цилиндрическая область: $G(T) = \{(x,t) |\, x \in \Omega, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$, где T — некоторое положительное число, $S = S(T) = \{(x,t) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}) |\, \tau(x) < t < T + \tau(x)\}$ — боковая поверхность этой области, а $\Sigma = \Sigma(T)$ — ее нижнее основание: $\Sigma(T) = \{(x,t) |\, x \in \Omega, t = \tau(x) + 0\}$.

Как следует из изложенного ниже (см. лемму 3), функции $E(x,t)$, $H(x,t)$, являющиеся решением задачи (1)-(2), представимы, при некоторых предположениях о коэффициентах уравнения (1), в виде суммы некоторых сингулярных функций, имеющих носитель на характеристической поверхности $t = \tau(x)$, и регулярных функций $\bar{E}(x,t)$, $\bar{H}(x,t)$, с носителем принадлежащим множеству $\{(x,t) |\, t \geq \tau(x)\}$, а именно,

$$E(x,t) = \alpha_E(x)\delta(t - \tau(x)) + \bar{E}(x,t), \quad H(x,t) = \alpha_H(x)\delta(t - \tau(x)) + \bar{H}(x,t).$$

Постановка обратной задачи. Пусть функция $\varepsilon_)(x)$ задана и для решения задачи (1)-(2) известны на S следы вектора магнитной напряженности H и его нормальной производной, а также коэффициент при сингулярной части функции $H(x,t)$:

$$(8)\qquad H|_S = g(x,t), \quad \frac{\partial H}{\partial n}\Big|_S = h(x,t), \quad \alpha_H|_{\partial\Omega} = \alpha'_H(x).$$

Требуется по заданным функциям $g(x,t)$, $h(x,t)$ и $\alpha'_H(x)$ найти функцию $p(x)$ в области Ω.

Для фиксированных чисел $q_0 > 0$, $d > 0$ обозначим через $\Lambda(q_0, d)$ множество функций (ε_0, k, p), удовлетворяющих следующим условиям:
1) $\operatorname{supp} p(x) \subset \Omega$, $\operatorname{supp}(\varepsilon_0(x) - 1) \subset \mathbb{R}^3_d$,
2) $\|p\|_{\mathbf{C}^8(\mathbb{R}^3)} \le q_0$, $\|\varepsilon_0 - 1\|_{\mathbf{C}^{10}(\mathbb{R}^3))} \le q_0$, $\|k-1\|_{\mathbf{C}^5[0,\infty)} \le q_0$.
Для решения прямой задачи справедлива следующая

Лемма 3. *Для каждого $T_0 > 0$ найдется положительное число $q_0^* = q_0^*(T_0)$ такое, что для любых $(\varepsilon_0, k, p) \in \Lambda(q_0, d)$, $q_0 \le q_0^*$, решение (E,H) задачи (1)-(2) представимо в области $K(T_0) = \{(x,t) |\, \tau(x) \le T_0,\ 0 \le t \le T_0 - \tau(x)\}$ в виде*

$$E(x,t) = \alpha_E(x)\delta(t-\tau(x)) + \beta_E(x)\theta_0(t-\tau(x)) + \gamma_E(x)\theta_1(t-\tau(x)) + \hat{E}(x,t),$$
$$H(x,t) = \alpha_H(x)\delta(t-\tau(x)) + \beta_H(x)\theta_0(t-\tau(x)) + \gamma_H(x)\theta_1(t-\tau(x)) + \hat{H}(x,t),$$

в котором $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда, т.-е., $\theta_0(t) = 1$ для $t \ge 0$ и $\theta_0(t) = 0$ для $t < 0$, а $\theta_1(t) = t\,\theta_0(t)$. Коэффициенты α_E, β_E, γ_E и α_H, β_H, γ_H вне $\mathbb{R}^3_d$ определены равенствами:

$$\alpha_H(x) = \alpha^0_H(x) = \frac{1}{2}\mathbf{e}_2 \operatorname{sign}(x_1), \quad \beta_H(x) = \gamma_H(x) = 0,$$
$$\alpha_E(x) = \alpha^0_E(x) = -\frac{1}{2}\mathbf{e}_3,, \quad \beta_E(x) = \gamma_E(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}^3_d,$$

а в области $\mathbb{R}^3_d$ как решения уравнений

$$\begin{aligned}
&(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\alpha_H(x) - \nabla\varepsilon_0(x) \times \alpha_E(x) = 0,\\
&(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\beta_H(x) - \Delta\alpha_H(x)\\
&\qquad + k'(0)p(x)\alpha_H(x) - \nabla p(x) \times \alpha_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x) \times \beta_E(x) = 0,\\
&(2\nabla\tau(x)\cdot\nabla + \Delta\tau(x) + p(x))\gamma_H(x) - \Delta\beta_H(x) + k'(0)p(x)\beta_H(x)\\
&\qquad - \nabla p(x) \times \beta_E(x) - \nabla\varepsilon_0(x) \times \gamma_E(x) + k''(0)p(x)\alpha_H(x)\\
&\qquad - k'(0)\nabla p(x) \times \alpha_E(x) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x) \times \alpha_H(x) = 0,\\
&\varepsilon_0(x)\beta_E(x) + p(x)\alpha_E(x) + \nabla\tau(x) \times \beta_H(x) - \mathrm{rot}\alpha_H(x) = 0,\\
&\varepsilon_0(x)\gamma_E + p(x)\beta_E(x) + \nabla\tau(x) \times \gamma_H(x) - \mathrm{rot}\beta_H(x) + k'(0)p(x)\alpha_E(x) = 0,
\end{aligned}$$

удовлетворяющие при $x_1 = d$ граничным условиям, обеспечивающим непрерывность этих коэффициентов при переходе через плоскость $x_1 = d$:

$$\alpha_H|_{x_1=d} = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_2, \quad \beta_H|_{x_1=d} = \gamma_H|_{x_1=d} = 0.$$

При этом $\alpha_E \in \mathbf{C}^8(D(T_0))$, $\beta_E \in \mathbf{C}^6(D(T_0))$, $\gamma_E \in \mathbf{C}^4(D(T_0))$, $D(T_0) = \{x|\tau(x) \le T_0\}$, $\alpha_H \in \mathbf{C}^8(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $\beta_H \in \mathbf{C}^6(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $\gamma_H \in \mathbf{C}^4(D^+(T_0) \cup D^-(T_0))$, $D^+(T_0) = D(T_0) \cap \{x|\, x_1 > 0\}$, $D^-(T_0) = D(T_0) \cap \{x|\, x_1 < 0\}$, а функции

$\hat{E}(x,t)$, $\hat{H}(x,t)$, вместе с частными производными по переменной t, принадлежат классу $\mathbf{H}^3(\Sigma(T_0,t_0))$, $\Sigma(T_0,t_0) = \{(x,t) \in K(T_0) | \, \tau(x) \le \min(t_0, T_0 - t_0)\, , t = t_0\}$, $t_0 \in (0,T_0)$, и тождественно равны нулю для $t \le \tau(x)$. Кроме того, существует положительная постоянная C такая, что для всех $q_0 \le q_0^*$ справедливы неравенства

$$
\begin{aligned}
|\alpha_E(x) - \alpha_E^0(x)| \le Cq_0, \quad |\beta_E(x)| \le q_0 C, \quad |\gamma_E(x)| \le q_0 C, \quad x \in D(T_0),\\
|\hat{E}(x,t)| \le q_0 C, \quad |\hat{E}_t(x,t)| \le q_0 C, \quad (x,t) \in K(T_0),\\
|\alpha_H(x) - \alpha_H^0(x)| \le Cq_0, \quad |\beta_H(x)| \le q_0 C, \quad |\gamma_H(x)| \le q_0 C, \quad x \in D(T_0),\\
|\hat{H}(x,t)| \le q_0 C, \quad |\hat{H}_t(x,t)| \le q_0 C, \quad (x,t) \in K(T_0).
\end{aligned}
$$

Основной результат исследования этой обратной задачи составляет следующая теорема устойчивости решения обратной задачи.

Теорема 2. *Пусть $(\varepsilon_0, k, p_i) \in \Lambda(q_0, d)$, $i = 1,2$, а $g^i(x,t)$, $h^i(x,t)$, $\alpha_H^i|_{\partial\Omega}(x)$ — данные Коши, соответствующие решению задачи (1)-(3) при $p = p_i(x)$. Пусть, кроме того, область Ω содержится в некотором римановом шаре радиуса ρ и выполнено условие*

$$T > 4\rho.$$

Тогда найдутся положительные числа q_0^*, C такие, что при всех $q_0 \le q_0^*$ выполнено неравенство

$$
\begin{aligned}
\|p_1 - p_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \le \quad & C \Big(\|g_t^1 - g_t^2\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|h_t^1 - h_t^2\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} \\
& + \|\alpha_H^1 - \alpha_H^2\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} + \|\beta_H^1 - \beta_H^2\|^2_{\mathbf{H}^2(\partial\Omega)} \Big).
\end{aligned}
$$

В этой формуле $\beta_H^i(x) = g^i(x, \tau(x)+0)$, $x \in \partial\Omega$, $i = 1,2$.

Из этой теоремы, в качестве следствия, вытекает теорема единственности.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и данные Коши, соответствующие решению задачи (1)-(2) для $p = p_i$, $i = 1,2$, совпадают, т.-е., $g^1 = g^2$, $h^1 = h^2$, $\alpha_H^1|_{\partial\Omega} = \alpha_H^2|_{\partial\Omega}$. Тогда найдется положительное число q_0^* такое, что при $q_0 \le q_0^*$ в области Ω выполнено равенство $p_1(x) = p_2(x)$.*

Доказательство леммы 3 и теорем 2 и 3 дано в работе [6] и анонсировано в заметке [7].

3. Обратные задачи для уравнений вязкоупругости

Система уравнений вязкоупругости с нулевыми начальными данными и сосредоточенной импульсной силой имеет вид

$$\rho(x)\,\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f}^0 \delta(x-y,t), \quad \mathbf{u}|_{t<0} \equiv 0. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\mathbf{f}^0 = (f_1^0, f_2^0, f_3^0)$ — числовой вектор, характеризующий направление сосредоточенной в точке $y \in \mathbb{R}^3$ силы, а оператор $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3,)$

определен равенствами

$$L_i\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j},$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda_0(x)\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{u}(x,t) + \mu_0(x)\left(\frac{\partial u_i(x,t)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x,t)}{\partial x_i}\right)$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{t}\left[\lambda(x,t-z)\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{u}(x,z) + \mu(x,t-z)\left(\frac{\partial u_i(x,z)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(x,z)}{\partial x_i}\right)\right] dz,$$

$$i,j = 1,2,3. \tag{10}$$

В этих соотношениях δ_{ij} — символ Кронекера, $\lambda_0(x)$, $\mu_0(x)$ — модули упругости, $\rho(x)$ — плотность среды, функции $\lambda(x,t)$, $\mu(x,t)$ характеризуют вязкость среды.

Примем, что $\rho(x)$, $\mu_0(x)$, $\lambda_0(x)+\mu_0(x)$ являются заданными положительными функциями, а функции $\lambda(x,t)$, $\mu(x,t)$ представимы в виде

$$\lambda(x,t) = g_1(t)\lambda_1(x), \quad \mu(x,t) = g_2(t)\mu_1(x), \tag{11}$$

в котором $g_1(t)$, $g_2(t)$ являются заданными функциями, такими что $g_1(0)=1$, $g_2(0)=1$, а $\lambda_1(x)$, $\mu_1(x)$ — неизвестными функциями.

Пусть $c_p(x) = \sqrt{(\lambda_0(x)+2\mu_0(x))/\rho(x)}$, $c_s(x) = \sqrt{\mu_0(x)/\rho(x)}$ — переменные скорости продольной и поперечной волн, соответственно, а $\tau_p(x,y)$, $\tau_s(x,y)$ — геодезические расстояния, отвечающие римановым метрикам $d\tau_p = |dx|/c_p(x)$, $d\tau_s = |dx|/c_s(x)$, $|dx| = \sqrt{dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2}$.

3.1. **Обратная задача для случая многих наблюдений.** Для однородной среды, когда $\rho(x)=\rho_0$, $\lambda_0(x)=\lambda_0$, $\mu_0(x)=\mu_0$, $\lambda(x,t)=\mu(x,t)=0$, задача (1) была решена А. Лявом [1]. Мы приводим ниже это решение в более удобной форме (см. [2]). Решение задачи (1) определяется формулой

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(x,t,y) \;&=\; \frac{f^0}{4\pi\rho\, c_s^2|x-y|}\,\delta\big(t-\tau_s(x,y)\big)\\ &+\frac{1}{4\pi\rho}\nabla\mathrm{div}\Big\{\frac{f^0}{|x-y|}\,\big[\theta_1\big(t-\tau_p(x,y)\big)-\theta_1\big(t-\tau_s(x,y)\big)\big]\Big\},\end{aligned} \tag{12}$$

в которой

$$\tau_p(x,y) = \frac{|x-y|}{c_p}, \quad c_p = \sqrt{(\lambda_0+2\mu_0)/\rho_0}, \quad \tau_s(x,y) = \frac{|x-y|}{c_s}, \quad c_s = \sqrt{\mu_0/\rho_0},$$

постоянные c_p, c_s определяют скорости распространения продольной и поперечной волн, $\theta_1(t) = t\theta_0(t)$ и $\theta_0(t)$ — функция Хевисайда: $\theta_0(t)=1$ при $t\geq 0$ и $\theta_0(t)=0$ при $t<0$.

Как видно из формулы (12), решение задачи (9) состоит из сингулярной части, с носителем расположенным на характеристических конусах $t=\tau_p(x,y)$ и $t=\tau_s(x,y)$, и регулярной части с носителем, лежащим в характеристическом коноиде $t\geq\tau_p(x,y)$. При этом регулярная часть решения имеет скачки при переходе через характеристические конуса. Аналогичную структуру имеет решение задачи (9) для гладких сред при отсутствии каустик у семейства геодезических линий.

Предположим, что обе римановы метрики простые, т.е. любая пара точек x,y может быть соединена единственной геодезической $\Gamma_p(x,y)$ и $\Gamma_s(x,y)$. В этом случае, если коэффициенты уравнения (1) обладают достаточно высокой гладкостью, решение задачи (1) представимо в виде

$$(13) \qquad u(x,t,y)=\alpha^{(p,-1)}(x,y)\delta(t-\tau_p(x,y))+\alpha^{(p,0)}\theta_0(t-\tau_p(x,y))$$
$$+\alpha^{(s,-1)}(x,y)\delta(t-\tau_s(x,y))+\alpha^{(s,0)}\theta_0(t-\tau_s(x,y))+\hat u(x,t,y)\theta_1(t-\tau_p(x,y)),$$

в котором векторные функции $\alpha^{(p,-1)}(x,y)$, $\alpha^{(s,-1)}(x,y)$ характеризуют амплитуду и направление смещений частиц упругой среды на фронтах продольной и поперечной волн, функции $\alpha^{(p,0)}(x,y)$, $\alpha^{(s,0)}(x,y)$ — величину скачков решения при переходе через эти фронты, а функция $\hat u(x,t,y)$ представляет собой непрерывную (при $x\neq y$) часть поля упругих смещений.

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ — некоторая компактная область с гладкой границей $\partial\Omega$, выпуклая относительно геодезических $\Gamma_p(x,y)$ и $\Gamma_s(x,y)$.

Рассмотрим следующую *обратную задачу*: пусть $|\alpha^{(p,-1)}(x,y)|$ и $|\alpha^{(s,-1)}(x,y)|$ известны для всех $(x,y)\in\partial\Omega\times\in\partial\Omega$; найти $\lambda_1(x)$ и $\mu_1(x)$ в Ω.

Сформулированная выше обратная задача сводится к двум задачам интегральной геометрии на семействах геодезических $\Gamma_p(x,y)$ и $\Gamma_s(x,y)$, задачам хорошо изученным, решение которых единственно и устойчиво.

Предположим, что $\rho(x)$, $\lambda_0(x)$, $\mu_0(x)$ принадлежат классу $\mathbf{C}^2(\Omega_0)$, где Ω_0 некоторая область, содержащая внутри себя $\bar\Omega$, функции $\lambda_1(x)$, $\mu_1(x)$ принадлежат $\mathbf{C}^1(\Omega_0)$, и римановы метрики, связанные со скоростями продольных и поперечных волн, являются простыми в Ω_0.

Используя технику работы [13], нетрудно найти явные выражения для вычисления $\alpha^{(p,-1)}(x,y)$ и $\alpha^{(s,-1)}(x,y)$.

Эти формулы имеют вид

$$(14) \qquad \alpha^{(p,-1)}(x,y)=\hat\alpha^{(p,-1)}(x,y)\exp\Big(\int\limits_{\Gamma_p(x,y)} b_1(\xi)\,d\tau_p'\Big),$$

$$(15) \qquad \hat\alpha^{(p,-1)}(x,y)=-\frac{c_p(x)(f^0\cdot\nabla_y\tau_p(x,y))\sqrt{J_p(x,y)}\,\nabla_x\tau_p'(x,y)}{4\pi\tau_p(x,y)c_p^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}}.$$

$$(16) \qquad \alpha^{(-1,s)}=\hat\alpha^{(-1,s)}\exp\Big(\int\limits_{\Gamma_s(x,y)} b_2(\xi)\,d\tau_s'\Big),$$

$$(17) \qquad \hat\alpha^{(-1,s)}=-\frac{c_s(x)\nabla_x\tau_s(x,y)\times(f^0\times\nabla_y\tau_s(x,y))\mathcal{T}(x,y)\sqrt{J_s(x,y)}}{4\pi\tau_s(x,y)c_s^2(y)\sqrt{\rho(x)\rho(y)}}.$$

В этих формулах $\zeta^p=(\zeta_1^p,\zeta_2^p,\zeta_3^p)$ — римановы координаты точки x при фиксированной точке y и римановой метрике, определяемой скоростью $c_p(x)$. По определению, $\zeta^p=-c_p^2(y)\tau_p(x,y)\nabla_y\tau_p(x,y)$. Аналогично, $\zeta^s=(\zeta_1^s,\zeta_2^s,\zeta_3^s)$ — римановы координаты точки x при фиксированной точке y и римановой метрике, определяемой скоростью $c_s(x)$, следовательно, $\zeta^s=-c_s^2(y)\tau_s(x,y)\nabla_y\tau_s(x,y)$. Через $J_p(x,y)$, $J_s(x,y)$ обозначены якобианы перехода от римановых координат точки x к декартовым, $J_p(x,y)=\det\Big(\frac{\partial\zeta^p}{\partial x}\Big)$, $J_s(x,y)=\det\Big(\frac{\partial\zeta^s}{\partial x}\Big)$. Кроме того, в формуле (17) использована матричная экспонента, которая определяется следующей формулой

$$\mathcal{T}(x,y) = \exp\Big\{ \int\limits_{\Gamma_s(x,y)} T(\xi,y)\,d\tau_s' \Big\} = \exp\Big\{ \int\limits_{\Gamma_s(x,y)} (\nabla \ln c_s(\xi))^t\,d\xi \Big\}, \tag{18}$$

в котором $(\nabla c_s)^t$ означает транспонированный вектор ∇c_s, т.-е. вектор-столбец, ξ переменная точка геодезической $\Gamma_s(x,y)$, $d\xi = (d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3)$, а $\tau_s' = \tau_s(\xi,y)$.

Заметим, что формулы (15), (17) совпадают с формулами (1.8)-(1.10), найденными в работе [13] для уравнений упругости ($\lambda(x,t) = \mu(x,t) = 0$).

Из формул (14), (16) следуют равенства

$$\int\limits_{\Gamma_p(x,y)} b_1(\xi)\,d\tau_p' = f_p(x,y), \quad (x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega), \tag{19}$$

$$\int\limits_{\Gamma_s(x,y)} b_2(\xi)\,d\tau_s' = f_s(x,y), \quad (x,y) \in (\partial\Omega \times \partial\Omega), \tag{20}$$

в которых

$$f_p(x,y) = \ln \frac{|\alpha^{(-1,p)}(x,y)|}{|\hat{\alpha}^{(-1,p)}(x,y)|}, \quad f_s(x,y) = \ln \frac{|\alpha^{(-1,s)}(x,y)|}{|\hat{\alpha}^{(-1,s)}(x,y)|}.$$

Правые части равенств (19), (20) являются известными функциями. Возникающие задачи о построении решений соответствующих уравнений являются задачами интегральной геометрии. Оценки устойчивости решения подобных задач были построены в работах [12, 2, 1]. Приведем теорему устойчивости решения рассматриваемой задачи, вытекающую из этих результатов.

Теорема 4. *Пусть $\rho(x)$, $\lambda_0(x)$, $\mu_0(x)$ принадлежат классу $\mathbf{C}^2(\bar{\Omega})$, семейства геодезических линий $\Gamma_p(x,y)$ и $\Gamma_s(x,y)$ регулярны внутри области $\bar{\Omega}$, а $\lambda_1(x)$, $\mu_1(x)$ принадлежат классу $\mathbf{C}^1(\bar{\Omega})$. Тогда найдется положительное число C такое, что выполнено неравенство*

$$\|\lambda_1\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\mu_1\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \le C\Big(\|f_p\|^2_{\mathbf{H}^1(\partial\Omega\times\partial\Omega)} + \|f_s\|^2_{\mathbf{H}^1(\partial\Omega\times\partial\Omega)} \Big).$$

3.2. **Двумерная обратная задача для случая одного наблюдения.** Рассмотрим относительно функции $u = u(x,t)$, $x = (x_1, x_2)$, уравнение

$$\begin{aligned} Lu \equiv u_{tt}(x,t) - \operatorname{div}\Big[\mu_0(x)\nabla u(x,t) + \int\limits_{-\infty}^{t} \mu(x,t-s)\nabla u(x,s)\,ds\Big] \\ = F(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \tag{21}$$

Это уравнение возникает в теории вязкоупругих тел с постоянной плотностью и коэффициентами Ламе не зависящими от переменной x_3. Если при этом отлична от нуля только третья компонента вектора массовых сил, то первые две компоненты u_1, u_2 вектора смещений равны нулю, а третья компонента $u_3 = u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (21). В этом уравнении $\mu_0(x)$ — коэффициент Ламе, характеризующий сопротивление материала на сдвиг, а функция $\mu(x,t)$ определяет вязкие свойства этого материала. Предположим, что $\mu(x,t)$ представима в виде

$$\mu(x,t) = k(t)\mu_0(x)p(x), \tag{22}$$

в котором $k(t)$ является заданной функцией, такой что $k(0) = 1$, а $p(x)$ — неизвестной функцией, носитель которой содержится в открытой компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция $p(x)$ описывает распределение вязких свойств среды в области Ω. Именно эта функция будет представлять основной интерес в рассматриваемой ниже задаче. Чтобы ее найти, мы рассматриваем решение уравнения (21) с функцией $F(x,t)$ вида

$$F(x,t) = \delta(x_1)\delta(t), \tag{23}$$

нулевыми начальными данными

$$u|_{t<0} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{24}$$

и предполагаем, что след решения задачи (21), (24) и его нормальной производной известен на некоторой конечной части $S \subset (\partial\Omega \times \mathbb{R})$ боковой границы области $Q = \Omega \times \mathbb{R}$,

$$u|_S = g(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = h(x,t). \tag{25}$$

Более точное описание множества S будет дано ниже. Требуется по заданным функциям $g(x,t)$ и $h(x,t)$ найти $p(x)$ в области Ω. При этом предполагается, что прямая $x_1 = 0$, на которой локализована дельта-функция $\delta(x_1)$, не принадлежит замыканию области Ω, для определенности примем, что Ω лежит в полуплоскости $x_1 > d$ при некотором $d > 0$.

Определим $S = S(T)$ как множество $S(T) = \{(x,t) \in (\partial\Omega \times \mathbb{R}) |\, \tau(x) \le t \le T + \tau(x)\}$, в котором T — некоторое положительное число.

Предположим, что риманова метрика $d\tau = \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2)/\mu_0(x)}$ является *простой* в Ω, т.-е., каждая пара точек x и y в Ω может быть соединена единственной геодезической. Примем, что $\mu_0(x) = 1$ вне Ω.

Для фиксированных чисел $q_0 > 0$, $d > 0$, обозначим через $\Lambda(q_0, d)$ множество функций (μ_0, p), удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\operatorname{supp}(p(x), \mu_0(x) - 1) \subset \Omega$, $\inf_\Omega \tau(x) \ge d$,

2) $\|p\|_{\mathbf{C}^{17}(\Omega)} \le q_0, \quad \|\mu_0 - 1\|_{\mathbf{C}^{19}(\Omega)} \le q_0$, $\|k-1\|_{\mathbf{C}^{11}[0,\infty)} \le q_0$.

Для решения прямой задачи справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть $(\mu_0, p_k) \in \Lambda(q_0, d)$, $k = 1, 2$, а (g_k, h_k) — данные Коши, соответствующие решению задачи (21)-(24) для $p = p_k$. Пусть, кроме того, область Ω содержится в некотором римановом круге радиуса ρ и выполнено условие $T > 4\rho$. Тогда найдутся положительные числа q_0^*, C такие, что при $q_0 \le q_0^*$ и любых $(\mu_0, p_k) \in \Lambda(q_0, d)$, $k = 1, 2$, выполнено неравенство*

$$\begin{aligned} \|p_1 - p_2\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} \quad \le \quad & C\Big[\sum_{j=0}^{2}\Big(\|D_t^j(g_1 - g_2)\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|D_t^j(h_1 - h_2)\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\Big) \\ & + \sum_{j=0}^{1}\|D_t^j(g_1 - g_2)\|^2_{\mathbf{L}^2(S_0)}\Big], \end{aligned}$$

в котором $D_t^j = \partial^j/\partial t^j$, $S_0 = \{(x,t) \in S |\, t = \tau(x)\}$.

Из этой теоремы, в качестве следствия, вытекает теорема единственности.

Теорема 6. *Пусть условия теоремы 1 выполнены и $g_1 = g_2$, $h_1 = h_2$. Тогда найдется положительное число q_0 такое, что для любых $(\mu_0, p_1) \in \Lambda(q_0, d)$, $(\mu_0, p_2) \in \Lambda(q_0, d)$ в области Ω выполнено равенство $p_1(x) = p_2(x)$.*

Список литературы

[1] Бейлькин Г. Я. Устойчивость и единственность решения обратной кинематической задачи сейсмики в многомерном случае. // В кн: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. Л.: Наука. 1979. С. 3-6. MR0557021

[2] Бернштейн И. Н., Гервер М. Л. О задаче интегральной геометрии для семейства геодезических и об обратной кинематической задаче сейсмики. // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 2, С. 302-305. MR0516051

[3] Мухометов Р. Г. Задача восстановления двумерной римановой метрики и интегральная геометрия. // ДАН СССР. 1977. Т. 232, № 1, С. 32-35. Zbl 0372.53034

[4] Мухометов Р. Г., Романов В. Г. К задаче отыскания изотропной римановой метрики в n-мерном пространстве. // ДАН СССР. 1978. Т. 243, № 1, С. 41-44. MR0511273

[5] Романов В. Г. Задача об определении ядра уравнений электродинамики для дисперсных сред. // *Доклады АН.* 2011. **440** (1), 21-24.

[6] Романов В. Г. Оценка устойчивости решения в обратной задаче электродинамики. // *Сибирский матем. журн* . 2011. **52** (4), 861-875. Zbl pre05963635

[7] Романов В. Г. Оценка устойчивости решения задачи об определении ядра в интегродифференциальных уравнениях электродинамики. // *Доклады АН.* 2011. **439** (4), 451-455.

[8] Романов В. Г. Оценка устойчивости решения в задаче об определении ядра уравнения вязко-упругости. // *Неклассические уравнения математической физики.* Сб. науч. работ. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010. 246 - 253.

[9] Романов В. Г. Двумерная обратная задача вязкоупругости. // *Доклады АН.* 2011. **440** (3), 310-313.

[10] Романов В. Г. Обратные задачи математической физики. М.: Наука, 1984, 264 с. MR0759893

[11] Романов В. Г. Устойчивость в обратных задачах. М.: Научный мир, 2005, 296 с. MR2244068

[12] Романов В. Г. Интегральная геометрия на геодезических изотропной римановой метрики. // ДАН СССР. 1978. Т. 241, № 2, С. 290-293. MR0500768

[13] Романов В. Г. Асимптотическое разложение решения системы уравнений упругости с сосредоточенной импульсной силой. // *Сибирский журн. индустр. матем.*, 2008. Т. XI, № 3. С. 102-118. MR2535298

Владимир Гаврилович Романов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: romanov@math.nsc.ru

S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. С.172–С.181 (2011) УДК 517.958

MSC 45K05

КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В РЕНТГЕНОВСКОЙ И ПОЗИТРОННО-ЭМИССИОННОЙ ТОМОГРАФИИ

И.П. ЯРОВЕНКО, И.Г. КАЗАНЦЕВ

Abstract. In the present report provides an overview of accounting problems in Compton scattering of X-ray and positron emission tomography. We discuss the problem of constructing a diffusion approximation for the solution of the radiative transfer equation in the case of predominance of incoherent Compton scattering. Propose a model of positron emission tomography, which takes into account single scattering. We investigate the applicability of the indicator heterogeneity in positron emission tomography.

Keywords: Compton scattering, tomography, positron emission tomography, diffusion approximation.

1. Введение

Несмотря на непрерывное совершенствование методов томографии, до сих пор актуально стоит проблема, связанная с рассеянием фотонов. Классический метод решения проблемы рассеяния заключается в коллимации исходного и принимаемого сигналов. Использование коллиматоров приводит к уменьшению случайных составляющих в детектируемом сигнале. Однако при этом снижается чувствительность томографа и на порядок увеличивается время накопления необходимого объема информации. Другой путь заключается в выборе соответствующей энергии излучения, на которой для характерных исследуемых материалов уровень рассеяния будет минимальным. И если в медицинской

Yarovenko, I.P., Kazantcev I.G. Coompton scattering in X-ray and positron emission tomography.

Работа выполнена в рамках гранта конкурса интеграционных проектов ДВО и СО РАН (проект № 09-II-СО-01-004).

Поступила 4 октября 2011 г., опубликована 14 ноября 2011 г.

томографии есть возможность подобрать такой уровень энергии, то в промышленной томографии, где исследуются более плотные материалы, эта проблема стоит особенно остро и, как правило, не удается достичь компромисса между необходимой глубиной проникновения излучения в вещество и величиной уровня рассеяния.

Из физических экспериментов известно, что в современных сканерах рассеянные фотоны составляют от 30 до 70 процентов общего числа регистрируемых фотонов, при этом в большинстве томографов используются диапазоны энергии, где среди всех видов рассеяния преобладает комптоновское рассеяние. В связи с достигнутым за последние два десятилетия прогрессом стало возможным создание детекторов с достаточно высоким (до 2-3 процентов) разрешением по энергии. Поэтому актуальной становится задача не только коррекции или отбрасывания рассеянных фотонов, но и использования их в процессе построения томограмм. С этой целью необходимо иметь инструмент моделирования регистрации потока рассеянных фотонов, подобный проекционной модели классической томографии. Также актуально стоит задача построения новых методов обработки рассеянного сигнала, с целью выделения из него информации о структуре исследуемой среды.

В настоящем сообщении дается обзор авторских работ [1, 2, 3, 4], посвященных проблематике учета комптоновского рассеяния в задачах рентгеновской и позитронно-эмиссионной томографии. Исследования проведенные авторами условно можно разделить на три группы. Первое направление исследований связано с проблемой построения диффузионного приближения для решения полихроматического уравнения переноса излучения в случае преобладания (среди остальных видов взаимодействия излучения с веществом) некогерентного комптоновского рассеяния.

Вторая группа посвящена построению и апробации модели позитронно-эмиссионной томографии, позволяющей учитывать однократное комптоновское рассеяние. Третье направление включает в себя исследование применимости индикатора неоднородности в задачах позитронно-эмиссионной томографии.

2. Диффузионное приближение для уравнения переноса излучения с комптоновским рассеянием

Будем считать, что процесс переноса излучения рассматривается в некоторой области G и пусть фотоны в процессе взаимодействия излучения с веществом могут рассеиваться только по закону Комптона. Последнее предположение приводит к тому, что при переходе, в результате рассеяния, фотона с характеристиками (ω, α) в фотон с характеристиками (ω', α') эти переменные связаны соотношением Комптона, которое может быть записано следующим образом:

$$\alpha' = g(\omega \cdot \omega', \alpha), \qquad g(\omega \cdot \omega', \alpha) = \frac{\alpha}{1 - \alpha(1 - \omega \cdot \omega')}, \tag{1}$$

где $\omega \cdot \omega'$ означает скалярное произведение векторов ω и ω', описывающих направления распространения фотона до и после рассеяния, соответственно. Переменная ω изменяется на единичной сфере Ω, а переменная ω' принадлежит подмножеству единичной сферы $\Omega_{\omega,\alpha} = \{\omega' : \omega' \in \Omega, \ \omega \cdot \omega' \geq 1 - 1/\alpha + 1/\overline{\alpha}\}$ и верны неравенства: $\alpha \leq g(\omega \cdot \omega', \alpha) \leq \overline{\alpha}$, где $\overline{\alpha}$ – максимальная энергия излучения испускаемая источниками.

Уравнение переноса в этом случае будет иметь вид [5]:

$$(2)\quad \omega\cdot\nabla_r f(r,\omega,\alpha)+\mu(r,\alpha)f(r,\omega,\alpha)= \\ =\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}} k(r,\omega,\omega',\alpha)f(r,\omega',g(\omega\cdot\omega',\alpha))d\omega'+J(r,\omega,\alpha).$$

Здесь $f(r,\omega,\alpha)$ — плотность потока излучения в точке $r\in G$, распространяющегося в направлении $\omega\in\Omega$ и имеющего энергию $\alpha\in[\underline{\alpha},\overline{\alpha}]$; $\mu(r,\alpha)$ — коэффициент полного взаимодействия излучения со средой в точке r при энергии α; $J(r,\omega,\alpha)$ — плотность внутренних источников излучения. Функция $k(r,\omega,\omega',\alpha)$ называется индикатрисой рассеяния и главная зависимость в функции k определяется сечением Кляйна-Нишины [6].

Согласно стандартной схеме построения диффузионного приближения [7], функции $f(r,\omega,\alpha)$ и $J(r,\omega,\alpha)$ раскладываются в ряды Фурье, по полной системе сферических функций и в разложении ограничиваются лишь нулевым и первым членами. Также предполагается, что фотоны рассеиваются преимущественно на малые углы, так что $\omega\cdot\omega'\sim 1$. Раскладывая интеграл столкновений в ряд Тейлора по переменной α и ограничиваясь в разложении лишь первым членом, от уравнения переноса излучения (2) приходим к следующему уравнению:

$$(3)\qquad -\operatorname{div_r}\Big[D(r,\alpha)\nabla_r f_0(r,\alpha)\Big]+\mu_a^*(r,\alpha)f_0(r,\alpha)=\widetilde{J}(r,\alpha).$$

Здесь $f_0(r,\alpha)=\int\limits_{\Omega}f(r,\omega,\alpha)d\omega$, $D(r,\alpha)=\Big(3(\mu(r,\alpha)-\overline{\nu}(r,\alpha))\Big)^{-1}$, $\mu_a^*(r,\alpha)=\mu(r,\alpha)-\mu_s^*(r,\alpha)$, $\widetilde{J}(r,\alpha)=J_0(r,\alpha)+\operatorname{div_r}\Big[D(r,\alpha)J_1(r,\alpha)\Big]$.

В последнем соотношении использованы следующие обозначения:

$$(4)\quad \mu_s^*(r,\alpha)=\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}}k(r,\omega,\omega',\alpha,\alpha')d\omega',\quad \overline{\nu}(r,\alpha)=\int\limits_{\Omega_{\omega,\alpha}}(\omega\cdot\omega')k(r,\omega,\omega',\alpha,\alpha')d\omega'.$$

Функция $\overline{\nu}(r,\alpha)$ обычно называется фактором анизотропии и представляет собой средний косинус угла рассеяния в точке r на энергии α. Величина $\mu_s^*(r,\alpha)$ называется двойственным коэффициентом рассеяния [7]. Ее отношение к коэффициенту ослабления показывает какая часть фотонов в точке r с первоначальной энергией $\alpha'\in[\alpha,\overline{\alpha}]$ в результате комптоновского рассеяния на различные углы приобретет энергию α.

Данное уравнение будет объектом нашего дальнейшего исследования. Не сложно заметить, что по своей форме оно совпадает с уравнением, которое соответствует традиционному диффузионному приближению в моноэнергетическом случае [6]. Основным отличием является появление в ней коэффициента $\mu_a^*(r,\alpha)$ взамен $\mu_a(r,\alpha)$. Величина $\mu_a^*(r,\alpha)$ называется двойственным коэффициентом поглощения [6]. Не смотря на то, что уравнение (3) содержит энергетическую переменную α только как параметр, наличие коэффициента $\mu_a^*(r,\alpha)$ позволяет учитывать перераспределение энергии за счет комптоновского рассеяния. Необходимо заметить, что данная функция зависит не только от самой среды, но и от максимальной энергии источников излучения.

Для проверки адекватности полученной модели проводилось сравнение решения уравнения диффузии (3) с усредненным решением интегро-дифференциального уравнения переноса излучения (2). В связи с тем, что уравнение переноса излучения не имеет аналитического решения даже в случае довольно простых областей, для его решения применялся метод Монте-Карло. Во всех расчетах моделировалось 10^{11} траекторий и отслеживалось до 20 актов взаимодействия излучения со средой. Данные о сечениях взаимодействия излучения с веществом брались из таблиц Хабла - Зельтцера [8].

Проведенное исследование показало, что уравнение диффузии (3) может быть использовано для приближенного описания изменения интенсивности излучения в результате комптоновского рассеяния. Расчеты, проведенные для точечного источника излучения, дали наилучшее приближение для энергий близких к максимальной энергии источника излучения и для расстояний порядка 2-5 свободных пробегов от источника излучения. Данные ограничения, очевидно, возникают из-за используемого при выводе диффузионного приближения условия малости угла рассеяния.

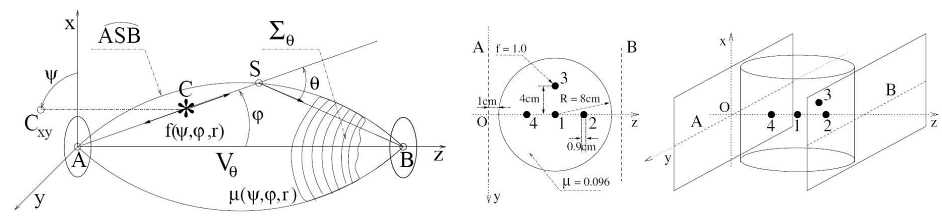
3. Моделирование процесса измерения комптоновского рассеяния в позитронно-эмиссионной томографии

Идеализированная интегральная модель традиционной позитронной эмиссионной томографии (ПЭТ) хорошо известна. Для заданного распределения активности $f(x, y, z)$ внутри среды с коэффициентом ослабления $\mu(x, y, z)$ и детекторов малых размеров A и B на поверхности просвечиваемого тела, модель формирования данных имеет вид:

$$P^{AB} = \exp\left\{-\int\limits_A^B \mu(x, y, z)dl\right\}\int\limits_A^B f(x, y, z)dl. \tag{5}$$

Задача состоит в определении источников активности f по проекционным данным P^{AB} и после коррекции на ослабление сводится к простому обращению преобразования Радона. Однако на практике детекторы регистрируют не только прямо летящие фотоны но и фотоны, претерпевшие комптоновское рассеяние. В работе [3] предлагается модель позволяющая учитывать однократное комптоновское рассеяние. При этом предполагается, что один из детекторов регистрирует не рассеянные фотоны, а второй детектор – фотоны, рассеявшиеся на заданный угол.

Будем считать, что детектор A регистрирует прямолетящие фотоны, а детектор B фотоны, рассеявшиеся на угол θ. Из геометрии однократного рассеяния легко видеть (Рис. 1a), что для всех точек рассеяния S с углом рассеяния θ справедливо простое геометрическое свойство $\angle ASB = \pi - \theta$. Тогда геометрическим местом точек, где происходит рассеяние с определенным углом θ является поверхность Σ_θ тела вращения V_θ, образованного вращением дуги ASB вокруг оси Z. Используя сферические координаты (ψ, ϕ, r) с началом в детекторе A нетрудно получить следующую модель, описывающую регистрируемый сигнал



а *б*

Рис. 1. Модель регистрации сигнала ПЭТ томографа с учетом рассеяния: *а* - геометрическая модель однократного рассеяния; *б* - схематическое изображение томографического фантома, применявшегося для тестирования формулы (6).

[3]:

$$\xi_\theta(A,B) = \frac{1}{4\pi^2|AB|\sin\theta}\int\limits_0^{2\pi} d\psi \int\limits_0^{\theta} d\phi \cos\phi\cos(\phi-\theta) \tag{6}$$

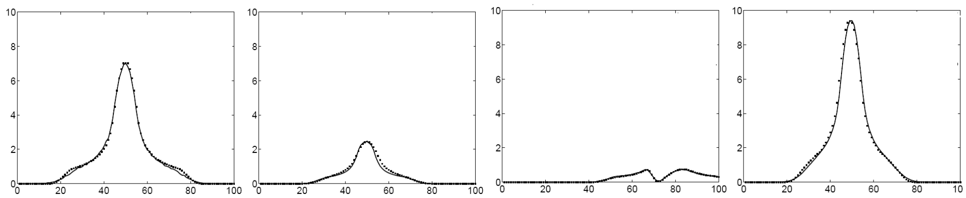
$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}\mu(\psi,\phi,|AS|)\exp\left\{-\int\limits_{ASB}\mu dl\right\}\int\limits_0^{AS} f(\psi,\phi,r)dr.$$

Здесь $\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega}$ – дифференциальное сечение Кляйна-Нишины; $(\psi,\phi,|AS|)$– сферические координаты точки рассеяния фотона; $|AS| = |AB|\sin(\theta-\phi)/\sin(\theta)$.

Для проверки адекватности формулы (6) реальному физическому процессу использовалось имитационное моделирование на основе метода Монте-Карло. Такой подход позволяет имитировать сигнал, который будет наиболее близок к тому, что регистрирует реальный томограф, так как вносит в итоговый сигнал случайные шумы и ошибки, характерные для реального физического процесса. Формула тестировалась для цилиндрического фантома радиусом 8 см и заполненного водой (Рис. 1б). Внутрь цилиндра помещены четыре стационарно излучающих сферических источника, заполненные изотопом с единичной активностью: No. 1 в центре и 2, 3, 4, смещенные на 4см от центра. Фотоны регистрировались линейками детекторов A и B, лежащими в плоскости YOZ. Считалось, что детекторы линейки A регистрируют первичные фотоны, а детекторы линейки B рассеянные. Каждая линейка состояла из 100 детекторов сечением 0.16 см.

Во всех расчетах при моделировании траектории фотона, отслеживалось до 20 актов взаимодействия со средой. Данные о сечениях взаимодействия излучения с веществом брались из таблиц [8]. Моделировалось 10^{11} траекторий (время расчета на компьютере Pentium 3.2 GHz около 5 суток). Проекции полученные по формуле (6) и рассчитанные методом Монте-Карло масштабировались умножением на скаляр по принципу совмещения точек максимума и приводились к условным единицам в интервале [0,10].

Графики на Рис. 2. демонстрируют поведение сравниваемых величин в случае, когда отслеживается рассеяние на угол $\theta = \pi/3$. Наблюдается хорошее соответствие между проекциями полученными по формуле (6) и статистическим



а *б* *в* *г*

Рис. 2. Сравнительные результаты моделирования проекций комптоновского рассеяния на томографическом фантоме. Прерывистые линии представляют проекции, рассчитанные методом Монте-Карло, сплошные - по формуле (6) : *а* - проекции от сферы № 1, *б* - проекции от сферы № 2, *в* проекции от сферы № 3, *г* проекции от сферы № 4.

моделированием. Небольшое различие, обусловленное многократным рассеянием фотонов, наблюдается лишь по краям графиков. Аналогичная ситуация наблюдается и для графиков, соответствующих другим углам рассеяния.

4. Применение индикатора неоднородности в позитронно-эмиссионной томографии

Пусть процесс распространения фотонов, рожденных в результате аннигиляции, проходит в выпуклой ограниченной области G в трехмерном евклидовом пространстве E^3. Будем считать, что среда имеет неоднородную структуру и для характеристики неоднородности среды разобьем область G на подобласти $G_1, ..., G_p$ такие, что $G_i \cap G_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad G_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{p} G_i, \ \overline{G}_0 = \overline{G}$. Области G_i можно трактовать как некоторые неоднородности (включения) заполненные $i-$м веществом. В позитронно-эмиссионной томографии неоднородности порождаются неравномерностью пространственного распределения источников активности. В работах [9, 10] изучалась следующая задача.

Определить множество $\partial G_0 = \bigcup\limits_{i=1}^{p} \partial G_i$, *если известна только внешняя граница среды* ∂G *и плотность выходящего излучения* $H(r, \omega), \ r \in \partial G, \ \omega \in \Omega = \omega \in E^3 : |\omega| = 1$.

Цель задачи, тем самым, состояла в нахождении границ всех неоднородностей, входящих в G, или по крайней мере в нахождении части этих границ. Для решения поставленной задачи была введена функция

$$Ind(r) = \left| \nabla \int\limits_{\Omega} H(r + d(r, \omega)\omega, \omega) d\omega \right|, \quad r \in G, \tag{7}$$

названная индикатором неоднородности. Здесь $d(r, \omega)$ – расстояние от точки r до внешней границы области в направлении ω. Метод индикатора неоднородности основывается на следующем утверждении [9]:

Утверждение 1. Пусть $z \in \partial G_l \cap \partial G_j$, *и* $n(z)-$ *единичный вектор внутренней нормали к поверхности* ∂G_l *в точке* z. *Тогда существует число* $\delta_1 > 0$

такое, что для точек $r = z + \zeta n(z),\ 0 <| \zeta |< \delta_1$, *имеет место равенство*

$$Ind(r) = 2 \mid M(z) \mid \cdot \mid ln \mid r - z \mid\mid + O(1), \tag{8}$$

где $O(1)-$ *ограниченная функция, зависящая от* r.

Функция $M(z)$ тоже ограничена, ее точный вид ввиду громоздкости выражений мы здесь не приводим. Таким образом, поверхности при приближении к которым функция $Ind(r)$ неограниченно возрастает (при численном исследовании принимает аномально большие значения) и будут искомыми границами неоднородностей.

Утверждение 1 было строго доказано только для монохроматического уравнения переноса излучения, однако анализ доказательства показал, что наличие логарифмической особенности у функции $Ind(r)$ обусловлено, главным образом, геометрическими причинами, и, по всей видимости, такая же особенность будет существовать и при обработке данных позитронно-эмиссионной томографии. Дополнительные положительные соображения в этом направлении вытекают из модели позитронно-эмиссионной томографии, предложенной в [11]. Упомянутая модель представляет собой интегральное преобразование, в качестве ядра которого выступает произведение решений уравнения переноса излучения.

Как уже упоминалось ранее, регистрация пары фотонов в ПЭТ позволяет выделять направления полета гамма-квантов, зарегистрированных каким-либо фиксированным детектором. С этой точки зрения данные, снимаемые в позитронно-эмиссионной томографии, легко приводятся к виду, используемому в (7), если положить

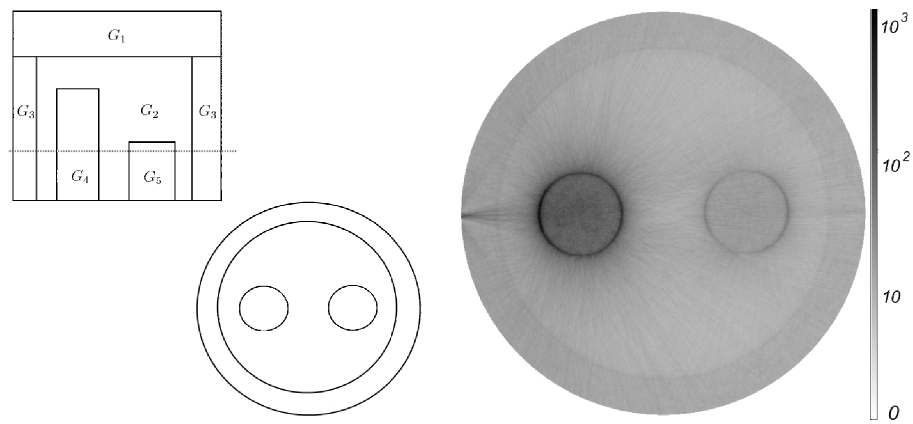
$$H(x, \omega) = g(x, x - d(x, -\omega)\omega)). \tag{9}$$

Нашей дальнейшей целью будет проверка гипотезы о том, что индикатор неоднородности можно использовать в позитронно-эмиссионной томографии для определения границ пространственного распределения источников активности в теле пациента. Для проверки этого предположения мы провели ряд численных экспериментов. Некоторые из полученных при этом результатов приводятся дальше в графической форме.

Каждый эксперимент состоял из двух этапов. На первом этапе методом Монте-Карло имитировался сигнал, регистрируемый детекторами томографа. На втором этапе, путем вычисления индикатора неоднородности, строилась томограмма в сечении исследуемой области G некоторой плоскостью. При проведении экспериментов моделировался сканер, содержащий 39 детекторных колец диаметром 842 мм. Каждое кольцо содержало 642 детектора из оксиортосиликата лютеция (LSO) размером 4x4x20 мм. Энергетическое разрешение детектора на энергии 511 кэВ составляло 14 %. Данные параметры соответствуют позитронно-эмиссионному томографу Biograph^{TM} TruePoint PET $\cdot$ CT, производимому фирмой Сименс.

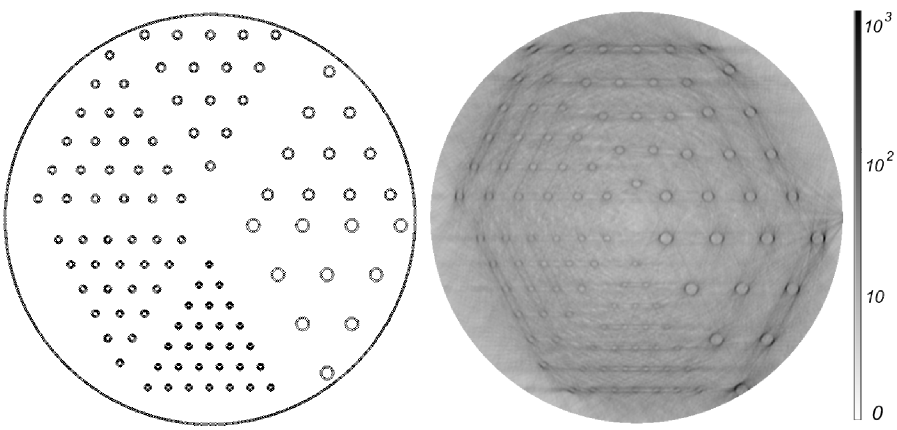
Далее приводятся результаты восстановления для фантомов Юты и Деренզо. Данные фантомы широко применяются для тестирования методов реконструкции в ПЭТ. В экспериментах оба фантома располагались в центре поля обзора томографа.

На рис. 3 приведены результаты моделирования для фантома Юты. Фантом Юты представляет собой цилиндр диаметра 200 мм и высотой 250 мм, содержащий несколько различных областей, каждая из которых может содержать



а *б*

Рис. 3. Фантом Юты: *(а)* – схематичное изображение поперечного сечения; *(б)* – реконструкция границ источников активности.



а *б*

Рис. 4. Фантом Дерензо: *(а)* – схематичное изображение поперечного сечения; *(б)* – реконструкция границ источников активности.

некоторое вещество или источник активности. Схематичное изображение строения фантома приведено на рис. 3а. Область G_1 представляет собой область равномерного распределения источников активности и коэффициента ослабления. Она, как правило, используется для изучения влияния на качество реконструкции частиц, которые родились либо рассеялись вне поля измерения томографа. Область G_2 выступает в качестве фона, она может как содержать, так и не содержать источники активности. Область G_3, представляющая собой кольцо высотой 140 мм и толщиной 20 мм, обычно моделирует грубое приближение распределения серого вещества в мозге и также может содержать источники активности. Наконец включения G_4 и G_5 диаметром 43 мм и высотой 105 мм и 55 мм соответственно представляют собой основные контейнеры для активного вещества, интенсивность рождения позитронов которым может быть как выше, так и ниже, чем в фоновой области G_2. Эти области также могут содержать материалы различной плотности. В данном тестовом примере предполагалось, что все контейнеры в фантоме заполнены водой. Области G_3, G_5 и G_4 содержали активность с интенсивностью 3, 7 и 10 безразмерных единиц, соответственно. На рис. 3б приведена реконструкция границ источников активности в сечении, указанном пунктирной линией. Как видно из рисунка, все границы восстановились достаточно хорошо.

Результаты моделирования для фантома Дерензо приведены на рис. 4. Рис. 4а иллюстрирует структуру фантома, который представляет собой цилиндр из оргстекла диаметром 20 см, условно разбитый на шесть секторов, в каждом из которых имеются отверстия определенных диаметров: 6; 5; 4; 3.5; 3; 2.5 мм. Отверстия заполнены позитронным излучателем одинаковой активности. Данный фантом, как правило, применяется для определения степени разрешения алгоритма реконструкции. Реконструкция границ пространственного распределения источников активности в фантоме Дерензо приведена на рис. 4б. Как видно из рисунка, отверстия с диаметром более 3 мм хорошо различимы. Таким образом, метод реконструкции, основанный на индикаторе неоднородности, имеет пространственное разрешение не хуже, чем применяемые в ПЭТ алгоритмы [12].

Список литературы

[1] И.П. Яровенко, “О диффузионном приближении для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния”, *Дальневосточный мат. журнал*, **9**:1-2 (2009), 209-218 MR2742473.

[2] И.П. Яровенко, “Исследование применимости диффузионного приближения для уравнения переноса излучения с учетом комптоновского рассеяния”, *Дальневосточный мат. журнал*, **11**:1 (2010), 99-107.

[3] I.G. Kazantsev, I.P. Yarovenko, S. Matej, R. M. Lewitt and I.V. Prokhorov, “Statistical Validation of Geometric Model of Single Scatter in PET”, *IEEE Medical Imaging Conf.*, 2008, 210-250.

[4] И.П. Яровенко, “Численные эксперименты с индикатором неоднородности в позитронно-эмиссионной томографии”, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **14**:1, (2011), 140-149 Zbl pre05932291.

[5] Д.С. Аниконов, Д.С. Коновалова, “Краевая задача для уравнения переноса с чисто комптоновским рассеянием”, *Сибирский математический журнал*, **46**:1 (2005), 3-16 MR2141298.

[6] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, 1978.

[7] D.S. Anikonov, V.G. Nazarov, I.V. Prokhorov, *Poorly Visible Media in X-Ray Tomography*, VSP, Utrecht-Boston, 2002 Zbl 1051.65128.

[8] J.H. Hubbell, S.M. Seltzer, *Tables of X-Ray Mass Attenuation Coefficients and Mass Energy-Absorption Coefficients 1 Kev to 20 Mev for Elements Z = 1 to 92 and 48 Additional Substances of Dosimetric Interest*, Preprint National Institute of Standard and Technology, Gaithersburg, 1995.

[9] Д.С. Аниконов, “Построение индикатора неоднородности при радиационном обследовании среды”, *Доклады АН*, **357**:3 (1997), 324-327.

[10] D.S. Anikonov,, “Integro-differential heterogeneity indicator in tomography problem”, *J. of Inverse and Ill-Posed Problems*, **7**:1 (1999), 17-59 MR1681258.

[11] T. Kosters, F. Natterer, F. Wubbeling, “Scatter Correction in PET Using the Transport Equation”, *Conf. Rec. IEEE Nucl. Sci. Symposium*, 2007, 3305-3309.
[12] B. Bendriem, *The theory and practice of 3D PET*, Kluwer Acad. Publis., Boston, 1998.

Иван Петрович Яровенко
Институт прикладной математики ДВО РАН,
ул. Радио 7,
690000, Владивосток, Россия
E-mail address: yarovenko@iam.dvo.ru

Иван Гаврилович Казанцев
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Лаврентьева 7,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: kazantsev.ivan6@gmail.com