

**СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ**

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 8, стр. С.182–С.410 (2011)*

**ТРУДЫ  
ВТОРОЙ МЕЖДУНАРОДНОЙ МОЛОДЕЖНОЙ  
ШКОЛЫ-КОНФЕРЕНЦИИ  
“ТЕОРИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНЫХ И НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ”  
ЧАСТЬ I**

Под редакцией С. И. Кабанихина и М. А. Шишленина

2011

С.182

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Викентьев А. А., Викентьев Р. А.</b>	
О свойствах расстояний на высказываниях экспертов с вероятностями.....	185
<b>Викентьев А. А., Викентьев Р. А.</b>	
О метриках для формул от разнотипных переменных и мерах опровержимости.....	192
<b>Даирбаева Г., Шишленин М. А.</b>	
Граничная обратная задача для уравнений Стокса.....	210
<b>Дутикова Е. В.</b>	
Решение обратных задач Стефана с неизвестной границей методом установления.....	224
<b>Ильин А. И., Кабанихин С. И., Нурсеитов Д. Б., Нурсеитова А. Т., Асманова Н. А., Воронов Д. А., Бакытов Д.</b>	
Анализ некорректности и численных методов решения нелинейной обратной задачи фармакокинетики для двухкамерной модели с внесосудистым введением препарата.....	236
<b>Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитов Д. Б., Криворотько О. И., Алимова А. Н.</b>	
Метод оптимизации в задаче Дирихле для волнового уравнения....	254
<b>Кабанихин С. И., Шишленин М. А., Криворотько О. И.</b>	
Оптимизационный метод решения обратной задачи термоакустики.	263
<b>Карчевский А. Л.</b>	
Морская сейсморазведка: возможность восстановления продольных и поперечных скоростей и мощностей тонких слоев тонкослоистой пачке.....	293
<b>Кочнев В. А.</b>	
Адаптивный метод решения систем алгебраических уравнений (особенности постановки и решения).....	307
<b>Лежнев В. Г., Марковский А. Н.</b>	
К решению задачи обратной теплопроводности.....	314
<b>Пененко А. В.</b>	
Численный алгоритм определения температуропроводности слоистой среды на основе сингулярного разложения оператора чувствительности модели теплопроводности.....	320
<b>Расторгуева Е. В.</b>	
Численное решение интегрального уравнения Вольтерры II рода с квадратичной нелинейностью.....	340

<b>Романов В. Г.</b>	
Обратные задачи для уравнений электродинамики.....	346
<b>Сидикова А. И.</b>	
Об одной переопределенной задаче тепловой диагностики.....	354
<b>Табаринцева Е. В.</b>	
О решении задачи с обратным временем для нелинейного дифференциально-операторного уравнения.....	358
<b>Федоров В. Е., Иванова Н. Д.</b>	
Нелинейная эволюционная обратная задача для некоторых уравне- ний соболевского типа.....	363
<b>Шишленин М. А., Новиков Н. С.</b>	
Сравнительный анализ двух численных методов решения уравнения Гельфанда–Левитана–Крейна.....	379
<b>Эпов М. И., Ельцов И. Н., Кабанихин С. И., Шишленин М. А.</b>	
Совмещенная постановка двух обратных задач геоэлектрики.....	394
<b>Эпов М. И., Ельцов И. Н., Кабанихин С. И., Шишленин М. А.</b>	
Об определении граничных условий в околоскважинном простран- стве на недоступной части границы.....	400

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.185–С.191 (2011)*

УДК 519.67-519.24

MSC 65M32

О СВОЙСТВАХ РАССТОЯНИЙ НА ВЫСКАЗЫВАНИЯХ  
ЭКСПЕРТОВ С ВЕРОЯТНОСТЯМИ

А. А. ВИКЕНТЬЕВ, Р. А. ВИКЕНТЬЕВ

**ABSTRACT.** We discuss probabilistic experts' statements represented by means of formulas of propositional logic. We offer methods for defining metrics on such formulas and study their properties. These results could be used in solving the problem of best reconciliation of expert statements, constructing decision functions in pattern recognition, and development of expert systems.

**Keywords:** expert statements, cluster analysis, distance, metric.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Поскольку сейчас проявляется все больший интерес к анализу экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний экспертов, интересны также вопросы о высказываниях экспертов, представленных формулами исчисления высказываний (ИВ) с вероятностями. Также возникают задачи об алгоритмах обнаружения закономерностей, согласования таких знаний и их кластеризации [1–4, 7–12]. Для этого необходимы расстояния между формулами, которые являются метриками на таких знаниях. Всеми такими задачами, включая и вопрос о способах введения расстояний на логических высказываниях экспертов, интересовался и занимался г.н.с. ИМ СО РАН, д.т.н., профессор Г. С. Лбов с коллегами [1–4, 7,8, 11–12]. В данной работе рассматриваются логические высказывания экспертов, представленные формулами ИВ с

---

VIKENTIEV A.A., VIKENTIEV R.A., ON PROPERTIES OF DISTANCES ON EXPERT JUDGMENTS WITH PROBABILITIES.

© 2011 Викентьев А.А., Викентьев Р.А.

Работа выполнена при поддержке грантами РФФИ 10-01-00113а, 11-07-00346а.

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

С.185

вероятностями. Предлагаются различные способы задания расстояний на таких высказываниях.

Предлагаются способы задания расстояний на логических высказываниях с вероятностями. Если класс моделей и логическая теория эффективно заданы, то можно все нужные расстояния между формулами найти, как и вычислить вероятности фиксированных формул в данном конечном классе. Здесь рассматривается обратная задача: мы знаем от экспертов вероятности формул-высказываний, знаем как-то (по их согласованным знаниям) логическую теорию, которая дает модели нашей исследуемой области и надо восстановить расстояния между данными формулами с вероятностями. Мы расстояния не знаем и хотим научиться их вычислять. Ясно, что такая задача может иметь несколько решений из-за нехватки информации (про теорию и про адекватность ее моделей). В случае когда теория одна и все ее модели устраивают экспертов, то решение будет единственно [2–4,12]. В данной заметке предложены способы восстановления расстояния по имеющейся информации. Предлагаются различные способы задания расстояний на таких высказываниях. Изучаются и устанавливаются свойства метрики для введенных расстояний. Для решения поставленных задач используются теоретико-модельный и вероятностный (статистический) подходы [2–6]. Результаты неоднократно докладывались на международных конференциях с 2009 г., в том числе на Юбилейной конференции «Мальцевские чтения» семинара Алгебра и Логика к 100 летию Академика Анатолия Ивановича Мальцева — выдающегося Логика и Алгебраиста.

## 2. РАССТОЯНИЯ НА ФОРМУЛАХ С ВЕРОЯТНОСТЬЮ И ИХ СВОЙСТВА

Будем рассматривать знания экспертов, представленные формулами ИВ с вероятностями (вероятностные высказывания), т.е. высказывания вида: « $\varphi$  с вероятностью  $p_\varphi$ », где  $\varphi$  — формула ИВ. Считаем что все формулы занумерованы, и вместо них в качестве индекса в обозначениях будет стоять их номер. Далее используем для различных таких высказываний обозначения:  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$ ,  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ .

Пусть  $\Sigma$  — база знаний, состоящая из формул ИВ (в  $\Sigma$  содержатся все формулы, с которыми работают эксперты). Обозначим через  $S(\varphi)$  носитель формулы  $\varphi$ , т.е., множество элементарных высказываний

(переменных), используемых при написании формулы  $\varphi$ . А через  $S(\Sigma) = \bigcup_{\varphi \in \Sigma} S(\varphi)$  —носитель совокупности знаний (формул).

Рассмотрим множество  $P(S(\Sigma)) = 2^{S(\Sigma)}$  — множество всех подмножеств множества  $S(\Sigma)$ . Элементы множества  $P(S(\Sigma))$  называют *моделями*. Более подробно о моделях, теориях и определении истинности на модели можно узнать в [2-6]. Известно, что  $|P(S(\Sigma))| = 2^{|S(\Sigma)|}$ . Последнее число обозначим через  $n$ . Далее, не умаляя общности, считаем, что число  $n$  конечно и равно числу рассматриваемых моделей некоторой теории. Это условие будет предполагаться на протяжении всей статьи, если не утверждается нечто другое. Отметим, что случай когда теория пустая (не считая законов логики) тоже интересен.

Пусть эксперты говорят о вероятностях формул на множестве, состоящем из  $n$  моделей, и каждое высказывание присутствует только с одной вероятностью. В противном случае надо осуществить процедуру согласования. Мы ин-

терпретируем вероятность формулы, данную экспертом, следующим образом:  $B = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  означает, что высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi = [n \cdot p_\varphi]$  моделях, где  $n$  - конечное число рассматриваемых моделей. Естественно также считаем, что эксперты согласны с такой интерпретацией, либо не высказываются категорически против.

Пусть нам дано два вероятностных логических высказывания  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ , зададим способ вычисления расстояния  $\rho(B_i, B_j)$  между такими высказываниями.

Интерпретируя данные экспертами вероятности описанным выше способом, получаем, что высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi = [n \cdot p_\varphi]$  моделях, высказывание  $\psi$  истинно на  $n_\psi = [n \cdot p_\psi]$  моделях.

Отметим, однако, что мы не знаем, вообще говоря, на каких именно моделях каждое высказывание истинно, а также число моделей, на которых эти высказывания истинны одновременно.

Рассмотрим следующую задачу: пусть высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi$  моделях, высказывание  $\psi$  истинно на  $n_\psi$  моделях и  $k$  — число моделей, на которых эти высказывания истинны одновременно. Как находить и вычислять расстояние между высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ ?

Обозначим введенные далее расстояния через  $\rho_k(B_i, B_j)$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Используя идеи из [2-4], расстояние  $\rho_k(B_i, B_j)$  определим через считающую меру симметрической разности моделей данных формул, т.е.  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi - k + n_\psi - k}{n} = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$ , для каждого  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Справедлива следующая

**Теорема 1.** Для расстояний  $\rho_k(B_i, B_j)$  справедливы свойства:

- (1)  $0 \leq \rho_k(B_i, B_j) \leq 1$
- (2)  $\rho_k(B_i, B_j) = \rho_k(B_j, B_i)$
- (3)  $\rho_k(B_i, B_j) \leq \rho_k(B_i, B_s) + \rho_k(B_s, B_j)$
- (4)  $B_i \equiv B_j \Leftrightarrow \rho_k(B_i, B_j) = 0$  ( $B_i \equiv B_j \Leftrightarrow \varphi \equiv \psi$  и  $p_\varphi = p_\psi$ . Это означает, что формулы  $\varphi$  и  $\psi$  истинны на одних моделях).
- (5)  $B_i \equiv \neg B_j \Leftrightarrow \rho_k(B_i, B_j) = 1$
- (6)  $\rho_k(B_i, B_j) = 1 - \rho_k(B_i, \neg B_j) = \rho_k(\neg B_i, \neg B_j)$
- (7)  $\rho_k(B_i, B_j) = \rho_k(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j)$ .

Докажем неочевидное свойство 3. Определение  $\rho_k(B_i, B_j)$  можно переписать следующим образом:

$$\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = \frac{n_{\varphi \Delta \psi}}{n} = \frac{n_{(\neg \varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg \psi)}}{n}$$

(по определению симметрической разности). Тогда для произвольного высказывания  $B_s = \langle \chi, p_\chi \rangle$  нетрудно доказываемся, что  $n_{\varphi \Delta \psi} \leq n_{\varphi \Delta \chi} + n_{\chi \Delta \psi}$ . Тогда

$$\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_{\varphi \Delta \psi}}{n} \leq \frac{n_{\varphi \Delta \chi}}{n} + \frac{n_{\chi \Delta \psi}}{n} = \rho_k(B_i, B_s) + \rho_k(B_s, B_j).$$

Доказательство свойства 4. Докажем сначала слева направо ( $\Rightarrow$ ). Если  $B_i \equiv B_j$ , то  $\varphi \equiv \psi$  и, значит,  $n_\varphi = n_\psi = k$ . Следовательно,  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = 0$ .

Докажем теперь в обратную сторону ( $\Leftarrow$ ). Если  $\rho_k(B_i, B_j) = 0$ , то  $n_\varphi + n_\psi - 2k = 0$ . Так как  $k$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ , то  $(n_\varphi + n_\psi - 2k = 0 \Leftrightarrow n_\varphi = n_\psi = k)$ . Следовательно,  $\varphi \equiv \psi$  и поэтому  $B_i \equiv B_j$ .

Доказательство свойства 5. Сперва докажем ( $\Rightarrow$ ). Если  $B_i \equiv \neg B_j$ , то  $\varphi \equiv \neg\psi$ . Тогда  $n_\varphi = n - n_\psi$  и  $k = 0$ , следовательно,  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 0}{n} = \frac{n}{n} = 1$ .

Теперь докажем ( $\Leftarrow$ ). Если  $\rho_k(B_i, B_j) = 1$ , то  $n_\varphi + n_\psi - 2k = n$ . Так как  $k$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ , то  $(n_\varphi + n_\psi - 2k = n \Leftrightarrow n_\varphi + n_\psi = n$  и  $k = 0)$ . Следовательно,  $\varphi \equiv \neg\psi$  и  $B_i \equiv \neg B_j$ .

Докажем свойство 6. Дано  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$ . Рассмотрим

$$\begin{aligned} \rho_k(B_i, \neg B_j) &= \frac{n_\varphi + n_{\neg\psi} - 2(n_\varphi - k)}{n} = \frac{n_\varphi + (n - n_\psi) - 2(n_\varphi - k)}{n} = \\ &= \frac{n - n_\varphi - n_\psi - 2k}{n} = 1 - \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n} = 1 - \rho_k(B_i, B_j). \end{aligned}$$

Также нетрудно доказываем, что  $1 - \rho_k(B_i, \neg B_j) = \rho_k(\neg B_i, \neg B_j)$ .

Докажем свойство 7. Можно легко доказать, что  $n_{(\varphi \wedge \psi) \Delta (\varphi \vee \psi)} = n_\varphi \Delta n_\psi$ . Тогда  $\rho_k(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j) = \frac{n_{(\varphi \wedge \psi) \Delta (\varphi \vee \psi)}}{n} = \frac{n_\varphi \Delta n_\psi}{n} = \rho_k(B_i, B_j)$ . Теорема 1 доказана.

Далее мы предложим еще несколько способов вычисления расстояния  $\rho(B_i, B_j)$  между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ .

Поскольку нам не известно число  $k$  (число моделей, на которых высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  истинны одновременно), и если нет никаких предпочтений для значения  $k$  (хотя оно может быть высказано экспертами), то можно, например, поступить следующим образом. Предположим также, что для нас все значения для числа  $k$  равновероятны. Тогда расстояние между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$  определим как усреднение расстояний  $\rho_k(B_i, B_j)$  по всем значениям  $k$ , т.е.

$$\rho(B_i, B_j) = \frac{\sum_{k=0}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j)}{\min(n_\varphi, n_\psi) + 1}.$$

Для этого расстояния справедлива теорема 1, и в формуле расстояния слагаемые под знаком суммы можно взять с подходящими (адаптируемыми) коэффициентами-весеами. И в случае, когда мы знаем меньший диапазон изменения  $k$ , то берем сумму только для таких  $k$ .

Если же экспертами высказано, какое значение для  $k$  предпочтительнее, то в качестве  $\rho(B_i, B_j)$  берем это  $\rho_k(B_i, B_j)$ . В противном случае можно использовать медиану распределения.

Можно подойти к вопросу введения расстояния при неизвестном  $k$  с вероятностной (статистической) точки зрения: предложить вероятностную модель для каждого  $k$  и найти вероятность того, что высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  одновременно истинны на  $k$  моделях.

Потом найдем вероятность  $p_k$  того, что в выбранных  $n_\varphi$  моделях и  $n_\psi$  моделях (выбираются из  $n$  моделей) будет  $k$  моделей, на которых высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  истинны одновременно, где  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Сначала определим вероятностное пространство  $\langle \Omega, \mathcal{A}, p \rangle$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов,  $\Omega = \{0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)\}$  — множество всевозможных совпадений моделей в наборах из  $n_\varphi$  и  $n_\psi$  моделей,  $\mathcal{A}$  — система подмножеств множества  $\Omega$ , образующая  $\sigma$ -алгебру событий, и  $p$  — вероятность на  $\langle \Omega, \mathcal{A} \rangle$ . Определим на  $\Omega$  случайную величину  $\xi$  так:  $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ , т.е.  $\xi$  каждому  $k$  из  $\Omega$  и фиксированным  $i, j$  ставит в соответствие расстояние  $\rho_k(B_i, B_j)$ .

Из простых комбинаторных рассуждений следует, что вероятность этого события (появление расстояния с индексом  $k$ ) вычисляется так:

$$p_k = \frac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}}$$

где  $C_n^{n_\varphi}$  число способов выбрать  $n_\varphi$  из  $n$  моделей.

Действительно, так как любой набор, состоящий из  $n_\varphi$  моделей, может сочетаться с любым набором, состоящим из  $n_\psi$  моделей,  $(C_n^{n_\varphi} \cdot C_n^{n_\psi})$  будет количеством всех способов выбрать два набора, один из которых состоит из  $n_\varphi$  моделей, а другой из  $n_\psi$  моделей.

Выбрать  $k$  моделей, которые будут общими в этих наборах, из  $n$  моделей можно  $C_n^k$  способами. Тогда остальные  $(n_\varphi - k)$  и  $(n_\psi - k)$  моделей в наборах должны быть дизъюнктивными. Следовательно, остальные  $(n_\varphi - k)$  модели для пополнения набора, состоящего из  $k$  до  $n_\varphi$  моделей, можно выбрать  $C_{n-k}^{n_\varphi - k}$  способами, а  $(n_\psi - k)$  моделей для получения набора моделей состоящего из  $n_\psi$  моделей, с учетом нашего предположения,  $C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}$  способами.

Значит, имеется всего  $(C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k})$  способов выбрать два набора, один из которых состоит из  $n_\varphi$  моделей, а другой из  $n_\psi$ , и в точности  $k$  моделей в этих наборах моделей совпадают. Поэтому вероятность того, что  $k$  моделей совпадет в наборах из  $n_\varphi$  и  $n_\psi$  моделей, будет

равна  $p_k = \frac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}}$ . В результате мы получим, что расстояния  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$  будут появляться с вероятностями

$$p_k = \frac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}},$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Предлагается эти вероятности или близкие к ним числа использовать в качестве весов (коэффициентов) расстояний для получения результирующего расстояния для данных формул с вероятностями. Более подробно об этом будет далее. Заметим, что при таком подходе главную роль играют не сами формулы, а числа определяющие их количество моделей и число их у конъюнкции. Не имея другой информации, мы обзрели все интересующие нас пары подмножеств для подсчета частоты (или вероятности) появления расстояния для конкретного  $k$ . Используя свойство инвариантности расстояний между формулами и вероятностей высказываний (формул) [2] можно рассуждения выше проделать с меньшим носителем знаний, включающем только те переменные, которые встречаются в двух формулах, для которых ищется расстояние. Будем считать, что мы так сделали с самого начала. И тогда упростить подсчет в рассматриваемом случае нельзя.

В результате получим расстояния  $\rho_k(B_i, B_j) = \frac{n_\varphi + n_\psi - 2k}{n}$  с вероятностями  $p_k = \frac{C_n^k C_{n-k}^{n_\varphi - k} C_{n-n_\varphi}^{n_\psi - k}}{C_n^{n_\varphi} C_n^{n_\psi}}$ , где  $k = 0, 1, 2, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Теперь, зная вероятности  $p_k$  для каждого расстояния  $\rho_k(B_i, B_j)$ , в качестве расстояния между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$  можно взять наиболее вероятное  $\rho(B_i, B_j) = \rho_m(B_i, B_j)$ , где

$p_m = \max_k p_k$ . Для такого  $\rho(B_i, B_j)$  справедлива теорема 1. Заметим, что выбирая произвольные  $p_k$  для расстояний  $\rho_k(B_i, B_j)$  так, чтобы получался закон распределения, получим самый общий случай для адаптивного поиска нужного расстояния между формулами. Можно поступить и по-другому. В качестве расстояния между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$  взять величину, равную математическому ожиданию или среднему значению случайной величины  $\xi$ , т.е.

$$\rho(B_i, B_j) = M\xi = \sum_{k=0}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j) \cdot p_k.$$

Для введенного расстояния справедлива

**Теорема 2.** Для расстояния  $\rho(B_i, B_j)$  справедливы свойства:

- (1)  $0 \leq \rho(B_i, B_j) \leq 1$
- (2)  $\rho(B_i, B_j) = \rho(B_j, B_i)$
- (3)  $\rho(B_i, B_j) \leq \rho(B_i, B_s) + \rho(B_s, B_j)$
- (4) Если  $\rho(B_i, B_j) = 0$ , то  $B_i \equiv B_j$ .
- (5)  $\rho(B_i, B_j) = 1 - \rho(B_i, \neg B_j) = \rho(\neg B_i, \neg B_j)$
- (6)  $\rho(B_i, B_j) = \rho(B_i \wedge B_j, B_i \vee B_j)$

**Доказательство.** Докажем сначала свойство 3. По свойству 3 теоремы 1 имеем  $\rho_k(B_i, B_j) \leq \rho_k(B_i, B_s) + \rho_k(B_s, B_j)$ . Тогда по свойствам математического ожидания имеем а)  $\xi \leq \eta \Rightarrow M\xi \leq M\eta$ , б)  $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ , откуда и получаем требуемое свойство для расстояния.

Докажем свойство 4.  $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j) \geq 0$  и  $M\xi = 0$ , тогда по свойству математического ожидания  $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j) = 0$  с вероятностью равной 1. Тогда по свойству 4 теоремы 1  $B_i \equiv B_j$ .

Докажем свойство 5. Так как для расстояния  $\rho_k(B_i, B_j)$  по свойству 6. теоремы 1 справедливо равенство  $\rho_k(B_i, B_j) = 1 - \rho_k(B_i, \neg B_j) = \rho_k(\neg B_i, \neg B_j)$ , тогда по свойствам математического ожидания а) если  $p(\xi = \eta) = 1$  и существует  $M\xi$ , то  $M\xi = M\eta$ , б)  $M(a + b\xi) = a + bM\xi$  получаем требуемое свойство для расстояния  $\rho(B_i, B_j)$ . Остальные пункты устанавливаются аналогично. Теорема доказана.

Альтернативным подходом к введению расстояния на формулах, без проведения согласования, - введение искомого расстояния для каждого эксперта по его вероятностям (продлав предлагаемое выше в статье по знаниям, полученных от каждого эксперта отдельно). Затем, взяв подходящее усреднение полученных расстояний (с весами по экспертам) получим расстояние, учитывающее знания каждого эксперта. Так введенное расстояние задает метрику на множестве формул с учетом вероятностных формул конечного числа экспертов.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены способы задания, введения метрик на высказываниях экспертов - формулах ИВ с вероятностями. Исследование найдет применение в решении задач согласования вероятностных высказываний экспертов, кластеризации, и в изучении и построении баз знаний и экспертных систем. Результаты переносятся на формулы над произвольными носителями и формулы с переменными языка первого порядка с использованием измеримых подклассов

(для фиксированной теории) измеримых (в том числе и метрических) моделей. Авторы выражают благодарность рецензентам статьи за советы по изложению результатов и критику.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Блощицын В.Я., Лбов Г.С. О мерах информативности логических высказываний // Доклады Республиканской Школы-Семинара «Технология разработки экспертных систем». Кишинев, 1987. С. 12–14.
- [2] Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Издательство Института математики, 1999. MR1775019
- [3] Vikent'ev A.A., Lbov G.S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition And Image Analysis. 1997. V. 7, N 2. P. 175–189.
- [4] Викентьев А.А., Лбов Г.С. О метризациях булевой алгебры предложений и информативности высказываний экспертов // Доклады РАН. 1998. Т. 361, N 2. С. 174–176. MR1693368
- [5] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука, 1991.
- [6] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. М.: Мир, 1977. MR0469738
- [7] Бериков В.Б. Кластерный анализ с использованием коллектива деревьев решений // Научный вестник НГТУ. 2009. № 3 (36). С. 67–76.
- [8] Лбов Г.С., Бериков В.Б. Устойчивость решающих функций в задачах распознавания образов и анализа разнотипной информации. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2005.
- [9] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Constructing of a Consensus of Several Experts Statements. In: Proc. of XII Int. Conf. "Knowledge-Dialogue-Solution", Sofia: Foi-Commerce, 2006. P. 193–195.
- [10] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Interval Prediction Based on Experts' Statements. In: Proc. of XIII Int. Conf. "Knowledge-Dialogue-Solution". Sofia: ITHEA, 2007. V. 2. P. 474–478.
- [11] Lbov G.S., Gerasimov M.K. Determining of Distance Between Logical Statements in Forecasting Problems. In: Artificial Intelligence, 2'2004 [in Russian]. Institute of Artificial Intelligence, Ukraine.
- [12] Vikent'ev A. Measure of Refutation and Metrics on Statements of Experts (Logical Formulas) in the Models for Some Theory. In: Int. Journal "Information Theories & Applications". V. 14, N 1. Sofia: ITHEA 2007. P. 92–95.

АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИКЕНТЬЕВ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, 4., НОВОСИБИРСК, 630090.  
*E-mail address:* vikent@math.nsc.ru

РУСЛАН АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИКЕНТЬЕВ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, Д.4., НОВОСИБИРСК, 630090.  
*E-mail address:* ruslan.vikentiev@gmail.com

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.192–С.209 (2011)*

УДК 510.67-519.24

MSC 65M32

**О МЕТРИКАХ ДЛЯ ФОРМУЛ  
ОТ РАЗНОТИПНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ  
И МЕРАХ ОПРОВЕРЖИМОСТИ**

А. А. ВИКЕНТЬЕВ, Р. А. ВИКЕНТЬЕВ

**ABSTRACT.** We consider opinions of experts in the form of formulas of the language of predicate calculus with probabilities and without them. We offer means to restoration (and define) metrics on such propositions, means to measure their information value, refutability, and probabilities of such formulas. Properties of such metrics and related measures are studied and some examples are given. These results enable us to solve problems of agreement of expert opinions, construction of deciding functions, pattern recognition, creation of logical knowledge bases, their clusterization and development of expert systems.

**Keywords:** pattern recognition, distance between statements, theory of models, metric, knowledge base.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени достаточно хорошо развиты теория и методы построения решающих функций распознавания образов на основе анализа эмпирической информации, представленной в виде таблиц данных. Наряду с этим проявляется все больший интерес к анализу экспертной информации, заданной в виде вероятностных логических высказываний от нескольких экспертов. С

---

VIKENTIEV A.A., VIKENTIEV R. A., ON PROPERTIES OF DISTANCES ON EXPERT JUDGMENTS WITH PROBABILITIES.

© 2011 Викентьев А.А., Викентьев Р.А.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 10-01-00113а, 11-07-00346а), по математической логике в НГУ.

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

помощью подходящей процедуры высказывания экспертов можно записать в виде формул исчисления высказываний или формул языка первого порядка от разнотипных переменных. На деле, конечно, различные высказывания экспертов (и соответствующие им логические формулы) несут в себе, вообще говоря, разное количество информации.

Предполагается, что эксперты не согласовывали свои суждения друг с другом, поэтому их информация может содержать противоречия различных видов, возможно и дублирование. Повторное обращение к экспертам с целью устранения (снятия) таких противоречий оказывается невозможным по разным причинам, поэтому возникает математическая задача согласования подобных высказываний без привлечения дополнительной информации. Заметим, что проблемы возникают не только из-за противоречивых, но и из-за пересекающихся высказываний с разными вероятностями, и даже если заданные экспертами вероятности совпадают на общей части. Эти задачи ждут своего решения, начало положено профессором Г.С. Лбовым.

В работе [1] поставлена задача о введении меры информативности  $I$  на множестве классов эквивалентных формул – высказываний экспертов (в частности, некоторого фиксированного языка), и сформулированы естественные требования, которым должна удовлетворять эта функция, выражаемая через заданную метрику  $\rho$  на множестве классов эквивалентных формул, значения которой принадлежат интервалу  $[0, 1]$ . Для различных исчислений высказываний эта задача решена. Все такие желаемые свойства меры информативности из [1] мы сформулируем для формул языка первого порядка от разнотипных переменных, точнее на представителях их классов эквивалентности:

- 1) Если  $\varphi \equiv 1$ , то  $I(\varphi) = 0$  (информативность тождественно истинной формулы равна нулю).
- 2) Если  $\varphi \equiv \psi$ , то  $I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi)$ .
- 3) Если  $\rho(\varphi, \psi) = 1$ , то  $I(\varphi \wedge \psi) = I(\varphi) + I(\psi)$ .
- 4) В случае  $\rho(\varphi, \psi) \in (0, 1)$ ,  $I(\varphi \wedge \psi) = f(I(\varphi), I(\psi), \rho(\varphi, \psi))$ , где  $f(x, y, z)$  некоторая функция от переменных  $x, y, z$  удовлетворяющая следующим свойствам:
  - а)  $f(x, y, 1) = x + y$ ;      б)  $f(x, x, 0) = x$ ;
  - в)  $f(x, y, z_1) \leq f(x, y, z_2)$ , если  $z_1 \leq z_2$ .
- 5)  $I(\varphi) = 1 - I(\neg\varphi)$ .

Таким образом, для решения поставленной задачи для более широкой области формул (и применений) необходимо решить две подзадачи:

- 1) ввести достаточно адекватную метрику на классах формул;
- 2) найти такую функцию  $f(x, y, z)$ , которая обладает выше перечисленными свойствами 1)-5).

В работах [2, 3] эта задача решалась для формул исчисления высказываний. Мера информативности здесь (как и раньше) будет определена как мера опровержимости формулы на моделях. В случае непротиворечивости формулы (если для нее существует хотя бы одна модель, на которой она истинна (выполнима), эта мера отражает интуитивное представление о количестве информации, содержащейся в высказывании эксперта, и ценности (важности) информации полученной от эксперта (в виде меры решений формулы в моделях или их числа). На практике это соответствует истинности утверждаемого и резкому уменьшению числа моделей-претендентов. В [4] задача решалась для формул языка первого порядка с использованием конечного класса моделей, а

еще раньше - только для конечных моделей со считающей мерой. На самом деле мы не знаем ни полной теории рассматриваемой области, ни самих адекватных моделей и нам нужно восстановить расстояния между формулами. Рассматриваемые вопросы относятся к некорректным и обратным задачам, поскольку известно, что множество изучаемых формул можно удачно метризовать, но мы имеем мало информации для восстановления параметров полезной метрики и предлагаем решать задачу используя модели экспертов, их знания (некоторых общих аксиом – теории) и требования на метрику. Подход Лбова Г.С., отличающийся от предложенного, основан на приближении вводимой метрики к метрике на образах, и использует переход к проекциям, а затем нахождение параметров идет с помощью решения экстремальной задачи.

В настоящей работе предлагается и общий подход с использованием измеримого класса моделей и его расширений для нахождения и вычисления (естественных) расстояний являющихся метриками на классах эквивалентных формул с точности до меры 0, мер информативностей и установления справедливости требований 1) - 5). В дальнейшем всегда вместо понятия мера информативности (ввиду перегруженности термина) будем использовать понятие мера опровержимости, поскольку это больше соответствует сути вводимой меры. Здесь также рассматривается задача введения метрик на множестве вероятностных формул. Для предложенных далее расстояний также справедливы хорошие свойства метрики (как в предыдущих случаях) и связанными с ними мерами опровержимостей.

Предложенные метрики и меры опровержимости апробированы на отдельных модельных примерах и задачах по интеграционному проекту СО РАН "Компьютерная система для анализа антропологической информации" совместному Сибирскому проекту "Новые информационные технологии и разработка методов анализа в археологии, культурной и социальной антропологии" (сорук. Г.С. Лбов), результаты по которым кратко приводятся в работе.

Отметим, что проблемой введения расстояний в классе специальных логических формул и предикатов занимались также профессора Н.Г. Загоруйко и Г.С. Лбов с коллегами [1,2,5,6]. Их подходы более проработаны с точки зрения практических применений. Предлагаемый подход отличается некоторой общностью (произвольные измеримые предикаты и формулы от разнотипных переменных), стало быть более богатые выразительные возможности есть у экспертов, теоретической проработкой свойств предлагаемых метрик, и решением задачи о введении информативности (как меры опровержимости) для формул и установление важных требований.

В решении поставленных задач играет важную роль предполагаемая измеримость совокупности моделей и используется (логическая) теория моделей, как теория алгебраических систем (включая многосортные), например, по академику Анатолию Ивановичу Мальцеву, что позволяет изучать вопрос не только с точки зрения высказываний экспертов, но и "знаний" экспертов (гипотез, и их представлений о моделях), выраженных в виде интерпретаций сигнатурных предикатов (возможно и многосортных, многоместных) в различных множествах (моделях для краткости).

Исследование позволит решать вопросы связанные с согласованием экспертных высказываний, построением решающих функций на основе адаптации различных метрик, распознавания образов, а также при создании логических баз знаний, их кластеризации и при разработке экспертных систем [2, 5].

## 2. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ ФОРМУЛАМИ ОТ РАЗНОТИПНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ЯЗЫКА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть  $\Omega = \{P_1^{m_1}, \dots, P_t^{m_t}\}$  — фиксированная сигнатура, состоящая из конечного числа предикатных символов, которые выбираются для записи и изучения имеющихся связей между переменными в конкретной прикладной области. Общий случай исчисления высказываний описан в [2, 3]. Пусть задано некоторое конечное множество разнотипных переменных  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$ . Обозначим через  $D_{x_j}$  непустое множество с конечной мерой возможных значений переменной  $x_j$ . Пусть  $A_n = \bigcup_{j=1}^p D_{x_j}$  — непустое множество мощности  $n$  (может быть и бесконечной), являющееся объединением всех значений рассматриваемых переменных, включенных в имеющиеся предикаты.

В сигнатуру  $\Omega$  для каждой переменной  $x_j$  дополнительно включен одноместный предикат  $P_{x_j}$ , выделяющий область значений переменной  $x_j$  в  $A_n$ , то есть предикат  $P_{x_j}(a)$  истинен в модели  $A_n$  на элементах  $a \in A_n$  тогда и только тогда, когда  $a \in D_{x_j}$ .

**Определение 1** [7]. Под интерпретацией будем понимать отображение  $\gamma$ , ставящее в соответствие каждому  $m_i$ -местному предикатному символу  $P_i^{m_i}$  из сигнатуры  $\Omega$   $m_i$ -местный предикат (отношение)  $P_i^{A_n} \subseteq A_n^{m_i}$ , заданный на множестве  $A_n$ . Это позволяет говорить о модели  $\langle A_n, \Omega \rangle$  сигнатуры  $\Omega$ . В модели  $\langle A_n, \Omega \rangle$  предикат  $P_i(x_1, \dots, x_{m_i})$  истинен на элементах  $a_1, \dots, a_{m_i}$  из  $A_n$  (записывается  $\langle A_n, \Omega \rangle \models P_i(a_1, \dots, a_{m_i})$ ) тогда и только тогда, когда  $\langle a_1, \dots, a_{m_i} \rangle \in P_i^{A_n}$  (—интерпретация предиката в модели) и  $a_j \in D_{x_j}$ . Будем рассматривать модели только конечной или счетной (для общности) сигнатуры.

Пусть имеется конечное число  $s$  экспертов и заданы области возможных значений всех переменных. Модели (в упомянутом выше смысле) задаются специалистами по теории моделей, согласно логическим утверждениям экспертов. С каждым экспертом связываются множества (носители) (но их не более чем конечно), согласно его знаниям интерпретируются в них сигнатурные предикаты. Каждый эксперт "задает" свою интерпретацию каждого предикатного символа  $P_i^{m_i}$  сигнатуры  $\Omega$  соответствующим отношением (предикатом) на множестве  $A_n$ . В результате имеем множество моделей  $\{M_j\}_{j=1}^s$  —исходный класс моделей.

"Знания" экспертов можно записать в виде формул (возможно с кванторами) в некоторой сигнатуре первого порядка (возможно и предложениями, то есть формулами с кванторами без свободных переменных). Предложения либо истинны, либо ложны на модели, а формулы с переменными определяют формульные предикаты (подмножества) в каждой модели  $M_j$  по заданной интерпретации  $j$ -го эксперта [2].

Пусть  $F$  — система подмножеств множества  $\bigcup_k A_n^k$ , образующая  $\sigma$ -алгебру, где  $A_n^k = \underbrace{A_n \times \dots \times A_n}_k$ . Нас будут интересовать только такие подмножества

$S_j$  из  $F$ , для которых найдется формула  $\psi_j$ , отражающая ”знания” экспертов, которая и определяет это подмножество  $S_j$  (формульное подмножество). То есть  $S_j$  — это множество кортежей из  $\bigcup_k A_n^k$ , на которых выполняется формула  $\psi_j$ . Формула  $\psi_j$  либо отражает какое-то из высказанных ”знаний” экспертов, либо является их булевой комбинацией и навешиванием кванторов на некоторые свободные переменные. В дальнейшем каждому рассматриваемому нами множеству  $S_j$  соответствует некоторая формула  $\psi_j$ .

Пусть  $B$  — замыкание множества предикатных формул  $\Omega$  относительно логических операций  $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$  и кванторов  $\forall$  и  $\exists$  по свободным переменным. Ясно, что рассматриваемое экспертами множество формул содержится в  $B$ .

**Определение 2** [8]. Вероятностной мерой  $\mu$  на множестве  $B$  называется отображение  $\mu : B \rightarrow [0, 1]$ , удовлетворяющее для  $\varphi$  и  $\psi \in B$  условиям:

- 1) если  $\vdash \varphi \equiv \psi$ , то  $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ , ( $\vdash \varphi$  означает, что на всех моделях  $\varphi$  истинна);
- 2) если  $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$ , то  $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$ ;
- 3) если  $\vdash \varphi$ , то  $\mu(\varphi) = 1$ ;
- 4) если  $\vdash \neg\varphi$ , то  $\mu(\varphi) = 0$ ;
- 5)  $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$  и мю-связь конъюнкции с дизъюнкцией формул и их компонент (тождество модулярности).

Отметим, что в каждом конкретном случае мера  $\mu$  выбирается исходя из решаемой задачи [8].

Далее предполагаем, что на множестве формул  $B$  задана вероятностная мера  $\mu$ . Тем самым, вероятностная мера  $\mu$  задана на элементах множества формул  $F$ .

По заданным ”знаниям” экспертов мы построили класс моделей (исходный класс). Чтобы более полно использовать информацию экспертов можно расширить исходный класс моделей. Учитывая одновременно информацию нескольких экспертов, можно доуточнить каждую модель (тем самым из имеющейся можно получить еще одну или более новых моделей) и эти другие новые модели добавить в исходный класс. Уточнять модели будем следующим образом. Вместо ”знания”, заданного экспертом в виде предиката  $P_i$  в модели  $M_j$ , далее будем рассматривать его уточнение — предикат  $\tilde{P}_i$ .

Под уточнением  $\tilde{P}_i$  предиката  $P_i$  понимаем уточнение интерпретации этого предиката во множестве  $M_j$  одним из способов:

- 1) оставить предикат  $P_i$  без изменений;
- 2) исключить из  $P_i$  те элементы, в истинности которых  $j$ -ый эксперт не уверен;
- 3) в предикат  $P_i$  добавить новые элементы и исключить некоторые старые, например, с учетом ”знаний” других экспертов;
- 4) выполнить пункты 2) и 3) одновременно.

Обозначим произвольный расширенный класс моделей через  $\text{Mod}_n(\Omega)$ . Введем расстояние на множестве ”знаний” экспертов с помощью более полного класса моделей  $\text{Mod}_n(\Omega)$ . Модели различаются интерпретациями сигнатурных предикатов, входящих в ”знания” экспертов.

Определим расстояние между формульными подмножествами (предикатами) от одних и тех же переменных в каждой модели  $M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)$ , как нормированную меру их симметрической разности. Предикат  $P_i^{M_j}$  в новой добавленной к исходному классу модели  $M_j$  это предикат  $\tilde{P}_i^{M_j}$ .

**Определение 3.** Расстоянием между предикатами (формульными подмножествами)  $P_k^{M_i}$  и  $P_j^{M_i}$  от одних и тех же переменных, определенными в модели  $M_i$ , назовем меру симметрической разности их решений в модели

$$\rho_{M_i}(P_k^{M_i}, P_j^{M_i}) = \mu(P_k^{M_i} \Delta P_j^{M_i}).$$

**Замечание 1.** Это определение можно расширить на формулы с различными наборами свободных переменных. В этом случае, если рассматриваемые предикаты имеют разную местность или разный набор переменных, и эксперт считает отсутствующую в одной из формул переменную  $x_i$  несущественной, полагаем, что она принимает любое из возможных значений и добавляем конъюнктивно к нужной формуле предикат  $P_{x_i}$ , выделяющий область значений этой переменной. В противном случае (если она существенна) доопределяем эту переменную, добавив конъюнктивно к нужной формуле предикат  $P'_{x_i}$ , уточняющий значения этой переменной после повторного обращения к эксперту [2]. Если расстояние измеряется между формулами, у которых наборы переменных различаются, например, по переменной  $x_i$ , причем в одной из формул переменная  $x_i$  находится под действием квантора, а в другую формулу  $x_i$  не входит, тогда относительно переменной  $x_i$  в таких формулах никаких изменений делать не надо. Если же расстояние измеряется между формулами, у которых наборы переменных различаются по переменной  $x_i$ , и в одной из формул переменная  $x_i$  находится под действием квантора, а в другой формуле  $x_i$  является свободной переменной, тогда доопределяем эту переменную, добавив конъюнктивно к нужной формуле предикат  $P_{x_i}$  или  $P'_{x_i}$ , уточняющий значения этой переменной, в зависимости от способа доопределения переменной. Например, заменяем формулу  $\psi(x_j) = \exists x_i \varphi(x_i, x_j)$  на формулу  $\psi(x_i, x_j) = \exists x_i (\varphi(x_i, x_j) \wedge P'_{x_i}) \wedge P'_{x_i}$ . Аналогично рассматривается случай с квантором  $\forall$ .

В дальнейшем, с учетом выше сказанного, будем изучать расстояния между формулами от одних и тех же разнотипных переменных (одной местности).

Расстояние между формулами, определенными на множестве моделей  $\text{Mod}_n(\Omega)$ , определим как среднее от множества расстояний в рассматриваемых моделях.

**Определение 4.** Расстоянием между формулами  $P_k$  и  $P_j$  от одних и тех же переменных, определенными на множестве  $\text{Mod}_n(\Omega)$ , назовем величину

$$\rho_1(P_k, P_j) = \frac{\sum_{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)} \rho_{M_i}(P_k^{M_i}, P_j^{M_i})}{|\text{Mod}_n(\Omega)|}.$$

В знаменателе формулы стоит мощность или, в общем случае мера кизмеримого класса моделей, увеличенная на 1.

Теперь рассмотрим способ определения расстояния между предложениями (замкнутыми формулами). Обозначим через  $\text{Mod}(\varphi)$  множество моделей из  $\text{Mod}_n(\Omega)$ , на которых истинно предложение  $\varphi$ , т.е.  $\text{Mod}(\varphi) = \{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega) \mid M_i \models \varphi\}$ .

Очевидно, существуют такие модели, на которых не общезначимое предложение (эксперта) истинно, и такие, на которых оно ложно. Естественно с

семантической точки зрения измерять различные информации, содержащейся в предложениях, количеством моделей, на которых предложения ложны.

**Определение 5.** Расстоянием между предложениями  $\varphi$  и  $\psi$  от одних и тех же переменных назовем величину

$$\rho_2(\varphi, \psi) = \frac{|\text{Mod}((\neg\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg\psi))|}{|\text{Mod}_n(\Omega)|}.$$

Рассмотрим еще один способ определения расстояния между формулами. Дополним сигнатуру  $\Omega$  константами из множества  $A_n$ . Для этого множества рассмотрим произвольные кортежи  $\bar{a}$  длины местности формул, равной  $\ell(\bar{a})$ . При подстановке кортежей в формулы, в предположении, что формулы имеют одинаковую местность (как этого добиться было показано выше), формулы становятся предложениями.

Под эквивалентностью двух формул  $\varphi(\bar{x})$  и  $\psi(\bar{x})$  ( $\varphi(\bar{x}) \equiv \psi(\bar{x})$ ) будем понимать эквивалентность их в классе моделей  $\text{Mod}_n(\Omega)$ , то есть в каждой модели  $M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)$  соответствующие  $\varphi(\bar{x})$  и  $\psi(\bar{x})$  формульные подмножества (множество реализаций формул) совпадают.

Тогда расстояние между неэквивалентными формулами  $\varphi$  и  $\psi$  определим как минимум расстояний, определенных по всем кортежам, которые реализуют формулу  $\varphi$ , но не реализуют формулу  $\psi$  и наоборот, используя определенное выше расстояние для предложений. Расстояние между эквивалентными формулами равно нулю.

**Определение 6.** Расстоянием между формулами  $\varphi$  и  $\psi$  от одних и тех же переменных назовем величину

$$\rho_3(\varphi(\bar{x}), \psi(\bar{x})) = \begin{cases} \min_{\bar{a} \in \chi(A_n^{\ell(\bar{a})})} \rho_2(\varphi(\bar{a}), \psi(\bar{a})), & \text{not} \varphi(\bar{x}) \equiv \psi(\bar{x}) \\ 0, & \varphi(\bar{x}) \equiv \psi(\bar{x}) \end{cases},$$

где  $\chi(\bar{x}) = (\neg\varphi(\bar{x}) \wedge \psi(\bar{x})) \vee (\varphi(\bar{x}) \wedge \neg\psi(\bar{x}))$  и  $\chi(A_n^{\ell(\bar{a})}) = \{\bar{b} \in A_n^{\ell(\bar{a})} \mid \exists M_i \in \text{Mod}_n(\Omega) : M_i \models \chi(\bar{b})\}$

Ранее доказана теорема [4], из которой следует, что предложенные расстояния действительно являются метриками. В теореме 1 обобщается этот результат и приводятся свойства введенных для формул расстояний.

Далее вместо  $\varphi(\bar{x})$ ,  $\psi(\bar{x})$ ,  $\chi(\bar{x})$  для краткости будем писать  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$ .

**Теорема 1.** Для любых формул  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\chi$  от одних и тех же (разнотипных) переменных и любого конечного расширения исходного (измеримого) класса моделей для любого  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) выполняются следующие свойства:

1.  $0 \leq \rho_i(\varphi, \psi) \leq 1$ .
2.  $\rho_i(\varphi, \psi) = \rho_i(\psi, \varphi)$  (симметричность).
3.  $\rho_i(\varphi, \psi) \leq \rho_i(\varphi, \chi) + \rho_i(\chi, \psi)$ .
4.  $\varphi \equiv \psi \iff \rho_i(\varphi, \psi) = 0$ .
5.  $\varphi \equiv \neg\psi \iff \rho_i(\varphi, \psi) = 1$ .
6.  $\rho_i(\varphi, \psi) = 1 - \rho_i(\varphi, \neg\psi) = \rho_i(\neg\varphi, \neg\psi)$ .
7.  $\rho_i(\varphi, \psi) = \rho_i(\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi)$ .
8.  $\rho_i(\varphi, \neg\varphi) = \rho_i(\varphi, \psi) + \rho_i(\psi, \neg\varphi)$ .

Доказательство теоремы следует из определений, свойств вероятностной меры, теоретико-модельных вычислений и аналогично доказательству из [4]. Для подтверждения приведем доказательство пункта 4.

Для  $i = 1$  достаточно показать, что  $\mu(\varphi^{M_i} \Delta \psi^{M_i}) \leq \mu(\varphi^{M_i} \Delta \chi^{M_i}) + \mu(\chi^{M_i} \Delta \psi^{M_i})$  для каждой модели  $M_i$ . Рассмотрим  $\mu(\varphi^{M_i} \Delta \psi^{M_i}) = \mu(\varphi^{M_i} \setminus \psi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i} \setminus \varphi^{M_i}) = \mu(\varphi^{M_i} \wedge \neg \psi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i} \wedge \neg \varphi^{M_i}) = \mu(\varphi^{M_i} \wedge \chi^{M_i} \wedge \neg \psi^{M_i}) + \mu(\varphi^{M_i} \wedge \neg \chi^{M_i} \wedge \neg \psi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i} \wedge \neg \varphi^{M_i} \wedge \chi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i} \wedge \neg \varphi^{M_i} \wedge \neg \chi^{M_i}) \leq \mu(\chi^{M_i} \wedge \neg \psi^{M_i}) + \mu(\varphi^{M_i} \wedge \neg \chi^{M_i}) + \mu(\neg \varphi^{M_i} \wedge \chi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i} \wedge \neg \chi^{M_i}) = \mu(\varphi^{M_i} \Delta \chi^{M_i}) + \mu(\chi^{M_i} \Delta \psi^{M_i})$ , что и требовалось.

Докажем свойство 4 для  $i = 2$ . Обозначим через  $S_1 = Mod((\neg \varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \neg \psi))$ ,  $S_2 = Mod((\neg \varphi \wedge \chi) \vee (\varphi \wedge \neg \chi))$ ,  $S_3 = Mod((\neg \chi \wedge \psi) \vee (\chi \wedge \neg \psi))$ . Докажем, что  $|S_1| \leq |S_2| + |S_3|$ . Достаточно доказать, что  $S_1 \subset S_2 \cup S_3$ . Возьмем произвольно  $M_j \in S_1$ , тогда  $(M_j \models (\neg \varphi \wedge \psi)) \vee (M_j \models (\varphi \wedge \neg \psi))$ . Без ограничения общности (используя симметричность) будем считать, что  $M_j \models (\neg \varphi \wedge \psi)$ . Значит,  $M_j \models \neg \varphi$  и  $M_j \models \psi$ . Для произвольного  $\chi$  ясно, что  $(M_j \models \chi) \vee (M_j \models \neg \chi)$ . Если  $M_j \models \chi$ , то  $M_j \models (\neg \varphi \wedge \chi)$ , т. е.  $M_j \in S_2$ . Если  $M_j \models \neg \chi$ , то  $M_j \models (\neg \chi \wedge \psi)$ , т. е.  $M_j \in S_3$ . Получили, что  $(M_j \in S_2) \vee (M_j \in S_3)$ , т.е.  $M_j \in S_2 \cup S_3$ . В силу произвольности  $M_j$  имеем  $S_1 \subset S_2 \cup S_3$ . Поэтому,  $|S_1| \leq |S_2 \cup S_3| = |S_2| + |S_3| - |S_2 \cap S_3| \leq |S_2| + |S_3|$ , что и требовалось. Для  $i = 3$  свойство 4 доказывается аналогично.

### 3. МЕРЫ ОПРОВЕРЖИМОСТИ И ВЕРОЯТНОСТИ ФОРМУЛ

С точки зрения важности информации, сообщенной экспертом, которому мы доверяем, естественно считать, что опровержимость непустой формулы тем выше, чем меньше число удовлетворяющих ей элементов для конечного случая, и чем меньше мера задаваемого предикатной формулой подмножества в общем измеримом случае. Поэтому введем меру опровержимости следующим образом.

**Определение 7.** Мерой опровержимости формулы  $\varphi(\bar{x})$  назовем величину

$$I_i(\varphi(\bar{x})) = \rho_i(\varphi(\bar{x}), 1),$$

где 1 — тождественно истинный предикат (например,  $\bar{x} = \bar{x}$ ).

Для введенных расстояний  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) получаем (соответственно) следующие меры опровержимости:

$$I_1(\varphi) = \frac{\sum_{M_i \in Mod_n(\Omega)} \mu(\neg \varphi^{M_i})}{|Mod_n(\Omega)|}, \quad I_2(\varphi) = \frac{|Mod(\neg \varphi)|}{|Mod_n(\Omega)|}, \quad I_3(\varphi) = \frac{\min_{\bar{a} \in \chi(A_n^{\ell(\bar{a})})} |Mod(\neg \varphi(\bar{a}))|}{|Mod_n(\Omega)|}.$$

Для мер опровержимости справедлива следующая

**Теорема 2.** Для любых формул исчисления предикатов  $\varphi$  и  $\psi$  от одних и тех же переменных и любого конечного расширения исходного (измеримого) класса моделей справедливы для любого  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) следующие свойства:

1.  $0 \leq I_i(\varphi) \leq 1$ .
2.  $I_i(1) = 0$ .
3.  $I_i(0) = 1$ .
4.  $I_i(\varphi) = 1 - I_i(\neg \varphi)$ .
5.  $I_i(\varphi) \leq I_i(\varphi \wedge \psi)$ .
6.  $I_i(\varphi) \geq I_i(\varphi \vee \psi)$ .
7.  $I_i(\varphi \wedge \psi) = \rho_i(\varphi, \psi) + I_i(\varphi \vee \psi)$ .
8. Если  $\varphi \equiv \psi$ , то  $I_i(\varphi) = I_i(\psi)$ .
9. Если  $\rho_i(\varphi, \psi) = 0$ , то  $I_i(\varphi \vee \psi) = I_i(\varphi \wedge \psi) = I_i(\varphi)$ .
10.  $I_i(\varphi \wedge \psi) = (I_i(\varphi) + I_i(\psi) + \rho_i(\varphi, \psi))/2$ .
11.  $I_i(\varphi \vee \psi) = (I_i(\varphi) + I_i(\psi) - \rho_i(\varphi, \psi))/2$ .

Для доказательства теоремы используются определения, свойства метрики из теоремы 1 и теоретико-модельные вычисления аналогичные доказательству из [4]. Приведем, например, доказательство 10.

$$\begin{aligned} & \text{Докажем для } i = 1. \quad I_1(\varphi \wedge \psi) = 1 - I_1(\neg(\varphi \wedge \psi)) = 1 - I_1(\neg\varphi \vee \neg\psi) = \\ & = 1 - \frac{\sum_{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)} \mu(\varphi^{M_i} \wedge \psi^{M_i})}{|\text{Mod}_n(\Omega)|} = 1 + \frac{\sum_{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)} (\mu(\varphi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i}) - 2\mu(\varphi^{M_i} \wedge \psi^{M_i}))}{2|\text{Mod}_n(\Omega)|} - \\ & - \frac{\sum_{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)} (\mu(\varphi^{M_i}) + \mu(\psi^{M_i}))}{2|\text{Mod}_n(\Omega)|} = 1 + \frac{\sum_{M_i \in \text{Mod}_n(\Omega)} \mu(\varphi^{M_i} \Delta \psi^{M_i})}{2|\text{Mod}_n(\Omega)|} - \frac{I_1(\neg\varphi) + I_1(\neg\psi)}{2} = 1 + \\ & + \frac{1}{2}\rho_1(\varphi, \psi) - \frac{1}{2}(1 - I_1(\varphi) + 1 - I_1(\psi)) = \frac{1}{2}(I_1(\varphi) + I_1(\psi) + \rho_1(\varphi, \psi)). \text{ Что и} \\ & \text{требовалось доказать. Для } i = 2, 3 \text{ аналогично.} \end{aligned}$$

На практике же эксперт обычно задает высказывание с его "вероятностью", его степенью достоверности. А задача состоит в изучении и согласовании таких высказываний, введении некоторой метрики на таких высказываниях. Первоочередной задачей, на наш взгляд, является определение вероятностей для формул с помощью используемого нами модельного подхода.

**Определение 8.** Вероятностью (степенью достоверности) формулы  $\varphi(\bar{x})$  назовем величину

$$P_i(\varphi(\bar{x})) = \rho_i(\varphi(\bar{x}), 0).$$

**Теорема 3.** Для любого конечного расширения исходного измеримого класса моделей для любых формул исчисления предикатов  $\varphi$  и  $\psi$  от одних и тех же (разнотипных) переменных и для любого  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) справедливы следующие утверждения:

1.  $0 \leq P_i(\varphi) \leq 1$ .
2.  $P_i(1) = 1$ .
3.  $P_i(0) = 0$ .
4.  $P_i(\varphi) = 1 - P_i(\neg\varphi)$ .
5.  $P_i(\varphi) \geq P_i(\varphi \wedge \psi)$ .
6.  $P_i(\varphi) \leq P_i(\varphi \vee \psi)$ .
7.  $P_i(\varphi \wedge \psi) = P_i(\varphi \vee \psi) - \rho_i(\varphi, \psi)$ .
8. Если  $\varphi \equiv \psi$ , то  $P_i(\varphi) = P_i(\psi)$ .
9. Если  $\rho_i(\varphi, \psi) = 0$ , то  $P_i(\varphi \vee \psi) = P_i(\varphi \wedge \psi) = P_i(\varphi)$ .
10.  $P_i(\varphi \wedge \psi) = (P_i(\varphi) + P_i(\psi) - \rho_i(\varphi, \psi))/2$ .
11.  $P_i(\varphi \vee \psi) = (P_i(\varphi) + P_i(\psi) + \rho_i(\varphi, \psi))/2$ .

Для доказательства теоремы 3 используются результаты теорем 1 и 2 и, что  $P_i(\varphi(\bar{x})) = I_i(\neg\varphi(\bar{x}))$ .

Так вычисленные с использованием теоретико-модельного подхода вероятности позволяют уточнять "вероятности" экспертов и будут применяться в дальнейшем.

Разработан и реализован алгоритм для вычисления расстояний между формулами и мер опровержимости формул. Приведем один из тестовых примеров.

**Пример 1.** Пусть три эксперта высказываются о возрасте человека и его профессии (для краткости - prof): (ti)учитель, (sh)шофер, (ba)строитель, (sa)продавец, предсказывая наличие у него того или иного заболевания, например, радикулита(rad) или ухудшения зрения(bad gl) . То есть

$$\begin{aligned} X &= \{x_1(\text{prof}), x_2(\text{ag})\}; \\ D_{x_1} &= \{ti, sh, ba, sa\}; \\ D_{x_2} &= \{41, 42, 43, 44, 45\}; \\ \Omega &= \{P_1 - rad, P_2 - bad\ gl\}. \end{aligned}$$

Для краткости формулу  $(x = a_1 \vee x = a_2 \vee x = a_3)$  будем записывать как  $(x = a_1 \vee a_2 \vee a_3)$  и через  $P(x, y) = 1$  обозначать, что предикат истинен в некоторой модели.

1-ый эксперт:

$$P_1^1(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = sh \vee ba \vee sa) \wedge (x_2 = 42 \vee 43 \vee 44 \vee 45)]$$

$$P_2^1(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee sh \vee sa) \wedge (x_2 = 41 \vee 42 \vee 43 \vee 44)]$$

2-ой эксперт:

$$P_1^2(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ba) \wedge (x_2 = 44 \vee 45)]$$

$$P_2^2(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee ba \vee sa) \wedge (x_2 = 43 \vee 44 \vee 45)]$$

3-ий эксперт:

$$P_1^3(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ba \vee sa)]$$

$$P_2^3(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee ba) \wedge (x_2 = 41 \vee 43 \vee 45)]$$

Вычислим расстояние между предикатами  $P_1$  и  $P_2$  и меры их опровержимости.

В модели  $M_1$  первого эксперта имеем:

$$\rho_{M_1}(P_1^1, P_2^1) = 0, 6; I_{M_1}(P_1^1) = 0, 4; I_{M_1}(P_2^1) = 0, 4.$$

В модели  $M_2$  второго эксперта:

$$\rho_{M_2}(P_1^2, P_2^2) = 0, 35; I_{M_2}(P_1^2) = 0, 9; I_{M_2}(P_2^2) = 0, 55.$$

В модели  $M_3$  третьего эксперта:

$$\rho_{M_3}(P_1^3, P_2^3) = 0, 5; I_{M_3}(P_1^3) = 0, 5; I_{M_3}(P_2^3) = 0, 7.$$

Тогда результирующее расстояние между предикатами  $P_1$  и  $P_2$  равно  $\rho(P_1, P_2) = 0, 4833$ ; а меры опровержимости предикатов соответственно равны  $I(P_1) = 0, 6$ ;  $I(P_2) = 0, 55$ .

Можно вычислить расстояния между "знаниями" экспертов относительно одного и того же заболевания:

$$\rho(P_1^1, P_1^2) = 0, 5; \rho(P_1^1, P_1^3) = 0, 3; \rho(P_1^2, P_1^3) = 0, 4;$$

$$\rho(P_2^1, P_2^2) = 0, 65; \rho(P_2^1, P_2^3) = 0, 7; \rho(P_2^2, P_2^3) = 0, 35.$$

Приведем еще один пример.

**Пример 2** ([6]). Два эксперта высказываются о влажности ( $X_1$ ), которая измеряется четырьмя значениями, то есть  $D_{X_1} = \{(ze) \text{ нулевая, } (lo) \text{ низкая, } (mi) \text{ средняя, } (ho) \text{ высокая}\}$ , о количестве азотных удобрений ( $X_2$ ), диапазон изменений которого от 0 до 320 кг/га, то есть  $D_{X_2} = (0, 320)$  ( $X_2$  - непрерывная переменная), о типе почвы ( $X_3$ ) (например, (che) чернозем), общее число которых 4, и видах культур-предшественников ( $X_4$ ) (например, (bo) бобовые или (tr) травяные), общее число которых 8.

На вопрос, каковы условия для получения хорошего урожая пшеницы, эксперты дали ответы:

$$1: (X_1 = mi) \wedge (X_2 \in (160 - 200)) \wedge (X_3 = che),$$

$$2: (X_1 = mi \vee ho) \wedge (X_2 \in (200 - 280)) \wedge (X_4 = bo \vee tr).$$

Тогда расстояние между высказываниями экспертов и мера опровержимости высказываний, вычисленные по введенным формулам с учетом замечания 1 следующие:

$$\rho_1(1, 2) = 0, 039, I_1(1) = 0, 992, I_1(2) = 0, 969.$$

Если не учитывать замечание 1, а вычислять расстояние только по общим переменным, то результат получается такой:  $\rho_1'(1, 2) = 0, 156$ .

Если вычислять расстояние между этими мнениями экспертов по формуле, предложенной Н.Г. Загоруйко в работах [5, 6], то получается

$R = 0.18$ , что говорит о близости и отличии этих расстояний. А также о применимости введенного в алгоритмах.

#### 4. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ВЫСКАЗЫВАНИЯМИ ЭКСПЕРТОВ

Как уже отмечалось, на практике эксперт обычно задает высказывание с его “вероятностью”. В этом случае вопрос состоит в изучении и согласовании таких высказываний, введении некоторой метрики на таких высказываниях. Рассмотрим “знания” экспертов, представленные формулами исчисления высказываний с вероятностями (вероятностные высказывания), т. е. высказывания вида: “ $\varphi$  с вероятностью  $p_\varphi$ ”, где  $\varphi$  — формула исчисления высказываний. Используем следующую запись для таких высказываний:  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$ ,  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ . Здесь номера заменяют формулу с ее вероятностью (такая нумерация существует).

Пусть  $\Sigma$  — база знаний, состоящая из формул исчисления высказываний (в  $\Sigma$  содержатся все те формулы, которые дали эксперты),  $S(\varphi)$  — носитель формулы  $\varphi$ , т.е. множество элементарных высказываний, используемых при написании формулы  $\varphi$ , и  $S(\Sigma) = \bigcup_{\varphi \in \Sigma} S(\varphi)$  —, короче, носитель совокупности знаний.

Рассмотрим множество  $P(S(\Sigma)) = 2^{S(\Sigma)}$  — множество всех подмножеств множества  $S(\Sigma)$ . Элементы множества  $P(S(\Sigma))$  назовем моделями. Известно, что мощность множества  $P(S(\Sigma))$  равна  $2^{|S(\Sigma)|} = n$  (обозначим для удобства и простоты).

Предположим, что эксперты говорят о вероятностях формул на множестве всех моделей, и каждое высказывание присутствует только с одной вероятностью (случай, когда у высказывания не одна вероятность будет рассмотрен ниже).

Тогда интерпретируем вероятность, данную экспертом, следующим образом:

$B = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  означает, что высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi = \lfloor n \cdot p_\varphi \rfloor$  (обозначение целой части) моделях, где  $n = 2^{|S(\Sigma)|}$  — всего рассматриваемых моделей.

Пусть даны два вероятностных логических высказывания  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ , и требуется восстановить расстояние  $\rho(B_i, B_j)$  между такими высказываниями.

Тогда, интерпретируя данные экспертами вероятности описанным выше способом, получаем, что высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi = \lfloor n \cdot p_\varphi \rfloor$  моделях, а высказывание  $\psi$  истинно на  $n_\psi = \lfloor n \cdot p_\psi \rfloor$  моделях.

Отметим, однако, что неизвестно на каких именно моделях каждое высказывание истинно, а также число моделей, на которых эти высказывания истинны одновременно.

Рассмотрим следующую подзадачу. Пусть высказывание  $\varphi$  истинно на  $n_\varphi$  моделях, высказывание  $\psi$  истинно на  $n_\psi$  моделях и  $k$  — число моделей, на которых эти высказывания одновременно истинны. Требуется восстановить расстояние между высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ .

Возникающие в дальнейшем расстояния обозначим через  $\rho_k(B_i, B_j)$ , где  $k = t, t + 1, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ , здесь и далее  $t = \max(0, n_\varphi + n_\psi - n)$ . Заметим, что значение  $k$  для каждой пары высказываний свое.

Как и раньше [3–4], расстояние  $\rho_k(B_i, B_j)$  зададим как симметрическую разность, то есть

$$(1) \quad \rho_k(B_i, B_j) = \frac{1}{n}(n_\varphi - k + n_\psi - k) = \frac{1}{n}(n_\varphi + n_\psi - 2k),$$

для каждого  $k = t, t + 1, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Для расстояний  $\rho_k(B_i, B_j)$  справедливы все утверждения теоремы 1. Здесь  $B_i \equiv B_j \iff \varphi \equiv \psi$  и  $p_\varphi = p_\psi$ . Это означает, что формулы  $\varphi$  и  $\psi$  истинны на одних и тех же моделях.)

Предложим несколько способов вычисления расстояния  $\rho(B_i, B_j)$  между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$ .

Так как нам не известно число  $k$  (число моделей, на которых высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  одновременно истинны), и если нет никаких предпочтений для значения  $k$  (предпочтение может быть высказано экспертами), то можем поступить таким образом.

Предположим, что для нас все значения для числа  $k$  равновероятны. Тогда расстояние между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$  определим как усреднение расстояний  $\rho_k(B_i, B_j)$  по всем значениям  $k$ , то есть

$$(2) \quad \rho(B_i, B_j) = \frac{\sum_{k=t}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j)}{\min(n_\varphi, n_\psi) + 1 - t}.$$

Для этого расстояния также справедлива теорема 1.

Если экспертами высказано, какое значение для  $k$  для пары  $B_i$  и  $B_j$  предпочтительнее, то в качестве  $\rho(B_i, B_j)$  берется это  $\rho_k(B_i, B_j)$ , то есть

$$(3) \quad \rho(B_i, B_j) = \rho_k(B_i, B_j).$$

Подойдем к этому вопросу с вероятностной точки зрения: для каждого  $k$  построим вероятностную модель и вычислим вероятность того, что ровно на  $k$  моделях высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  одновременно истинны.

Рассмотрим следующую задачу. Найти вероятность  $p_k$  того, что в выбранных  $n_\varphi$  и  $n_\psi$  моделях (выбираются из  $n$  моделей) будет ровно  $k$  моделей, на которых высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  одновременно истинны, где  $k = t, t + 1, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Сначала определим вероятностное пространство  $\langle \Omega, A, p \rangle$ , где  $\Omega$  — пространство элементарных исходов,  $\Omega = \{t, t + 1, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)\}$  — множество всевозможных совпадений моделей в наборах из  $n_\varphi$  и  $n_\psi$  моделей,  $A$  — система подмножеств множества  $\Omega$ , образующая  $\sigma$ -алгебру событий, и  $p$  — вероятность на  $\langle \Omega, A \rangle$ . Определим на  $\Omega$  такую случайную величину  $\xi$  что  $\xi(k) = \rho_k(B_i, B_j)$ .

Вероятность события, что ровно  $k$  моделей совпало в наборах из  $n_\varphi$  и  $n_\psi$  моделей вычисляется следующим образом

$$p_k = \binom{n}{k} \binom{n-k}{n_\varphi - k} \binom{n-n_\varphi}{n_\psi - k} / \left\{ \binom{n}{n_\varphi} \binom{n}{n_\psi} \right\}.$$

В результате имеем  $\rho_k(B_i, B_j)$  с вероятностями  $p_k$ , где  $k = t, t + 1, \dots, \min(n_\varphi, n_\psi)$ .

Зная вероятности  $p_k$  для каждого расстояния  $\rho_k(B_i, B_j)$ , в качестве расстояния между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$

можно выбрать расстояние  $\rho_k(B_i, B_j)$  с наибольшей вероятностью, то есть

$$(4) \quad \rho_{\max p}(B_i, B_j) = \rho_m(B_i, B_j), \quad p_m = \max_k p_k.$$

Очевидно, что для расстояния  $\rho_{\max p}(B_i, B_j)$  справедлива теорема 1.

Также можно в качестве расстояния между вероятностными высказываниями  $B_i = \langle \varphi, p_\varphi \rangle$  и  $B_j = \langle \psi, p_\psi \rangle$  взять величину, равную математическому ожиданию или среднему значению случайной величины  $\xi$ , то есть

$$(5) \quad \rho(B_i, B_j) = M\xi = \sum_{k=t}^{\min(n_\varphi, n_\psi)} \rho_k(B_i, B_j) \cdot p_k.$$

Для этого расстояния  $\rho(B_i, B_j)$  справедливы все утверждения теоремы 1.

В предложенных формулах (1)—(5) расстояний не учитывается сам вид формул, между которыми вычисляется расстояние. Поэтому естественно предложить расстояние, которое учитывает конкретно сами формулы, точнее меры их реализаций в модели, либо вероятностную меру моделей на которых она истинна.

Применяя модельный подход [3–4] к элементам множества  $P(S(\Sigma))$  (моделям), найдем вероятности  $P(\varphi)$  и  $P(\psi)$  и расстояние  $\rho(\varphi, \psi)$  (модельные вероятности и расстояние). Затем по свойству, аналогичному свойству 10 теоремы 3, справедливому и для формул исчисления высказываний, вычислим  $P(\varphi \wedge \psi) = \frac{1}{2}(P(\varphi) + P(\psi) - \rho(\varphi, \psi))$ . Тогда можно найти число  $k_0 = \lfloor n \cdot P(\varphi \wedge \psi) \rfloor$  — число (меру) моделей, на которых высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  одновременно истинны.

Имея число  $k_0$  (вычисленное по моделям), можно уменьшить число возможных значений для  $k$ . Здесь возможны 3 случая:

- 1) если  $t < k_0 < \min(n_\varphi, n_\psi)$ , то  $k = k_0 - 1, k_0, k_0 + 1$ ;
- 2) если  $k_0 = t$  или  $k_0 = \min(n_\varphi, n_\psi)$ , то, например,  $k = k_0, k_0 + 1$  или  $k = k_0 - 1, k_0$  соответственно;
- 3) если  $k_0 > \min(n_\varphi, n_\psi)$  или  $k_0 < t$ , то  $k = \min(n_\varphi, n_\psi)$  или  $k = t$  соответственно.

И уже к этим значениям для числа  $k$  применять предложенные выше формулы (1)—(5). По необходимости возможно некоторое расширение числа значений для  $k$ .

Теперь рассмотрим случай, когда одно и то же высказывание присутствует с разными вероятностями. В этом случае предлагаем два способа введения расстояния:

- 1) Пусть имеется  $s$  экспертов, которые указали вероятности  $p_1, p_2, \dots, p_s$  высказывания  $\varphi$ . Тогда в качестве вероятности  $p_\varphi$  можно взять их усреднение  $p_\varphi = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s p_i$ . Проделав такую процедуру для каждого высказывания, получим,

что каждое высказывание будет только с одной вероятностью. Далее следует уменьшить число возможных значений для  $k$  и применить формулы (1)—(5).

- 2) Рассмотрим  $r$ -того эксперта. Имеем высказывание  $\varphi$  с вероятностью  $p_r$  и высказывание  $\psi$  с вероятностью  $q_r$ , данные  $r$ -тым экспертом. Тогда вычислим расстояние  $\rho(B_i, B_j)$  для  $r$ -ого эксперта как в случае высказываний с одной

вероятностью (сам с собой эксперт всегда согласует вероятности). Это расстояние обозначим через  $\rho^r(B_i, B_j)$ . Такую процедуру проделаем с каждым из имеющихся  $s$  экспертов, а за  $\rho(B_i, B_j)$  примем  $\rho(B_i, B_j) = \frac{1}{s} \sum_{r=1}^s \rho^r(B_i, B_j)$ .

**Замечание 2.** Предложенным способом можно вычислять расстояние между следующими высказываниями:  $B_i = \langle \varphi, p_{\varphi_i} \rangle$  — информация, полученная от  $i$ -го эксперта, и  $B_j = \langle \varphi, p_{\varphi_j} \rangle$  — информация, полученная от  $j$ -го эксперта.

Результаты предыдущих рассуждений переносятся на формулы исчисления предикатов с вероятностями и произвольного конечного (и в смысле меры тоже) класса конечно измеримых моделей фиксированной сигнатуры. Остановимся на существенных моментах, отличающих этот случай от предыдущего.

Рассмотрим "знания" экспертов, представленные формулами исчисления предикатов с вероятностями, т. е. высказывания вида: " $\varphi(\bar{x})$  с вероятностью  $p_\varphi$ ", где  $\varphi(\bar{x})$  — формула исчисления предикатов. Используем следующую запись для таких высказываний:  $B_i = \langle \varphi(\bar{x}), p_\varphi \rangle$ ,  $B_j = \langle \psi(\bar{x}), p_\psi \rangle$ .

Напомним, что  $\Omega = \{P_1^{m_1}, \dots, P_t^{m_t}\}$  — сигнатура,  $X = \{x_1, \dots, x_p\}$  — множество переменных,  $D_{x_1}, \dots, D_{x_p}$  — конечные множества возможных значений переменных,  $s$  — число экспертов. Каждый эксперт "задает" свою интерпретацию каждого предикатного символа сигнатуры  $\Omega$  соответствующим отношением с приписанной ему вероятностью, т. е. "знания"  $i$ -го эксперта могут быть записаны в виде:  $\langle P_1^i(\bar{x}), p_1^i \rangle, \dots, \langle P_t^i(\bar{x}), p_t^i \rangle$ .  $\{M_i\}_{i=1}^s$  — исходное множество моделей. Высказывания экспертов могут быть представлены и формулами исчисления предикатов данной сигнатуры.

Зададим для простоты расстояние между предикатами  $P_l$  и  $P_j$ . Для этого сначала вычислим расстояние между вероятностными интерпретациями  $B_l^i = \langle P_l^i(\bar{x}), p_l^i \rangle$  и  $B_j^i = \langle P_j^i(\bar{x}), p_j^i \rangle$  предикатов в каждой модели  $M_i$ . Расстояния вычисляются между предикатами одинаковой местности и от одних и тех же переменных (см. замечание 1).

"Знание"  $B_l^i = \langle P_l^i(x_1, \dots, x_p), p_l^i \rangle$  означает, что предикат  $P_l^i(x_1, \dots, x_p)$  истинен на  $n_{P_l^i} = \lfloor n \cdot p_l^i \rfloor$  кортежах длины  $p$  в модели  $M_i$ , где  $n = \prod_{j=1}^p |D_{x_j}|$ .

Аналогично случаю исчисления высказываний пусть предикат  $P_l^i(\bar{x})$  истинен на  $n_{P_l^i}$  кортежах в модели  $M_i$ , предикат  $P_j^i(\bar{x})$  истинен на  $n_{P_j^i}$  кортежах в модели  $M_i$  и  $k^i$  — число (в бесконечном случае мера) кортежей, на которых эти предикаты одновременно истинны, где  $k^i = t, t+1, \dots, \min(n_{P_l^i}, n_{P_j^i})$ ,  $t = \max(0,$

$n_{P_l^i} + n_{P_j^i} - n)$ . Значение  $k^i$  для каждой пары предикатов свое. Тогда для каждого  $k^i$  расстояние  $\rho_{k^i}(B_l^i, B_j^i)$  зададим формулой

$$\rho_{k^i}(B_l^i, B_j^i) = \frac{1}{n} (n_{P_l^i} + n_{P_j^i} - 2k^i).$$

Для расстояний  $\rho_{k^i}(B_l^i, B_j^i)$  справедливы все утверждения теоремы 1.

Применяя модельный подход [3–4] и теорему 3, вычислим вероятности  $P_{M_i}(P_l^i)$ ,  $P_{M_i}(P_j^i)$  и расстояние  $\rho_{M_i}(P_l^i, P_j^i)$  в модели  $M_i$ , затем вычислим вероятность  $P_{M_i}(P_l^i \wedge P_j^i)$  и найдем число  $k_0^i = \lfloor P_{M_i}(P_l^i \wedge P_j^i) \cdot n \rfloor$  — число (мера) кортежей, на которых предикаты одновременно истинны, вычисленное по моделям.

Далее поступаем как в случае исчисления высказываний: в каждой модели  $M_i$  вычислим расстояния  $\rho^i(B_l^i, B_j^i)$  с учетом вероятностей и уменьшенного числа значений для  $k^i$ , и в качестве  $\rho(P_l, P_j)$  возьмем величину

$$(6) \quad \rho(P_l, P_j) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^s \rho^i(B_l^i, B_j^i).$$

Для расстояния  $\rho(P_l, P_j)$  также справедлива теорема 1.

Таким же образом, на реализациях в модели, вводится расстояние в модели между парой формул языка первого порядка с вероятностями.

Мера опровержимости формул с вероятностями (в случае исчисления высказываний и в случае языка первого порядка) вводится так же, как в пункте 2, то есть

$$I(\varphi) = \rho(\varphi, 1),$$

где 1 — тождественно истинная формула, а  $\rho$  — одно из введенных по формулам (2)—(6) расстояний на вероятностных высказываниях.

Для так введенных мер опровержимости справедливы все свойства теоремы 2, доказанные нами для формул исчисления высказываний и формул исчисления предикатов с использованием исходного конечного или измеримого класса моделей.

Приведем один из тестовых примеров для формул от разнотипных переменных исчисления предикатов.

**Пример 3.** Рассмотрим высказывания экспертов, приведенные в примере 1, но с приписанной экспертами вероятностью (вероятностные высказывания).

1-ый эксперт:

$$P_1^1(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = sh \vee ba \vee sa) \wedge (x_2 = 42 \vee 43 \vee 44 \vee 45)], \text{ вероятность } p_1^1 = 0, 5.$$

$$P_2^1(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee sh \vee sa) \wedge (x_2 = 41 \vee 42 \vee 43 \vee 44)], \text{ вероятность } p_2^1 = 0, 7.$$

2-ой эксперт:

$$P_1^2(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ba) \wedge (x_2 = 44 \vee 45)], \text{ вероятность } p_1^2 = 0, 8.$$

$$P_2^2(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee ba \vee sa) \wedge (x_2 = 43 \vee 44 \vee 45)], \text{ вероятность } p_2^2 = 0, 6.$$

3-ий эксперт:

$$P_1^3(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ba \vee sa)], \text{ вероятность } p_1^3 = 0, 6.$$

$$P_2^3(x_1, x_2) = 1 \iff [(x_1 = ti \vee ba) \wedge (x_2 = 41 \vee 43 \vee 45)], \text{ вероятность } p_2^3 = 0, 7.$$

Вычислим расстояние между вероятностными высказываниями экспертов, выраженными предикатами  $P_1$  и  $P_2$  и меры их опровержимости.

В модели  $M_1$  первого эксперта имеем:

$$n_{P_1^1} = 10; n_{P_2^1} = 14; k^1 = 4, \dots, 10; P^1(P_1^1 \wedge P_2^1) = 0, 3; \text{ тогда } k_0^1 = 6 \text{ и, следовательно, } k^1 = 5, 6, 7; \rho_5^1(P_1^1, P_2^1) = 0, 7; \rho_6^1(P_1^1, P_2^1) = 0, 6; \rho_7^1(P_1^1, P_2^1) = 0, 5; \text{ тогда расстояние } \rho^1(P_1^1, P_2^1) = 0, 6 \text{ и меры опровержимости } I^1(P_1^1) = 0, 5 \text{ и } I^1(P_2^1) = 0, 3.$$

В модели  $M_2$  второго эксперта имеем:

$$n_{P_1^2} = 16; n_{P_2^2} = 12; k^2 = 8, \dots, 12; P^2(P_1^2 \wedge P_2^2) = 0, 1; \text{ тогда } k_0^2 = 2 \text{ и, следовательно, } k^2 = 8; \rho_8^2(P_1^2, P_2^2) = 0, 6; \text{ тогда расстояние } \rho^2(P_1^2, P_2^2) = 0, 6 \text{ и меры опровержимости } I^2(P_1^2) = 0, 2 \text{ и } I^2(P_2^2) = 0, 4.$$

В модели  $M_3$  третьего эксперта имеем:

$n_{P_1^3} = 12$ ;  $n_{P_2^3} = 14$ ;  $k^3 = 6, \dots, 12$ ;  $P^3(P_1^3 \wedge P_2^3) = 0, 15$ ; тогда  $k_0^3 = 3$  и, следовательно,  $k^3 = 6$ ;  $\rho_6^3(P_1^3, P_2^3) = 0, 7$ ; тогда расстояние  $\rho^3(P_1^3, P_2^3) = 0, 7$  и меры опровержимости  $I^3(P_1^3) = 0, 4$  и  $I^3(P_2^3) = 0, 3$ .

Усредняя, получаем расстояние  $\rho_{\text{вер}}(P_1, P_2) = 0, 6333$  и меры опровержимости  $I_{\text{вер}}(P_1) = 0, 3667$  и  $I_{\text{вер}}(P_2) = 0, 3333$ .

**Пример 4.** Под руководством г. н. с. ИМ СО РАН Г.С. Лбова решалась задача из области археологии в рамках интеграционного проекта "Компьютерная система для анализа антропологической информации". Во время выполнения проекта ст. научным сотрудником ИМ СО РАН В.Б. Бериковым и аспирантом Т.И. Лучевой независимо были получены закономерности, характеризующие антропологические промеры черепов той или иной фиксированной эпохи. В анализируемый антропометрический комплекс входило более 20 непрерывных переменных, представляющие собой важнейшие характеристики, дифференцирующие основные расы и их локальные варианты. Множество рассматриваемых объектов (черепов) было разбито на 24 образа, отвечающих той или иной культуре.

Известно, что для хорошей кластеризации (таксономии) множества объектов и лучшего распознавания образов желательно, чтобы расстояние между своими представителями каждого кластера были как можно малыми, а расстояния до представителей других кластеров (по возможности) как можно большими. Далее это используется на введенных нами расстояниях в следующем примере.

Для примера рассмотрим полученные на компьютере закономерности для двух кластеров.

Закономерности для 1-го образа (кластера):

1. ( $X_1$  в [165; 188.50]), ( $X_3$  в [123.50; 134.05]), ( $X_4$  в [93.50; 103.25]), ( $X_8$  в [68.94; 86]), ( $X_{11}$  в [24.95; 32]), ( $X_{14}$  в [19.95; 25.20]), ( $X_{15}$  в [2.04; 3.84]), ( $X_{20}$  в [83.80; 89.15]).

2. ( $X_3$  в [123.50; 134.05]), ( $X_8$  в [68.94; 86]), ( $X_{10}$  в [28.75; 36.25]), ( $X_{11}$  в [24.95; 32]), ( $X_{15}$  в [2.04; 3.84]), ( $X_{16}$  в [5.14; 9.14]), ( $X_{18}$  в [140.89; 150.44]), ( $X_{20}$  в [83.80; 89.15]).

3. ( $X_3$  в [123.50; 134.05]), ( $X_8$  в [68.94; 86]), ( $X_{11}$  в [24.95; 32]), ( $X_{13}$  в [8.94; 12.14]), ( $X_{15}$  в [2.04; 3.84]), ( $X_{16}$  в [5.14; 9.14]), ( $X_{19}$  в [124.84; 143.14]), ( $X_{20}$  в [83.80; 89.15]).

Закономерности для 2-го кластера:

4. ( $X_1$  в [174.50; 188.50]), ( $X_3$  в [125.50; 139.50]), ( $X_{12}$  в [53.90; 58.09]), ( $X_{14}$  в [19.45; 23.34]), ( $X_{17}$  в [78.75; 92.50]), ( $X_{20}$  в [84.90; 90.15]), ( $X_{21}$  в [20.89; 34]).

5. ( $X_9$  в [40.84; 46.04]), ( $X_{12}$  в [53.90; 58.09]), ( $X_{14}$  в [19.45; 23.34]), ( $X_{17}$  в [78.75; 92.50]), ( $X_{18}$  в [137.10; 153.85]), ( $X_{19}$  в [127.90; 146.39]), ( $X_{20}$  в [84.90; 90.15]), ( $X_{21}$  в [20.89; 34]).

6. ( $X_7$  в [125.50; 148.50]), ( $X_8$  в [69.90; 82.34]), ( $X_9$  в [40.84; 46.04]), ( $X_{12}$  в [53.90; 58.09]), ( $X_{14}$  в [19.45; 23.34]), ( $X_{17}$  в [78.75; 92.50]), ( $X_{20}$  в [84.90; 90.15]), ( $X_{21}$  в [20.89; 34]).

Расстояния между закономерностями 1-го кластера, вычисленные по предложенным нами формулам следующие:

$$\rho(1, 2) = 0, 0006643; \rho(1, 3) = 0, 0007205; \rho(2, 3) = 0, 0006942.$$

Расстояния между закономерностями 2-го кластера соответственно следующие:

$$\rho(4, 5) = 0,0006458; \rho(4, 6) = 0,0006411; \rho(5, 6) = 0,0007238.$$

И расстояния между закономерностями из разных кластеров:

$$\rho(1, 4) = 0,0095527; \rho(1, 5) = 0,0381027; \rho(1, 6) = 0,0270584;$$

$$\rho(2, 4) = 0,0644439; \rho(2, 5) = 0,0810485; \rho(2, 6) = 0,0825482;$$

$$\rho(3, 4) = 0,0645001; \rho(3, 5) = 0,0971838; \rho(3, 6) = 0,0826044.$$

Если вычислить меру информативности (опровержимости) каждой закономерности, то получаем следующие результаты:

$$I(1) = 0,999655; I(2) = 0,999681; I(3) = 0,999625; I(4) = 0,999718; I(5) =$$

$$0,999636; I(6) = 0,99964. \text{ Высокие полученные значения свидетельствуют о}$$

высокой информативности закономерностей.

Оценим диаметр каждого кластера через среднее расстояние между всеми парами представителей одного кластера. Получаем, что  $diam_1 = 0,007207$  и  $diam_2 = 0,007239$ . И оценим расстояние между кластерами (разнесенность кластеров) через среднее расстояние между всеми парами представителей из разных кластеров. Получаем, что  $\rho_{1,2} = 0,0606527$ . Это свидетельствует о хорошем расположении кластеров.

Аналогичные результаты характерны и для всех остальных кластеров, закономерностей и хорошо проведенной кластеризации.

Таким образом, введенные в работе расстояния позволяют посмотреть на закономерности с точки зрения близости по введенной метрике. Результаты говорят о том, что эти закономерности обладают высокой информативностью, и полученные кластеры образуют "компактные" сгустки [5], что говорит о хорошей кластеризации закономерностей. Можно добавить, что в настоящее время получены способы введения расстояний без перехода к проекциям, учитывающих степень разброса формульных множеств в метрической модели. Изучение их свойств с позиций данной статьи - следующий этап.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены логические высказывания экспертов, представленные формулами исчисления высказываний и формулами языка первого порядка от разнотипных переменных. Предложен некоторый общий подход с использованием измеримого (или конечного) класса моделей и его расширений для вычисления естественных расстояний, мер информативности, вероятностей формул и установления свойств, которым должны удовлетворять связи расстояний между компонентами формулы и мер информативностей формулы и ее компонент. Рассмотрена также задача задания расстояний на множестве формул с вероятностями. Для предложенных расстояний справедливы линейные связи меры опровержимости формулы с расстоянием между компонентами формулы меры опровержимости компонент (-решение гипотезы Г.С. Лбова).

Разработан и реализован алгоритм для вычисления расстояний между формулами, мер опровержимости и вероятностей формул с учетом меры разброса в метрических моделях. Теоремы распространяются на измеримые классы метрических моделей и произвольные формулы, аппроксимируемые измеримыми.

Исследование позволит решать вопросы связанные с согласованием экспертных высказываний, построением адаптивных решающих функций, распознаванием образов, а также при изучении и создании логических баз знаний, их кластеризации и разработки экспертных систем.

Авторы благодарят г.н.с. Г.С. Лбова, в.н.с. В.Б. Берикова и сотрудников ИМ СО РАН лаборатории Анализа данных за постоянный интерес к этим вопросам и поддержку. Авторы выражают благодарность рецензентам за замечания, улучшившие изложение и полезную критику

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Блощицын В. Я., Лбов Г. С. О мерах информативности логических высказываний // Доклады Республиканской Школы-Семинара "Технология разработки экспертных систем". Кишинев, 1987. С.12-14.
- [2] Лбов Г.С., Старцева Н.Г. Логические решающие функции и вопросы статистической устойчивости решений. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
- [3] Vikent'ev A.A., Lbov G.S. Setting the metric and informativeness on statements of experts // Pattern Recognition and Image Analysis. 1997. V. 7, N. 2. P. 175–189.
- [4] Vikent'ev A.A., Koreneva L.N. Setting the metric and measures of informativity in predicate formulas corresponding to the statements of experts about hierarchical objects// Pattern Recognition and Image Analysis. 2000. V. 10, N. 3. P.303–308.
- [5] Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. Новосибирск: Изд-во Института математики, 1999.
- [6] Загоруйко Н.Г., Бушуев М.В. Меры расстояния в пространстве знаний.// Анализ данных в экспертных системах. Новосибирск, 1986. Вып. 117: Вычислительные системы. С. 24-35.
- [7] Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука, 2003.
- [8] Gaifman H. Concerning measures in the first order calculi. // Israel Math. 1964. V. 2, N. 1. P. 1 -18.

АЛЕКСАНДР АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИКЕНТЬЕВ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, 4., НОВОСИБИРСК, 630090.  
*E-mail address:* vikent@math.nsc.ru

РУСЛАН АЛЕКСАНДРОВИЧ ВИКЕНТЬЕВ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, Д.4., НОВОСИБИРСК, 630090.  
*E-mail address:* ruslan.vikentiev@gmail.com

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.210–С.223 (2011)*

УДК 519.63  
MSC 65M06ГРАНИЧНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

Г. ДАИРБАЕВА, М. А. ШИШЛЕНИН

**АБСТРАКТ.** The inverse problem for Stokes equation is considered. The initial boundary value problem is reduced to special inverse problem. We consider numerical method for inverse problem solution based on FEM and optimization. The convergence rate of Landweber iteration is given.

**Keywords:** Stokes equations, optimization, Landweber iteration, finite element method.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим область  $\Omega = \{(x, y) \in R^2: x \in (0, 1), y \in (0, 1)\}$ ,  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  — граница области  $\Omega$ , где  $\Gamma_1 = \{(1, y) : y \in [0, 1]\}$ . Представим границу  $\Gamma_0$  в следующем виде:  $\Gamma_0 = \Gamma_{01} \cup \Gamma_{02} \cup \Gamma_{03}$ , где  $\Gamma_{01} = \{(x, 0) : x \in [0, 1]\}$ ,  $\Gamma_{02} = \{(0, y) : y \in [0, 1]\}$ ,  $\Gamma_{03} = \{(x, 1) : x \in [0, 1]\}$ .

В области  $\Omega$  рассмотрим задачу Коши для уравнений Стокса

$$(1) \quad \Delta u - \nabla p = 0,$$

$$(2) \quad \operatorname{div} u = 0,$$

---

DAIRBAEVA G., SHISHLENIN M.A., THE BOUNDARY INVERSE PROBLEM FOR THE STOKES EQUATIONS.

© 2011 ДАИРБАЕВА Г., ШИШЛЕНИН М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00746, грант 11-01-00105 и при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

$$(3) \quad u|_{\Gamma_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{03}, \\ \varphi(y), & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{02}, \end{cases}$$

$$(4) \quad \left( pn - \frac{\partial u}{\partial n} \right) |_{\Gamma_0} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0,$$

где  $u = (u_1, u_2)$  - скорость,  $p$  - давление,  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ ,  $f = (f_1, f_2)$  - заданные функции,  $n = (n_1, n_2)$  - внешняя нормаль к границе  $\partial\Omega$ .

Перепишем задачу (1)-(4) в координатной форме

$$(5) \quad \Delta u_1 - p_x = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$(6) \quad \Delta u_2 - p_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$(7) \quad u_{1x} + u_{2y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

$$(8) \quad u_l|_{\Gamma_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{03}, \\ \varphi_l(y), & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{02}, \end{cases} \quad l = 1, 2,$$

$$(9) \quad \Gamma_{01} : \begin{cases} u_{1y}(x, 0) = f_1(x, 0), & x \in (0, 1) \\ -p(x, 0) + u_{2y}(x, 0) = f_2(x, 0), & x \in (0, 1) \end{cases}$$

$$(10) \quad \Gamma_{02} : \begin{cases} -p(0, y) + u_{1x}(0, y) = f_1(0, y), & y \in (0, 1) \\ u_{2x}(0, y) = f_2(0, y), & y \in (0, 1) \end{cases}$$

$$(11) \quad \Gamma_{03} : \begin{cases} -u_{1y}(x, 1) = f_1(x, 1), & x \in (0, 1) \\ p(x, 1) - u_{2y}(x, 1) = f_2(x, 1), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Задача (1)-(4) является некорректной [1]. Ниже покажем, что ее можно сформулировать в виде обратной задачи к некоторой прямой корректной задаче для исходных уравнений.

## 2. ПОСТАНОВКА ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему уравнений Стокса в заданной области  $\Omega$

$$(12) \quad \Delta u_1 - p_x = 0,$$

$$(13) \quad \Delta u_2 - p_y = 0,$$

$$(14) \quad u_{1x} + u_{2y} = 0,$$

со следующими краевыми условиями

$$(15) \quad u_l|_{\Gamma_0} = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{01} \cup \Gamma_{03}, \\ \varphi_l(y), & \text{если } (x, y) \in \Gamma_{02}, \end{cases} \quad l = 1, 2,$$

$$(16) \quad \Gamma_1 : \begin{cases} p(1, y) - u_{1x}(1, y) = q_1(y), & y \in (0, 1) \\ -u_{2x}(1, y) = q_2(y), & y \in (0, 1), \end{cases}$$

Задача (12)-(16), в которой по заданным функциям  $q_1(y)$ ,  $q_2(y)$ ,  $\varphi_1(y)$ ,  $\varphi_2(y)$  нужно найти функции  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ ,  $p(x, y)$ , будем называть прямой.

Рассмотрим пространства Соболева  $L_2(\Omega)$ ,  $W_2^1(\Omega)$  с соответствующими нормами

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 dx dy \right)^{1/2}, \quad \|u\|_{W_2^1(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} u^2 dx dy + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим пространство следов функций из  $W_2^1(\Omega)$  на  $\partial\Omega$  и обозначим это пространство через  $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$  с нормой

$$(17) \quad \|u\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} = \left( \int_{\partial\Omega} u^2 ds + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(z) - u(h)|^2}{|z - h|^2} ds ds \right)^{1/2},$$

где  $z = (x, y)$ ,  $h = (u, v)$ .

Сужение функций из  $W_2^{1/2}(\partial\Omega)$  на часть границы  $\Gamma_0$  ( $\Gamma_{02}, \Gamma_1$ ) обозначим через  $W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ ,  $(W_2^{1/2}(\Gamma_{02}), W_2^{1/2}(\Gamma_1))$  с нормой (17), где  $\partial\Omega$  заменяется на  $\Gamma_0$  ( $\Gamma_{02}, \Gamma_1$ ).

Дадим определение обобщенного решения прямой задачи (12)-(16).

**Определение 1.** Пусть  $\varphi \in W_2^{1/2}(\Gamma_{02})$  и  $q \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$ . Совокупность функций  $(u, p)$ , где  $u \in W_2^1(\Omega)$ ,  $p \in L_2(\Omega)$ , будем называть обобщенным решением прямой задачи (12)-(16), если выполняются условия  $\operatorname{div} u = 0$ , (8) и для любых  $v = (v_1, v_2)$  таких, что  $v \in W_2^1(\Omega)$  и  $v|_{\Gamma_0}$ , имеет место равенство

$$(18) \quad - \int_{\Omega} [u_{1x} v_{1x} + u_{2x} v_{2x} + u_{1y} v_{1y} + u_{2y} v_{2y} - p(v_{1x} + v_{2y})] dx dy + \\ + \int_0^1 [q_1(y) v_1(1, y) + q_2(y) v_2(1, y)] dy = 0.$$

Прямая задача (12)-(16) в смысле данного определения обобщенного решения является корректной [2, 3].

### 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА К ПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ (12)-(16)

Пусть для задачи (12)-(16) задана дополнительная информация на границе  $\Gamma_0$

$$(19) \quad \Gamma_{01} : \begin{cases} u_{1y}(x, 0) = f_1(x, 0), & x \in (0, 1), \\ -p(x, 0) + u_{2y}(x, 0) = f_2(x, 0), & x \in (0, 1), \end{cases}$$

$$(20) \quad \Gamma_{02} : \begin{cases} -p(0, y) + u_{1x}(0, y) = f_1(0, y), & y \in (0, 1), \\ u_{2x}(0, y) = f_2(0, y), & y \in (0, 1), \end{cases}$$

$$(21) \quad \Gamma_{03} : \begin{cases} -u_{1y}(x, 1) = f_1(x, 1), & x \in (0, 1), \\ p(x, 1) - u_{2y}(x, 1) = f_2(x, 1), & x \in (0, 1). \end{cases}$$

**Обратная задача.** Обратная задача к прямой задаче (12)-(16) заключается в определении функции  $q = (q_1(y), q_2(y))$  по дополнительной информации (19)-(21).

Рассмотрим оператор

$$A : q := (pn - \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma_1} \rightarrow f := (pn - \frac{\partial u}{\partial n})|_{\Gamma_0},$$

где  $(u, p)$  - решение задачи (12)-(16). Тогда обратную задачу (12)-(16), (19)-(21) можно записать в операторной форме

$$(22) \quad Aq = f,$$

где  $A : (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$ ,  $f = (f_1, f_2)$  - заданная функция,  $q = (q_1, q_2)$  - неизвестная функция.

Распишем в координатной форме

$$(23) \quad q_1(y) := p(1, y) - u_{1x}(1, y), \quad y \in (0, 1), \quad (\Gamma_1)$$

$$(24) \quad q_2(y) := -u_{2x}(1, y), \quad y \in (0, 1), \quad (\Gamma_1)$$

$$(25) \quad (Aq_1)(x, y) = \begin{cases} u_{1y}(x, 0), & x \in (0, 1), \quad (\Gamma_{01}) \\ -p(0, y) + u_{1x}(0, y), & y \in (0, 1), \quad (\Gamma_{02}) \\ -u_{1y}(x, 1), & x \in (0, 1), \quad (\Gamma_{03}) \end{cases}$$

$$(26) \quad (Aq_2)(x, y) = \begin{cases} -p(x, 0) + u_{2y}(x, 0), & x \in (0, 1), \quad (\Gamma_{01}) \\ u_{2x}(0, y), & y \in (0, 1), \quad (\Gamma_{02}) \\ p(x, 1) - u_{2y}(x, 1), & x \in (0, 1), \quad (\Gamma_{03}) \end{cases}$$

Для решения уравнения (22) применим оптимизационный метод.

Рассмотрим функционал

$$J(q) = \|Aq - f\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 = \|Aq_1 - f_1\|_{L_2(\Gamma_0)}^2 + \|Aq_2 - f_2\|_{L_2(\Gamma_0)}^2.$$

Или

$$\begin{aligned} J(q_1, q_2) = & \int_0^1 (u_{1y}(x, 0) - f_1(x, 0))^2 dx + \int_0^1 (-p(0, y) + u_{1x}(0, y) - f_1(0, y))^2 dy + \\ & + \int_0^1 (u_{1y}(x, 1) + f_1(x, 1))^2 dx + \int_0^1 (-p(x, 0) + u_{2y}(x, 0) - f_2(x, 0))^2 dx + \\ & + \int_0^1 (u_{2x}(0, y) - f_2(0, y))^2 dy + \int_0^1 (p(x, 1) - u_{2y}(x, 1) - f_2(x, 1))^2 dx. \end{aligned}$$

## 4. СОПРЯЖЕННАЯ ЗАДАЧА

Для применения оптимизационного метода для решения уравнения (22) рассмотрим сопряженную задачу к задаче (12)-(16)

$$(27) \quad \Delta \psi_1 - \pi_x = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(28) \quad \Delta \psi_2 - \pi_y = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(29) \quad \psi_{1x} + \psi_{2y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

со следующими краевыми условиями

$$(30) \quad \psi_1(x, y) = \mu_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0,$$

$$(31) \quad \psi_2(x, y) = \mu_2(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0,$$

$$(32) \quad \Gamma_1 : \begin{cases} \pi(1, y) - \psi_{1x}(1, y) = 0, & y \in (0, 1), \\ \psi_{2x}(1, y) = 0, & y \in (0, 1). \end{cases}$$

**Определение 2.** Пусть  $\mu \in W_2^{1/2}(\Gamma_0)$ . Совокупность функций  $(\psi, \pi)$ , где  $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in W_2^1(\Omega)$ ,  $\psi(x, y)|_{\Gamma_0} = \mu$ ,  $\pi \in L_2(\Omega)$ , будем называть обобщенным решением сопряженной задачи (27)-(32), если для любых  $v = (v_1, v_2)$  таких, что  $v \in W_2^1(\Omega)$  и  $v|_{\Gamma_0}$ , имеет место равенство

$$(33) \quad \int_{\Omega} [\psi_{1x} v_{1x} + \psi_{2x} v_{2x} + \psi_{1y} v_{1y} + \psi_{2y} v_{2y} - \pi(v_{1x} + v_{2y})] dx dy = 0.$$

Следовательно, градиент функционала  $J(q)$  имеет вид

$$J'(q) = (J'_{q_1}(q), J'_{q_2}(q)),$$

здесь  $J'_{q_1}(q) = \psi_1(x, y)|_{\Gamma_1}$ ,  $J'_{q_2}(q) = \psi_2(x, y)|_{\Gamma_1}$ , тогда

$$J'(q) = \psi|_{\Gamma_1},$$

где  $\psi(x, y)$  – решение сопряженной задачи (27)-(32), в которой в граничных условиях (30)-(31)

$$\mu(x, y) = 2[Aq - f](x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_0.$$

## 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ (22)

В качестве оптимизационного метода рассмотрим метод Ландвебера

$$(34) \quad \begin{aligned} q_{n+1} &= q_n - \alpha J' q_n, \\ q_0 &\in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*, \quad \alpha \in (0, \|A\|^{-2}). \end{aligned}$$

где  $q_n = (q_1^{(n)}, q_2^{(n)})$ .

Приведем вычислительный алгоритм метода Ландвебера:

1. Зададим начальное приближение  $q_0 = (q_1^{(0)}, q_2^{(0)})$ .
2. Предположим что  $q_n$  известно, то находим обобщенное решение  $u_n = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)})$  прямой задачи (12)-(16).

3. Решаем сопряженную задачу (27)-(32), когда  $\mu(x, y) = 2[Aq - f](x, y)$ ,  $(x, y) \in \Gamma_0$ , находим решение  $\psi_n(x, y) = (\psi_1^{(n)}, \psi_2^{(n)})$ .

4. Вычисляем значение функционала  $J(q_n) = \|Aq_n - f\|_{L_2(\Gamma_0)}^2$ . Если функционал  $J(q_n)$  не достаточно мал, то вычисляем градиент функционала  $J'(q_n) = \psi_n|_{\Gamma_1}$ .

5. Вычисляем следующее приближение  $q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n$ .

Сходимость изложенного алгоритма следует из теоремы [1].

**Теорема (о сходимости по функционалу метода Ландвебера).** Пусть  $A : (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^* \rightarrow (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$  - линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого  $f \in (W_2^{1/2}(\Gamma_0))^*$  существует точное решение  $q_T$  уравнения  $Aq = f$ . Тогда при любом  $q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*$  и  $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$  последовательность  $q_n$ , определяемая равенствами

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n, \quad q_0 \in (W_2^{1/2}(\Gamma_1))^*,$$

сходится по функционалу, и имеет место оценка

$$J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

Из алгоритма метода Ландвебера видно, что для вычисления приближенного решения  $q_n$  для каждого  $n$  приходится решать прямую задачу (12)-(16) и сопряженную (27)-(32). Для решения последних задач применим метод конечных элементов [4].

**Метод конечных элементов.** Проиллюстрируем метод конечных элементов на примере прямой задачи. Рассмотрим МКЭ в случае линейного восполнения на треугольниках. Проводим триангуляцию исходной области  $\Omega$ , ячейками триангулярной координатной сетки являются треугольники.

Рассмотрим произвольный треугольник  $\tau$  с вершинами  $P_0(x_0, y_0)$ ,  $P_1(x_1, y_1)$ ,  $P_2(x_2, y_2)$ :

$$\tau = \{(x, y) = P_0\lambda_0 + P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 : \lambda_i \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1\},$$

$$\lambda_i = \lambda_i(x, y), \quad i = 0, 1, 2.$$

Если записать  $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$ , то

$$(35) \quad \tau = \{(x, y) = P_0 + \lambda_1(P_1 - P_0) + \lambda_2(P_2 - P_0) : \lambda_i \geq 0, \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1\},$$

$$\lambda_i = \lambda_i(x, y), \quad i = 1, 2.$$

Из (35) находим

$$\lambda_1(x, y) = \frac{(x - x_0)(y_2 - y_0) - (y - y_0)(x_2 - x_0)}{\Delta},$$

$$\lambda_2(x, y) = \frac{(y - y_0)(x_1 - x_0) - (x - x_0)(y_1 - y_0)}{\Delta},$$

где  $\Delta = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (y_1 - y_0)(x_2 - x_0)$ .

На треугольнике  $\tau$  рассмотрим линейную функцию

$$(36) \quad v(x, y) = v_0 + \lambda_1(x, y)(v_1 - v_0) + \lambda_2(x, y)(v_2 - v_0), \quad \text{для любых } (x, y) \in \tau,$$

где  $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ ,  $v_0 = (v_1^{(0)}, v_2^{(0)})$ ,  $v_1 = (v_1^{(1)}, v_2^{(1)})$ ,  $v_2 = (v_1^{(2)}, v_2^{(2)})$ .

Функция  $v(x, y)$  однозначно определяется своими значениями  $v_0 = v(P_0)$ ,  $v_1 = v(P_1)$ ,  $v_2 = v(P_2)$ .

Далее область интегрирования в интегралах равенства (18) представляется в виде объединения треугольников, а подынтегральные функции заменяются по формулам типа (36). Отметим, что для скалярной функции  $p$  в (36) надо взять скалярную функцию.

## 6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для численного решения прямой и сопряженной задач использовался метод конечных элементов, число разбиения сторон области  $n = 30$ . В качестве нулевого приближения решения обратной задачи (22) взято  $q_{(1)0} = 0, q_{(2)0} = 0$ . В методе Ландвебера параметр  $\alpha = 0.01$ .

На рисунках 1-3 показаны компоненты точного решения  $(u_{(1)}, u_{(2)}, p)$  прямой задачи (12)-(16).

На рисунках 4-6 приведены компоненты нулевого приближения  $(u_{(1)0}, u_{(2)0}, p_{(0)})$  решения прямой задачи (12)-(16).

На рисунках 7-9 показаны компоненты приближенного решения  $(u_{(1)1200}, u_{(2)1200}, p_{(0)1200})$  прямой задачи при 1200 итерации.

Рисунки 10,11 иллюстрируют погрешности скорости  $(u_{(1)}, u_{(2)})$  и давления  $p$  в норме сеточного аналога нормы в  $L_2(\Gamma_1)$ , где горизонтальная ось - итерации, вертикальная - погрешность.

На рисунках 12-13 показаны компоненты точного решения  $(q_{(1)}, q_{(2)})$  обратной задачи (22).

На рисунках 14-15 показаны компоненты приближенного решения  $(q_{(1)1200}, q_{(2)1200})$  при 1200 итерации обратной задачи (22), а на рисунке 16 его погрешность, где горизонтальная ось - итерации, вертикальная - погрешность.

На рисунке 17 показана невязка (функционал  $J$ ) обратной задачи (22), где горизонтальная ось - итерации, вертикальная - невязка.

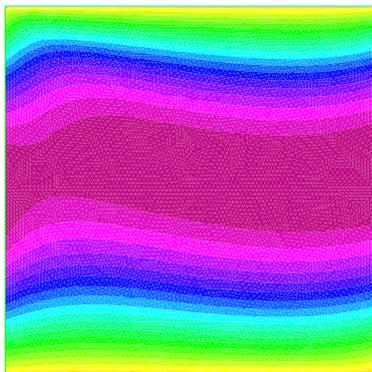


Рис. 1. Точное решение прямой задачи. Скорость  $u_{(1)}$ .

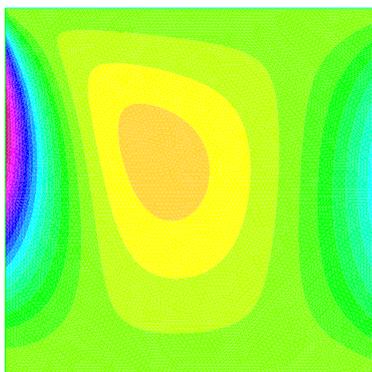


Рис. 2. Точное решение прямой задачи. Скорость  $u_{(2)}$ .

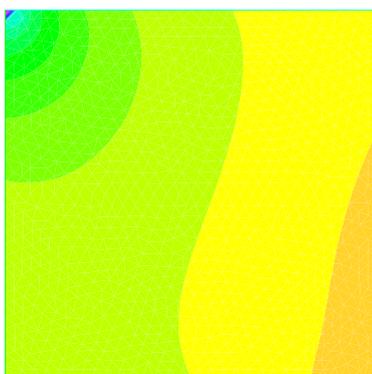


Рис. 3. Точное решение прямой задачи. Давление  $p$ .

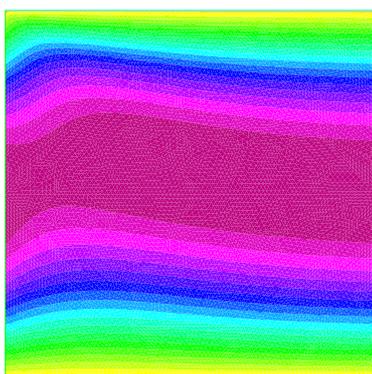


Рис. 4. Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость  $u_{(1)0}$ .

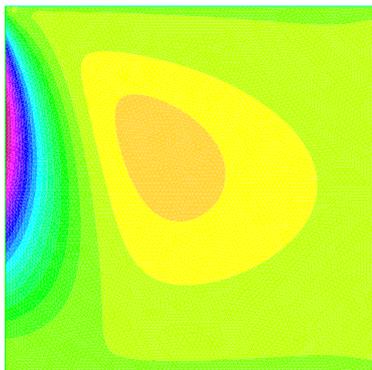


Рис. 5. Нулевое приближение решения прямой задачи. Скорость  $u_{(2)0}$ .

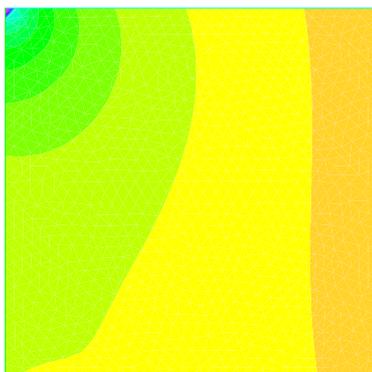


Рис. 6. Нулевое приближение решения прямой задачи. Давление  $p_{(0)}$ .

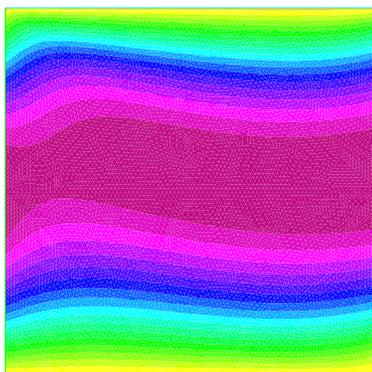


Рис.7. Приближенное решение прямой задачи. Скорость  $u_{(1)1200}$ .

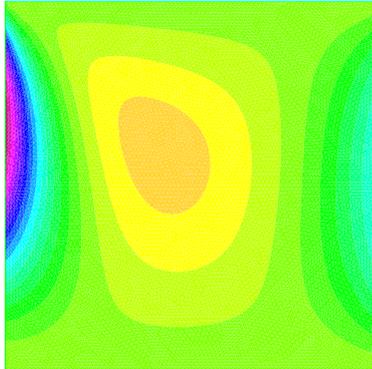


Рис. 8. Приближенное решение прямой задачи. Скорость  $u_{(2)1200}$  приближенного решения

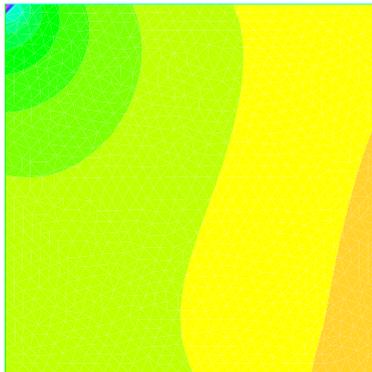


Рис. 9. Приближенное решение прямой задачи. Давление  $p_{1200}$ .

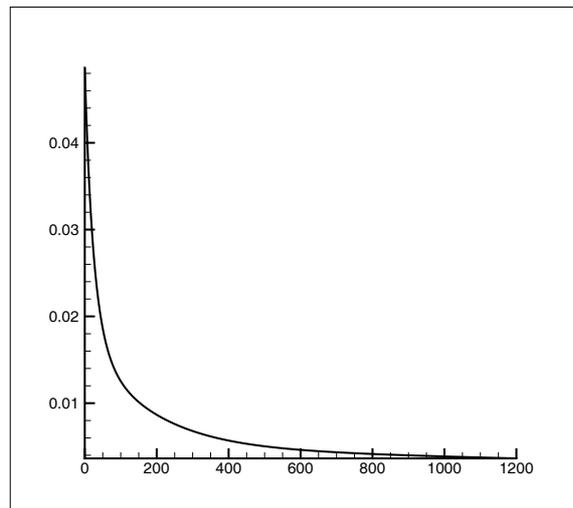
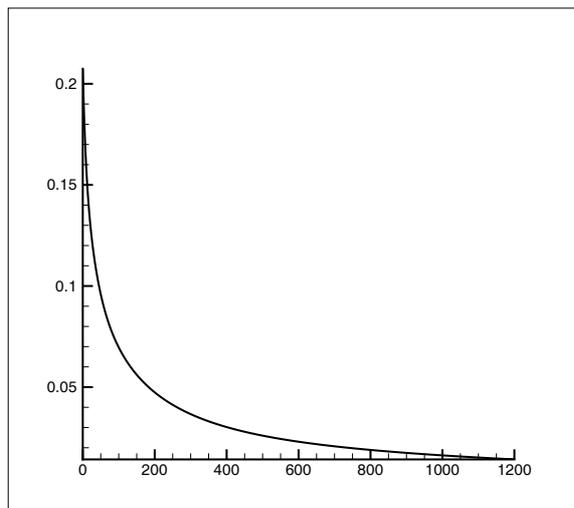
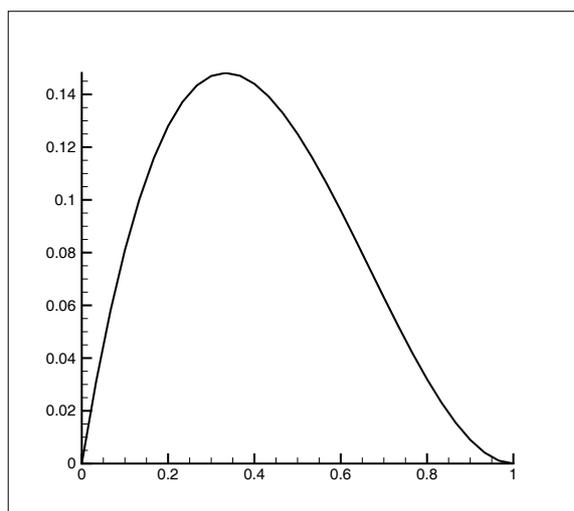


Рис. 10. Погрешность скорости  $u$  от количества итераций.

Рис. 11. Погрешность давления  $p$  от количества итераций.Рис. 12. Точное решение обратной задачи. Первая компонента  $q_{(1)}$ .

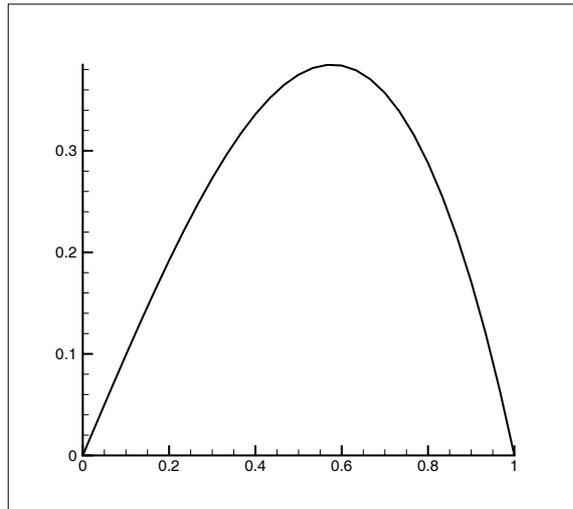


Рис. 13. Точное решение обратной задачи. Вторая компонента  $q_{(2)}$ .

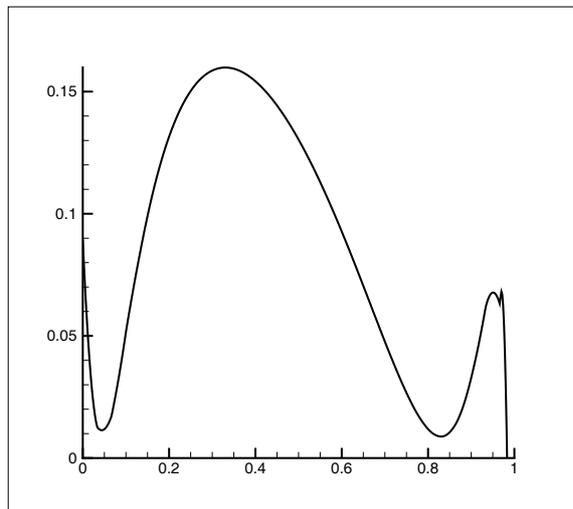


Рис. 14. Приближенное решение обратной задачи. Первая компонента  $q_{(1)1200}$ .

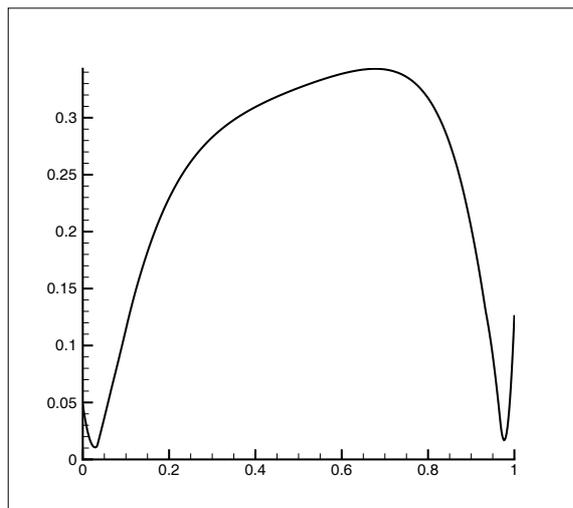


Рис. 15. Приближенное решение обратной задачи. Вторая компонента  $q_{(2)1200}$ .

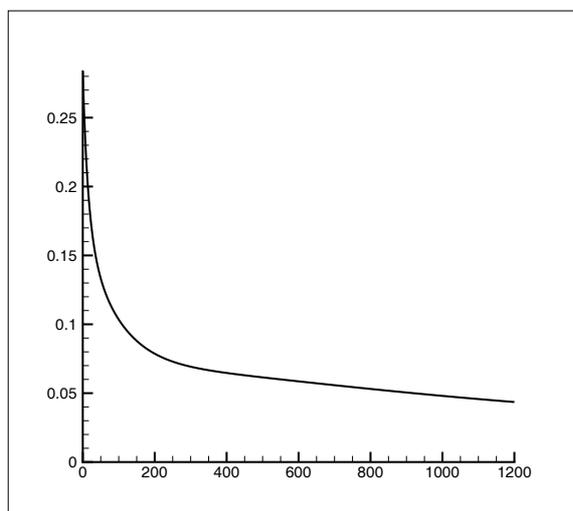


Рис. 16. Погрешность приближенного решения  $q$  обратной задачи от количества итераций

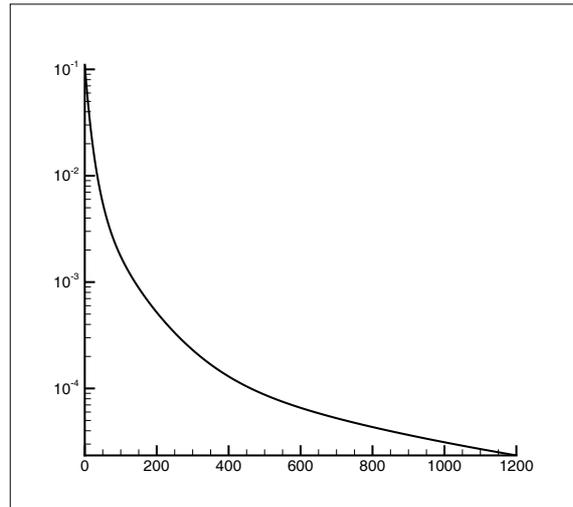


Рис. 17. Невязка от количества итераций.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [2] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. Государственное издательство физико-математической литературы, М. 1961. Zbl 0106.39401
- [3] Bastay, T. Johansson, D. Lesnic., V. Kozlov. An Alternating Method for the Stationary Stokes System. ZAMM (Z. Angew. Math. Mech) 86, 268-280 (2006). MR2216492
- [4] Larry J.Segerlind, Applied finite element analysis. New York, 1984. Zbl 0644.73066

ГУЛЬЛАЗАТА ДАИРБАЕВА  
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АЛЬ-ФАРАБИ,  
УЛ. МАСАНЧИ 39/47,  
050012, АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН,  
*E-mail address:* Lazzat.Dairbaeva@kaznu.kz

МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ ШИШЛЕНИН  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* mshishlenin@ngs.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.224–С.235 (2011)*

УДК 517.948  
MSC 65N21, 25K20

**РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СТЕФАНА  
С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ  
МЕТОДОМ УСТАНОВЛЕНИЯ**

Е.В. ДУТИКОВА

**ABSTRACT.** Single-phase and two-phase inverse Stephan problems with unknown boundary of phase transition are considered in this paper. Order optimal solution to these problems has been obtained by ascertain method.

**Keywords:** Stephan problem, inverse boundary problem, parabolic equation, ascertain method.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Граничные обратные задачи Стефана составляют класс обратных задач для параболических уравнений с подвижной границей. Они возникают при математическом моделировании теплофизических процессов с фазовыми переходами (например, процессы промерзания и протаивания влажных грунтов, нарастания ледяного покрова или остывания расплавленных тел) [1].

Рассматриваемый класс граничных обратных задач Стефана относится к некорректно поставленным задачам: при несогласованном задании входных данных точное решение отсутствует, а в случае существования оно не обладает свойством устойчивости.

---

DUTIKOVA E.V., SOLUTION TO INVERSE STEPHAN PROBLEMS WITH UNKNOWN BOUNDARY BY ASCERTAIN METHOD.

© 2011 Дутикова Е.В.

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

Изучен одномерный случай, так как моделирование многих физических процессов при упрощающих предположениях приводит к одномерному параболическому уравнению.

## 2. ОДНОФАЗНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

Прямая однофазная задача Стефана заключается в нахождении функции  $u(x, t)$  в области  $\{0 \leq x \leq \xi(t), 0 \leq t \leq T\}$  и фронта фазового перехода  $\xi(t)$ , ( $\xi(0) > 0$ ) — непрерывной монотонно возрастающей функции при  $0 \leq t \leq T$  из условий

$$(1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$(2) \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq \xi(0),$$

$$(3) \quad \frac{\partial u(\xi(t), t)}{\partial x} = -k\xi'(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$(4) \quad u(\xi(t), t) = \psi_1(t), \quad 0 < t \leq T,$$

$$(5) \quad u(0, t) = \psi_2(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Задание дополнительной информации о решении прямой задачи Стефана приводит к классу граничных обратных задач для однофазной проблемы Стефана: определению по некоторой априорной информации о решении прямой задачи граничного условия на одной границе области при наличии фазового перехода на другой неизвестной границе. То есть требуется определить функцию  $u(0, t) = \psi_2(t)$  и фронт фазового перехода  $\xi(t)$  при  $0 \leq t \leq T$  из условий (1)–(4) и дополнительного условия

$$(6) \quad u(x_1, t) = \chi(t), \quad 0 < x_1 < \xi(0), \quad 0 < t \leq T.$$

Положим  $\psi_1(t) \equiv 0$  и, для сведения данной задачи с изменяющейся границей к задаче с постоянной границей, выполним замену переменной  $y = x/\xi(t)$ . Обозначим  $v(y, t) = u(\xi(t)y, t)$ , тогда уравнение (1) примет вид

$$(7) \quad \xi^2(t) \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v(y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \leq T.$$

Условие (2) после замены переменной

$$u(x, 0) = u(\xi(t)y, 0) = \varphi(\xi(t)y)$$

примет вид

$$(8) \quad v(y, 0) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Условие (3) преобразуется следующим образом:

$$\frac{\partial u(\xi(t), t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi(t), t)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u(\xi(t), t)}{\partial y} \frac{1}{\xi(t)} = \frac{\partial v(1, t)}{\partial y} \frac{1}{\xi(t)} = -k\xi'(t)$$

или

$$(9) \quad \frac{\partial v(1, t)}{\partial y} = -k\xi'(t)\xi(t), \quad 0 < t \leq T.$$

Условие (4) преобразуется к виду

$$(10) \quad v(1, t) = 0, \quad 0 < t \leq T.$$

Условие (6)

$$u(x_1, t) = u(\xi(t)y_1, t) = \chi(t), \text{ где } y_1 = x_1/\xi(t),$$

перепишется в виде

$$(11) \quad v(y_1, t) = \gamma(t), \quad 0 < t \leq T.$$

И, наконец, искомая функция  $u(0, t) = \psi_2(t)$  будет иметь вид  $v(0, t) = v_0(t)$ .

Сделаем еще одну замену переменной:

$$s = \int_0^t \xi^{-2}(\tau) d\tau = b(t)$$

и обозначим  $u_1(y, s) = v(y, b^{-1}(s))$ . Тогда уравнение (7), в силу того, что

$$(12) \quad \frac{ds}{dt} = \xi^{-2}(t),$$

будет иметь вид

$$(13) \quad \frac{\partial u_1(y, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 u_1(y, s)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < s \leq S,$$

где  $S = b(T)$ , а условия (8)–(11) переписутся в виде (14)–(17):

$$(14) \quad u_1(y, 0) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$(15) \quad \frac{\partial u_1(1, s)}{\partial y} = \eta(s), \quad 0 < s \leq S,$$

так как

$$\frac{\partial u_1(1, s)}{\partial y} = \frac{\partial v(1, t)}{\partial y} = -k\xi'_t(b^{-1}(s))\xi(b^{-1}(s)) = -k\xi'_s(b^{-1}(s))\xi(b^{-1}(s))\frac{ds}{dt},$$

а с учетом (12) получим

$$\frac{\partial u_1(1, s)}{\partial y} = -k\xi'_s(b^{-1}(s))\xi^{-1}(b^{-1}(s)) = \eta(s)$$

$$(16) \quad u_1(1, s) = 0, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(17) \quad u_1(y_1, s) = \beta(s), \quad 0 < s \leq S,$$

где  $u_1(y_1, s) = v(y_1, t) = v(y_1, b^{-1}(s))$ ,  $\beta(s) = \gamma(t) = \gamma(b^{-1}(s))$ . Искомыми функциями являются  $\eta(s)$  и  $u_1(0, s) = u_1^0(s)$ .

Составим и решим вспомогательную задачу: найти функцию  $u_2(y, s)$  из следующих условий

$$\frac{\partial u_2(y, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 u_2(y, s)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < s \leq S,$$

$$u_2(y, 0) = \psi(y), \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$u_2(0, s) = u_2(1, s) = 0, \quad 0 < s \leq S.$$

Данная задача имеет единственное решение

$$u_2(y, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 s} \sin \pi n y, \quad \text{где } \psi_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \psi(y) \sin \pi n y dy.$$

Обозначим теперь

$$h(y, s) = u_1(y, s) - u_2(y, s),$$

тогда с учетом (13)–(17) получим следующую задачу: при  $0 \leq s \leq S$  определить функции  $\sigma(s)$  и  $h(0, s) = h_0(s)$  из условий

$$(18) \quad \frac{\partial h(y, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 h(y, s)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(19) \quad h(y, 0) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1$$

$$(20) \quad \frac{\partial h(1, s)}{\partial y} = \sigma(s), \quad 0 < s \leq S,$$

где

$$\sigma(s) = \frac{\partial u_1(1, s)}{\partial y} - \frac{\partial u_2(1, s)}{\partial y} = \eta(s) - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \pi n \psi_n e^{-\pi^2 n^2 a^2 s},$$

$$(21) \quad h(1, s) = 0, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(22) \quad h(y_1, s) = \beta(s) - u_2(y_1, s) = f(s), \quad 0 < s \leq S.$$

Для удобства сделаем еще одну замену:  $z = 1 - y$  и обозначим

$$h(y, s) = h(1 - z, s) = w(z, s).$$

Тогда задача (18)–(22) примет вид (23)–(27):

$$(23) \quad \frac{\partial w(z, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 w(z, s)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(24) \quad w(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$(25) \quad \frac{\partial w(0, s)}{\partial z} = -\sigma(s), \quad 0 < s \leq S,$$

так как

$$\frac{\partial w(0, s)}{\partial z} = \frac{\partial h(1, s)}{\partial y} \frac{dy}{dz} = -\frac{\partial h(1, s)}{\partial y},$$

$$(26) \quad w(0, s) = 0, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(27) \quad w(z_1, s) = f(s), \quad z_1 = 1 - y_1, \quad 0 < s \leq S,$$

искомыми являются функции  $\sigma(s)$  и  $w(1, s) = w_0(s)$ .

Найдем сначала  $\sigma(s)$ . Для этого решим вспомогательную прямую задачу: в области  $\{0 \leq z \leq z_1, 0 \leq s \leq S\}$  найдем функцию  $w(z, s)$ , удовлетворяющую условиям:

$$\frac{\partial w(z, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 w(z, s)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < z_1, \quad 0 < s \leq S,$$

$$w(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq z_1,$$

$$w(0, s) = 0, \quad 0 < s \leq S,$$

$$w(z_1, s) = f(s), \quad 0 < s \leq S.$$

Решение данной задачи единственно и имеет вид:

$$w(z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n z}{z_1} \int_0^s f_n(\tau) \exp \left\{ \left( \frac{\pi n a}{z_1} \right)^2 (\tau - s) \right\} d\tau + \frac{z}{z_1} f(s),$$

где

$$f_n(s) = \frac{2}{z_1} \int_0^{z_1} -\frac{z}{z_1} f'(s) \sin \frac{\pi n z}{z_1} dz.$$

Теперь, зная  $w(z, s)$ , можно найти  $\sigma(s)$  из условия (25). Затем, применяя последовательно условия (20) и (15) и делая обратные замены переменных, получим дифференциальное уравнение для нахождения фронта фазового перехода — функции  $\xi(t)$ .

Вторую неизвестную функцию  $w(1, s) = w_0(s)$  будем искать из следующих условий:

$$(28) \quad \frac{\partial w(z, s)}{\partial s} = a^2 \frac{\partial^2 w(z, s)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(29) \quad w(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$(30) \quad w(0, s) = 0, \quad 0 < s \leq S,$$

$$(31) \quad \frac{\partial w(0, s)}{\partial z} = g(s),$$

здесь  $g(s) = -\sigma(s)$  — уже известная функция.

Предположим, что при точном значении функции  $g(s) = g_0(s) \in L_2[0, \infty)$  задача (28)–(31) имеет точное решение  $w_0(s)$ , удовлетворяющее условиям:

$$(32) \quad w_0(0) = w_0'(0) = 0,$$

$$(33) \quad w_0(s) \in W_2^1[0, \infty),$$

$$(34) \quad w_0''(s) \in L_1[0, \alpha] \quad \forall \alpha > 0.$$

В [2] доказано, что при выполнении условий (32)–(34) для решения задачи (28)–(31) можно использовать синус  $F_s$  и косинус  $F_c$  преобразования Фурье, изометрично отображающие пространство  $L_2[0, \infty)$  в себя. Обозначим  $\overline{H}$  — ортогональную сумму пространств  $\overline{H}_1 = L_2[0, \infty)$  и  $\overline{H}_2 = iL_2[0, \infty)$  и для элемента  $u + iv \in \overline{H}$  определим преобразование  $F$  по правилу

$$F(u + iv) = F_c(u) + iF_s(v),$$

тогда  $F$  изометрично отображает  $\overline{H}$  в  $\overline{H}$ .

Рассмотрим наряду с уравнением (28) уравнение вида

$$(35) \quad i \frac{\partial w(z, s)}{\partial s} = ia^2 \frac{\partial^2 w(z, s)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \quad 0 < s \leq S.$$

Применим к (28) и (35) синус и косинус преобразования соответственно и сложим полученные уравнения, получим

$$a^2 \frac{d^2}{dz^2} \int_0^\infty (i \cos \lambda s + \sin \lambda s) w(z, s) ds = (i \cos \lambda s + \sin \lambda s) w(z, s)|_0^\infty + \\ + \lambda \int_0^\infty (i \sin \lambda s - \cos \lambda s) w(z, s) ds.$$

Или, с учетом равенства  $i \cos \lambda s + \sin \lambda s = i(\cos \lambda s - i \sin \lambda s) = ie^{-i\lambda s}$ ,

$$a^2 i \frac{d^2}{dz^2} \int_0^\infty e^{-i\lambda s} w(z, s) ds = ie^{-i\lambda s} w(z, s)|_0^\infty + \lambda \int_0^\infty (i \sin \lambda s - \cos \lambda s) w(z, s) ds.$$

Последнее равенство, в силу (29), при умножении на  $-i$  дает

$$a^2 \frac{d^2}{dz^2} \int_0^\infty e^{-i\lambda s} w(z, s) ds = \lambda i \int_0^\infty e^{-i\lambda s} w(z, s) ds,$$

то есть

$$a^2 \frac{d^2}{dz^2} F(w) = \lambda i F(w).$$

Обозначим  $F(w(z, s)) = \hat{w}(z, \lambda)$ ,  $F(g(s)) = \hat{g}(\lambda)$ , и задача (28)–(31) преобразуется к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(36) \quad a^2 \frac{d^2 \hat{w}(z, \lambda)}{dz^2} = i \lambda \hat{w}(z, \lambda)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} \hat{w}(0, \lambda) &= 0, \\ \hat{w}_z(0, \lambda) &= \hat{g}(\lambda). \end{aligned}$$

Решая уравнение (36), получим

$$\hat{w}(1, \lambda) = \frac{a \operatorname{sh}\left(\frac{\mu\sqrt{\lambda}}{a}\right)}{\mu\sqrt{\lambda}} \hat{g}(\lambda),$$

где  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ . Таким образом, для нахождения функции  $\hat{w}(1, \lambda) = \hat{w}_0(\lambda)$  имеем операторное уравнение первого рода

$$(37) \quad A \hat{w}_0(\lambda) = \hat{g}(\lambda),$$

где  $A: \overline{H} \rightarrow \overline{H}$ ,  $A \hat{w}_0(\lambda) = \frac{\mu\sqrt{\lambda}}{a \operatorname{sh}\left(\frac{\mu\sqrt{\lambda}}{a}\right)} \hat{w}_0(\lambda)$ .

На практике известно лишь приближенное значение функции  $g(s) = g_\delta(s)$  и значение погрешности  $\|g_0 - g_\delta\| \leq \delta$ . Задача решения уравнения (37) является некорректно поставленной (неустойчивой), поэтому для ее решения необходимо применять метод регуляризации. Сначала уточним определение метода.

**Определение 1.** Семейство операторов  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть методом приближенного решения уравнения  $Au = f_\delta$ ,  $A: U \rightarrow F$ , на множестве  $M$ , если  $\forall \delta \in (0, \delta_0]$  оператор  $T_\delta$  непрерывно отображает пространство  $F$  в  $U$  и

$$T_\delta f_\delta \rightarrow u_0 \text{ при } \delta \rightarrow 0$$

равномерно на множестве  $M$  при условии, что  $\|f_\delta - Au_0\| \leq \delta$ .

**Определение 2.** Множество  $M \subset U$  будем называть классом равномерной регуляризации для уравнения  $Au = f_\delta$ , если на нем существует метод приближенного решения этого уравнения.

Так как точное решение  $w_0(s) = w(1, s)$  нашей задачи удовлетворяет условиям (32)–(34), то класс равномерной регуляризации  $M_r$  нужно определить следующим образом:

$$(38) \quad M_r = \{u_0 \in W_2^1[0, \infty) : u_0(0) = u_0'(0) = 0, \|u_0\| \leq r, u_0'' \in L_1[0, a] \forall a > 0\}.$$

В качестве метода регуляризации выберем метод установления с параметром регуляризации, определенным по невязке. Метод установления заключается в том, что в качестве приближенного решения уравнения  $Au = f_\delta$  рассматривается стабилизовавшееся решение задачи Коши для эволюционного уравнения

$$(39) \quad \frac{du}{dt} + A^* Au = A^* f_\delta, \quad u|_{t=0} = 0,$$

в котором  $A: U \rightarrow F$  — линейный ограниченный инъективный оператор,  $t$  — параметр регуляризации. Тогда при условии, что  $U = F = H$  — гильбертово

пространство, а спектр оператора  $A_1 = A^*A$  совпадает с отрезком  $[0, \|A\|^2]$ , регуляризующее семейство операторов  $\{R_t : t > 0\}$  определяется формулой

$$R_t f = \int_0^{\|A\|} \frac{1}{\sigma^2} (1 - e^{-\sigma^2 t}) dE_\sigma A^* f, \quad f \in H,$$

$\{E_\sigma : \sigma \in [0, \|A\|]\}$  — разложение единицы, порождённое оператором  $A_1^{1/2}$ . Тогда метод установления  $\{\bar{T}_\delta\}$  определим так:

$$\bar{T}_\delta f_\delta = \begin{cases} R_{\bar{t}} f_\delta & \text{при } \|f_\delta\| > 3\sqrt{\delta} \\ 0 & \text{при } \|f_\delta\| \leq 3\sqrt{\delta}, \end{cases}$$

где  $\bar{t} = \bar{t}(\delta)$  удовлетворяет условию невязки

$$\|A u_\delta^t - f_\delta\| = 3\sqrt{\delta}, \quad u_\delta^t = R_t f_\delta.$$

Составим для уравнения (37) соответствующее уравнение (39). Для этого оператор  $A \hat{w}(\lambda) = \frac{\mu \sqrt{\lambda}}{a \operatorname{sh}(\frac{\mu \sqrt{\lambda}}{a})} \hat{w}(\lambda)$ , в котором  $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ , преобразуем к виду:

$$A \hat{w}(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \left( \frac{\cos \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} + \sin \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}}}{\cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1} + \right. \\ \left. + i \frac{\cos \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} - \sin \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}}}{\cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1} \right) \hat{w}(\lambda),$$

тогда оператор  $A_1 = A^*A$  будет иметь вид

$$A_1 \hat{w}(\lambda) = \frac{2\lambda}{a^2 \left( \cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1 \right)} \hat{w}(\lambda).$$

Решение уравнения (37), полученное методом установления, будет таким:

$$(40) \quad \hat{w}_\delta^t(\lambda) = \frac{a^2 \left( \cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1 \right)}{2\lambda} \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{2\lambda t}{a^2 \left( \cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1 \right)} \right\} \right) \tilde{g}_\delta(\lambda),$$

где

$$\tilde{g}_\delta(\lambda) = A^* \hat{g}_\delta(\lambda) = \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \left( \frac{\cos \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} + \sin \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}}}{\cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1} - \right. \\ \left. - i \frac{\cos \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} - \sin \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\lambda}{2a^2}}}{\cos \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\lambda}}{a} - 1} \right) \hat{g}_\delta(\lambda),$$

а параметр  $t = t(\delta)$  удовлетворяет уравнению

$$\int_{t(\delta)}^{\infty} |\hat{g}_\delta(\lambda)|^2 d\lambda = 9\delta.$$

Приближенное решение (40) будет оптимальным по порядку на классе  $M_r$ , так как в [2] показано, что метод установления с параметром, выбранным по принципу невязки, является оптимальным по порядку на логарифмических классах равномерной регуляризации и дана оценка погрешности приближенного решения, полученного этим методом. В силу изометричности отображения  $F$ , для решения  $w_0(s)$  задачи (28)–(31) будет справедлива та же оценка. Чтобы получить решение  $\psi_2(t)$  исходной задачи (1)–(4), (6), необходимо сделать последовательно обратные замены.

В [3] решена аналогичная однофазная задача Стефана, но с известной границей фазового перехода, методом проекционной регуляризации и найдена точная по порядку оценка этого решения.

### 3. ДВУХФАЗНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА СТЕФАНА

Прямая двухфазная однофронтная задача Стефана состоит в определении функции  $u(x, t)$  в области, состоящей из двух частей в различных фазовых состояниях с различными теплофизическими характеристиками  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$ , и фронта фазового перехода  $\xi(t)$  из условий:

$$(41) \quad \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \xi(t), \quad t > 0,$$

$$(42) \quad \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial x^2}, \quad \xi(t) < x < l, \quad t > 0,$$

с дополнительными условиями

$$(43) \quad u_1(0, t) = \Phi_1(t), \quad t > 0,$$

$$(44) \quad u_1(x, 0) = \varphi_1(x), \quad 0 < x < \xi(0),$$

$$(45) \quad u_2(l, t) = \Phi_2(t), \quad t > 0,$$

$$(46) \quad u_2(x, 0) = \varphi_2(x), \quad \xi(0) < x < l,$$

причем  $\xi(0) = \xi_0 \neq 0$ ,  $\xi(0) \neq l$ . На границе раздела фаз имеют место условия:

$$(47) \quad u_1(\xi(t), t) = 0, \quad t > 0,$$

$$(48) \quad u_2(\xi(t), t) = 0, \quad t > 0,$$

$$(49) \quad \kappa_1 \frac{\partial u_1(\xi(t), t)}{\partial x} - \kappa_2 \frac{\partial u_2(\xi(t), t)}{\partial x} = \xi'(t), \quad t > 0,$$

Здесь  $u_1(x, t)$ ,  $u_2(x, t)$  — искомая температура;  $a_1^2$ ,  $a_2^2$  — температуропроводность;  $x$  — координата по глубине;  $x = \xi(t)$  — положение границы раздела фаз. Решение ищется для отрезка времени  $0 < t < T$ , в течение которого  $\xi(t)$  не обращается ни в нуль, ни в  $l$ .

Допустим, что граничный режим при  $x = 0$  неизвестен (т.е. неизвестна функция  $\Phi_1(t)$ ), но в некоторой внутренней точке  $x = x_0$ ,  $0 < x_0 < \xi(0)$ , задана дополнительная информация о решении прямой задачи Стефана (41)–(49):

$$(50) \quad u_1(x_0, t) = f(t), \quad t > 0.$$

Тогда возникает обратная задача Стефана [1]: найти функции  $\xi(t)$ ,  $\Phi_1(t)$ , удовлетворяющие условиям (41)–(50), где функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ ,  $\Phi_2(t)$ ,  $f(t)$  предполагаются заданными.

Вначале найдем неизвестную границу фазового перехода  $\xi(t)$ . Для этого решим две прямые задачи Стефана: в области  $\{x_0 \leq x \leq \xi(t), t \geq 0\}$  уравнение

$$\frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad x_0 < x < \xi(t), \quad t \geq 0,$$

с условиями (44), (47), (50) и в области  $\{\xi(t) \leq x \leq l, t \geq 0\}$  уравнение (42) с условиями (45), (46), (48). После замены

$$y = x/\xi(t)$$

и обозначений  $y_0 = x_0/\xi(t)$ ,  $m = l/\xi(t)$ ,  $u_1(x, t) = v_1(y, t)$ ,  $u_2(x, t) = v_2(y, t)$  эти задачи примут вид соответственно

$$\xi^2(t) \frac{\partial v_1(y, t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 v_1(y, t)}{\partial y^2}, \quad y_0 < y < 1, \quad t \geq 0,$$

$$v_1(y, 0) = \psi_1(y), \quad y_0 \leq y \leq 1,$$

$$v_1(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$v_1(y_0, t) = \gamma_1(t), \quad t > 0,$$

и

$$\xi^2(t) \frac{\partial v_2(y, t)}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 v_2(y, t)}{\partial y^2}, \quad 1 < y < m, \quad t \geq 0,$$

$$v_2(y, 0) = \psi_2(y), \quad 1 \leq y \leq m,$$

$$v_2(1, t) = 0, \quad t > 0,$$

$$v_2(m, t) = \gamma_2(t), \quad t > 0.$$

Сделаем еще одну замену

$$s = b(t) = \int_0^t \xi^{-2}(\tau) d\tau$$

и обозначив  $v_1(y, b^{-1}(s)) = w_1(y, s)$ ,  $v_2(y, b^{-1}(s)) = w_2(y, s)$ ,  $\gamma_1(b^{-1}(s)) = \beta_1(s)$ ,  $\gamma_2(b^{-1}(s)) = \beta_2(s)$ , получим следующие две задачи

$$\frac{\partial w_1(y, s)}{\partial s} = a_1^2 \frac{\partial^2 w_1(y, s)}{\partial y^2}, \quad y_0 < y < 1, \quad s \geq 0,$$

$$w_1(y, 0) = \psi_1(y), \quad y_0 \leq y \leq 1,$$

$$w_1(1, s) = 0, \quad s > 0,$$

$$w_1(y_0, s) = \beta_1(s), \quad s > 0,$$

и

$$\frac{\partial w_2(y, s)}{\partial s} = a_2^2 \frac{\partial^2 w_2(y, s)}{\partial y^2}, \quad 1 < y < m, \quad s \geq 0,$$

$$w_2(y, 0) = \psi_2(y), \quad 1 \leq y \leq m,$$

$$w_2(1, s) = 0, \quad s > 0,$$

$$w_2(m, s) = \beta_2(s), \quad s > 0.$$

Решая полученные прямые задачи методом Фурье, найдем  $w_1(y, s)$  и  $w_2(y, s)$ , тогда

$$\frac{\partial w_1(1, s)}{\partial y} = -\frac{\beta_1(s)}{1-y_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi n}{1-y_0} e^{-\left(\frac{\pi n a_1}{1-y_0}\right)^2 s} \times \left[ \int_0^s e^{\left(\frac{\pi n a_1}{1-y_0}\right)^2 \tau} f_n^{(1)}(\tau) d\tau + \varphi_n^{(1)} \right],$$

где

$$f_n^{(1)}(s) = \frac{2}{(1-y_0)^2} \frac{\partial \beta_1(s)}{\partial s} \int_0^{1-y_0} (y-1) \sin \frac{\pi n(y-y_0)}{1-y_0} dy,$$

$$\varphi_n^{(1)} = \frac{2}{(1-y_0)^2} \int_0^{1-y_0} [(1-y_0)\psi_1(y) - (1-y)\beta_1(0)] \sin \frac{\pi n(y-y_0)}{1-y_0} dy,$$

и

$$\frac{\partial w_2(1, s)}{\partial y} = \frac{\beta_2(s)}{m-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi n}{m-1} e^{-\left(\frac{\pi n a_2}{m-1}\right)^2 s} \times \left[ \int_0^s e^{\left(\frac{\pi n a_2}{m-1}\right)^2 \tau} f_n^{(2)}(\tau) d\tau + \varphi_n^{(2)} \right],$$

где

$$f_n^{(2)}(s) = \frac{2}{(m-1)^2} \frac{\partial \beta_2(s)}{\partial s} \int_0^{m-1} (1-y) \sin \frac{\pi n(y-1)}{m-1} dy,$$

$$\varphi_n^{(2)} = \frac{2}{(m-1)^2} \int_0^{m-1} [(m-1)\psi_2(y) - (y-1)\beta_2(0)] \sin \frac{\pi n(y-1)}{m-1} dy.$$

Выполнив обратные замены, отсюда найдем дополнительные условия на границе  $\xi(t)$  для функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$ :

$$(51) \quad \frac{\partial u_1(\xi(t), t)}{\partial x} = g_1(t), \quad t > 0,$$

и

$$(52) \quad \frac{\partial u_2(\xi(t), t)}{\partial x} = g_2(t), \quad t > 0.$$

Здесь

$$g_1(t) = -\frac{f(t)}{\xi(t) - x_0} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\pi n}{\xi(t) - x_0} e^{-\left(\frac{\pi n a_1 \xi(t)}{\xi(t) - x_0}\right)^2} b(t) \left[ \phi_n^{(1)}(t) + \int_0^{b(t)} e^{\left(\frac{\pi n a_1 \xi(t)}{\xi(t) - x_0}\right)^2} b(\nu) F_n^{(1)}(\nu) \xi^{-2}(\nu) d\nu \right],$$

$$g_2(t) = \frac{\Phi_2(t)}{l - \xi(t)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n}{l - \xi(t)} e^{-\left(\frac{\pi n a_2 \xi(t)}{l - \xi(t)}\right)^2} b(t) \left[ \phi_n^{(2)}(t) + \int_0^{b(t)} e^{\left(\frac{\pi n a_2 \xi(t)}{l - \xi(t)}\right)^2} b(\nu) F_n^{(2)}(\nu) \xi^{-2}(\nu) d\nu \right],$$

а

$$F_n^{(1)}(t) = \frac{2\xi^2(t)}{(\xi(t) - x_0)^2} \frac{\partial f(t)}{\partial t} \int_0^{1-x_0/\xi(t)} (x - \xi(t)) \sin \frac{\pi n(x - x_0)}{\xi(t) - x_0} dx,$$

$$F_n^{(2)}(t) = \frac{2\xi^2(t)}{(l - \xi(t))^2} \frac{\partial \Phi_2(t)}{\partial t} \int_0^{l/\xi(t)-1} (\xi(t) - x) \sin \frac{\pi n(x - \xi(t))}{l - \xi(t)} dx,$$

$$\phi_n^{(1)}(t) = \frac{2}{(\xi(t) - x_0)^2} \int_0^{1-x_0/\xi(t)} [(\xi(t) - x_0)\varphi_1(x) - (\xi(t) - x)f(0)] \sin \frac{\pi n(x - x_0)}{\xi(t) - x_0} dx,$$

$$\phi_n^{(2)}(t) = \frac{2}{(l - \xi(t))^2} \int_0^{l/\xi(t)-1} [(l - \xi(t))\varphi_2(x) - (x - \xi(t))\Phi_2(0)] \sin \frac{\pi n(x - \xi(t))}{l - \xi(t)} dx.$$

Из условия (49), с учетом (51) и (52), найдем функцию  $\xi(t)$ .

Для нахождения второй неизвестной функции  $\Phi_1(t)$  будем решать обратную задачу Стефана с известной границей фазового перехода, то есть уравнение (41) с условиями (44), (47), (51). Мы имеем задачу, аналогичную (1)–(4), но с уже известной границей  $\xi(t)$ . Способом, подробно изложенным в предыдущем параграфе, сводим задачу (41), (44), (47), (51) к следующему виду:

$$\frac{\partial w(z, s)}{\partial s} = a_1^2 \frac{\partial^2 w(z, s)}{\partial z^2}, \quad 0 < z < 1, \quad s > 0,$$

$$w(z, 0) = 0, \quad 0 \leq z \leq 1,$$

$$w(0, s) = 0, \quad s > 0,$$

$$\frac{\partial w(0, s)}{\partial z} = g(s),$$

где функция  $g(s)$  задана приближенно с погрешностью  $\delta$ , то есть  $g(s) = g_\delta(s)$ , а искомой является функция  $w(1, s)$ . Полученная задача совпадает с (28)–(31) и решается аналогично.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Л. Гольдман, *Обратные задачи Стефана*, Изд-во Московского ун-та, Москва, 1999. MR1463692
- [2] Дутикова Е. В. *Исследование оптимальности метода установления на различных классах равномерной регуляризации*, Проблемы теоретической и прикладной математики: Труды XXXVIII региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН, 2007. С. 150–153.
- [3] Танана В. П. *Об оптимальном методе решения одной обратной задачи Стефана.*/В. П. Танана, Е. В. Худышкина//Сиб. журн. инд. матем. 2005. Т. 8, № 4. С. 124–130.

Елена Вячеславовна Дутикова,  
Миасский филиал Челябинского государственного университета,  
ул. Керченская 1,  
456313, Миасс, Челябинская область, Россия  
*E-mail address:* [helenor@nm.ru](mailto:helenor@nm.ru)

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.236–С.253 (2011)*

УДК 519.6  
MSC 65M32**АНАЛИЗ НЕКОРРЕКТНОСТИ И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ  
ФАРМАКОКИНЕТИКИ ДЛЯ ДВУХКАМЕРНОЙ МОДЕЛИ  
С ВНЕСОСУДИСТЫМ ВВЕДЕНИЕМ ПРЕПАРАТА**А. И. ИЛЬИН, С. И. КАБАНИХИН, Д. Б. НУРСЕИТОВ, А. Т. НУРСЕИТОВА,  
Н. А. АСМАНОВА, Д. А. ВОРОНОВ, Д. БАКЫТОВ

**ABSTRACT.** The nonlinear inverse pharmacokinetics problem is considered. The problem is strongly ill-posed in sense non-uniqueness and unstability. We consider linearized inverse problem and apply SVD method for numerical solution.

**Keywords:** numerical analysis, inverse problem, pharmacokinetics.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из основных задач фармакокинетики является исследование процессов распределения лекарственных средств в организме и способов выведения из него. Их количественная оценка осуществляется с помощью так называемых фармакокинетических параметров (ФКП), расчет которых производят чаще всего внемоделным или модельным методом.

---

ILIN A.I., KABANIKHIN S.I., NURSEITOV D.B., NURSEITOVA A.T., ASMANOVA N.A.,  
VORONOV D.A., BAKYTOV D., NUMERICAL AND ILL-POSED ANALYSIS OF NONLINEAR INVERSE  
PHARMACOKINETICS PROBLEM FOR BICAMERAL MODEL.

© 2011 Ильин А.И., Кабанихин С.И., Нурсеитов Д.Б., Нурсеитова А.Т., Асманова Н.А., Воронов Д.А., Бакытов Д.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00746, грант 11-01-00105 и при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

Первый из них, элементарный в исполнении [1, 2] позволяет найти лишь несколько интегральных ФКП, характеризующих организм как единое целое. Модельный подход, в отличие от внемодельного, рассматривает организм как совокупность некоторых составляющих – камер. Его преимуществом является возможность расчета констант скорости отдельных стадий общей динамики изменения концентрации ЛС в организме [1, 2]. Несмотря на то, что понятие камера достаточно условно и четких физических границ у нее нет, принятое в фармакокинетике отнесение органов и тканей к составу каждой из них дает приближенную картину распределения ЛС в организме [3].

Базовые величины модельного метода – константы скорости, позволяют рассчитать ФКП для каждой из камер по отдельности, организма в целом, а также все так называемые внемодельные характеристики ЛС [4]. К этому следует добавить, что для проведения камерной обработки обычно используют тот же самый объем исходных экспериментальных данных, что и для внемодельного метода.

Однако, в ряде случаев эти несомненные преимущества модельного метода труднореализуемы. Особенно это касается самого распространенного приема ЛС – внесосудистого (таблетки, микстуры, внутримышечное введение и т.д.), описываемого так называемой двухкамерной моделью с адсорбцией. Об этом свидетельствуют исследования как общих вопросов этой проблемы [5, 6, 7, 8, 9] так и частных, связанных с обработкой опытных данных и их интерпретацией для конкретного препарата [10].

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Описание исследуемой модели составлено согласно [1, 2, 11], ее схема представлена на рисунке 1.

Пусть  $m(t)$  – количество препарата в месте всасывания,  $m_i(t)$  – количество препарата в  $i$ -той камере в момент времени  $t$ ,  $V_i$  – кажущийся объем распределения препарата в  $i$ -той камере,  $i = 1, 2$ , тогда система кинетических уравнений может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{dm}{dt} = -k_a m, & m(0) &= m_0, \\
 (2) \quad & \frac{dm_1}{dt} = k_a m - (k_{10} + k_{12})m_1 + k_{21}m_2, & m_1(0) &= 0, \\
 (3) \quad & \frac{dm_2}{dt} = k_{12}m_1 - k_{21}m_2, & m_2(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Здесь  $k_a$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{21}$ ,  $k_{10}$  – константы скорости адсорбции, взаимоперехода между камерами 1 и 2 и элиминации из камеры 1 соответственно,  $m_0$  – введенная доза ЛС.

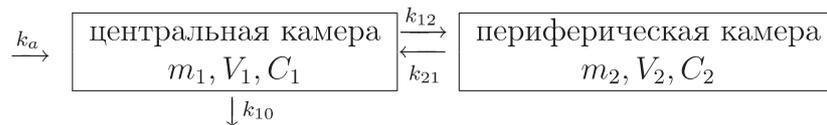


Рис. 1. Схема двухкамерной модели для внесосудистого введения препарата

Решение системы (1)–(3) имеет следующий вид:

$$(4) \quad m(t) = m_0 \cdot e^{-k_a t},$$

$$(5) \quad m_1(t) = V_1(A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t} - (A_1 + A_2)e^{-k_a t}),$$

$$(6) \quad m_2(t) = V_1(B_1 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t} - (B_1 + B_2)e^{-k_a t}),$$

где  $\alpha, \beta, A_i, B_i$  ( $i = 1, 2$ ) явно выписываются через  $k_a, k_{12}, k_{21}, k_{10}, m_0, V_1$ .

Разделив (4)–(6) на кажущийся объем  $V_1$  и обозначив  $C_0 = \frac{m_0}{V_1}$ ,  $C_1(t) = \frac{m_1(t)}{V_1}$ , мы имеем следующую **прямую задачу**: определить концентрацию ЛС

в центральной камере по заданным значениям  $k_a, k_{12}, k_{21}, k_{10}, C_0$  из уравнения

$$(7) \quad C_1(t) = A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-\beta t} - (A_1 + A_2)e^{-k_a t}.$$

$$(8) \quad \text{Здесь} \quad \alpha = \frac{1}{2}(k_{10} + k_{12} + k_{21} + \sqrt{(k_{10} + k_{12} + k_{21})^2 - 4k_{10}k_{21}}),$$

$$(9) \quad \beta = \frac{1}{2}(k_{10} + k_{12} + k_{21} - \sqrt{(k_{10} + k_{12} + k_{21})^2 - 4k_{10}k_{21}}),$$

$$(10) \quad A_1 = \frac{k_a(\alpha - k_{21})C_0}{(\alpha - \beta)(k_a - \alpha)}, \quad A_2 = \frac{k_a(\beta - k_{21})C_0}{(\alpha - \beta)(\beta - k_a)}.$$

В **обратной задаче** требуется определить константы  $k_a, k_{12}, k_{21}, k_{10}, C_0$  из соотношений (7)–(10) по дополнительной информации о концентрации в заданных моментах времени  $t_1, \dots, t_M$

$$(11) \quad C_1(t_j) = C_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Таким образом, обратная задача (7)–(11) сводится к нелинейной системе из  $M$  уравнений

$$(12) \quad \begin{aligned} A_1 e^{-\alpha t_1} + A_2 e^{-\beta t_1} - (A_1 + A_2)e^{-k_a t_1} &= C_1, \\ A_1 e^{-\alpha t_2} + A_2 e^{-\beta t_2} - (A_1 + A_2)e^{-k_a t_2} &= C_2, \\ &\vdots \\ A_1 e^{-\alpha t_M} + A_2 e^{-\beta t_M} - (A_1 + A_2)e^{-k_a t_M} &= C_M, \end{aligned}$$

из которой требуется определить пять неизвестных  $A_1, A_2, \alpha, \beta, k_a$ . Константы скорости и начальная концентрация ЛС в камере 1 вычисляются следующим образом

$$(13) \quad k_{21} = -\frac{A_1 \beta k_a + A_2 \alpha k_a - (A_1 + A_2)\alpha \beta}{A_1 \alpha + A_2 \beta - (A_1 + A_2)k_a},$$

$$k_{10} = \frac{\alpha \beta}{k_{21}}, \quad k_{12} = \alpha + \beta - k_{10} - k_{21}, \quad C_0 = \frac{A_1(\alpha - \beta)(k_a - \alpha)}{k_a(\alpha - k_{21})}.$$

Введем обозначения

$$(14) \quad q = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)^T, \quad q_1 = A_1, \quad q_2 = A_2, \quad q_3 = \alpha, \quad q_4 = \beta, \quad q_5 = k_a,$$

$$(15) \quad f = (f_1, f_2, \dots, f_M)^T, \quad f_j = C_j, \quad j = \overline{1, M}.$$

Тогда обратную задачу (12) можно записать в следующем операторном виде

$$(16) \quad \mathcal{A}q = f,$$

где  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_M)^T$ ,  $\mathcal{A}_j q = q_1 e^{-q_3 t_j} + q_2 e^{-q_4 t_j} - (q_1 + q_2) e^{-q_5 t_j}$ ,  $j = \overline{1, M}$ , нелинейный оператор  $\mathcal{A}: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}_+^M$ .

### 3. НЕКОРРЕКТНОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Задача (16) сильно некорректна: ее решение неединственно и неустойчиво. Эта проблема особенно актуальна при обработке опытных данных, полученных после внесосудистого введения ЛС. R.D. Purves [8], исследуя проблемы неединственности и неустойчивости решения обратной задачи для двухкамерной модели с адсорбцией ЛС, указывает, что уравнение (7) имеет шесть решений, число которых уменьшается до трех за счет следующего соотношения

$$(17) \quad k_{12} = \alpha + \beta - k_{21} - \frac{\alpha\beta}{k_{21}}.$$

Автор акцентирует внимание на том, что количество решений задачи (7)–(11) зависит не от используемых алгоритмов, а определяется собственными свойствами используемой модели. Поэтому, найдя каким либо методом одно из решений задачи (7)–(11), остальные можно получить простой перестановкой  $k_a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ .

Учитывая, что  $\alpha > \beta$ , каждое решение соответствует одному из условий

$$(18) \quad k_a > \alpha > \beta,$$

$$(19) \quad \alpha > k_a > \beta,$$

$$(20) \quad \alpha > \beta > k_a.$$

Следует отметить, что наибольшие сложности связаны с решением обратных задач, отвечающих условию (19) и особенно (20). Свидетельством чему являются результаты работы [9]. Переход от  $\alpha$  и  $\beta$  к константам скорости отдельных стадий позволил ее авторам выявить не только дополнительные проблемы, вызванные перестановкой величин в ряду  $k_a > k_{21} > k_{12} > k_{10}$ , но и предложить способы их решения. К ним можно отнести условие постоянства  $k_{21}$ , сохраняющееся при всех соотношениях между  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k_a$  в уравнении (7), и привлечение зависимости  $C_2(\tau) = f(\tau)$  — концентрации ЛС в периферической камере.

Общим для работ [8, 9] является то, что вопросы неединственности решения задачи (7)–(11) изучались численными методами, а решение обратной задачи не доведено до вычисления значений  $k_{12}$ ,  $k_{21}$  и  $k_{10}$ .

Аналитическое решение этой проблемы можно найти в работах по химической кинетике [12, 13, 14]. С помощью метода моментов [4] их авторами показано, что уравнение, связывающее параметры (7), является кубическим и соответственно имеет три решения.

Трудоемкие расчеты по решению кубического уравнения [14] могут быть заменены перестановкой значений  $k_a$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  с соответствующей ротацией коэффициентов  $A_i$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Следует отметить, что не все перестановки разрешены. Физический смысл имеют решения с переходами (18)  $\longleftrightarrow$  (19) и (19)  $\longleftrightarrow$  (20). Переход (18)  $\longleftrightarrow$  (20) запрещен, так как он приводит к отрицательным значениям  $k_{12}$ .

Отсюда следует, что широко обсуждаемый в литературе по фармакокинетике flip-flop феномен [2, 5, 15, 16, 17] на самом деле является частным случаем проблемы неединственности решения обратной задачи.

Итак, неединственность решения является свойством уравнения (7) и предполагает равновероятную реализацию любого из них. Выбор того или иного решения должен быть обоснован привлечением дополнительной информации, полученной независимым методом. В качестве таковой могут быть использованы опытные данные по внутрисосудистому введению ЛС, динамика вывода его из организма, а также комплекс физико-химических свойств препарата, определяющих вероятность реализации каждого из возможных решений.

В данной работе проблема неустойчивости исследуется с помощью сингулярного разложения (СР). Для этого рассматриваемое операторное уравнение (16) линеаризуется следующим образом: пусть искомый вектор  $q$  представим в виде  $q = \bar{q} + p$ , где  $\bar{q}$  полагается известным, а  $\|p\| \ll 1$ , т.е.  $p$  достаточно мало. Принимая во внимание определение оператора производной Фреше

$$(21) \quad \mathcal{A}(\bar{q} + p) - \mathcal{A}(\bar{q}) = \mathcal{A}'(\bar{q})p + o(\|p\|)$$

и обозначение  $g = f - \mathcal{A}(\bar{q})$ , задача (16) сводится к следующему линейному операторному уравнению

$$(22) \quad \mathcal{A}'(\bar{q})p = g.$$

Используя определение (21), матрица оператора производной Фреше выписывается в явном виде

$$(23) \quad \mathcal{A}'(\bar{q}) = \begin{pmatrix} e^{-\bar{q}_3 t_1} - e^{-\bar{q}_5 t_1} & e^{-\bar{q}_4 t_1} - e^{-\bar{q}_5 t_1} & -\bar{q}_1 t_1 e^{-\bar{q}_3 t_1} & -\bar{q}_2 t_1 e^{-\bar{q}_4 t_1} & (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) t_1 e^{-\bar{q}_5 t_1} \\ e^{-\bar{q}_3 t_2} - e^{-\bar{q}_5 t_2} & e^{-\bar{q}_4 t_2} - e^{-\bar{q}_5 t_2} & -\bar{q}_1 t_2 e^{-\bar{q}_3 t_2} & -\bar{q}_2 t_2 e^{-\bar{q}_4 t_2} & (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) t_2 e^{-\bar{q}_5 t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-\bar{q}_3 t_M} - e^{-\bar{q}_5 t_M} & e^{-\bar{q}_4 t_M} - e^{-\bar{q}_5 t_M} & -\bar{q}_1 t_M e^{-\bar{q}_3 t_M} & -\bar{q}_2 t_M e^{-\bar{q}_4 t_M} & (\bar{q}_1 + \bar{q}_2) t_M e^{-\bar{q}_5 t_M} \end{pmatrix}.$$

С помощью сингулярного разложения определяется такой набор  $t_1^{min}, t_2^{min}, \dots, t_M^{min}$  (временных точек измерения данных), для которого минимальное сингулярное число матрицы (23), а значит и ее число обусловленности, являются наименьшими по сравнению с другими рассмотренными наборами  $\{t_j\}_{j=1}^M$ . Тем не менее, даже в случае выбора  $\{t_j^{min}\}_{j=1}^M$  в качестве точек измерения нет гарантии, что полученное решение задачи (16) окажется устойчивым. В таком случае целесообразно применить метод Годунова, а именно, расширить систему (22) за счет привлечения дополнительной информации о точном решении.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе приводятся результаты двух вычислительных экспериментов. В первом случае задается некоторое  $q$ , решается прямая задача и вычиляется  $f$  для различных разбиений временного интервала. Затем по полученным данным обратная задача решается

- методом итераций Ландвебера (МиЛ)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - \alpha[\mathcal{A}'(q^{[n]})^*(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)]$  для произвольного начального приближения;
- методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения (МНК и СР) для начального приближения из окрестности точного решения;

ТАБЛИЦА 1. Вариант №4. Временные точки снятия фармакокинетических показателей

fixed	0	1.5	3	4.5	6	7.5	9	10.5	12
log	0	0.1	0.144	0.208	0.299	0.431	0.621	0.896	1.29
Liang	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	3	4
fixed	13.5	15	16.5	18	19.5	21	22.5	24	
log	1.86	2.68	3.86	5.57	8.02	11.6	16.7	24	
Liang	5	6	9	12	15	18	21	24	

ТАБЛИЦА 2. Сингулярные числа и числа обусловленности матрицы  $\mathcal{A}'(q)$  для трех разбиений временного интервала

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_1/\sigma_5$
fixed	22.9	3.6	1.2	0.0594	0.000619	37000
log	13.5	11.1	2.28	1.05	0.0212	637
Liang	17.2	9.88	1.81	1.14	0.0187	922

- методом Ньютона (МН)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - [\mathcal{A}'(q^{[n]})]^{-1}(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$  для начального приближения из окрестности точного решения.

Во втором случае по измеренным данным [18] для произвольного начального приближения решение обратной задачи восстанавливается

- методом наименьших квадратов с использованием сингулярного разложения (МНК и СР);
- методом Ньютона (МН)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - [\mathcal{A}'(q^{[n]})]^{-1}(\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$ ;
- методом наискорейшего спуска (МНС)  $q^{[n+1]} = q^{[n]} - \alpha_n [\mathcal{A}'(q^{[n]})]^* (\mathcal{A}(q^{[n]}) - f)$ .

#### 4.1. Восстановление $q$ по вычисленным данным.

4.1.1. *Случай  $k_a > \alpha > \beta$ .* В качестве точного решения (exact) берется набор значений из работы [9](вариант №4)

$$(24) \quad k_a = 3, \quad k_{12} = 1, \quad k_{21} = 0.1, \quad k_{10} = 0.3, \quad C_0 = 10,$$

вектор  $q$  пересчитывается по формулам (8)–(10), (14). Далее рассматриваются три набора временных точек измерения данных, представленных в таблице 1,  $T = 24$ ,  $M = 16$  (для сравнения с [9]). В первом случае (fixed) временной интервал делится на равные промежутки с шагом  $\tau = 1.5$ , т.е.

$$t_0 = 0, \quad t_{i+1} = t_i + \tau, \quad i = \overline{0, M}.$$

Во втором случае (log) временной интервал сначала логарифмируется, а потом уже делится на равные промежутки, т.е.

$$t_0 = 0, \quad t_1 = 0.1, \quad t_i = t_1 \left( \frac{t_M}{t_1} \right)^{\frac{i-1}{M-1}}, \quad i = \overline{2, M}.$$

В третьем случае (Liang) разбиение берется из статьи [9].

Для предложенных трех наборов разбиения временного интервала строятся соответствующие матрицы производной Фреше  $\mathcal{A}'(q)$ , вычисляются их сингулярные числа и числа обусловленности. Как видно из таблицы 2 наиболее оптимальным из трех рассмотренных наборов является второй, полученный

ТАБЛИЦА 3. Вариант № 4. Решения операторного уравнения МНС при различных разбиениях временного интервала

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	17.4315	0.580957	1.37823	0.021767	3
fixed	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
log	16.1194	0.563	1.33	0.0198	3.094
Liang	156.3257	8.608	8.8163	0.769	8.4513

ТАБЛИЦА 4. Вариант №4. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МНС при различных разбиениях временного интервала

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	3	1	0.1	0.3	10
fixed	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
log	3.0943	0.9776	0.0949	0.27707	9.7511
Liang	8,4513	-49,8773	59,3481	0,1142	1,075

разбиением логарифмированного интервала на равные промежутки, так как в этом случае число обусловленности является наименьшим из трех вычисленных:  $\mu(\mathcal{A}'(q^{\log})) = 637$ .

В таблице 3 приводятся точное решение (exact) задачи  $\mathcal{A}q = f$  и решения, полученные методом наискорейшего спуска для предложенных трех разбиений при произвольном начальном приближении  $q^{[0]} = (1, 2, 3, 4, 5)$ , в таблице 4 — соответствующие константы скорости и начальные концентрации. Как видно из таблиц 3, 4 восстановление решения сильно зависит от разбиения временного интервала даже для одного метода. МНС сходится достаточно хорошо в случае (log), однако при возмущенных данных гарантировать сходимость к точному решению ближе, чем ошибка в данных, нельзя.

Также исследуется зависимость числа обусловленности матрицы производной Фреше  $\mu(\mathcal{A}'(q))$  от количества точек  $M$  в разбиении (log). Результаты приводятся на рисунке 2. Наиболее оптимальными значениями в данном случае являются  $M = 9$  и  $M = 10$ , так как при  $M > 10$  уменьшение числа обусловленности незначительно по сравнению с ростом  $M$ .

Рассматриваемое решение (24) соответствует случаю (18). Для полученного (log) – разбиения вычисляется правая часть  $f$  из соотношений (7)–(10), (15). Затем методом итераций Ландвебера решается задача  $\mathcal{A}(q) = f$  для следующих начальных приближений:

- а)  $q^{[0]} = (0.1, 1.1, 0.2, 2.0, 5.0)$ ;
- б)  $q^{[0]} = (1, 2, 3, 4, 5)$ .

На рисунке 3 приводятся соответствующие результаты: слева – для начального приближения а), справа – для начального приближения б).

В таблице 5 выводятся точное решение (exact) и решения, полученные Милл для начальных приближений а) и б). В случае (18) для обоих рассмотренных

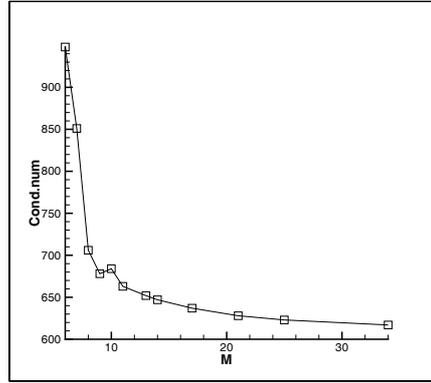


Рис. 2. Зависимость числа обусловленности  $\mu(\mathcal{A}'(q))$  от количества точек  $M$  разбиения временного интервала

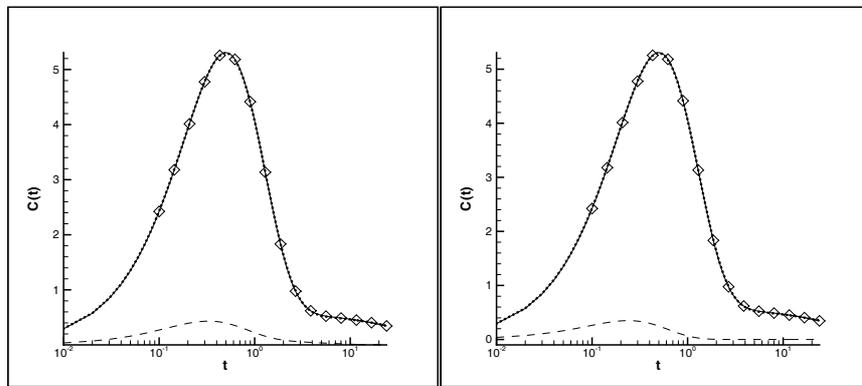


Рис. 3. Вариант №4. Пунктиром указано начальное приближение (слева – случай а), справа – случай б)), точками — функция, восстановленная методом Ландвебера, сплошной линией — точное решение, ромбами отмечены точки разбиения

ТАБЛИЦА 5. Вариант №4. Решения операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	17.4315	0.580957	1.37823	0.021767	3
случай а)	16.216	0.5642	1.3336	0.0199	3.0867
случай б)	0.5642	16.216	0.0199	1.3336	3.0867

начальных приближений решение восстанавливается достаточно хорошо. Учитывая условие  $\alpha > \beta$ , т.е.  $q_3 > q_4$ , перестановкой  $q_1, q_2$  и  $q_3, q_4$  в случае б) получается решение, совпадающее с решением в случае а). В таблице 6 приводятся ФКП, соответствующие полученным результатам из таблицы 5.

Далее задача (16) решается методом наименьших квадратов и методом Ньютона. В качестве начальных приближений из окрестности точного решения берутся решения МиЛ, полученные в случае а) и б)

ТАБЛИЦА 6. Вариант №4. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	3	1	0.1	0.3	10
случай а)	3,0868	0,9799	0,0953	0,2784	9,7705
случай б)	3,0868	0,9799	0,0953	0,2784	9,7705

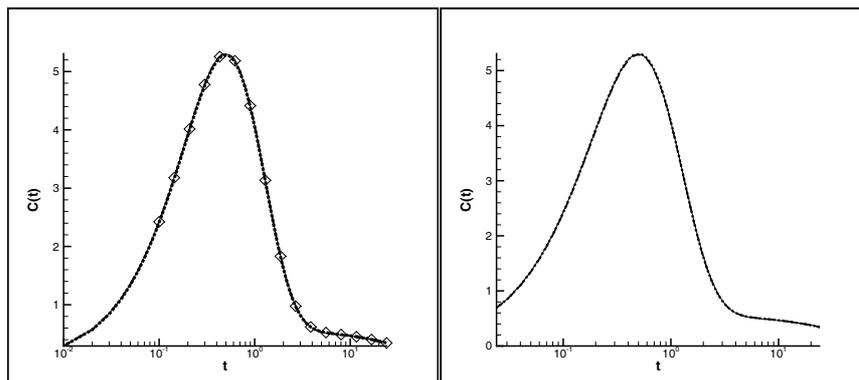


Рис. 4. Вариант №4. Пунктиром указана функция, восстановленная методом Ньютона, точками — функция, восстановленная методом наименьших квадратов, сплошной линией — начальное приближение, ромбами отмечены точки разбиения, слева — случай а), справа — случай б)

ТАБЛИЦА 7. Вариант №4. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а)

а)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	17.4315	0.580957	1.37823	0.021767	3
МиЛ	16.216	0.5642	1.3336	0.0199	3.0867
МНК и СР	17.3009	0.581	1.3761	0.0218	3.0019
МН	17.3014	0.5793	1.3737	0.0216	3.0086

а)  $q^{[0]} = (16.216, 0.5642, 1.3336, 0.0199, 3.0867)$ ;

б)  $q^{[0]} = (0.5642, 16.216, 0.0199, 1.3336, 3.0867)$ .

Графики концентраций, соответствующих полученным решениям МНК и МН, приводятся на рисунке 4: слева — для начального приближения а), справа — для начального приближения б).

В таблице 7 приводятся решения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а).

В таблице 8 приводятся решения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б).

В таблице 9 выводятся ФКП, соответствующие решениям МНК и МН (так как решения для двух рассмотренных начальных приближений получаются

ТАБЛИЦА 8. Вариант №4. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б)

б)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	17.4315	0.580957	1.37823	0.021767	3
МиЛ	0.5642	16.216	0.0199	1.3336	3.0867
МНК и СР	0.581	17.3009	0.0218	1.3761	3.0019
МН	0.5793	17.3014	0.0216	1.3737	3.0086

ТАБЛИЦА 9. Вариант №4. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	3	1	0.1	0.3	10
МиЛ	3.0868	0.9799	0.0953	0.2784	9.7705
МНК и СР	3.0019	0.9987	0.1003	0.299	9.9468
МН	3.0086	0.998	0.09953	0.2979	9.9767

ТАБЛИЦА 10. Вариант №12. Временные точки снятия фармакокинетических показателей((log)-разбиение)

$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$	$t_8$	$t_9$
0	0.1	0.14	0.18	0.25	0.34	0.46	0.62	0.84	1.14
$t_{10}$	$t_{11}$	$t_{12}$	$t_{13}$	$t_{14}$	$t_{15}$	$t_{16}$	$t_{17}$	$t_{18}$	$t_{19}$
1.55	2.1	2.85	3.86	5.24	7.1	9.63	13.05	17.7	24

друг из друга перестановкой, в таблице приводятся значения только для случая а)).

Как видно из таблиц 7–9 решения, полученные МНК и МН для начальных данных из окрестности точного решения, лучше приближаются к точному по сравнению с решениями, полученными МиЛ для произвольных начальных данных.

4.1.2. *Случай  $\alpha > k_a > \beta$ .* В качестве точного решения (exact) берется набор значений из работы [9](вариант №12)

$$(25) \quad k_a = 1, \quad k_{12} = 0.3, \quad k_{21} = 3, \quad k_{10} = 0.1, \quad C_0 = 10,$$

вектор  $q$  пересчитывается по формулам (8)–(10), (14).

Для вычисленного (log) – разбиения временного интервала (таблица 10,  $M = 19, T = 24$ ) определяется правая часть  $f$  из соотношений (7)–(10), (15). Затем методом итераций Ландвебера решается задача  $\mathcal{A}(q) = f$  для начальных приближений, рассмотренных в предыдущем пункте:

- а)  $q^{[0]} = (0.1, 1.1, 0.2, 2.0, 5.0)$ ;
- б)  $q^{[0]} = (1, 2, 3, 4, 5)$ .

На рисунке 5 приводятся соответствующие графики концентраций: слева – для начального приближения а), справа – для начального приближения б).

В таблице 11 выводятся точное решение (exact) и решения, полученные МиЛ для начальных приближений а) и б).

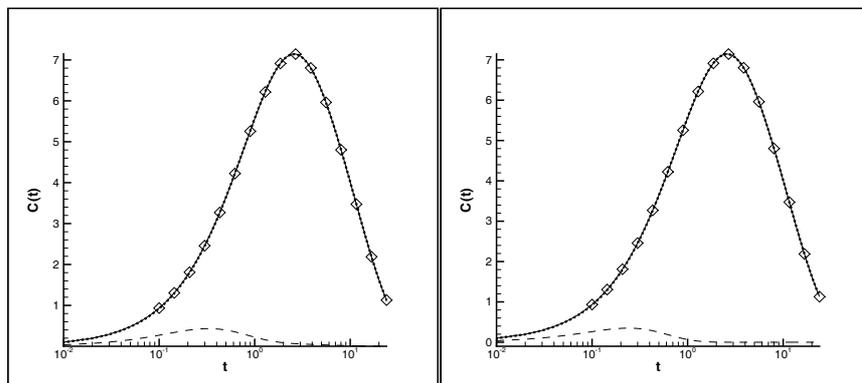


Рис. 5. Вариант №12. Пунктиром указано начальное приближение (слева – случай а), справа – случай б)), точками — функция, восстановленная методом Ландвебера, сплошной линией — точное решение, ромбами отмечены точки разбиения

Таблица 11. Вариант №12. Решения операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.4162	9.94	3.3094	0.091	1
случай а)	9.9277	-0.7081	0.09051	2.2691	0.9903
случай б)	9.9316	-0.76944	0.0905	2.2043	0.9866

Таблица 12. Вариант №12. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	1	0.3	3	0.1	10
случай а)	0,9903	0,1917	2,06858	0,0993	9,9347
случай б)	0,9866	0,1922	2,003	0,0996	9,9702

Учитывая условие  $\alpha > \beta$  или  $q_3 > q_4$ , из таблицы 11 видно, что в случае (19) решение восстанавливается хуже по сравнению с (18). В таблице 12 приводятся ФКП, соответствующие полученным решениям из таблицы 11.

Далее задача (16) решается методом наименьших квадратов и методом Ньютона. В качестве начальных приближений из окрестности точного решения берутся решения МиЛ, полученные в случае а) и б)

$$\text{а) } q^{[0]} = (9.9277, -0.7081, 0.09051, 2.2691, 0.9903);$$

$$\text{б) } q^{[0]} = (9.9316, -0.76944, 0.0905, 2.2043, 0.9866).$$

Графики концентраций, соответствующих полученным решениям МНК и МН, приводятся на рисунке 6: слева — для начального приближения а), справа — для начального приближения б).

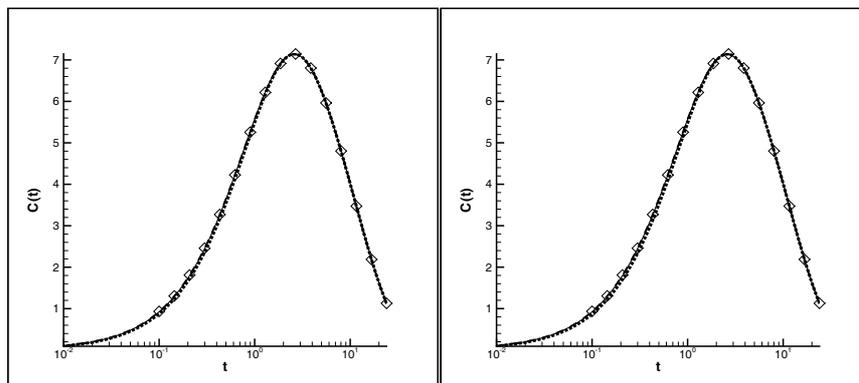


Рис. 6. Вариант №12. Пунктиром указана функция, восстановленная методом Ньютона, точками — функция, восстановленная методом наименьших квадратов, сплошной линией — начальное приближение, ромбами отмечены точки разбиения, слева – случай а), справа – случай б)

Таблица 13. Вариант №12. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а)

а)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.4162	9.94	3.3094	0.091	1
МиЛ	9.9277	-0.7081	0.09051	2.2691	0.9903
МНК и СР	9.9345	-0.0782	0.0906	3.2957	1.0136
МН	9.9673	-0.8115	0.0908	2.3527	0.9733

Таблица 14. Вариант №12. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б)

б)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.4162	9.94	3.3094	0.091	1
МиЛ	9.9316	-0.76944	0.0905	2.2043	0.9866
МНК и СР	9.9334	0.0087	0.0906	3.258	1.0167
МН	9.9698	-0.8633	0.0909	2.2924	0.9704

В таблице 13 приводятся решения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а). В таблице 14 приводятся решения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б).

В таблице 15 выводятся ФКП, соответствующие решениям МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а). В таблице 16 приводятся ФКП, соответствующие решениям МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б).

Как видно из таблиц 13–16 решения, полученные МНК и МН для начальных данных из окрестности точного решения, лучше приближаются к точному по сравнению с решениями, полученными МиЛ для произвольных начальных

ТАБЛИЦА 15. Вариант №12. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а)

а)	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	1	0.3	3	0.1	10
МиЛ	0.9903	0.1917	2.06858	0.0993	9.9347
МНК и СР	1.0136	0.0594	3.2345	0.0923	9.2224
МН	0.9734	0.2443	2.0973	0.1019	10.1865

ТАБЛИЦА 16. Вариант №12. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б)

б)	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	1	0.3	3	0.1	10
МиЛ	0.9866	0.1922	2.003	0.0996	9.9702
МНК и СР	1.0167	-0.0065	3.2647	0.0904	9.0291
МН	0.9704	0.2422	2.0388	0.1022	10.2119

ТАБЛИЦА 17. Вариант №23. Решения операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.2862	-0.06259	3.4238	0.8762	0.1
случай а)	0.3182	-0.1385	0.08784	2.2625	4.7706
случай б)	0.3383	1.8518	0.0978	4.2662	3.9809

данных. Однако в случае (19) решения МНК и МН также как и МиЛ восстанавливаются хуже по сравнению с теми же методами в случае (18).

4.1.3. *Случай*  $\alpha > \beta > k_a$ . В качестве точного решения (exact) берется набор значений из работы [9] (вариант №23)

$$(26) \quad k_a = 0.1, \quad k_{12} = 0.3, \quad k_{21} = 1, \quad k_{10} = 3, \quad C_0 = 10,$$

вектор  $q$  пересчитывается по формулам (8)–(10), (14). Для вычисленного в предыдущем пункте (log) – разбиения временного интервала (таблица 10,  $M = 19, T = 24$ ) определяется правая часть  $f$  из соотношений (7)–(10), (15). Затем методом итераций Ландвебера решается задача  $\mathcal{A}(q) = f$  для начальных приближений, рассмотренных в предыдущих пунктах:

$$\text{а) } q^{[0]} = (0.1, 1.1, 0.2, 2.0, 5.0);$$

$$\text{б) } q^{[0]} = (1, 2, 3, 4, 5).$$

На рисунке 7 приводятся соответствующие графики концентраций: слева – для начального приближения а), справа – для начального приближения б).

В таблице 17 выводятся точное решение (exact) и решения, полученные МиЛ для начальных приближений а) и б).

Учитывая условие  $\alpha > \beta$  или  $q_3 > q_4$ , из таблиц 17, 18 видно, что в случае (20) решение не восстанавливается по сравнению с (18) и (19), хотя графики соответствующих концентраций на рисунке 7 достаточно близки друг к другу.

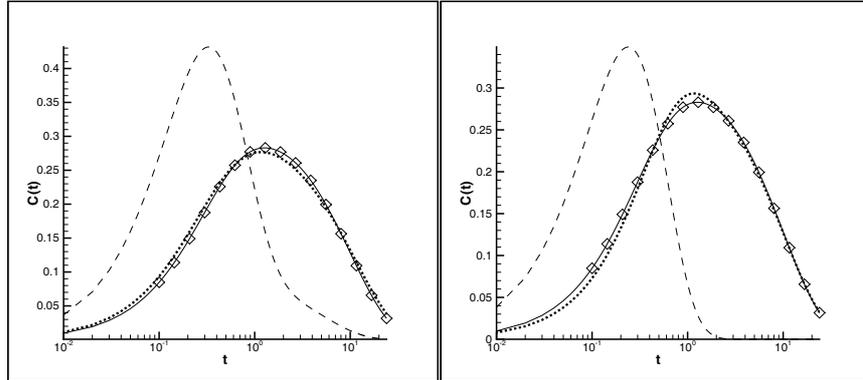


Рис. 7. Вариант №23. Пунктиром указано начальное приближение (слева – случай а), справа – случай б)), точками — функция, восстановленная методом Ландвебера, сплошной линией — точное решение, ромбами отмечены точки разбиения

ТАБЛИЦА 18. Вариант №23. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МиЛ для начальных приближений а) и б)

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	0.1	0.3	1	3	10
случай а)	4,7706	-0,6412	2,9236	0,068	0,2395
случай б)	3.9809	-2.7654	7.0704	0.059	0.1973

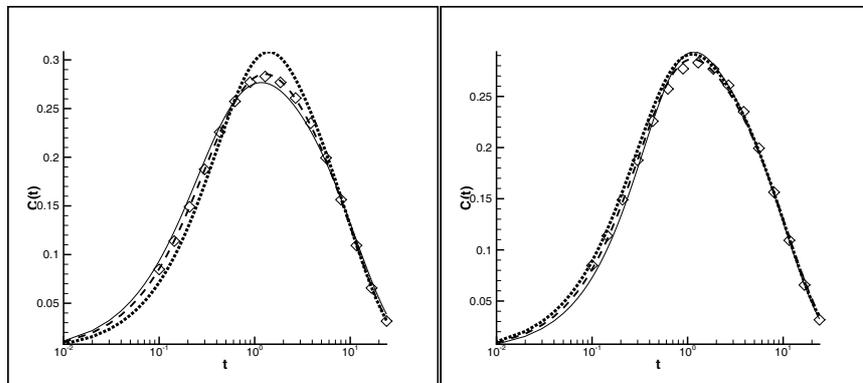


Рис. 8. Вариант №23. Пунктиром указана функция, восстановленная методом Ньютона, точками — функция, восстановленная методом наименьших квадратов, сплошной линией — начальное приближение, ромбами отмечены точки разбиения, слева – случай а), справа – случай б)

Как видно из таблиц 19–21 методом наименьших квадратов и методом Ньютона решение также не восстанавливается, хотя графики на рисунке 8 соответствующих концентраций близки друг к другу.

ТАБЛИЦА 19. Вариант №23. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае а)

а)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.2862	-0.0626	3.4238	0.8762	0.1
МиЛ	0.3182	-0.1385	0.08784	2.2625	4.7706
МНК и СР	0.3416	0.0453	0.09806	0.3346	2.1935
МН	0.3371	-0.2214	0.0963	2.2574	4.7658

ТАБЛИЦА 20. Вариант №23. Решения операторного уравнения МНК и СР и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б)

б)	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
exact	-0.2862	-0.06259	3.4238	0.8762	0.1
МиЛ	0.3383	1.8518	0.09778	4.2662	3.9809
МНК и СР	0.3338	1.8121	0.0951	3.0505	3.0789
МН	0.3258	1.8456	0.0919	4.2268	4.0297

ТАБЛИЦА 21. Вариант №23. ФКП, соответствующие решениям операторного уравнения МНК и МН для начального приближения, полученного МиЛ в случае б)

б)	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
exact	0.1	0.3	1	3	10
МиЛ	3.9809	-2.7654	7.0704	0.059	0.1973
МНК и СР	3.0789	0.1406	2.9052	0.0998	0.3402
МН	4.0297	-1.6102	5.8626	0.0662	0.2281

ТАБЛИЦА 22. Экспериментальные данные концентрации  $C$  с погрешностью  $C_{err}$

$t$	0.25	0.5	0.75	1	2	4	8	16	24
$C$	0.75	1.25	1.78	2.22	2.37	2.02	1.51	0.78	0.42
$C_{err}$	0.21	0.12	0.41	0.12	0.31	0.12	0.21	0.51	0.21

4.2. **Восстановление  $q$  по измеренным данным.** В таблице 22 приводятся экспериментальные данные из работы [18], по которым восстанавливалось решение задачи (16).

В данном пункте решение восстанавливается МНК и СР, МН и МНС.

Результаты приводятся на рисунке 9: слева — зависимость концентрации в центральной камере от времени, справа — та же зависимость в логарифмическом масштабе. График концентрации, восстановленной МНК и СР, существенно отличается от графиков функций, вычисленных МН и МНС. Однако, несмотря на то, что функции концентраций в первой камере, восстановленные МН и МНС, практически совпадают на рисунке 9, соответствующие им параметры существенно отличаются друг от друга (таблица 23, 24). На рисунке 10

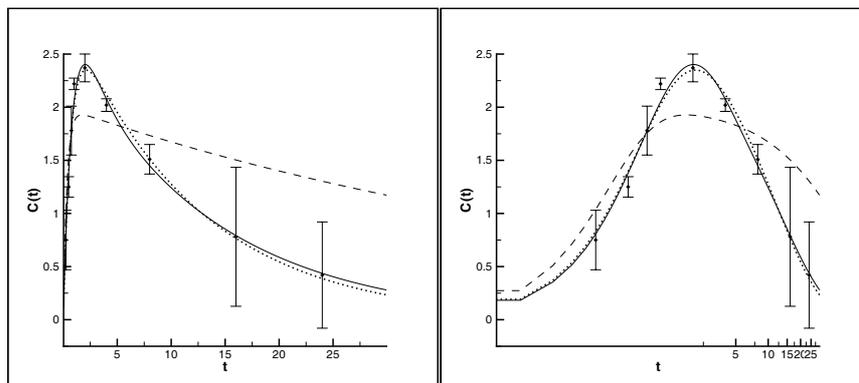


Рис. 9. Концентрации в центральной камере, соответствующие решениям МНК, МН и МНС. Ромбами с погрешностью указаны наблюдаемые опытные данные, пунктиром — функция восстановленная МНК и СР, точками — функция восстановленная МН, сплошной — функция восстановленная МНС

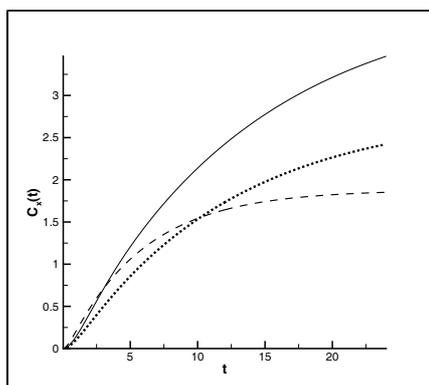


Рис. 10. Функции элиминации, соответствующие решениям МНК, МН и МНС. Пунктиром указана функция, восстановленная МНК, точками — функция, восстановленная МН, сплошной линией — функция, восстановленная МНС

Таблица 23. Решения, восстановленные по измеренным данным МНК, МН и МНС

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$
МНК и СР	1.000	1.000	0.178	0.178	2.964
МН	1.495	1.495	0.085	0.085	1.420
МНС	389.190	2.612	0.858	0.074	0.862

приводятся графики концентраций элиминации для наборов параметров, полученных тремя рассмотренными методами: все три функции не совпадают.

ТАБЛИЦА 24. ФКП, соответствующие решениям по измеренным данным МНК, МН и МНС

	$k_a$	$k_{12}$	$k_{21}$	$k_{10}$	$C_0$
МНК и СР	2.967	0	0.178	0.178	$-\infty$
МН	1.42	0	0.085	0.085	$-\infty$
МНС	0.862	0.289609	0.520381	0.122011	4.19375

ТАБЛИЦА 25. Сингулярные числа и числа обусловленности матриц  $A'(q)$ , соответствующих решениям по измеренным данным МНК, МН и МНС

	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_1/\sigma_5$
МНК и СР	5.18365	1.55693	0.187925	$6.83633 \cdot 10^{-16}$	$1.42555 \cdot 10^{-18}$	$3.63625 \cdot 10^{18}$
МН	15.847	2.07369	0.580082	$7.42408 \cdot 10^{-16}$	$2.74804 \cdot 10^{-17}$	$5.76668 \cdot 10^{17}$
МНС	436.679	21.5043	0.718397	0.218344	$2.50783 \cdot 10^{-9}$	$1.74126 \cdot 10^{11}$

В таблице 25 приводятся сингулярные числа и числа обусловленности матриц  $A'(q)$  для трех полученных решений МНК, МН и МНС: решение, восстановленное МНС, наиболее устойчивое.

Таким образом, искомое решение (ФКП) нелинейной обратной задачи фармакокинетики для двухкамерной модели с внесосудистым способом введения препарата не восстанавливается по данным измерений концентрации в конечном наборе точек временного интервала: требуются специальное разбиение временного интервала, например, (log)-разбиение, дополнительная информация о точном решении, например, указанная в пункте 3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Gabrielson J., Weiner D. Pharmacokinetic and Pharmacodynamic Data Analysis: Concepts and Applications. Sweden: Kristianstads Boktryckeri AB, 2006. 4th edition.
- [2] Gibaldi M., Perrier D. Pharmacokinetics. USA NY: Informa Healthcare, 2007. 2nd edition revised and expanded.
- [3] Laurin J., Nekka F., Donati F., Varin F. Assuming peripheral elimination: Its impact on the estimation of pharmacokinetic parameters of muscle relaxants // J. Pharmacokinetics and Biopharmaceutics. 1999. Vol. 27, N 5. P. 491–512.
- [4] Yamaoka K., Nakagawa T., Uno T. Statistical moments in pharmacokinetics // J. Pharmacokinetics and Biopharmaceutics. 1978. Vol. 6, N 6. P. 547–558.
- [5] Сергиенко В. И., Джеллифф Р., Бондарева И. Прикладная фармакокинетика: основные положения и клиническое применение. М.: Изд. РАМН, 2003.
- [6] Ahmad A. Recent advances in pharmacokinetic modeling // Biopharm. Drug Dispos. 2007. V. 28. P. 135–143.
- [7] Murata K., Kohno K. Estimation problem due to multiple solutions in pharmacokinetic curve fitting to two-compartment model and its avoidance // Biopharm. Drug Dispos. 1989. V. 10. P. 15–24.
- [8] Purves R. Multiple solutions, illegal parameter values, local minima of the sum of squares, and anomalous parameter estimates in least-squares fitting of the two-compartment pharmacokinetic model with absorption // J. Pharmacokinetics and Biopharmaceutics. 1996. V. 24, N 1. P. 79–101.
- [9] Liang E., Derendorf H. Pitfalls in pharmacokinetic multicompartment analysis // J. Pharmacokinetics and Biopharmaceutics. 1998. V. 26, N 2. P. 247–260.
- [10] Quetglas E., Azanza J., Cardenas E., et al. Stereoselective pharmacokinetic analysis of tramadol and its main phase I metabolites in healthy subjects after intravenous and oral administration of racemic tramadol / Biopharm. Drug Dispos. 2007. V. 28. P. 19–33.
- [11] Варфоломеев С., Гуревич К. Биокинетика: Практический курс. М.: ФАИР-ПРЕСС, 1999.

- [12] Урмашев Б. А., Асманова Н., Уалиев Ж. Метод статистических моментов и преобразования Лапласа в решении некоторых некорректно поставленных задач формальной кинетики // Материалы Международной конференции “Экоаналитика Центральной Азии”. Алматы: КазНУ им.аль-Фараби, 2007. Т. 49. С. 349–356.
- [13] Урмашев Б. А., Асманова Н., Уалиев Ж. О некоторых проблемах решения обратных задач химической кинетики реакций с образованием промежуточных соединений. 2. Последовательные реакции a-b-c с обратимым взаимодействием b-d // Программа и материалы IV Международного симпозиума «Горение и плазмохимия». Алматы: КазНУ им.аль-Фараби, 2007. С. 278–280.
- [14] Урмашев Б. А. О некоторых проблемах решения обратных задач химической кинетики реакций с образованием промежуточных соединений. О существовании трех решений для кинетической кривой промежуточного соединения // V Международный симпозиум «Горение и плазмохимия». Алматы: КазНУ им.аль-Фараби, 2009. Т. 1. С. 216–220.
- [15] Voxenbaum H. Pharmacokinetic tricks and traps: flip-flop models // J. Pharmacy and Pharmaceutical Sciences. 1998. V. 1, N 3. P. 90–91.
- [16] Jambhekar S., Breen P. Basic pharmacokinetics. Chicago, USA: Pharmaceutical Press, 2009.
- [17] Прокопов А. А., Берлянд А. С., Казанцева О. Н. Изучение экспериментальной фармакокинетики бикарэта // Химико-фармацевтический журнал. 2003. Т. 37, № 3. С. 25–28.
- [18] Прокопов А. А., Шукиль Л. В., Берлянд А. С., Веселовская И. В. Изучение экспериментальной фармакокинетики фенозан-кислоты и феноксана у кроликов / Химико-фармацевтический журнал. 2006. Т. 40, № 1. С. 6–8.

А. И. Ильин

НЦ ПРОТИВОИНФЕКЦИОННЫХ ПРЕПАРАТОВ, Г. АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН

С. И. КАБАНИХИН

ИВМ и МГ СО РАН, Г. НОВОСИБИРСК, РОССИЯ

*E-mail address:* ksi52@mail.ru

Д. Б. НУРСЕИТОВ

ННЛКП ИКТ КАЗНТУ ИМ. К. И. САТПАЕВА, Г. АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН

*E-mail address:* ndb80@mail.ru

А. Т. НУРСЕИТОВА

ННЛКП ИКТ КАЗНТУ ИМ. К. И. САТПАЕВА, Г. АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН

*E-mail address:* altynna@mail.ru

Н. А. АСМАНОВА

КАЗНПУ ИМ. АБАЯ, Г. АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН

*E-mail address:* asmanova@inbox.ru

Д. А. ВОРОНОВ

НГУ, Г. НОВОСИБИРСК, РОССИЯ

*E-mail address:* voronov-dima@mail.ru

Д. БАКЫТОВ

КАЗНПУ ИМ. АБАЯ, Г. АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.254–С.262 (2011)*

УДК 512.5  
MSC 13A99МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ В ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ  
ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯС. И. КАБАНИХИН, М. А. БЕКТЕМЕСОВ, Д. Б. НУРСЕЙТОВ,  
О. И. КРИВОРОТЬКО, А. Н. АЛИМОВА

**ABSTRACT.** Dirichlet problem for 2D wave equation is considered. We investigate the  $N$  approximation of inverse problem and consider 1D finite system Dirichlet problems for 1D wave equation  $Aq = f$ . We apply Landweber iteration for numerical solution of optimization problem  $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ . Numerical results are given.

**Keywords:** Dirichlet problem, wave equation, Landweber iteration.

## ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большое внимание уделяется исследованию некорректных задач, в том числе некорректных граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными. Это вызвано как запросами практики, так и чисто теоретическим интересом исследователей (см., например, работы [1, 2, 3, 4, 5]).

Корректность граничных задач для некоторых общих дифференциальных и дифференциально-операторных уравнений изучалась в работах А.А. Дезина, В.К. Романко, Н.И. Юрчука, В.М. Борок и других авторов. Много работ посвящено также изучению неклассических граничных задач для отдельных дифференциальных операторов с частными производными. В большинстве из этих работ выделяются случаи корректно поставленных задач. Однако граничные задачи с данными на всей границе области (как и ряд других задач)

---

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00105), ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (ГК № 14.740.11.0350).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

для общих дифференциальных операторов с частными производными являются, вообще говоря, некорректными, а вопрос об их разрешимости во многих случаях связан с так называемой проблемой малых знаменателей. Наглядным примером сказанного является задача Дирихле для уравнения колебания струны, исследованию которой посвящено много работ как отечественных, так и зарубежных авторов.

Д. Боржин рассматривал [6] задачу Дирихле в прямоугольнике для уравнения затухающих колебаний струны, в которой хорошо прослеживается связь с теорией диофантовых приближений. Н.Н. Вахания распространил [7] результаты С.Л. Соболева на прямоугольники с рациональными значениями  $\rho$ , где  $\rho$  — это отношение сторон прямоугольника рассматриваемой области, а для произвольного иррационального  $\rho$  свел рассматриваемую задачу к задаче Дирихле для уравнения колебания струны.

К исследованию краевых задач для гиперболических уравнений привело изучение нестационарных задач для линейных систем дифференциальных уравнений, не разрешимых относительно старших производных по времени, начало теории которых было заложено в работах С.Л. Соболева [8, 9], выполненных в 1945 г. С основными результатами по теории задачи Дирихле для волнового уравнения можно ознакомиться в работах Р.А. Александряна [10], С.Г. Овсепяна [11, 12], Т.И. Зеленька [13], М.В. Фокина [14, 15] и других авторов.

Отметим что задачи Дирихле для волнового уравнения возникает при изучении цунами. В это случае данными при  $t = 0$  и при  $t = T$  являются функции отклонения уровня воды от среднего значения.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу Дирихле для волнового уравнения в двумерном пространстве, которая заключается в определении волнового поля на поверхности водоема в случае, когда в определенный момент времени  $t = 0$  на дне водоема произошло смещение почвы, описываемое финитной функцией  $g(x, y) = u(x, y, 0)$ . Предполагается, что через определенный промежуток времени  $t = T$  измерена высота поднятия волны  $f(x, y) = u(x, y, T)$ . Предполагаем также, что за время  $T$  волна не успела дойти до берегов водоема, и, следовательно, на границе водоема можно поставить однородные граничные условия. Таким образом, приходим к следующей задаче Дирихле для волнового уравнения:

$$(1.1) \quad \begin{cases} c^{-2}(x)u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u|_{t=T} = f(x, y); \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

где  $\Omega = \{(x, y) \in R^2 \mid 0 < x < L_1, 0 < y < L_2\}$ .

Задача (1.1), как известно, является некорректной [1].

Сформулируем некорректную задачу (1.1) как обратную по отношению к некоторой прямой (корректной) начально-краевой задаче для волнового уравнения

$$(1.2) \quad \begin{cases} c^{-2}(x)u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = g(x, y), \quad u_t|_{t=T} = q(x, y); \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

где по заданной функции  $q(x, y)$  надо определить функцию  $u(x, y, t)$ .

Пусть теперь  $q(x, y)$  неизвестно. Предположим, что относительно решения прямой задачи (1.2) известна дополнительная информация:

$$(1.3) \quad u(x, y, T) = f(x, y).$$

Обратная задача заключается в определении функции  $q(x, y)$  из соотношений (1.2) - (1.3) по заданным функциям  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $c(x)$ . В данной работе мы численно решим обратную задачу (1.2) - (1.3) методом итерации Ландвебера и приведем результаты численных расчетов.

## 2. МЕТОД ИТЕРАЦИИ ЛАНДВЕБЕРА

После разложения в ряд Фурье функций  $u(x, y, t)$ ,  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  и  $q(x, y)$  по гармоникам  $\sin \frac{2\pi k}{L_2} y$ , обратная задача (1.2) - (1.3) сводится к последовательно-сти одномерных обратных задач [16]:

$$(2.1) \quad \begin{cases} c^{-2}(x)u_{ktt} = u_{kxx} - \frac{4\pi^2}{L_2^2}k^2u_k, & x \in (0, L_1), t \in (0, T) \\ u_k(x, 0) = g_k(x), & u_{kt}(x, 0) = q_k(x) \end{cases}$$

$$(2.2) \quad u_k(0, t) = u_k(L_1, t) = 0.$$

$$(2.3) \quad u_k(x, T) = f_k(x)$$

Здесь  $k = 0, 1, 2, \dots$

Заметим, что если все рассматриваемые функции дважды дифференцируемы по  $y$ , то мы можем ограничиться рассмотрением конечного набора задач (2.1) - (2.3), учитывая известную для класса функций  $\phi \in C^2$

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n e^{iny}$$

оценку остатка ряда Фурье

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\phi_n| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{c}{n^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{c}{x^2} dx = \frac{c}{N}.$$

Определим отношение:  $Aq_k = f_k$ . На практике одним из наиболее распространенных методов регуляризации задач вида  $Aq = f$  (где  $A$  может быть как компактным оператором, так и матрицей  $A_{mn}$ ) являются градиентные методы минимизации функционала  $J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle$ . Рассмотрим один из таких методов - метод итерации Ландвебера решения уравнения  $Aq_k = f_k$ , который заключается в отыскании приближенного решения уравнения  $Aq_k = f_k$  следующим способом:

$$q_{k_{n+1}} = q_{k_n} - \alpha J' q_{k_n}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right).$$

Определим целевой функционал  $J(q_k)$

$$(2.4) \quad J(q_k) = \int_0^{L_1} (u_k(x, T) - f_k(x))^2 dx$$

и получим выражение для градиента функционала  $J'(q_k)$ , используемого в численных расчетах

$$\delta J(q_k) = J(q_k + \delta q_k) - J(q_k) \approx \langle J'q_k, \delta q_k \rangle$$

Таким образом, приращение функционала  $\delta J(q_k)$  переписывается:

$$\begin{aligned} \delta J(q_k) &= \int_0^{L_1} (u_k(x, T) + \delta u_k(x, T) - f_k(x))^2 dx - \int_0^{L_1} (u_k(x, T) - f_k(x))^2 dx = \\ &= \int_0^{L_1} 2(u_k(x, T) - f_k(x))\delta u_k(x, T) dx + \int_0^{L_1} (\delta u_k(x, T))^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь  $\delta u_k(x, t)$  есть решение следующей возмущенной задачи:

$$(2.5) \quad \begin{cases} c^{-2}(x)\delta u_{k_{tt}} = \delta u_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \delta u_k, & x \in (0, L_1), t \in (0, T); \\ \delta u_k|_{t=0} = 0, \quad \delta u_{k_t}|_{t=0} = \delta q_k(x), \\ \delta u_k|_{x=0} = \delta u_k|_{x=L_1} = 0 \end{cases}$$

Известно, что задача по нахождению условного экстремума  $J(q_k)$  эквивалентна задаче на нахождение экстремума функции Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(q_k) = J(q_k) + \int_0^T \int_0^{L_1} \left( c^{-2}(x)u_{k_{tt}} - \left( u_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 u_k \right) \right) \Psi_k(x, t) dx dt,$$

где  $\Psi_k(x, t)$  – множитель Лагранжа. Тогда приращение функции Лагранжа  $\delta L(q_k)$ :

$$\delta L(q_k) = \delta J(q_k) + \int_0^T \int_0^{L_1} \left( c^{-2}(x)\delta u_{k_{tt}} - \left( \delta u_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \delta u_k \right) \right) \Psi_k(x, t) dx dt,$$

Поставим сопряженную задачу к задаче (2.1) - (2.2):

$$(2.6) \quad \begin{cases} c^{-2}(x)\Psi_{k_{tt}} = \Psi_{k_{xx}} - \left(\frac{2\pi k}{L_2}\right)^2 \Psi_k, & t \in (0, T), x \in (0, L_1), \\ \Psi_k|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{k_t}|_{t=T} = 2c^2(x)(u_k(x, T) - f_k(x)), \\ \Psi_k|_{x=0} = \Psi_k|_{x=L_1} = 0. \end{cases}$$

Тогда после некоторых преобразований приращение функционала  $\delta J(q_k)$  имеет вид:

$$\delta J(q_k) = - \int_0^{L_1} c^{-2}(x)\Psi_k(x, 0)\delta q_k(x) dx$$

откуда градиент функционала  $J'(q_k)$

$$(2.7) \quad J'(q_k) = -c^{-2}(x)\Psi_k(x, 0).$$

## 3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть  $N_t$  - количество узлов равномерной сетки по переменной  $t$  на интервале  $(0, T)$ . Выберем количество узлов неравномерной сетки по переменной  $x$  из условия  $h_x = h_t c(x)$ . Шаг по времени  $h_t = \frac{T}{N_t}$ . Обозначим через  $a_k = h_t \frac{2\pi}{L_2} k$ .

Используя явную разностную схему второго порядка аппроксимации, получим дискретную задачу

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_{k_i}^{j+1} = u_{k_{i+1}}^j + u_{k_{i-1}}^j - c_i^2 a_k^2 (u_{k_{i+1}}^j + u_{k_{i-1}}^j) - u_{k_i}^{j-1}, \\ u_{k_i}^0 = g_{k_i}, \quad u_{k_i}^1 = h_t q_{k_i} + \frac{u_{k_{i+1}}^0 + u_{k_{i-1}}^0}{2} - \frac{c_i^2 a_k^2}{2} \frac{u_{k_{i+1}}^0 + u_{k_{i-1}}^0}{2} \\ u_{k_0}^j = u_{k_{N_x}}^j = 0. \end{cases}$$

$$(3.2) \quad u_{k_i}^{N_t} = f_i$$

## 4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Задача (1.2) была решена в приближении мелкой воды, т.е.  $c(x) = \sqrt{gH(x)}$ , где  $g = 9,8$  - ускорение свободного падения,  $H(x)$  - батиметрия рассматриваемой области. Пусть

$$c(x) = \frac{1}{\frac{9\beta}{10L_1^2} x^2 - \beta}, \quad \beta = 5.$$

Тогда для обратной задачи (1.2) - (1.3) в качестве начальных данных задается батиметрия дна  $H(x)$ :

$$H(x) = \frac{1}{g \left( \frac{9\beta}{10L_1^2} x^2 - \beta \right)^2}.$$

В качестве пробного решения была рассмотрена функция:

$$(4.1) \quad q_T(x, y) = \sum_{k=1}^N q_{T_k}(x) \sin \frac{2\pi k}{L_2} y, \quad x \in \left( \frac{19\pi}{20}, \frac{21\pi}{20} \right), \quad y \in \left( \frac{3\pi}{10}, \frac{7\pi}{10} \right),$$

$$\text{где } q_{T_k} = \int_0^{L_2} \frac{\cos 20x + 1}{20} \frac{\sin 5y + 1}{5} \sin \frac{2\pi k}{L_2} y dy.$$

График пробного решения (4.1) изображен на рисунке 4.1.

В качестве известной функции  $g(x, y)$  задачи (1.2) была рассмотрена функция:

$$(4.2) \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{\cos 10x + 1}{20} \frac{\sin 5y + 1}{5}, & x, y \in \left( \frac{7\pi}{10}, \frac{9\pi}{10} \right) \times \left( \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10} \right), \\ \frac{\cos 10x + 1}{30} \frac{\sin 5y + 1}{5}, & x, y \in \left( \frac{11\pi}{10}, \frac{13\pi}{10} \right) \times \left( \frac{7\pi}{10}, \frac{11\pi}{10} \right) \end{cases}$$

График функции  $g(x, y)$  (4.2) изображен на рисунке 4.2.

В численных экспериментах были решены методом итерации Ланвебера  $N = 80$  обратных задач (2.1) - (2.3) для каждого коэффициента Фурье, дискретизированные на адаптивную сетку (см. п. 3):  $N_x = 750, N_y = 250, N_t = 300$ , в области:  $L_1 = L_2 = 2\pi, T = 10$ . Параметр оптимизации выбирался  $\alpha = 0,01$ . Начальное приближение  $q_{k_0}$  полагалось равным нулю,  $k = 1, \dots, N$ .

Количество итераций определялось условие минимальности нормы  $\|q_T - q\|$ .

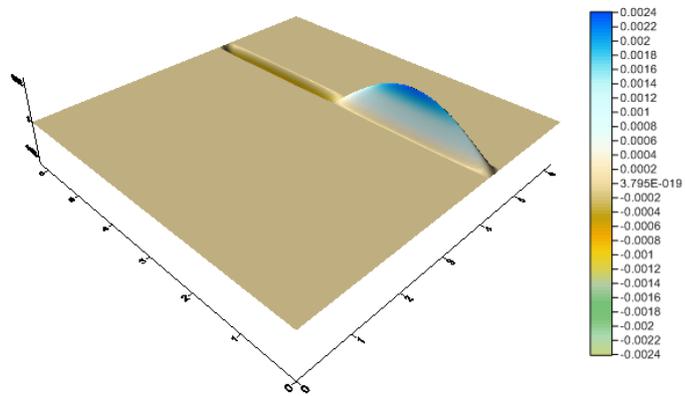


Рис. 4.1. Точное решение  $q_T(x, y)$ .

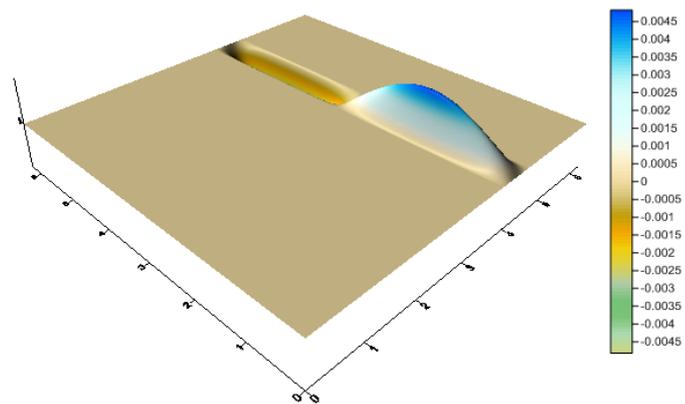


Рис. 4.2. Начальная функция  $g(x, y)$ .

Тогда восстановленная скорость распространения возмущения  $q(x, y)$  имеет вид, показанный на рис. 4.5.

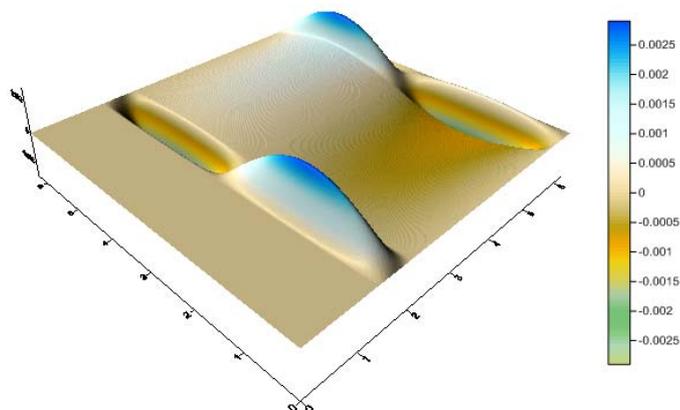


Рис. 4.3. Свободная поверхность  $u(x, y, T) = f(x, y)$  при  $T = 10$  с ошибкой в измерениях 20%.

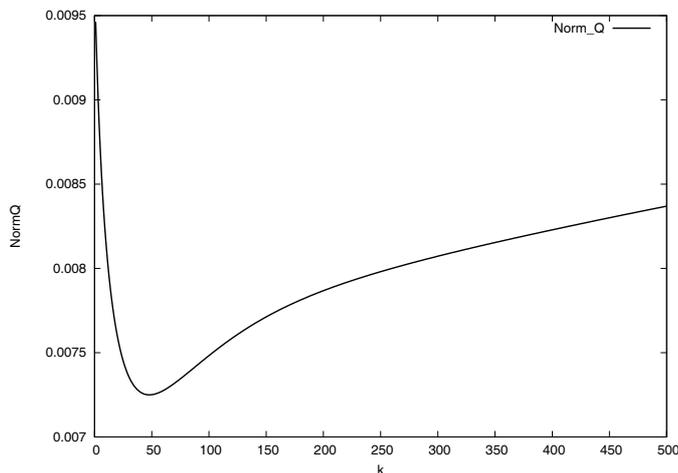


Рис. 4.4. Норма  $\|q_T - q\|$ , которая достигает минимума при  $k = 50$ .

Отметим, что при подходе к границе  $x = 0$  амплитуда волны увеличивается, что поддается физическому объяснению ввиду задания батиметрии  $H(x)$ . Заметим также, что даже при зашумленных данных (ошибки достигали в правых частях до 50%) решение (4.1) восстанавливается с незначительной погрешностью  $\|q_T - q\| \simeq 0,0072$ , которая не влияет на характер решения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С.И. Кабанихин, М.А. Бектемесов, А.Н. Алимова. Итерационный метод решения задачи Дирихле для волнового уравнения. // Вестник КазНПУ, Серия "физико-математические науки", 2010, №1(29), С.121-125.
- [2] В.К. Иванов, В.В. Васин, В.П. Таланов. Теория линейных некорректных задач и ее применения. // М: Наука, 1978. MR0511653

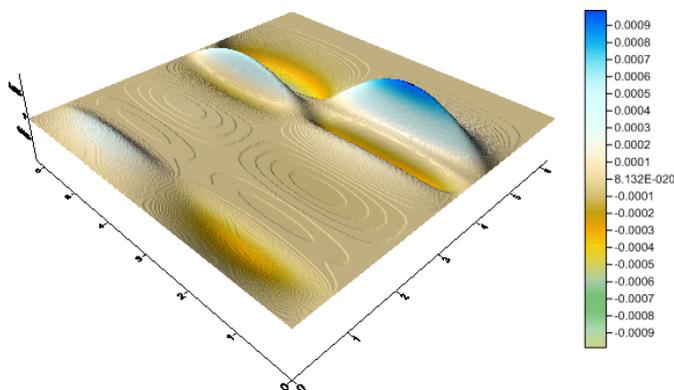


Рис. 4.5. Восстановленное решение  $q(x, y)$  с ошибкой в измерениях 20%.

- [3] *М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский.* Некорректные задачи математической физики и анализа. // Новосибирск: Наука Сиб. отд-ние, 1980. MR0591674
- [4] *А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин.* Методы решения некорректных задач. // Москва: Наука, 1974. MR0455366
- [5] *L.E. Payne.* Improperly posed problem in partial differential equations N 22.— // Philadelphia (Pa), Soc. Ind. and Appl. Math., № 22, 1975. — 76 p. MR0463736
- [6] *D.G. Bourgin.* The Dirichlet problem for the damped wave equation. // Duke Math. J., 1940, N 7, p. 97—120.
- [7] *Н.Н. Вазаниа.* Об одной краевой задаче с данными на всей границе для гиперболической системы, эквивалентной уравнению колебания струны. // Докл. АН СССР, 1957, 116, № 6, с. 906—909.
- [8] *С.Л. Соболев.* Об одной новой задаче математической физики. // Изв. АН СССР. Сев. мат., 1954, 18, № 1, с. 3—50.
- [9] *С.Л. Соболев.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью. // Прикл. механика и техн. физика, 1960, № 3, с. 20—55.
- [10] *Р.А. Александрян.* Исследование спектральных свойств операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С.Л. Соболева: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. // Москва, 1962. 15 стр.
- [11] *С.Г. Овсепян.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. // II Изв. АН АрмССР. Математика. 1967, 2, № 3, с. 195—209.
- [12] *С.Г. Овсепян.* Построение порождающего множества и обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения колебания струны в классе измеримых функций. // II Изв. АН АрмССР. Математика. 1969, 4, № 3, с. 102—121.
- [13] *Т.И. Зеленяк.* Избранные вопросы качественной теории уравнения с частными производными. // Новосибирск: Новосиб. ун-т, 1970. 164 с.
- [14] *Т.И. Зеленяк, М.В. Фокин.* О некоторых качественных свойствах решений уравнений С.Л. Соболева. // В кн.: Теория кубатурных формул и приложение функционального анализа к некоторым задачам математической физики. Новосибирск: Наука, 1973, с. 121—124.
- [15] *М.В. Фокин.* О задаче Дирихле для уравнения колебания струны. // В кн.: Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики. Новосибирск, 1981, с. 178—182.
- [16] *С.И. Кабанихин, О.И. Криворотько.* Исследование обратной задачи термоакустики методом сингулярного разложения. // Сибирские электронные математические известия (принята в печать), 2011.

- [17] *С.И. Кабанихин*. Обратные и некорректные задачи. // Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2008.
- [18] *В.С. Владимиров*. Уравнения математической физики. // Издание 4, Наука, Москва, 1981. MR0653331
- [19] *С.К. Годунов, В.М. Гордиенко*. Сингулярные числа краевой задачи на полупрямой для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. // Сибирский математический журнал, **4**, 1989. MR1017604
- [20] *С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.И. Кирилук, В.И. Костин*. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. // Новосибирск: Наука, 1992. MR1215723
- [21] *S.I. Kabanikhin, I.V. Marinin, O.I. Krivorotko, V. Komarov, A. Karas, D. Khidasheli*. New methods of earthquakes and tsunami sources determining, simulation, modeling and visualization. // World forum "Natural cataclysm and global problems of the modern civilization" GEOCATACLYSM-2011, Istanbul, September, 2011.

КАБАНИХИН СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,  
ПР. ЛАВРЕНТЬЕВА 6,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address: kabanikhin@sscc.nsc.ru*

БЕКТЕМЕСОВ МАКТАГАЛИ АБДИМАЖИТОВИЧ  
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. АБАЯ,  
АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН  
*E-mail address: maktagali@mail.ru*

НУРСЕИТОВ ДАНИЯР БОРИСОВИЧ, АЛИМОВА АНЕЛЬ НУРДАНБЕКОВНА  
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ. К. И. САТПАЕВА,  
АЛМАТЫ, КАЗАХСТАН  
*E-mail address: ndb80@mail.ru, anic2002@mail.ru*

КРИВОРОТЬКО ОЛЬГА ИГОРЕВНА  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
УЛ. ПИРОГОВА 2,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address: krivorotko.olya@mail.ru*

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.263–С.292 (2011)*

УДК 519.6, 519.711.3

MSC 13A99

**ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ  
ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕРМОАКУСТИКИ**

С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН, О.И. КРИВОРОТЬКО

ABSTRACT. In this article we consider the inverse problem of determining the initial conditions of the initial boundary-value problem for the wave equation with additional information about the solution of the direct initial boundary-value problem which is measured at the boundary of the domain. The main goal of our work is to apply the optimization methods (method of simple iteration (MSI) and the conjugate gradient method (CGM)), to make a comparative analysis of methods and to study the resolution of the inverse problem and its dependence on the number and location of measurement points. We consider three two-dimensional inverse problems. In the first of which (inverse problem 1) the additional information is measured on one side  $x = 0$  of the square  $(0, L) \times (-L, L)$ , in the second - on the both sides  $x = 0$  and  $x = L$ , and in the third - on the three sides  $x = 0$ ,  $x = L$  and  $y = L$ . In the first case, the inverse problem is equivalent to the problem of restoring the function by its spherical means. This problem is classically ill-posed. To regularize the problem we reduce inverse problems to a finite system of one-dimensional inverse problems. This gives an explicit form of the gradient  $J'$  of the functional

$$J(Q) = \langle AQ - F, AQ - F \rangle = \|AQ - F\|^2$$

and allows to estimate the rate of convergence.

---

KABANIKHIN S.I., SHISHLENIN M.A., KRIVOROTKO O.I., OPTIMIZATION METHOD FOR SOLVING INVERSE THERMOACUSTIC PROBLEM.

© 2011 КАБАНИХИН С.И., ШИШЛЕНИН М.А., КРИВОРОТЬКО О.И.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00746, грант 11-01-00105 и при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

The solution of two-dimensional inverse problem is obtained by applying the methods of MSI and CGM. The results of numerical calculations are presented and discussed. We show that the MSI for each iteration step reduces the value of the objective functional. However, due to the ill-posedness of inverse problem the difference between the exact and the approximate solutions of the inverse problem decreases up to some fixed number  $k_{min}$  and then increases monotonically. This reflects the regularizing properties of the MSI, in which the iteration number is the regularization parameter. It is shown that CGM has a similar property, but CGM achieves to the exact solution much faster (about 10 - 100 times). CGM is much more sensitive.

**Keywords:** thermoacoustic problem, inverse and ill-posed problems, wave equation, method of simple iteration, conjugate gradient method.

## ВВЕДЕНИЕ

Методы томографического исследования структуры неоднородных объектов, благодаря успехам как фундаментальной и вычислительной математики, так и современному аппаратному оснащению, произвели революцию в биологических и медицинских исследованиях. Нескольким ученым, применявшим в своих исследованиях методы томографии, были присуждены Нобелевские премии по медицине (в 1979 году G.N. Hounsfield и A. Mc. Cormack получили Нобелевскую премию "за разработку компьютерной томографии"; в 2003 году P.C. Lauterbur и S.P. Mansfield получили Нобелевскую премию "за изобретение метода магнитно-резонансной томографии"), биологии и химии. Прогресс медицинской томографии сопровождался зарождением и развитием многих других приложений этого универсального и информативного метода. Будучи эффективным средством решения обратных задач, направленных на реконструкцию внутренней структуры сложных объектов, методы вычислительной томографии стали применяться в оптике и физическом эксперименте, геофизике, дефектоскопии промышленных изделий и других областях науки и промышленности. Развитие математических методов и систем сбора информации привели к новым математическим моделям томографии, таким как диффузионная томография, термотомография, томография векторных и тензорных полей. Разнообразие математических постановок связано с потребностью реконструкции характеристик сред различной сложности. Задача термоакустики имеет важное значение в онкологии, поскольку при исследовании пораженных тканей обнаружено, что массовая доля воды в них существенно больше, чем в здоровых тканях [1]. Если в здоровых тканях содержание воды составляет около 65%, то в пораженных оно достигает 80%. Столь существенное отличие массовой доли воды в пораженных и здоровых клетках дает основание предполагать, что коэффициенты поглощения энергии электромагнитного излучения пораженных и здоровых клеток также существенно отличаются. Это предположение подтверждается результатами экспериментальных работ [1], в которых показано, что коэффициент поглощения электромагнитной энергии пораженных раком жировых тканей груди в 1,8 раз больше, чем у здоровых. Грудь облучалась лазером с рабочей частотой 434 МГц. Волны акустического давления фиксировались пьезодатчиками, размещенными на поверхности исследуемой области, имеющей форму полусферы радиуса 15 см. Пространство между грудью и датчиками заполнялось жидкостью, плотность и скорость звука которой близка к

плотности и скорости звука груди. В данной работе рассматриваются оптимизационные методы решения обратной задачи термоакустики.

### 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваем область  $\Omega \subset R^3$  упругой среды. Предположим, что начиная с момента времени  $t = 0$ , область  $\Omega$  подвергается электромагнитному излучению интенсивностью  $I(t)$ , которое частично поглощается средой. Поглощенная энергия переходит в тепло, что приводит к увеличению температуры среды, к ее расширению и, в итоге, к появлению волн акустического давления. Распространяясь по среде, волны акустического давления достигают границы  $\Gamma$  области, на части которой  $\Gamma_1$  они могут быть измерены. Требуется определить коэффициент поглощения электромагнитного излучения в  $\Omega$  по измерениям акустического давления на части границы  $\Gamma_1$ .

Используя модель невязкой жидкости, и пренебрегая диффузионными потоками тепла, процесс распространения волн акустического давления  $u$  в среде можно описать следующим уравнением [2]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta_{x,y} u = \alpha(x, y_1, y_2) \frac{\beta}{c_p} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (x, y_1, y_2) \in \Omega, t \in R$$

Здесь  $c$  – скорость распространения акустических волн,  $\alpha$  — коэффициент поглощения энергии электромагнитного излучения,  $\beta$  – коэффициент термического расширения,  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении. В качестве начального условия берется условие отсутствия волн акустического давления до начала облучения:

$$u|_{t < 0} = 0.$$

Как правило, в задачах термоакустики длительность электромагнитного излучения очень мала, что позволяет задать (приближенно)  $I(t)$  в виде дельта-функции Дирака:

$$I(t) = I_0 \delta(t).$$

### 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать прямую и обратную задачи в  $n$ -мерном пространстве. В силу того, что  $I(t) = I_0 \delta(t)$ , можно записать задачу Коши [3] (гл.3, §13):

$$(2.1) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & t > 0, x \in R, y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$$

$$\text{Здесь } q(x, y) = \frac{\alpha(x, y) \beta I_0}{c_p}.$$

Прямая задача (2.1) заключается в нахождении  $u(x, y, t)$  по известной функции  $q(x, y)$ . Известно, что при условии  $q \in H^{[\frac{n}{2}]+3}(R^{n+1})$  существует единственное классическое решение  $u \in C^2(R^{n+1} \cup \{t > 0\}) \cap C^1(R^{n+1} \cup \{t > 0\})$  задачи (2.1).

Мы будем рассматривать три постановки обратной задачи, которые отличаются одна от другой количеством дополнительной информации о решении прямой задачи (2.1).

Обратная задача 1: Пусть о решении  $u(x, y, t)$  задачи Коши (2.1) известна дополнительная информация на гиперплоскости  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u(0, y, t) &= f_1(y, t), \\ u_x|_{x=0} &= g(y, t). \end{aligned}$$

Требуется определить функцию  $q(x, y)$  по известным функциям  $f_1(y, t)$  и  $g(y, t)$ .

Предположим, что неоднородность содержится в ограниченном объеме  $\Omega$ , т.е.  $\text{supp}\{q\} \in \Omega$ , где  $\Omega = \{(x, y) \in R^{n+1} \mid 0 < x < l, -l < y_i < l, i = 1, \dots, n\}$ .

Поскольку скорость распространения возмущений равна единице, мы можем выбрать  $L > l$  таким, что возмущения, порожденные данными  $q(x, y)$  не успевают за время  $T$  достичь границы  $x = L, y_i = -L, y_i = L, i = 1, \dots, n$ . Таким образом, можно сформулировать прямую начально-краевую задачу:

$$(2.2) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ u_x|_{x=0} = g(y, t), \quad u_x|_{x=L} = 0; \\ u_{y_i}|_{y_i=-L} = u_{y_i}|_{y_i=L} = 0, & i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Отметим, что задача Коши с данными на времениподобной поверхности  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} u_{tt} &= \Delta_{x,y} u, \quad x > 0, \\ u(0, y, t) &= f_1(y, t), \\ u_x(0, y, t) &= g(y, t) \end{aligned}$$

рассматривалась в книге [4]. Более подробно мы рассмотрим эту задачу в разделе 2.1.2.

Основным объектом наших исследований будет обратная задача

$$(2.3) \quad \begin{cases} u_{tt} = \Delta_{x,y} u, & x \in (0, L), y_i \in (-L, L), t \in (0, T); \\ u|_{t=0} = q(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n; \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega. \end{cases}$$

$$(2.4) \quad u(0, y, t) = f_1(y, t)$$

где  $n$  – внешняя нормаль к  $\partial\Omega$ .

Отметим, что обратная задача (2.2), (2.4) может быть сведена к решению двух обратных задач вида (2.3) - (2.4) следующим образом.

Пусть пара функций  $\{u_1, q_1\}$  является решением задачи

$$\begin{cases} u_{1tt} = \Delta_{x,y} u_1, \\ u_1|_{t=0} = q_1(x, y), \quad u_{1t}|_{t=0} = 0, \\ u_{1x}|_{x=0} = u_{1x}|_{x=L} = 0, \\ u_{1y_i}|_{y_i=-L} = u_{1y_i}|_{y_i=L} = 0 \end{cases}$$

$$u_1|_{x=0} = f_1(y, t)$$

а пара  $\{u_2, q_2\}$  – решением задачи

$$(2.5) \quad \begin{cases} u_{2tt} = \Delta_{x,y} u_2, \\ u_2|_{t=0} = q_2(x, y), \quad u_{2t}|_{t=0} = 0, \\ u_{2x}|_{x=0} = u_{2x}|_{x=L} = 0, \\ u_{2y_i}|_{y_i=-L} = u_{2y_i}|_{y_i=L} = 0 \end{cases}$$

$$(2.6) \quad u_{2x}|_{x=0} = g(y, t)$$

Ясно, что  $q(x, y) = q_1(x, y) + q_2(x, y)$ ,  $u(x, y, t) = u_1(x, y, t) + u_2(x, y, t)$  являются решением обратной задачи (2.2), (2.4). Но задача (2.5) - (2.6) может быть сведена к обратной задаче вида (2.3) - (2.4). С этой целью обозначим  $u_{2x} = w$ . Тогда получим обратную задачу, аналогичную обратной задаче (2.3) - (2.4):

$$\begin{cases} w_{tt} = \Delta_{x,y} w, \\ w|_{t=0} = q_{2x}(x, y), \quad w_t|_{t=0} = 0, \\ w_x|_{x=0} = 0, \quad w_{y_i}|_{y_i=-L} = w_{y_i}|_{y_i=L} = 0 \\ w|_{x=0} = g(y, t) \end{cases}$$

Предполагая, что  $q \in H^s(\Omega)$ , заключаем, что  $u \in H^s(\Omega \cup \{0 < t < T\})$  и  $u(x, y, t)$  имеет след  $u(0, y, t) = f_1(y, t) \in L_2(\{(y, t) | y_i \in (-L, L), t \in (0, T)\})$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**2.1. Постановка трех обратных задач.** Рассмотрим три постановки обратных задач к задаче (2.3) (см. Рис. (2.1)):

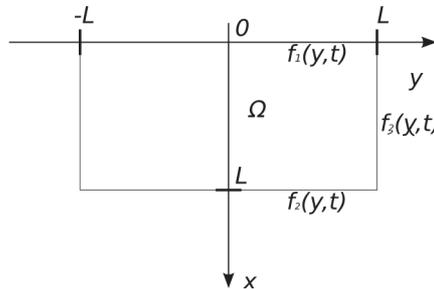


Рис. 2.1

Обратная задача 1: измерения проведены на границе  $x = 0$ :

$$u(0, y, t) = f_1(y, t)$$

Требуется определить функцию  $q(x, y)$  по известной функции  $f_1(y, t)$ .

Обратная задача 2: к измерениям (2.4) добавляются измерения на границе  $x = L$ :

$$(2.7) \quad u(L, y, t) = f_2(y, t)$$

Требуется определить функцию  $q(x, y)$  по известным функциям  $f_1(y, t)$ ,  $f_2(y, t)$ .

Обратная задача 3: к измерениям (2.4) и (2.7) добавляются измерения на границе  $y = L$ :

$$(2.8) \quad u(x, L, y_2, \dots, y_n, t) = f_3(x, y_2, \dots, y_n, t)$$

Требуется определить функцию  $q(x, y)$  по известным функциям  $f_1(y, t)$ ,  $f_2(y, t)$ ,  $f_3(x, y_2, \dots, y_n, t)$ .

Заметим, что в случае  $T = L_1 > L$  решение обратной задачи  $q(x, y)$  восстанавливается не полностью или с большой погрешностью, поскольку не вся информация об искомом решении  $q(x, y)$  обратной задачи дойдет до границы. Поэтому всюду далее будем считать, что  $T \geq L$ . Особенно важной для приложений и сложной для теоретического исследования является обратная задача 1. Эта задача является некорректной по Адамару, поскольку пример

$$u_n(x, y, t) = \frac{1}{n} \cos(\sqrt{2}ny) \cos(nt) (e^{nx} + e^{-nx})$$

показывает, что при  $n \rightarrow \infty$  и  $x \in (0, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  - сколь угодно малое число, решение стремится к бесконечности  $u_n \rightarrow \infty$ . С другой стороны, данные задачи стремятся к нулю

$$f_{1n}(y, t) = u_n(0, y, t) = \frac{2}{n} \cos(\sqrt{2}ny) \cos(nt) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

то есть, нарушается третье условие корректности задачи, а именно, непрерывная зависимость решения от начальных данных.

2.1.1. *Интегральные представления решения прямых задач для  $n = 1, 2, 3$ .* В одномерном случае уравнение в задаче (2.3) - уравнение колебаний струны. Решение задачи (2.3) представляется формулой Даламбера:

$$u(x, t) = \frac{q(x+t) + q(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau,$$

где  $f(x, t)$  - правая часть в уравнении (2.3).

Для случая  $y = y_1$  имеет место формула Пуассона представления решения задачи (2.3):

$$u(x, y_1, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{r < t-\tau} \frac{f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta d\tau}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y_1)^2}} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2\pi} \iint_{r < t} \frac{q(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{t^2 - (\xi - x)^2 - (\eta - y_1)^2}}.$$

Уравнение (2.3) называется уравнением малых поперечных колебаний мембраны с начальными данными (функция  $f(x, y_1, t)$  соответствует вынуждающей внешней силе).

В случае  $y = (y_1, y_2)$  решение задачи (2.3) представляется формулой Кирхгофа:

$$(2.9) \quad u(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \iint_{|x-\zeta|=t} q(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \right),$$

где  $x = (x, y_1, y_2)$ ,  $\zeta = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Формула Кирхгофа (2.9) показывает, что решение прямой задачи в точке  $(x, y_1, y_2, t)$  зависит от значений функции  $q(\alpha, \beta, \gamma)$

на сфере  $|x - \zeta| = t$ . Если теперь положить в (2.9)  $x = 0$ , то получим интегральное уравнение первого рода относительно функции  $q(x, y_1, y_2)$ :

$$(2.10) \quad f_1(y_1, y_2, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi t} \iint_{\sqrt{\alpha^2 + (y_1 - \beta)^2 + (y_2 - \gamma)^2 = t}} q(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma \right)$$

Однако, численная реализация метода нахождения  $q(x, y_1, y_2)$  из уравнения (2.10) является сложной задачей.

Интегрируя уравнение (2.10) по  $t$  и умножая его на  $4\pi t$ , получим задачу восстановления функции  $q(x, y_1, y_2)$  по ее сферическим средним.

2.1.2. *Восстановление функции по сферическим средним.* Известно [4] (пример Р. Куранта), что если для решения гиперболического уравнения (2.3) данные Коши заданы при  $x = 0$

$$(2.11) \quad u(0, y_1, y_2, t) = f_1(y_1, y_2, t), \quad u_x|_{x=0} = 0$$

в области  $(y_1, y_2, t)$ , для которой переменные  $y_1, y_2$  заполняют сколь угодно малый шар

$$(y_1 - y_{10})^2 + (y_2 - y_{20})^2 \leq \varepsilon^2,$$

то этим самым начальными значения (2.11) определяются однозначно во всем шаре

$$(y_1 - y_{10})^2 + (y_2 - y_{20})^2 \leq T^2.$$

В нашем случае,  $y_{10} = 0, y_{20} = 0$ .

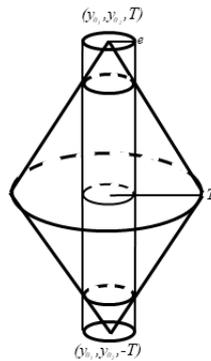


Рис. 2.2

Предположим теперь, что нам известны средние значения функции  $q$

$$h(y_1, y_2, t) = \iiint_{S_t} q(x, y_1 + \xi_1, y_2 + \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 dx = Q[q].$$

Здесь  $S_t : \xi_1^2 + \xi_2^2 + x^2 = t^2$  — сфера радиуса  $t$  с центром в точке  $(y_{10}, y_{20}, 0)$  (см. Рис. (2.2)). Тогда мы можем однозначно определить значение функции  $q$

на сфере  $S_t$ . Отсюда следует невозможность произвольного задания начальных значений  $u(0, y_1, y_2, t)$  (некорректность задачи (2.3) - (2.4)).

2.1.3. *Метод Фурье.* В силу естественных рассуждений всюду далее будем рассматривать область

$$\Omega = \{(x, y_1, y_2) | x \in (0, L), y_1 \in (-L, L), y_2 \in (-L, L)\} \in \mathbb{R}^3.$$

Будем искать решение прямой задачи (2.3) в следующем виде:

$$(2.12) \quad u(x, y_1, y_2, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} u_{(k)}(x, t) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2$$

Пусть

$$q(x, y_1, y_2) = \sum_{m, n=0}^{\infty} q_{(k)}(x) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2,$$

$$f_1(y_1, y_2, t) = \sum_{m, n=0}^{\infty} f_{(k)}^i(t) \cos \frac{m\pi}{L} y_1 \cos \frac{n\pi}{L} y_2,$$

тогда коэффициенты Фурье  $u_{(k)}(x, t)$  в разложении (2.12) удовлетворяют следующим условиям ( $m, n = 0, 1, \dots$ ):

$$(2.13) \quad \begin{cases} u_{(k)tt} = u_{(k)xx} - \frac{\pi^2}{L^2} |k|^2 u_{(k)}, & x \in (0, L), t \in (0, T) \\ u_{(k)}(x, 0) = q_{(k)}(x), & u_{(k)t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

$$(2.14) \quad u_{(k)x}(0, t) = u_{(k)x}(L, t) = 0.$$

Здесь  $k = (m, n)$  - мультииндекс. Отметим, что для классического решения прямой задачи (2.3) необходимо соблюдение условий согласования:

$$q_x(0, y_1, y_2) = q_x(L, y_1, y_2) = 0, \quad q_{y_1}(x, -L, y_2) = q_{y_1}(x, L, y_2) = 0,$$

$$q_{y_2}(x, y_1, -L) = q_{y_2}(x, y_1, L) = 0.$$

Обратные задачи 1, 2 и 3 на коэффициенты Фурье функций принимают вид:

$$(2.15) \quad u_{(k)}(0, t) = f_{(k)}^1(t)$$

$$(2.16) \quad u_{(k)}(L, t) = f_{(k)}^2(t)$$

$$(2.17) \quad u_{(k)}(L, t) = f_{(k)}^3(t)$$

*Замечание.* Для обратной задачи 3 разложение (2.12) видоизменится после замены  $x$  на  $y_1$ .

Решение задачи (2.13) при  $t \in (0, T)$  принимает вид [5]:

$$(2.18) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{q_{(k)}(x-t) + q_{(k)}(x+t)}{2} - \frac{kt}{2} \int_{x-t}^{x+t} \frac{J_0'(-k\sqrt{t^2 - (\alpha-x)^2})}{\sqrt{t^2 - (\alpha-x)^2}} q_{(k)}(\alpha) d\alpha,$$

$$\text{где } J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Здесь  $J_0(x)$  - функция Бесселя первого рода.

Для функции Бесселя известны асимптотические формулы:

$$J_0(x) \rightarrow 1, \quad \text{при } 0 < x \ll 1;$$

$$J_0(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right), \quad \text{при } x \gg \frac{1}{4}.$$

На Рис. (2.3) приведены графики функции Бесселя  $J_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 0, 1, 2$ .

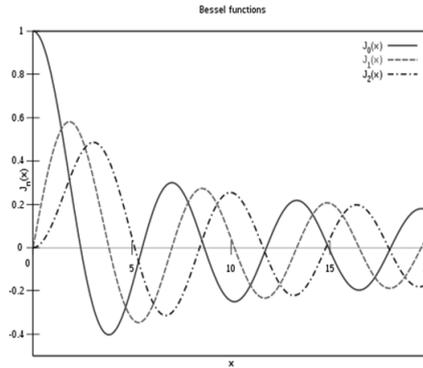


Рис. 2.3. Функции Бесселя.

Аналогичными рассуждениями получим решение обратной задачи (2.13)-(2.15):

$$u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}(t-x) + f_{(k)}(t+x)}{2} + \frac{kt}{2} \int_{t-x}^{t+x} \frac{i J_0' \left( ik \sqrt{x^2 - (\alpha - t)^2} \right)}{\sqrt{x^2 - (\alpha - t)^2}} q_{(k)}(\alpha) d\alpha, \quad (2.19)$$

где  $J_0(ix)$  – функция Бесселя первого рода чисто мнимого аргумента.

В (2.19) под интегралом стоит функция Бесселя чисто мнимого аргумента, что подтверждает неустойчивость обратной задачи 1 (пример Адамара).

На Рис. (2.4) приведен график функции  $J_0(ix)$ .

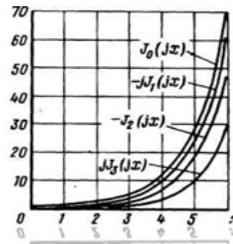


Рис. 2.4. Функции Бесселя мнимого аргумента.

Пользуясь четностью по  $x$  найдем решение (2.13)-(2.14) методом Фурье.

$$u_{(k)}(x, t) = \sum_j u_{kj}(t) \cos \frac{2j\pi}{L} x, \quad q_{(k)}(x) = \sum_j q_{kj} \cos \frac{2j\pi}{L} x$$

Тогда решение прямой задачи (2.13)-(2.14) имеет вид:

$$(2.20) \quad u_{(k)}(x, t) = \sum_j q_{kj} \cos \frac{2j\pi}{L} x \cos pt$$

Здесь  $p = \frac{\pi}{L} \sqrt{4j^2 + |k|^2}$ .

Итак, при любых  $m, n = 0, 1, 2, \dots$ , мы определили операторы:

$$(2.21) \quad A_{(k)}^1 : \quad \left( A_{(k)}^1 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(0, t) = \sum_j q_{kj} \cos pt = f_{(k)}^1(t)$$

$$(2.22) \quad A_{(k)}^2 : \quad \left( A_{(k)}^2 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(L, t) = \sum_j q_{kj} \cos pt = f_{(k)}^2(t)$$

$$(2.23) \quad A_{(k)}^3 : \quad \left( A_{(k)}^3 q_{(k)} \right) (t) = u_{(k)}(L, t) = \sum_j (-1)^j \tilde{q}_{kj} \cos p_1 t = f_{(k)}^3(t),$$

где  $p_1 = \frac{\pi}{L} \sqrt{4m^2 + n^2 + j^2}$ ,  $\tilde{q}_{kj} = \int_{-L}^L q_{(k)}(y_1) \cos \frac{j\pi}{L} y_1 dy_1$ .

Решение обратной задачи для ограниченного числа коэффициентов Фурье уже в некотором смысле является регуляризацией обратных задач 1, 2 и 3. При фиксированном  $k$  решение задачи (2.13) "хорошее" (т.е. задача (2.13) корректна по Адамару), однако при увеличении  $k$  степень корректности уменьшается.

## 2.2. Оценка условной устойчивости.

**Лемма 1.** *Справедлива оценка условной устойчивости для обратных задач 1, 2 и 3*

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \|f_i - f_\delta\| < \delta \implies \|q_i - q_\delta\| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, 3$$

Доказательство. Покажем условную устойчивость решения  $q_{(k)}$  обратной задачи (2.13)-(2.15) относительно малой вариации данных  $f_{(k)}^1$  (случай измерения на одной границе области).

Для обратной задачи (2.13)-(2.15) справедлива формула Даламбера (см. п. 2.1.1):

$$(2.24) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} + \frac{|k|^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \\ (x, t) \in \Delta(T, L)$$

где  $\Delta(T, L) = \{(x, t) | x \in (0, L), t \in \left(\frac{T}{L}x - T, -\frac{T}{L}x + T\right)\}$ .

*Замечание.* Из (2.24) вытекает единственность решения  $u_{(k)}(x, t)$  задачи (2.13)-(2.15).

В области  $\Delta(T, L)$  (см. Рис. (2.5)) введем следующие обозначения:

$$U^{(k)}(x) = \max_{t \in \left(\frac{T}{L}x - T, -\frac{T}{L}x + T\right)} |u_{(k)}(x, t)|,$$

$$F^{(k)} = \max_{t \in (-T, T)} |f_{(k)}^1(t)| = \|f_{(k)}^1\|_{C[-T, T]}.$$

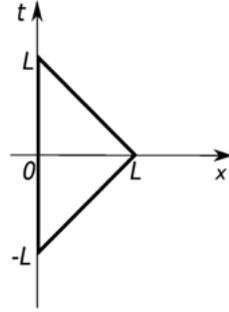


Рис. 2.5. Область  $\Delta(T, L)$ .

Тогда из (2.24) получаем неравенство:

$$(2.25) \quad U^{(k)}(x) \leq F^{(k)} + \frac{|k|^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} U^{(k)}(\xi) d\tau d\xi \leq F^{(k)} + |k|^2 \int_0^x \int_0^\tau U^{(k)}(\xi) d\xi d\tau$$

Введем следующую норму:

$$\|U^{(k)}\|_{k,m} = \sup_{x \in (0,L)} \{U^{(k)}(x)e^{-mkx}\}, \quad m, k > 0$$

Тогда двойной интеграл в неравенстве (2.25) при переходе к введенной норме оценивается следующим образом:

$$\int_0^x \int_0^\tau U^{(k)}(\xi) d\xi d\tau = \int_0^x \int_0^\tau \|U^{(k)}\|_{k,m} e^{m|k|\xi} d\xi d\tau \leq \|U^{(k)}\|_{k,m} \frac{1}{m^2|k|^2} e^{m|k|L}.$$

Умножим выражение (2.25) на  $e^{-m|k|x}$  и перейдем во всех величинах к норме  $\|\cdot\|_{k,m}$ :

$$\|U^{(k)}\|_{k,m} \leq \|F^{(k)}\|_{k,m} + \frac{1}{m^2} \|U^{(k)}\|_{k,m}, \quad \|U^{(k)}\|_{k,m} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} \|F^{(k)}\|_{k,m},$$

$$m \notin [-1, 1].$$

Учитывая начальное условие в задаче (2.13) получим следующую условную оценку:

$$(2.26) \quad \|Q^{(k)}\|_{k,m} \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} \|F^{(k)}\|_{k,m}, \quad m \notin [-1, 1]$$

Ясно, что  $\|Q^{(k)}\|_{k,m} \geq \|q^{(k)}\| e^{-m|k|L}$ , где  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[0,L]}$ . Тогда (2.26) переписывается:

$$(2.27) \quad \|q^{(k)}\| \leq \frac{m^2}{m^2 - 1} e^{m|k|L} \|f_{(k)}^1\|$$

Справедливо [6] (критерий аналитичности), что если  $f(y) = \sum_k f_k e^{ik\rho y}$ ,  $y = y_1 + iy_2$ , тогда  $f(y)$  аналитична в полосе  $|y_2| < \rho \iff |f_k| < ce^{-|k|\rho}$ ,  $c > 0$ .

Таким образом, при условии аналитичности по  $y$  функции  $f_1(y, t)$  в заданной области имеет место оценка (2.27).

Пусть теперь  $f_1 - f_2 = \tilde{f}$  и коэффициенты Фурье функции  $\tilde{f}$  удовлетворяют  $\|\tilde{f}_{(k)}^1\| < \delta e^{-m|k|(L+\gamma)}$ ,  $\gamma > 0$ . Пусть  $\tilde{q} = q_1 - q_2$ , где  $Aq_1 = f_1$ ,  $Aq_2 = f_2$ . Тогда из оценки (2.27) получаем оценку условной устойчивости:

$$\begin{aligned} \|\tilde{q}\|_1 &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|\tilde{q}_{(k)}\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2-1)^2} e^{2m|k|L} \|\tilde{f}_{(k)}^1\|^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2-1)^2} e^{2m|k|L} \\ &\cdot \delta^2 e^{-2m|k|(L+\gamma)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^4}{(m^2-1)^2} \delta^2 e^{-2mk\gamma} = \frac{\delta^2 m^4}{(m^2-1)^2} \frac{1}{1-e^{-2mk\gamma}} = c\delta^2, \\ c &= \frac{m^4}{(m^2-1)^2} \frac{1}{1-e^{-2mk\gamma}}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\|q\|_1 \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = c\delta^2$ , что и требовалось доказать.

### 3. МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ

#### 3.1. Сведение к задаче минимизации функционала $J(q)$ .

3.1.1. *Проекционный метод.* Разделим ряд Фурье функции  $g(x, y, t)$  на две части:

$$g(x, y, t) = \sum_{|k| \leq N} g_{(k)}(x, t) e^{iky} + \sum_{|k| > N} g_{(k)}(x, t) e^{iky}.$$

Если предположить, что  $g \in C^2$ , то остаток ряда Фурье (второе слагаемое в правой части) можно оценить [13]:

$$\sum_{|k| > N} |g_{(k)}(x, t)| \leq \frac{C}{k}.$$

Действительно, пусть  $a(y) = \sum_k a_k e^{iky}$ . Тогда если  $a \in C^\alpha$ , то  $|a_k| \leq \frac{c}{k^\alpha}$ ,  $c$  - некоторая постоянная [13]. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{c}{k^\alpha} \leq \int_m^{\infty} \frac{c}{x^\alpha} dx = -\frac{c}{(\alpha-1)m^{\alpha-1}}.$$

Поэтому в обратной задаче 1 можно ограничиться рассмотрением конечных рядов Фурье:

$$\begin{aligned} (3.1) \quad u(x, y, t) &= \sum_{|k| \leq N} u_{(k)}(x, t) e^{iky}, \quad q(x, y) = \sum_{|k| \leq N} q_{(k)}(x) e^{iky}, \\ f_1(y, t) &= \sum_{|k| \leq N} f_{(k)}^1(t) e^{iky} \end{aligned}$$

3.1.2. *Исследование обратной задачи для  $q_{(k)}$  в  $L_2(0, L)$ .* Используя разложения (3.1), сведем обратную задачу 1 к задачам на коэффициенты Фурье ( $|k| \leq \mathbb{N}$ ):

$$(3.2) \quad \begin{cases} u_{(k)tt} = u_{(k)xx} - k^2 u_{(k)}, & (x, t) \in \Delta(T, L) \\ u_{(k)}(x, 0) = q_{(k)}(x), \quad u_{(k)t}(x, 0) = 0 \\ u_{(k)x}(0, t) = u_{(k)x}(L, t) = 0 \end{cases}$$

$$(3.3) \quad u_{(k)}(0, t) = f_{(k)}^1(t)$$

Решение обратной задачи (3.2)-(3.3) представляется формулой Даламбера (см. п.2.1.1):

$$(3.4) \quad u_{(k)}(x, t) = \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} + \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi, \\ (x, t) \in \Delta(T, L)$$

Полагая в (3.4)  $t = 0$  и предполагая четность функции  $f_{(k)}^1$ , получим:

$$(3.5) \quad q_{(k)}(x) = f_{(k)}^1(x) + \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} u_{(k)}(\xi, \tau) d\tau d\xi$$

Введем следующие обозначения:

$$Q(x, t) = \begin{pmatrix} q_{(k)}(x) \\ u_{(k)}(x, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1(x) \\ Q_2(x, t) \end{pmatrix}, \\ F(x, t) = \begin{pmatrix} f_{(k)}^1(x) \\ \frac{f_{(k)}^1(t-x) + f_{(k)}^1(t+x)}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x, t) \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) = L_2(0, L) \times L_2(\Delta(T, L)).$$

Запишем систему интегральных уравнений (3.4)-(3.5) в операторном виде:

$$(3.6) \quad AQ := Q - BQ = F,$$

где  $A : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L))$ ,  $BQ = (B_1Q, B_2Q)^T$ , причем

$$B_1 : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow l_2(0, L), \quad B_1Q = \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi,$$

$$B_2 : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L)), \quad B_2Q = \frac{k^2}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

Решение уравнения (3.6) будем искать, минимизируя целевой функционал  $J : \mathfrak{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(Q) = \langle AQ - F, AQ - F \rangle = \|AQ - F\|^2.$$

В силу линейности оператора  $A$  задачи (3.6) можем записать градиент функционала  $J(Q)$ :

$$(3.7) \quad J' : \mathfrak{L}^*(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L)), \quad J'Q = 2A^*(AQ - F)$$

Здесь  $A^* : \mathfrak{L}^*(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathfrak{L}(\Delta(T, L))$ . Заметим, что функционал  $J(Q)$  не может иметь более одной стационарной точки [2].

Пусть  $\phi(x, t) = (\phi_1(x), \phi_2(x, t))^T, \phi \in \mathfrak{L}^*(\Delta(T, L))$ . Тогда из (3.6) получим выражение для  $A^*$ :  $A^*\phi = \phi - B^*\phi$ , где  $\langle BQ, \phi \rangle_{\mathfrak{L}^*} = \langle Q, B^*\phi \rangle_{\mathfrak{L}(\Delta(T, L))}, \|BQ\|_{\mathfrak{L}^*}^2 = \|B_1Q\|_{L_2(0, L)}^2 + \|BQ\|_{\mathfrak{L}(\Delta(T, L))}^2$ .

Всюду далее будем полагать  $T = L$ .

**Лемма 2.** *Используя вышеуказанные обозначения, справедливы представления:*

$$\begin{aligned} (B_1^*\phi)(\xi, \tau) &= \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L), \\ (B_2^*\phi)(\xi, \tau) &= k^2 \int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx + k^2 \int_{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx + \\ &+ k^2\theta \left( \frac{1}{3}(L-\xi) - \tau \right) \int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L). \end{aligned}$$

Доказательство см. Приложение 1. Нетрудно видеть, что операторы  $B_1$  и  $B_2$ , а также  $B_1^*$  и  $B_2^*$  ограничены. Также отметим, что прямая задача (3.2) корректна и имеет место оценка:

$$\|u_{(k)}\|_{L_2} \leq c \|q_{(k)}\|_{L_2} \text{ где } c = c_1 e^{\frac{k^2 M}{2}}, M > 0.$$

В самом деле, применим формулу Даламбера для представления решения прямой задачи (3.2):

$$\begin{aligned} u_{(k)}(x, t) &= \frac{q_{(k)}(x+t) + q_{(k)}(x-t)}{2} - \frac{k^2}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} u_{(k)}(\xi, \tau) d\xi d\tau. \\ |u_{(k)}(x, t)| &\leq |q_{(k)}(x)| + \frac{k^2}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} |u_{(k)}(\xi, \tau)| d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла-Беллмана, получим требуемую оценку.

**3.2. Сходимость метода простой итерации (МПИ) по функционалу.**

Метод простой итерации заключается в отыскании приближенного решения уравнения (3.6) следующим способом:

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n, \quad \alpha \in \left( 0, \frac{1}{\|A\|^2} \right).$$

Сформулируем теорему о скорости сходимости метода простой итерации по функционалу.

**Теорема 1.** [2] *Пусть  $Q$  и  $F$  – гильбертовы пространства,  $A$  – линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого  $f_1 \in F$  существует точное решение  $q_T$  уравнения (3.6). Тогда при любом  $q_0$  и*

$\alpha \in \left(0, \frac{1}{\|A\|^2}\right)$  последовательность  $\{q_n\}$ , определяемая равенствами  $q_{n+1} = q_n - \alpha J'q_n$ , сходится по функционалу и верна оценка

$$(3.8) \quad J(q_n) \leq \frac{\|q_0 - q_T\|^2}{4n\alpha(1 - \alpha\|A\|^2)}.$$

**3.3. Метод сопряженных градиентов (МСГ).** В методе сопряженных градиентов сначала задается  $q_0$  и вычисляется  $p_0 = J'q_0$ . Затем предполагается, что  $q_n$  и  $p_n$  уже вычислены. На шаге  $n + 1$  сначала вычисляется вспомогательная функция

$$p_n = J'q_n + \frac{\|J'q_n\|^2}{\|J'q_{n-1}\|^2} p_{n-1},$$

далее - параметр спуска

$$\alpha_n = \frac{\langle J'q_n, p_n \rangle}{\|Ap_n\|^2},$$

а затем - приближенное решение

$$q_{n+1} = q_n - \alpha_n p_n.$$

**3.4. Выражение для градиента функционала  $J'(q)$ , используемого для численных расчетов.** Для изложения алгоритмов МПИ и МСГ удобнее вернуться к дифференциальной постановке обратной задачи:

$$(3.9) \quad \begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ u|_{t=0} = q(x, y), & u_t|_{t=0} = 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=L} = 0, \\ u_y|_{y=0} = u_y|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

$$(3.10) \quad u|_{x=0} = f_1(y, t)$$

Определим целевой функционал  $J_1(q)$

$$(3.11) \quad J_1(q) = \int_0^T \int_0^L (u(0, y, t) - f_1(y, t))^2 dy dt$$

и получим выражение для градиента функционала  $J'_1(q)$

$$\delta J_1 = J_1(q + \delta q) - J_1(q) = \langle J'_1 q, \delta q \rangle + o(\|\delta q\|)$$

Известно, что задача по нахождению условного экстремума  $J_1(q)$  эквивалентна задаче на нахождение экстремума функции Лагранжа. Запишем функцию Лагранжа:

$$L(q) = J_1(q) + \int_0^T \int_0^L \int_0^L (u_{tt} - u_{xx} - u_{yy}) \Psi_1(x, y, t) dx dy dt,$$

где  $\Psi_1(x, y, t)$  - множитель Лагранжа.

Поставим сопряженную задачу к задаче (3.9):

$$(3.12) \quad \begin{cases} \Psi_{1_{tt}} = \Psi_{1_{xx}} + \Psi_{1_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_1|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{1_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{1_x}|_{x=0} = 2(u(0, y, t) - f_1(y, t)), \quad \Psi_{1_x}|_{x=L} = 0, \\ \Psi_{1_y}|_{y=0} = \Psi_{1_y}|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

Тогда учитывая (3.12) приращение функционала  $\delta J_1(q)$  переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \delta J_1(q) &= \int_0^T \int_0^L \Psi_{1_x}(0, y, t) \delta u(0, y, t) dy dt = - \int_0^T \int_0^L \int_0^L \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_{1_x} \delta u) dx dy dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\Psi_{1_{xx}} \delta u + \Psi_{1_x} \delta u_x) dx dy dt. \end{aligned}$$

Распишем второй интеграл, применяя формулу интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\Psi_{1_x} \delta u_x) dx dy dt &= \int_0^T \int_0^L \left( \Psi_1 \delta u_x \Big|_0^L - \int_0^L \Psi_1 \delta u_{xx} dx \right) dy dt = \\ &= - \int_0^T \int_0^L \int_0^L \Psi_1 \delta u_{xx} dx dy dt. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим:

$$\delta J_1(q) = \int_0^L \int_0^L \delta q \Psi_{1_t}|_{t=0} dx dy + o(\|\delta q\|).$$

Доказательство см. в Приложении 2.

Тогда выражение для градиента функционала имеет следующий вид:

$$(3.13) \quad J'_1(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0}.$$

Аналогичным образом получаем выражение для градиента функционала в случае обратных задач 2 и 3, т.е.

$$(3.14) \quad u|_{x=L} = f_2(y, t)$$

$$(3.15) \quad u|_{y=L} = f_3(x, t)$$

Тогда для обратной задачи 2 градиент функционала имеет вид

$$(3.16) \quad J'_2(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0} - \Psi_{2_t}|_{t=0},$$

где  $\Psi_2$  – решение следующей сопряженной задачи к задаче (3.9)-(3.10), (3.14):

$$\begin{cases} \Psi_{2_{tt}} = \Psi_{2_{xx}} + \Psi_{2_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_2|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{2_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{2_x}|_{x=0} = 0, \quad \Psi_{2_x}|_{x=L} = 2(u(L, y, t) - f_2(y, t)), \\ \Psi_{2_y}|_{y=0} = \Psi_{2_y}|_{y=L} = 0. \end{cases}$$

А для обратной задачи 3 градиент функционала принимает следующий вид:

$$(3.17) \quad J'_3(q) = \Psi_{1_t}|_{t=0} - \Psi_{2_t}|_{t=0} - \Psi_{3_t}|_{t=0},$$

где  $\Psi_3$  – решение сопряженной задачи к задаче (3.9)-(3.10), (3.14)-(3.15):

$$\begin{cases} \Psi_{3_{tt}} = \Psi_{3_{xx}} + \Psi_{3_{yy}}, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T), \\ \Psi_3|_{t=T} = 0, \quad \Psi_{3_t}|_{t=T} = 0, \\ \Psi_{3_x}|_{x=0} = \Psi_{3_x}|_{x=L} = 0, \\ \Psi_{3_y}|_{y=0} = 0, \quad \Psi_{3_y}|_{y=L} = 2(u(x, L, t) - f_3(x, t)). \end{cases}$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Численные расчеты были проведены для случая двух пространственных переменных. В качестве пробного решения были рассмотрены две функции:

$$(4.1) \quad q_{T_1}(x, y) = 0.1 + \begin{cases} \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{4}, & x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right), \\ \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8}, & x, y \in \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \end{cases}$$

$$(4.2) \quad q_{T_2}(x, y) = 0.1 + \frac{\cos 8y + 1}{4} \frac{\cos 8x + 1}{8},$$

$$x, y \in \left(\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right) \times \left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{8}, \frac{7\pi}{8}\right)$$

На Рис. (4.1) приведены графики функций  $q_{T_i}(x, y)$ ,  $i = 1, 2$ .

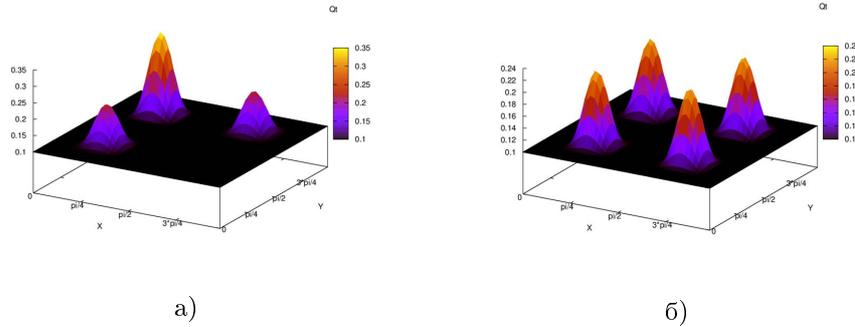


Рис. 4.1. Графики точных решений: а)  $q_{T_1}(x, y)$ , б)  $q_{T_2}(x, y)$

В численных экспериментах сетка выбиралась с учетом условия Куранта устойчивости явной разностной схемы:  $N_x = N_y = 50, N_t = 4800, L = T = \pi$ . В случае метода простой итерации выбиралось  $\alpha = 0,01$ . Начальное приближение  $q_0$  полагалось равным нулю.

Тест 1. Метод простой итерации (рис. (4.2) - (4.5)). Восстановление функции  $q_{T_1}$ , заданной формулой (4.1).

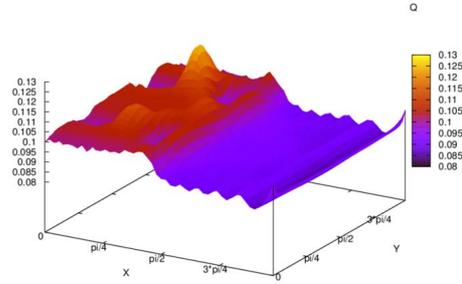


Рис. 4.2. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 500$ . Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе  $x = 0$ .

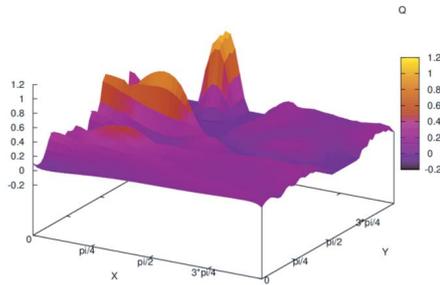


Рис. 4.3. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 461$ . Случай задания дополнительной информации на границе  $y = L$ .

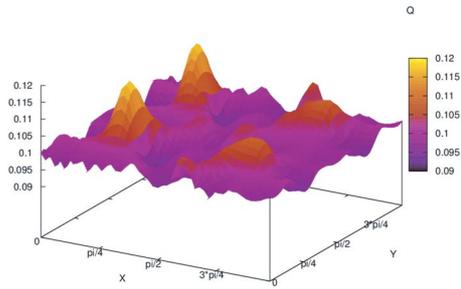


Рис. 4.4. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 401$ . Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$  и  $x = L$ .

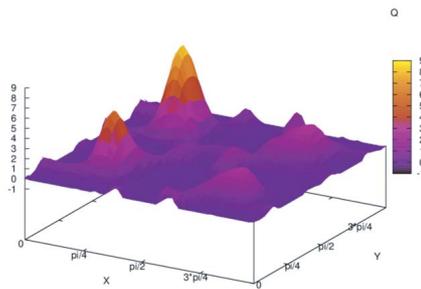


Рис. 4.5. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 307$ . Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$ ,  $x = L$  и  $y = L$ .

При решении обратной задачи 1 восстанавливаются только те неоднородности, которые находятся близко к границе  $x = 0$  (рис. (4.2)). Заметим, что данных измерения недостаточно для восстановления структуры решения (4.1). В случае измерения на границе  $y = L$  также прослеживается частичное восстановление объектов, наиболее близких к границе, на которой производятся измерения (рис. (4.3)). Для обратной задачи 2 наблюдаются все три неоднородности (рис. (4.4)). В задаче 3 при добавлении к обратной задаче 2 еще одной дополнительной информации на границе  $y = L$  размер неоднородностей восстанавливается лучше (рис. (4.5)).

Тест 2. Метод сопряженных градиентов (рис. (4.6) - (4.9)). Восстановление функции  $q_{T_1}$ , заданной формулой (4.1).

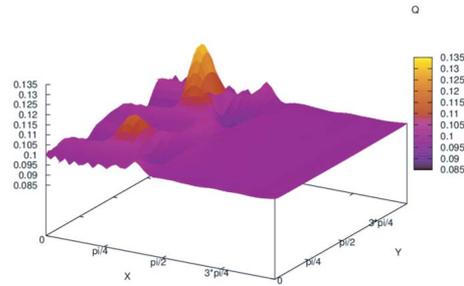


Рис. 4.6. График приближенного решения  $q_k, k = 5$ . Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе  $x = 0$ .

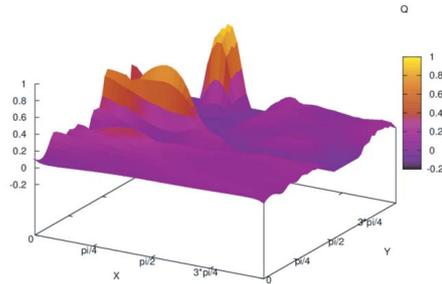


Рис. 4.7. График приближенного решения  $q_k, k = 5$ . Случай задания дополнительной информации на границе  $y = L$ .

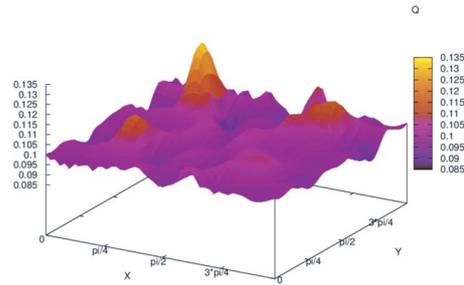


Рис. 4.8. График приближенного решения  $q_k, k = 4$ . Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$  и  $x = L$ .

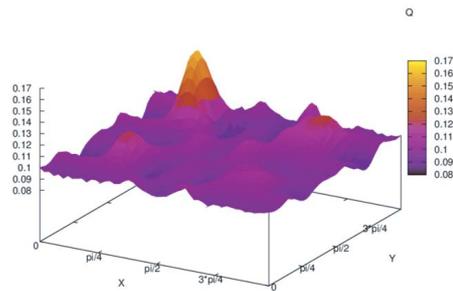


Рис. 4.9. График приближенного решения  $q_k, k = 3$ . Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах  $x = 0, x = L$  и  $y = L$ .

При решении обратной задачи 1 восстанавливается только часть решения (4.1), лежащая близко к границе  $x = 0$  (рис. (4.6)).

Отличие МСГ от МПИ заключается в количестве итераций (сравните рисунки (4.2) и (4.6)): если в МПИ восстановление решения с точностью  $\|q_{T_1} - q_k\| \leq 0,47$  достигается за 500 итераций, то МСГ дает аналогичную точность всего лишь за 5 итераций (МСГ достигает цели в 100 раз быстрее). Аналогичный вывод можно сделать и для остальных тестов (рис. (4.7) - (4.9)).

Тест 3. Метод простой итерации (рис. (4.10) - (4.13)). Восстановление функции  $q_{T_2}$ , заданной формулой (4.2).

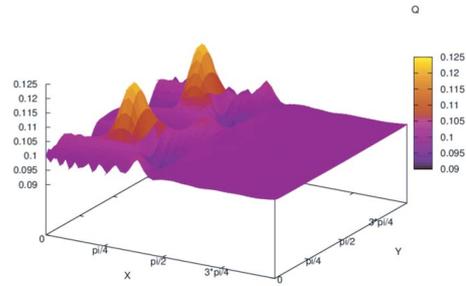


Рис. 4.10. График приближенного решения  $q_k, k = 379$ . Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе  $x = 0$ .

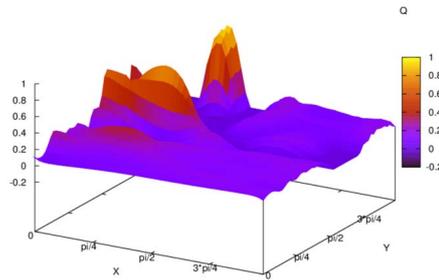


Рис. 4.11. График приближенного решения  $q_k, k = 372$ . Случай задания дополнительной информации на границе  $y = L$ .

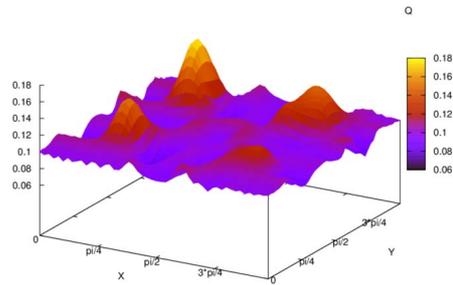


Рис. 4.12. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 93$ . Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$  и  $x = L$ .

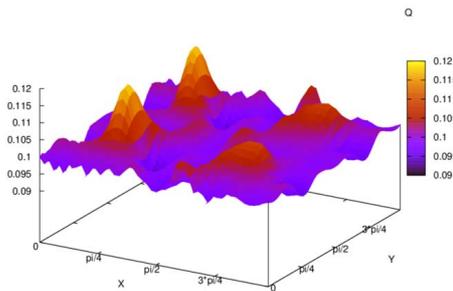


Рис. 4.13. График приближенного решения  $q_k$ ,  $k = 41$ . Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$ ,  $x = L$  и  $y = L$ .

Заметим, что как и в тесте 1 для обратной задачи 1 восстанавливаются только те неоднородности в области, которые находятся близко к соответствующим границам  $x = 0$  (см. рис. (4.10)) и  $y = L$  (см. рис. (4.11)). Для обратной задачи 2 наблюдаются все 4 неоднородности (см. рис. (4.12)). Однако ввиду недостатка дополнительной информации размер включений не соответствует действительности. При добавлении еще одного измерения на границе  $y = L$  размер неоднородностей восстанавливается лучше (рис. (4.13)).

Тест 4. Метод сопряженных градиентов (рис. (4.14) - (4.17)). Восстановление функции  $q_{T_2}$ , заданной формулой (4.2).

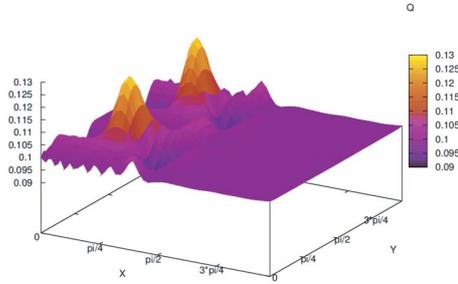


Рис. 4.14. График приближенного решения  $q_k, k = 5$ . Обратная задача 1: дополнительная информация задана на границе  $x = 0$ .

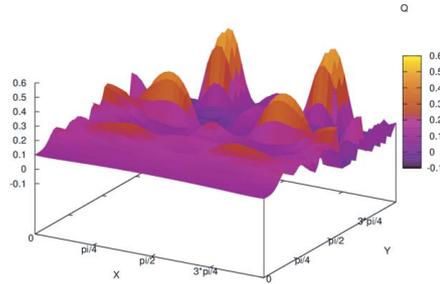


Рис. 4.15. График приближенного решения  $q_k, k = 6$ . Случай задания дополнительной информации на границе  $y = L$ .

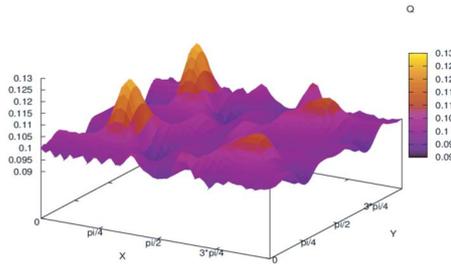


Рис. 4.16. График приближенного решения  $q_k, k = 5$ . Обратная задача 2: дополнительная информация задана на границах  $x = 0$  и  $x = L$ .

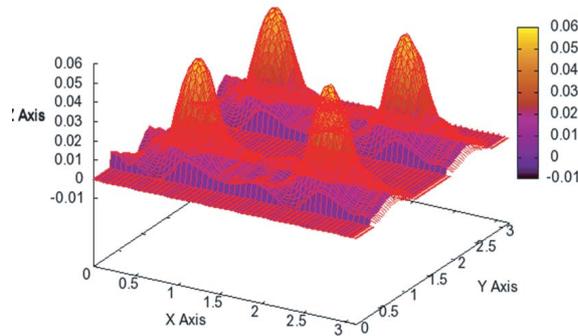


Рис. 4.17. График приближенного решения  $q_k, k = 4$ . Обратная задача 3: дополнительная информация задана на границах  $x = 0, x = L$  и  $y = L$ .

При решении обратной задачи 1 восстанавливается только часть решения (4.2), лежащая близко к соответствующим границам  $x = 0$  и  $y = L$  (см. рис. (4.14) и (4.15)). В отличие от МПИ МСГ всего за 5 итерации достиг нужной точности ( $\|q_{T_1} - q_k\| \leq 0,39$ ). Заметим также, что при решении обратной задачи 2 размер неоднородностей неточно восстановлен (наблюдаются также "шумы" в решении, рис. (4.16)). При добавлении измерения на границе  $y = L$  (обратная задача 3) точность восстановленного решения наилучшая (рис. (4.17)).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена обратная задача определения начального условия начально-краевой задачи для волнового уравнения по дополнительной информации о решении прямой начально-краевой задачи, измеренной на границе исследуемой области. Основная цель работы – применение оптимизационных методов

(метода простой итерации (МПИ) и метода сопряженных градиентов (МСГ)), сравнительный анализ методов и исследование разрешающей способности обратной задачи в зависимости от количества и местоположения точек измерения дополнительной информации. Были рассмотрены три двумерных постановки (обратная задача 1,2 и 3). Для регуляризации задачи на первом этапе использовался проекционный метод, в соответствии с которым двумерная обратная задача сводилась к конечной системе одномерных обратных задач. Это позволило получить явный вид градиента  $J'$  целевого функционала и получить оценки скорости сходимости.

Решение двумерной обратной задачи получено на основе применения методов МПИ и МСГ. Приведены результаты численных расчетов. Показано, что МПИ на каждом шаге итерации уменьшает значение целевого функционала, однако, в силу некорректности обратной задачи разность между точным и приближенным решением обратной задачи сначала убывает, а затем начинает монотонно возрастать (см. рис. (5.2)). Это обстоятельство отражает регуляризующие свойства МПИ, в котором роль параметра регуляризации играет номер итерации  $k$ .

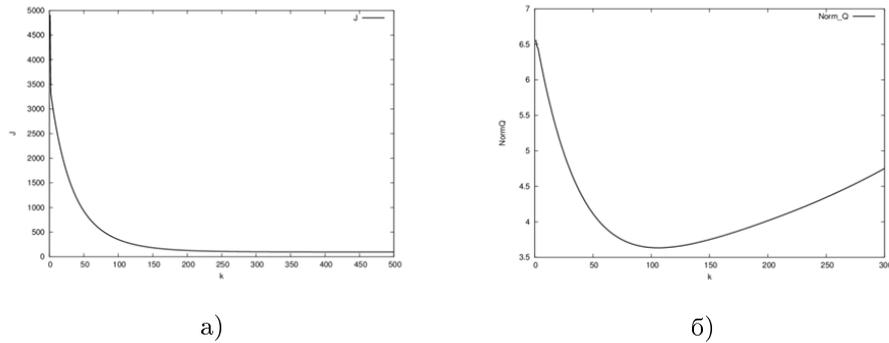


Рис. 5.1. МПИ: а) Функционал  $J(q_k)$ , б)  $\|q_T - q_k\|$

Показано, что МСГ обладает аналогичным свойством, но приближается к точному решению гораздо быстрее (в 10 - 100 раз). МСГ является намного более чувствительным, т.е. достигнув за небольшое количество шагов предельной точности, метод в дальнейшем может сравнительно быстро уклоняться от точного решения и приводить к росту целевого функционала.

Показано, что с увеличением количества дополнительной информации увеличивается разрешающая способность методов и появляется возможность различать такие неоднородности, которые являются невидимыми при уменьшении количества измеряемых функций.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1: ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ЦЕЛЕВОГО ФУНКЦИОНАЛА $J(q)$ .

В п. 3.1.2 вводилось понятие оператора  $A : \mathcal{L}(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(T, L))$ , сопряженного оператора  $A^* : \mathcal{L}^*(\Delta(T, L)) \rightarrow \mathcal{L}(\Delta(T, L))$ , где  $A^* : A^*\phi = \phi - B^*\phi$ ,

$$\langle BQ, \phi \rangle_{\mathcal{L}^*} = \langle Q, B^*\phi \rangle_{\mathcal{L}(\Delta(T, L))}, \|BQ\|_{\mathcal{L}^*}^2 = \|B_1Q\|_{L_2(0, L)}^2 + \|BQ\|_{\mathcal{L}(\Delta(T, L))}^2.$$

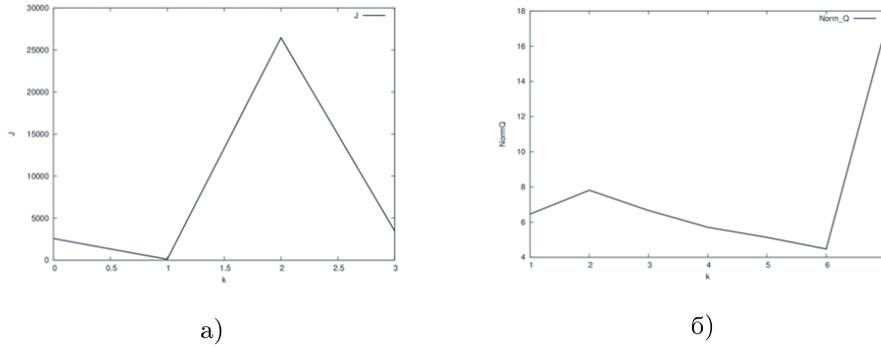


Рис. 5.2. МСГ: а) Функционал  $J(q_k)$ , б)  $\|q_T - q_k\|$

**Лемма 3.** *Справедливы представления:*

$$(B_1^* \phi)(\xi, \tau) = \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L),$$

$$(B_2^* \phi)(\xi, \tau) = k^2 \int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx + k^2 \int_{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx +$$

$$+ k^2 \theta \left( \frac{1}{3}(L - \xi) - \tau \right) \int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L).$$

Доказательство.

Найдем выражение для  $(B_1^* \phi)(\xi, \tau)$ :

$$\frac{k^2}{2} \int_0^L \left( \int_0^x \int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right) \phi_1(x) dx = k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \int_0^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \phi_1(x) d\tau dx d\xi$$

$$= k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx \right) d\tau d\xi$$

$$= \frac{k^2}{2} \int_0^L \int_{-L+\xi}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx \right) d\tau d\xi.$$

Таким образом,

$$(B_1^* \phi)(\xi, \tau) = \frac{k^2}{2} \int_{\tau+\xi}^L \phi_1(x) dx, \quad (\xi, \tau) \in \Delta(T, L).$$

Аналогично найдем выражение для  $(B_2^* \phi)(\xi, \tau)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{k^2}{2} \int_0^L \int_{x-L}^{L-x} \left( \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) d\tau d\xi \right) \phi_2(x, t) dt dx = \\
& = k^2 \int_0^L \int_0^x \int_0^{L-x} \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \phi_2(x, t) d\tau dt d\xi dx = \\
& = k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \left[ \int_{-x+\xi}^{x-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau + \right. \\
& \quad \left. + \int_{x-\xi}^{-2x+L+\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau \right] dx d\xi + \\
& + k^2 \int_0^L \int_{\xi}^L \int_{-2x+L+\xi}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt \right) d\tau dx d\xi = \\
& = 2k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\tau+\xi}^L \int_0^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi + \\
& + 2k^2 \int_0^L \int_{\frac{1}{3}(L-\xi)}^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{\xi}^{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)} \int_{\tau-x+\xi}^{\tau+x-\xi} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi + \\
& + 2k^2 \int_0^L \int_0^{L-\xi} Q_2(\xi, \tau) \left( \int_{-\frac{1}{2}\tau+\frac{1}{2}(L+\xi)}^L \int_{\tau-x+\xi}^{L-x} \phi_2(x, t) dt dx \right) d\tau d\xi.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2: МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ.

Рассмотрим операторное уравнение

$$(5.1) \quad Aq = f$$

где  $A : Q \rightarrow F$ ,  $Q, F$ - гильбертовы пространства. Будем искать решение уравнения (5.1) минимизируя функционал:

$$(5.2) \quad J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle = \|Aq - f\|^2$$

**Теорема 2.** [2] (гл. 2.6). Пусть  $A : Q \rightarrow F$  - линейный непрерывные оператор, а решение уравнения (5.1) единственно. Тогда функционал  $J(q)$  из (5.2) не может иметь более одной стационарной точки.

Пусть  $\Psi$  является классическим решением задачи (3.12).  
Запишем выражение для приращения функции Лагранжа:

$$\delta L(q) = \delta J(q) + \int_0^T \int_0^L \int_0^L (\delta u_{tt} - \delta u_{xx} - \delta u_{yy}) \Psi(x, y, t) dx dy dt.$$

Для каждого слагаемого распишем интеграл, используя дважды формулу интегрирования по частям.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{tt} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \int_0^L \int_0^L \left( \delta u_t \Psi|_0^T - \int_0^T \delta u_t \Psi_t dt \right) dx dy = \\ &= \int_0^L \int_0^L \left( \delta u_t|_{t=T} \Psi(x, y, T) - \delta u_t|_{t=0} \Psi(x, y, 0) - \delta u \Psi_t|_0^T + \int_0^T \delta u \Psi_{tt} dt \right) dx dy = \\ &= \int_0^L \int_0^L \left( \delta u_t|_{t=T} \Psi(x, y, T) - \delta u_t|_{t=T} \Psi_t(x, y, T) + \right. \\ &\quad \left. + \delta u|_{t=0} \Psi_t|_{t=0} + \int_0^T \delta u \Psi_{tt} dt \right) dx dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{xx} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \int_0^L \int_0^T \left( \delta u_x \Psi|_0^L - \int_0^L \delta u_x \Psi_x dx \right) dt dy = \\ &= \int_0^L \int_0^T \left( \delta u_x|_{x=L} \Psi(L, y, t) - \delta u_x|_{x=0} \Psi(0, y, t) - \delta u \Psi_x|_0^L + \int_0^L \delta u \Psi_{xx} dx \right) dt dy = \\ &= \int_0^L \int_0^T \left( \delta u|_{x=0} \Psi_x(0, y, t) - \delta u|_{x=L} \Psi_x(L, y, t) + \int_0^L \delta u \Psi_{xx} dx \right) dt dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^L \int_0^L \delta u_{yy} \Psi(x, y, t) dx dy dt &= \\ &= \int_0^L \int_0^T \left( \delta u|_{y=0} \Psi_y(x, 0, t) - \delta u|_{y=L} \Psi_y(x, L, t) + \int_0^L \delta u \Psi_{yy} dy \right) dt dx. \end{aligned}$$

В силу того, что  $\Psi$  удовлетворяет (3.12), получим

$$\delta J(q) = \int_0^T \int_0^L \Psi_x(0, y, t) \delta u(0, y, t) dy dt + \int_0^L \int_0^T [\delta u(0, y, t)]^2 dt dy.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] R.A. Kruger, W.L. Kiser Jr., D.R. Reienecke, G.A. Kruger, *Application of thermoacoustic computed tomography to breast imaging*, Preprint, Indiana University Medical Center, 2001. <http://optosonic.com>.
- [2] С.И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2008.
- [3] В.С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, издание 4, Наука, Москва, 1981. MR0653331
- [4] R.Courant, D.Hilbert, *Methods of mathematical physics: Volume II Partial Differential Equations*, A wiley-interscience publication, 1989. MR1013360
- [5] В.И.Смирнов, *Курс высшей математики*, т.2, Наука, Москва, 1974. MR0361650
- [6] А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов, *Теория функций комплексной переменной*, 6-е издание, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2005.
- [7] И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, Москва, 1963.
- [8] С.К. Годунов, В.М. Гордиенко, *Сингулярные числа краевой задачи на полупрямой для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сибирский математический журнал, **4**, 1989. MR1017604
- [9] С.К. Годунов, *Лекции по современным аспектам линейной алгебры*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [10] В.П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976. MR0481380
- [11] В.Г. Романов, *О локальной разрешимости некоторых многомерных обратных задач для уравнений гиперболического типа*, Дифференциальные уравнения, **2**, Т. 25, С. 275-283, 1989. MR0994711
- [12] С.К. Годунов, А.Г. Антонов, О.П. Кирилук, В.И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, Наука, Новосибирск, 1988. MR1215723
- [13] С.М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Т.3, Наука, Москва, 1966.

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,  
ул. ЛАВРЕНТЬЕВА 6,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* [kabanikhin@sscc.ru](mailto:kabanikhin@sscc.ru)

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
пр. КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* [mshishlenin@ngs.ru](mailto:mshishlenin@ngs.ru)

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
ул. ПИРОГОВА 2,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* [krivorotko.olya@mail.ru](mailto:krivorotko.olya@mail.ru)

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.293–С.306 (2011)*

УДК 517.95

MSC 35R30

**МОРСКАЯ СЕЙСМОРАЗВЕДКА:  
ВОЗМОЖНОСТЬ ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
ПРОДОЛЬНОЙ И ПОПЕРЕЧНЫХ СКОРОСТЕЙ  
И МОЩНОСТЕЙ ТОНКИХ СЛОЕВ ТОНКОСЛОИСТОЙ ПАЧКЕ**

А. Л. КАРЧЕВСКИЙ

**ABSTRACT.** Possibility of solving of inverse dynamic problem of marine seismics on reconstruction of pressure and shear velocities and gap points in thinly stratified layer is shown. The method of minimization of residual functional is used.

**Keywords:** inverse dynamic problem of seismics, pressure velocity, shear velocity, gap point of medium, horizontally stratified medium, thinly stratified layer, residual functional.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование волновых полей стало неотъемлемой частью современных обрабатывающих комплексов в сейсморазведке. Еще большее значение оно имеет на этапах интерпретации сейсмических данных. Его активно используют при идентификации и увязывании горизонтов, при сопоставлении окончательных результатов обработки с данными акустического каротажа и т.п. На нем основан метод псевдоакустического каротажа, представляющий

---

KARCHEVSKY A.L., MARINE SEISMICS: POSSIBILITY RECONSTRUCTION OF PRESSURE AND SHEAR VELOCITIES AND THICKNESSES OF THIN LAYERS IN A THINLY STRATIFIED LAYER.

© 2011 Карчевский А.Л.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00746) и совместным проектом СО РАН и ДВО РАН - 2009 - № 93.

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

собой одну из попыток решения обратной динамической задачи для реальных данных.

В основе существующих и активно используемых в практике методов математического моделирования, как правило, лежит уравнение акустики. Это связано с двумя фактами. Во-первых, математическое решение соответствующих задач хорошо изучено и не вызывает больших сложностей. Во-вторых, практическая сейсморазведка до недавнего времени была направлена на регистрацию, выделение и интерпретацию отраженных Р-волн. Последнее позволяло достаточно хорошо приблизить окончательные результаты обработки реальных данных к решению задачи акустики.

Тем не менее, потребности геофизики не исчерпываются теми возможностями, которые у нее были — методы сейсморазведки постоянно развиваются и совершенствуются. Необходимо отметить, что первые работы по многоволновой сейсморазведке появились в России. В этой связи в первую очередь необходимо упомянуть о работах Н.Н. Пузырева [1]-[4] и его учеников. В работах Н.Н. Пузырева [5, 7] дан прекрасный обзор становления и развития многоволновой сеймики в России. Идеи многоволновой сеймики быстро развивались, создавалась соответствующая техника. Математически решение обратной динамической задачи сеймики развивалась во многих работах, среди которых необходимо выделить работы А.С. Алексеева с соавторами [8]-[13].

Теоретические работы по геофизике, успешная апробация некоторых методов многоволновой сейсморазведки на реальных данных пробудили в настоящее время интерес практической сейсморазведки к анализу нескольких компонент смещений и способам обработки данных, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS. В этом случае математическое моделирование и интерпретация собранного геофизического материала требуют развития более сложного математического аппарата, чем существующий. Уравнения акустики для учета влияния обменных волн оказываются неприемлемыми, и требуется использование уравнений, отвечающих теории упругости.

Потребности математического моделирования сейсмических и электромагнитных полей требуют создания методов для численного решения прямых задач, которые быстро решались бы при использовании современной вычислительной техники.

Модель горизонтально-слоистой среды является распространенной моделью среды для математического моделирования и интерпретации геофизических данных в сейсмо- и электроразведке. Известно, что расчет сейсмических и электроромангнитных полей может быть сведен к решению дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений второго порядка. Горизонтально-слоистая модель среды позволяет строить алгоритмы решения прямых задач, которые легко реализуются на компьютере и требуют сравнительно мало времени для вычислений. Это позволяет решать задачи, возникающие в геофизике, которые требуют большого числа решений прямой задачи.

До недавнего времени в морской сейсморазведке регистрация, выделение и интерпретация отраженных Р-волн были оправданы пока существовали системы, регистрирующие информацию на поверхности моря, поскольку продольные и поперечные смещения в силу свойств воды являются взаимозависимыми величинами. В настоящее время появились регистрирующие комплексы, которые

могут быть расположены на морском дне, т.е. стало возможным разрабатывать методы, которые направлены на выделение и интерпретацию обменных волн типа PS.

Настоящая работа посвящена тому, чтобы показать, что решение обратной динамической задачи морской сейсмологии возможна: решение прямой задачи ищется в частотной области, там же решается и обратная задача методом минимизации функционала невязки.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим среду — слоистую структуру с границами раздела  $z_k$ ,  $k = \overline{0, N}$ ,  $z_0 = 0$ ;  $m$ -ый слой находится в интервале  $[z_{m-1}, z_m]$ , последний  $N + 1$  слой есть  $[z_N, \infty)$ .

Физические свойства каждого слоя характеризуются параметрами Ламе и плотностью  $\rho$ , то есть параметры Ламе и плотность — кусочно-постоянные функции переменной  $z$ ,  $z \in [0; \infty)$ . Будем считать, что первый слой  $[0, z_1]$  — это вода.

Источник вида

$$(1) \quad \hat{f}(t)\nabla\delta(x, y, z - z_*)$$

в начальный момент времени  $t = 0$  возбуждает в среде упругие колебания. Будем считать, что источник находится в первом слое. Источник вида (1) служит моделью взрыва или аэрогана.

Поскольку модель среды является горизонтально-слоистой, следовательно, к системе дифференциальных уравнений теории упругости для смещений может быть записана в цилиндрической системе координат и к ней могут быть применены преобразование Фурье-Бесселя по горизонтальной переменной  $r$  и преобразование Лапласа по переменной  $t$  (см. вывод основных уравнений в Приложении).

В частотной области для определения образов продольных и поперечных смещений  $u_z$  и  $u_r$  в любой точке интервала  $[0, \infty)$  мы имеем: в воде (т.е. в первом слое  $[0, z_1]$ ) для нахождения  $u_z$  служит дифференциальное уравнение

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - r_p^2 u_z = 0, \quad r_p^2 = \nu^2 + p^2/v_p^2,$$

в полупространстве  $[z_1, \infty)$  продольные и поперечные смещения  $u_z$  и  $u_r$  удовлетворяют матричному дифференциальному уравнению

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + \nu B U \right) - \nu B' \frac{\partial}{\partial z} U - D U = 0,$$

на поверхности воды выполняются следующие краевые условия:

$$(4) \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0,$$

в точке нахождения источника имеют место условия склейки

$$(5) \quad [u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \quad \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_*} = 0,$$

в точке  $z_1$  выполняются следующие условия склейки

$$(6) \quad \begin{aligned} [u_z]_{z_1} &= 0, \\ \left( \rho v_s^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} + \nu \rho v_s^2 u_z \right) \Big|_{z=z_1+0} &= 0, \\ \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho (v_p^2 - 2v_s^2) u_r \right) \Big|_{z=z_1+0} &= \left( \frac{\rho p^2}{r_p^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_1-0}, \end{aligned}$$

в точках  $z_k$  ( $k = \overline{2, N}$ ) действуют условия склейки

$$(7) \quad \left[ A \frac{\partial}{\partial z} U + \nu B U \right]_{z_k} = 0, \quad [U]_{z_k} = 0,$$

на бесконечности выполняется условие предельного поглощения

$$(8) \quad U \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty).$$

Здесь использовались следующие обозначения:  $\nu$  и  $p = -\alpha + i\omega$  ( $\alpha > 0$ ) — параметры преобразований Фурье-Бесселя и Лапласа соответственно;

$$U = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(p, \nu, z, z_*) = f(p) \left( \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(z - z_*) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta'(z - z_*) \right),$$

$$A = \rho \begin{bmatrix} v_s^2 & 0 \\ 0 & v_p^2 \end{bmatrix}, \quad B = \rho \begin{bmatrix} 0 & -v_s^2 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \rho p^2 E + \rho \nu^2 \begin{bmatrix} v_p^2 & 0 \\ 0 & v_s^2 \end{bmatrix};$$

$\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\rho$  — плотность и  $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $v_s = \sqrt{\mu/\rho}$  — продольная и поперечная скорости в среде; обозначение  $[g]_z$  использовано для склейки функции  $g$  в точке  $z$ , т.е.  $[g]_z = g(z+0) - g(z-0)$ ; штрих ' у матрицы означает операцию транспонирования.

Соотношения (2)-(8) являются прямой задачей и позволяют определять продольные смещения  $u_z$  в воде и продольные и поперечные смещения  $u_z$  и  $u_r$  на интервале  $[z_1, \infty)$ . В воде поперечные смещения связаны с продольными при помощи следующего соотношения:

$$(9) \quad u_r = -\frac{\nu}{r_p^2} \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Предположим, что о решении прямой задачи (2)-(8) известна следующая дополнительная информация:

$$(10) \quad U|_{z=z_1} = U_1 \equiv \begin{bmatrix} u_{r1} \\ u_{z1} \end{bmatrix},$$

где  $\nu \in [0, \bar{\nu}]$ ,  $\alpha \in [0, \bar{\alpha}]$ ,  $\omega \in [\underline{\omega}, \bar{\omega}]$ , and  $\bar{\nu}$ ,  $\bar{\alpha}$ ,  $\underline{\omega}$  и  $\bar{\omega}$  — некоторые постоянные известные из практики.

Предполагаем, что плотность  $\rho$  известна во всей полуплоскости  $[0, \infty)$ .

**Обратная задача.** Определить неизвестные скорости  $v_p$ ,  $v_s$  и точки разрыва среды  $z_k$ , если о решении прямой задачи (2)-(8) имеется дополнительная информация (10).

Обратная задача может быть решена численно при помощи минимизации функционалов невязки:

$$(11) \quad J = \sum_{\omega} ([u_r(\nu, z_1, p) - u_{r1}(\nu, p)]^2 + [u_z(\nu, z_1, p) - u_{z1}(\nu, p)]^2).$$

Обратные задачи в постановках подобных постановке выше, свойства функционалов невязки типа (11) были подробно исследованы в работах [14]-[17]. В частности, на основании этих работ можно легко показать, что обратная задача (2)-(8), (10) может быть расщеплена на две последовательно решаемых обратных задачи, т.е. возможно вначале восстановить скорость продольных волн  $v_p$  и точки разрыва среды  $z_k$ , а затем, используя их как известные, восстановить скорость поперечных волн  $v_s$ .

Если положить  $\nu = 0$ , то из (2)-(8) мы получим следующую постановку прямой задачи:

$$(12) \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{p^2}{v_p^2} u_z = 0, \quad z \in (0, z_1),$$

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - \rho p^2 u_z = 0, \quad z \in (z_1, \infty),$$

$$(14) \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad u_z \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$(15) \quad \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_*} = 0, \quad [u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2}, \quad \left[ \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_k} = 0, \quad [u_z]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Функционал невязки (11) для восстановления неизвестной скорости  $v_p$  и точек разрыва среды  $z_k$  примет вид

$$(16) \quad J = \sum_{\omega} [u_z(0, z_1, p) - u_{z1}(0, p)]^2.$$

В работе [15] был проведён численный эксперимент: восстанавливались продольные и поперечные скорости тонкослойной пачки, когда границы тонких слоёв заданы неточно: при средней толщине тонкого слоя 8 метров, координата точки разрыва  $z_k$  выбиралась с точностью  $\pm 2$  метра. Показано, что восстановление скоростей имеет приемлемую точность. Это говорит о том, что наибольший вклад в вариации функционала невязки вносят вариации продольных и поперечных скоростей в тонкослойной пачке. Очевидно, что точность восстановления зависила от контраста скоростей в слоях, увеличивалась или уменьшалась мощность слоёв при неточном задании его границ.

Таким образом, на основании ранее полученных результатов будем придерживаться следующей трёхэтапной процедуры решения обратной задачи по восстановлению скоростей  $v_p$ ,  $v_s$  и точек разрыва среды  $z_k$  в слоях среды:

- (1) зададим начальное приближение  $v_p^0$  и  $z_k^0$  и начнём минимизацию функционала невязки (16), строя минимизационную последовательность  $\{v_p\}^n$  и решая прямую задачу (12)-(15); остановим процес минимизации функционала невязки, как только скорость минимизации существенно упадёт; в результате имеем приближение  $v_p^i$ ;

- (2) возьмём в качестве начального приближения  $v_p^i$  и  $z_k^0$  для продолжения минимизации функционала невязки (16); строим минимизационную последовательность  $\{v_p, z_k\}^n$ , решая прямую задачу (12)-(15); прекратим процесс минимизации функционала невязки, используя критерий остановки; имеем значения  $v_p^s$  и  $z_k^s$ , которые будем считать окончательными приближениями для восстанавливаемых скорости  $v_p$  и точки разрыва среды  $z_k$ ;
- (3) используя уже восстановленные скорости  $v_p$  и точки разрыва среды  $z_k$ , выберем начальное приближение  $v_s^0$  и начнём минимизацию функционала невязки (11); решая прямую задачу (2)-(8), прекратим процесс минимизации функционала невязки, используя критерий остановки; получаем приближение  $v_s^l$ , которое будем считать окончательными для восстанавливаемой скорости  $v_s$ .

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В этом параграфе представлен численный эксперимент по восстановлению продольной и поперечных скоростей в тонкослойной пачке и уточнению местоположения границ тонких слоёв. Мы будем предполагать, что интервал  $[z_{s_1}, z_{s_2}]$  является тонкослойной пачкой ( $s_1 \leq n \leq s_2$ ), вмещающая среда известна, т.е. упругие параметры в  $[0, z_{s_1}]$  и в  $[z_{s_2}, \infty)$  известны. Плотность  $\rho$  известна в полуплоскости  $[0, \infty)$ . Для численного эксперимента были выбраны пачки, в которых толщина тонких слоёв составляет 7-9 метров.

Прежде чем далее описывать численный эксперимент, необходимо указать, как решать прямые задачи (2)-(8) и (12)-(15), как находить градиенты функционалов невязки (11) и (16) при вариациях скоростей  $v_p$ ,  $v_s$  и  $z_k$ .

Для решения прямых задач (2)-(8), (12)-(15) используется метод, основанный на сведении дифференциального уравнения второго порядка или системы дифференциальных уравнений второго порядка к дифференциальному уравнению Риккати или к матричному дифференциальному уравнению Риккати соответственно. Данный подход основан на результатах работ [18]-[26]. Используя данный метод для численного решения поставленных выше прямых задач, можно получить аналитические выражения для их решений, а поиск этих решений сведётся к рекуррентному пересчёту со слоя на слой, причем данные аналитические выражения могут быть представлены в таком виде, что ошибка округления не будет накапливаться при переходе от слоя к слою. Как вычислить производную  $\frac{\partial}{\partial z_k} J$  и градиент функционала невязки (16), можно найти в [27], для исследуемой в этой работе задачи все формулы получены в аналитическом виде. Для функционала невязки (11) можно также получить градиент в аналитическом виде, но строится он иначе (см. [28, 29]).

Как уже упоминалось выше, вопросы численного решения обратных задач по восстановлению упругих постоянных тонкослойных пачек были исследованы в работах [14]-[17], [27], [30]-[33]. Рассматривались изотропные и анизотропные среды. Были исследованы математические свойства обратных задач и функционала невязки, на основе которых были предложены алгоритмы восстановления продольный и поперечных скоростей в тонкослойных пачках. Во-первых, установлена возможность расщепления поставленной обратной задачи на серию последовательно решаемых обратных задач по восстановлению только части

восстанавливаемых коэффициентов. Во-вторых, предложена стратегия минимизации функционала невязки. Дело в том, что функционал невязки типа (11) или (16) при определённом наборе параметров имеет локальные минимумы и максимумы. Таковыми параметрами являются: значения пространственных и временных частот, их количество, интервалы, из которых они взяты, значение параметра затухания  $\alpha$  ( $p = -\alpha + i\omega$ ). Варьируя данные параметры во время минимизации удаётся влиять на поведение функционала невязки, что позволяет “обойти” локальные минимумы и достичь глобального. Данная стратегия использована и в этой работе.

Как уже говорилось, восстановление будет проходить в три этапа. Первый этап — восстановление скорости  $v_p$  в тонкослойной пачке. Второй этап — уточнение координат точек разрыва среды  $z_k$  тонкослойной пачки и скорости  $v_p$  в ней. Третий этап — восстановление  $v_s$ .

Дополнительная информация для обратной задачи насчитывается при помощи решения прямой задачи, затем вносилась случайная ошибка:

$$\tilde{u}(0, p) = u(0, p) \cdot \left( 1 + \frac{P}{100} \xi \right),$$

где  $P$  — процент вносимой ошибки,  $\xi$  — комплексная случайная величина из единичного круга. Везде ниже в численном эксперименте принято  $P = 20$  %.

*Первый этап.* Восстановление продольной скорости  $v_p$  осуществлялось в два шага при помощи ранее разработанной стратегии минимизации функционала невязки. На первом шаге параметры функционала невязки (16) выбирались следующим образом: параметр затухания  $\alpha = 10^{-2}$ , интервал временных частот — [10, 30] Гц, количество временных частот — 800. В качестве начального приближения выбиралась постоянная 2, 8 км/с во всех слоях. Минимизация велась до тех пор, пока скорость убывания значений функционала невязки не становилась слишком медленной. Второй шаг минимизации — параметры функционала невязки (16) выбирались следующими: параметр затухания  $\alpha = 10^{-2}$ , интервал временных частот — [10, 80] Гц, количество временных частот — 2000. В качестве начального приближения выбирался результат восстановления на предыдущем шаге.

*Второй этап.* Уточнение продольной скорости  $v_p$  и местоположения точек разрыва среды  $z_k$ . На этом этапе параметры функционала невязки (16) выбирались следующими: параметр затухания  $\alpha = 10^{-2}$ , интервал временных частот — [10, 80] Гц, количество временных частот — 2000.

*Третий этап.* Восстановление продольной скорости  $v_s$  с учётом уже восстановленных  $v_p$  и  $z_k$ . В качестве начального приближения можно взять любое корреляционное соотношение  $v_s^0 = c_1 v_p + c_2$ , где постоянные  $c_1$  и  $c_2$  известны из практики (простейшим корреляционным соотношением является  $v_s^0 = v_p / \sqrt{3}$ ). Параметры функционала невязки (11) выбирались следующими: параметр затухания  $\alpha = 10^{-2}$ , интервал временных частот — [10, 80] Гц, количество временных частот — 2000.

Для минимизации функционала невязки (16) был использован метод сопряженных градиентов. На первом шаге первого этапа градиент брался в виде

$$J' = (J'_{k_1}, \dots, J'_{k_2}),$$

где  $J'_{p,k}$  является компонентой градиента функционала невязки при вариации  $(v_p)_k$ , являющейся значением продольной скорости в слое  $k$ , и индексы от  $k_1$  до

$k_2$  — это номера слоёв, в которых восстанавливаются скорости  $v_p$ . На втором шаге градиент функционала невязки выбирался так

$$J' = (J'_{k_1}, \dots, J'_{k_2}, j'_{s_1}, \dots, j'_{s_2}),$$

где  $j'_k = \frac{\partial}{\partial z_k} J$  и индексы от  $s_1$  до  $s_2$  — это номера точек разрыва, которые восстанавливаются.

Следует указать, что для одновременного поиска таких разновеликих величин, как продольные скорости в тонких слоях и координаты точек разрыва, необходимо обезразмерить постановку прямой задачи (12)-(15). Для этого необходимо ввести новые функции и новую переменную:

$$\hat{v}_p = \frac{v_p}{C}, \quad b = \frac{\rho}{R}, \quad y = \frac{z}{L},$$

где  $C$  — некоторая величина, которая может быть выбрана как средняя скорость в тонкослоистой пачке,  $R$  — средняя плотность в тонкослоистой пачке,  $L$  — глубина, на которой залегает тонкослоистая пачка.

На рис. 1 представлены два примера восстановления параметров тонкослоистых пачек. Восстановление скоростей в тонкослоистой пачке и координат точек разрыва проходило в предположении, что нам известно количество слоёв, а координаты точек разрыва известны с точностью до  $\pm 1$  м, т.е. нам необходимо восстановить продольную и поперечную скорости в тонких слоях и уточнить местоположение границ этих слоёв. Как видно на рисунке, скорости в слоях и координаты разрыва среды восстанавливаются достаточно точно. Наименее точно восстанавливается местоположение границы, когда мал перепад скоростей.

Из работы [27] следует, что производная функционала невязки по координате точки границы  $j'_k$  может обращаться в нуль, не только в точке минимума, но и в случае, если граница отсутствует, т.е. когда в какой-то точке  $z_i$  имеют место следующие равенства:

$$[\rho]_{z_i} = 0, \quad [v_p^2]_{z_i} = 0.$$

Данное обстоятельство позволяет отказаться от предположения, что количество слоёв в тонкослоистой пачке заранее известно. На рис. 2 приведён пример восстановления двухслойной пачки. В качестве начального приближения была выбрана пятислойная пачка. Как видно, единственный разрыв был установлен.

#### 4. ВЫВОДЫ

На численных примерах показана возможность решения обратной динамической задачи морской сейсмоки по восстановлению продольной и поперечной скоростей и точек разрыва среды в тонкослоистой пачке. Скорости и местоположение точек разрыва среды могут быть восстановлены с достаточной точностью.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ: ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Поскольку модель среды является горизонтально-слоистой, следовательно, она обладает цилиндрической симметрией, тогда система дифференциальных уравнений теории упругости для смещений может быть записана в следующей

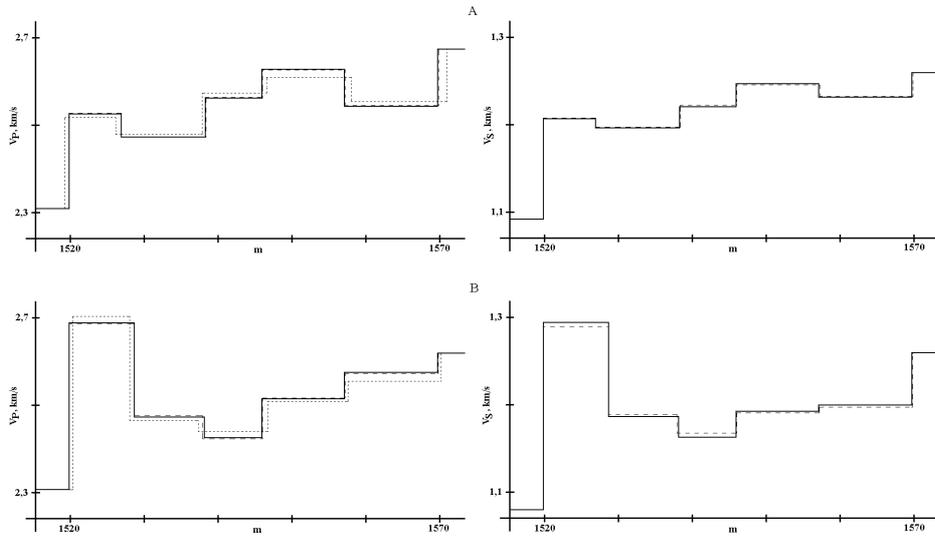


Рис. 1. Примеры восстановления продольной и поперечной скоростей тонкослойной пачки и местоположения точек разрыва среды  $z_k$ . Точное решение обратной задачи для  $v_p$  дано сплошной линией; приближение, полученное на первом этапе восстановления дано точечной линией; приближение, полученное после второго этапа восстановления, дано прерывистой линией. Точное решение обратной задачи для  $v_s$  дано сплошной линией, восстановленное — прерывистой линией.

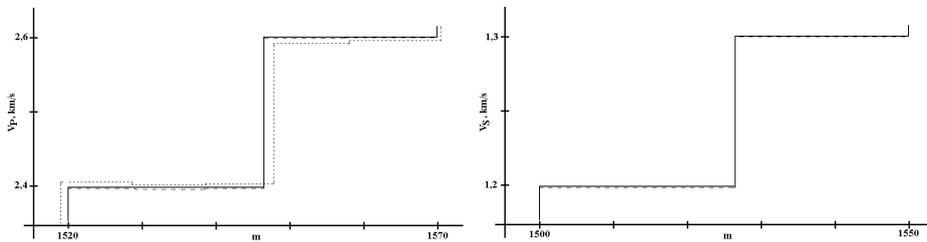


Рис. 2. Пример восстановления продольной и поперечной скоростей двухслойной пачки и местоположения точки разрыва среды, в качестве начального приближения была выбрана пятислойная пачка. Точное решение обратной задачи для  $v_p$  дано сплошной линией; приближение, полученное на первом этапе восстановления дано точечной линией; приближение, полученное после второго этапа восстановления, дано прерывистой линией. Точное решение обратной задачи для  $v_s$  дано сплошной линией, восстановленное — прерывистой линией.

форме:

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_r}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial z} \right) + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mathbf{u}_r) \right) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \lambda \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} (\mu \mathbf{u}_z) \right] - f(t) \delta''(r) \delta(z - z_*), \\ \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_z}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \mathbf{u}_z}{\partial r} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \left[ \mu \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda \mathbf{u}_r) \right] \right) - f(t) \delta'(r) \delta'(z - z_*),\end{aligned}$$

и к ней может быть применены преобразование Фурье-Бесселя по горизонтальной переменной  $r$  и преобразование Лапласа по переменной  $t$

$$\begin{aligned}u_r(p, \nu, x_3) &= \int_0^\infty e^{pt} \int_0^\infty v_1(t, r, x_3) r J_1(\nu r) dr dt, \\ u_z(p, \nu, x_3) &= \int_0^\infty e^{pt} \int_0^\infty v_2(t, r, x_3) r J_0(\nu r) dr dt,\end{aligned}$$

после чего приходим к следующему матричному дифференциальному уравнению:

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( A \frac{\partial}{\partial z} U + \nu B U \right) - \nu B' \frac{\partial}{\partial z} U - D U = \hat{F}(p, \nu, z, z_*),$$

где функции  $u_r(\nu, z, p)$ ,  $u_z(\nu, z, p)$  являются образами функции поперечных смещений  $\mathbf{u}_r(r, z, t)$  и продольных смещений  $\mathbf{u}_z(r, z, t)$ ;  $\nu, p = -\alpha + i\omega$  ( $\alpha > 0$ ) — параметры преобразований Фурье-Бесселя и Лапласа соответственно, и введены следующие обозначения:

$$U = \begin{bmatrix} u_r \\ u_z \end{bmatrix}, \quad \hat{F}(p, \nu, z, z_*) = f(p) \left( \nu \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta(z - z_*) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta'(z - z_*) \right),$$

$$A = \rho \begin{bmatrix} v_s^2 & 0 \\ 0 & v_p^2 \end{bmatrix}, \quad B = \rho \begin{bmatrix} 0 & -v_s^2 \\ v_p^2 - 2v_s^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \rho p^2 E + \rho \nu^2 \begin{bmatrix} v_p^2 & 0 \\ 0 & v_s^2 \end{bmatrix},$$

$\lambda, \mu$  — параметры Ламе,  $\rho$  — плотность и  $v_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$ ,  $v_s = \sqrt{(\mu)/\rho}$  — продольная и поперечная скорости в среде, которые являются кусочно-постоянными функциями; обозначение  $[f]_z$  использовано для склейки функции  $f$  в точке  $z$ , т.е.  $[f]_z = f(z+0) - f(z-0)$ ; штрих ' у матрицы означает операцию транспонирования.

Для слоистой среды мы можем к матричному дифференциальному уравнению добавить условие поглощения на бесконечности:

$$(18) \quad U \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow \infty),$$

и условия склейки

$$(19) \quad \left[ A \frac{\partial}{\partial z} U + \nu B U \right]_{z_k} = 0, \quad [U]_{z_k} = 0, \quad k = \overline{2, N_l},$$

означающие, что поля напряжений и смещений непрерывны.

Рассмотрим отдельно первый слой — воду. Поскольку в воде  $v_s = 0$ , из уравнений (17) получим:

$$(20) \quad -\nu \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \rho(p^2 + \nu^2 v_p^2) u_r = \nu f(p) \delta(z - z_*),$$

$$(21) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho v_p^2 u_r \right) - \rho p^2 u_z = -f(p) \delta'(z - z_*),$$

Отсутствие поля напряжений на поверхности воды задаётся краевым условием

$$(22) \quad \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho v_p^2 u_r \right) \Big|_{z=0} = 0.$$

На границе “вода/упругая среда” ( $z = z_1$ ) имеют место следующие условия склейки:

$$(23) \quad [u_z]_{z_1} = 0,$$

$$(24) \quad \left( \rho v_s^2 \frac{\partial u_r}{\partial z} + \nu \rho v_s^2 u_z \right) \Big|_{z=z_1+0} = 0,$$

$$(25) \quad \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho (v_p^2 - 2v_s^2) u_r \right) \Big|_{z=z_1+0} = \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho v_p^2 u_r \right) \Big|_{z=z_1-0}.$$

Перепишем дифференциальные уравнения (20)-(21) в эквивалентном виде, “убрав” дельта-функции, с помощью которых описывается источник, в склейку в точке  $z = z_*$ . Итак, имеем дифференциальные уравнения

$$(26) \quad -\nu \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \rho(p^2 + \nu^2 v_p^2) u_r = 0,$$

$$(27) \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho v_p^2 u_r \right) - \rho p^2 u_z = 0,$$

и условия склейки

$$(28) \quad [u_z]_{z_*} = -\frac{f(p)}{\rho v_p^2},$$

$$(29) \quad \left[ \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho v_p^2 u_r \right]_{z_*} = 0,$$

Нетрудно видеть, что функцию  $u_r$  можно выразить через  $u_z$  и получить дифференциальное уравнение только для  $u_z$ . Вначале предположим, что  $\nu \neq 0$ . Следствием уравнения (26) и условия склейки (29) является условие склейки

$$(30) \quad \left[ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right]_{z_*} = 0.$$

Следствием уравнения (26) и краевого условия (22) является краевое условие

$$(31) \quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right|_{z=0} = 0.$$

Из дифференциальных уравнений (26)-(27) следует дифференциальное уравнение для  $u_z$

$$(32) \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - r_p^2 u_z = 0, \quad r_p^2 = \nu^2 - p^2/v_p^2.$$

Следствием уравнения (26) и условия склейки (25) является условие склейки

$$(33) \quad \left( \rho v_p^2 \frac{\partial u_z}{\partial z} + \nu \rho (v_p^2 - 2v_s^2) u_r \right) \Big|_{z=z_1+0} = \left( \frac{\rho p^2}{r_p^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_1-0}.$$

Напомним, что все эти соотношения были получены в предположении, что  $\nu \neq 0$ , однако, все эти соотношения также имеют место, если в (22), (26), (27) и (29) положить  $\nu = 0$ , т.е. это говорит о том, что предельный переход при  $\nu \rightarrow 0$  является непрерывным.

Итак, чтобы определить продольные и поперечные смещения  $u_z$  и  $u_r$  в любой точке полупространства  $[0, \infty)$ , мы имеем следующие уравнения и условия:

- в воде для нахождения  $u_z$  решается дифференциальное уравнение (32),  $u_r$  связано с  $u_z$  соотношением (26);
- в полупространстве  $[z_1, \infty)$  для нахождения  $u_z$  и  $u_r$  решается матричное дифференциальное уравнение (17);
- краевое условие на поверхности воды (31);
- в точке  $z_*$  действуют условия склейки (28) и (30);
- в точках  $z_k$  действуют условия склейки (19);
- в точке  $z_1$  имеют место условия склейки (24) и (33);
- на бесконечности выполняется условие предельного поглощения (18).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Поперечные и обменные волны в сейсморазведке*, Недра, Москва, ред. Н.Н.Пузырев, 1967.
- [2] Н.Н.Пузырев, А.В.Тригубов, Л.Ю.Бродов, Г.В.Ведерников, К.А.Лебедев, И.Р.Оболенцева, Т.В.Нефедкина, Л.Н.Худобина, Б.П.Сибиряков, Т.Н.Куличихина, Г.Н.Лебедева, Л.В.Коржева, *Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн*, Недра, Москва, 1985.
- [3] *Многоволновые сейсмические исследования*, Наука, Москва, ред. Н.Н.Пузырев, 1987.
- [4] Н.Н.Пузырев, *Методы и объекты сейсмических исследований*, СО РАН, НИЦ ОИГГМ, Новосибирск, 1997.
- [5] Н.Н.Пузырев, *Некоторые замечания о путях развития сейсмических методов*, Геофизика **6** (1999), 3-5.
- [6] Н.Н.Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Возбуждение и регистрация волн*, Геология и Геофизика **44** (2003), 277-285.
- [7] Н.Н.Пузырев, *Зарождение и развитие многоволновой сейсморазведки в России. Интерпретация данных и результаты*, Геология и Геофизика, **44** (2003), 465-473.
- [8] А.С. Алексеев, *Некоторые обратные задачи теории распространения волн*, Известия АН, серия Геофизическая (1962), 1514-1531. MR0151313
- [9] А.С. Алексеев, *Обратные динамические задачи сейсмологии*, В кн.: *Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных*, Москва, 1967, 9-84.
- [10] А.С. Алексеев, В.И. Добринский, *Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмологии*, В кн.: *Математические проблемы геофизики*, ВЦ СО АН, Новосибирск, вып. 6, ч. 2, 1975, 7-53.

- [11] А.С. Алексеев, В.И. Добринский, Ю.П. Непрочнов, Г.А. Семенов, *К вопросу о практическом использовании теории обратных динамических задач сейсмоки*, Доклады АН СССР, **228** (1976), 1053-1056. MR0469173
- [12] А.С. Алексеев, А.В. Авдеев, А.Г. Фатъянов, В.А. Чеверда, *Замкнутый цикл математического моделирования волновых процессов в вертикально-неоднородных средах (прямые и обратные задачи)*, Математическое моделирование, **3** (1991), 80-94.
- [13] А.С. Алексеев, А.В. Авдеев, А.Г. Фатъянов, В.А. Чеверда, *Волновые процессы в вертикально-неоднородных средах: прямые и обратные задачи*. Новосибирск: Препринт ВЦ СО АН, № 924, 1991.
- [14] A.L. Karchevsky, *Several remarks on numerical solution of the one-dimensional coefficient inverse problem*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **10** (2002), 361-384.
- [15] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Numerical solution of the inverse problem for the elasticity system for horizontally stratified media*, Inverse Problems, **20** (2004), 953-976. MR2067510
- [16] A.L. Karchevsky, *Numerical reconstruction of medium parameters of member of thin anisotropic layers*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **12** (2004), 519-634. MR2111535
- [17] A.L. Karchevsky, *Analysis of solving of the inverse dynamical problem of seismics for horizontally stratified anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **47** (2006), 1150-1164.
- [18] В.И. Дмитриев, *Общий метод расчета электромагнитного поля в слоистой среде*, Вычислительные методы и программирование, **10** (1968), 55-65.
- [19] В.И. Дмитриев, Э.А. Федорова, *Численные исследования электромагнитных полей в слоистых средах*, Вычислительные методы и программирование, **32** (1980), 150-183.
- [20] Г.В. Аккуратов, В.И. Дмитриев, *Метод расчета поля установившихся упругих колебаний в слоистой среде*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **24** (1984), 272-286. MR0738069
- [21] А.Г. Фатъянов, Б.Г. Михайленко, *Метод расчета нестационарных волновых полей в неупругих слоисто-неоднородных средах*, Доклады РАН, **301** (1988), 834-839.
- [22] А.Г. Фатъянов, *Нестационарные сейсмические волновые поля в неоднородных анизотропных средах с поглощением энергии*. Новосибирск: 1989, Препринт ВЦ СО АН, № 857.
- [23] А.Г. Фатъянов, *Полуаналитический метод решения прямых динамических задач в слоистых средах*, Доклады РАН, **310** (1990), 323-327.
- [24] A.L. Karchevsky, *A numerical solution to a system of elasticity equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **46** (2005), 339-351.
- [25] А.Л. Карчевский, *Прямая динамическая задача сейсмоки для горизонтально-слоистых сред*, Сибирские Электронные Математические Известия, **2** (2005), 23-61.
- [26] A.L. Karchevsky, *A frequency-domain analytical solution of Maxwell's equations for layered anisotropic media*, Russian Geology and Geophysics, **48** (2007), 689-695.
- [27] A.L. Karchevsky, *Reconstruction of pressure velocities and boundaries of thin layers in thinly-stratified layers*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **18** (2010), 371-388.
- [28] A.L. Karchevsky, *The analytical formulas for the gradient of the residual functional for the coefficient inverse problem for the elasticity system*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems, **11** (2003), 619-629. MR2029525
- [29] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Optimization inversion of seismic data from layered media: an algorithm for gradient*, Russian Geology and Geophysics, **46** (2005), 439-447.
- [30] А.Л. Карчевский, *Численное решение одномерной обратной задачи для системы упругости*, Доклады РАН, **375** (2000), 235-238.
- [31] А.Л. Карчевский, А.Г. Фатъянов, *Численное решение обратной задачи для системы упругости с последствием для вертикально неоднородной среды*, Сибирский журнал вычислительной математики, **4** (2001), 259-269.
- [32] А.Л. Карчевский, *Алгоритм восстановления упругих постоянных анизотропного слоя, находящегося в изотропной горизонтально-слоистой среде*, Сибирские Электронные Математические Известия, **4** (2007), 20-51.
- [33] E. Kurpinar, A.L. Karchevsky, *Finding of the elastic parameters of a horizontal (thinly stratified) anisotropic layer*, Applicable Analysis, **87** (2008), 1179-1212.

АНДРЕЙ ЛЕОНИДОВИЧ КАРЧЕВСКИЙ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* `karchevs@math.nsc.ru`

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.307–С.313 (2011)*

УДК 512.5  
MSC 13A99**АДАПТИВНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ СИСТЕМ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (ОСОБЕННОСТИ  
ПОСТАНОВКИ И РЕШЕНИЯ)**

В. А. КОЧНЕВ

ABSTRACT. We propose a statistical approach for solving inverse geophysical problems which can be reduced to the solution of system of algebraic equations. The algorithm for solving the problem is shown. We show that in the particular case the algorithm reduces to the Kaczmarz method. Features of the method are illustrated by simple numerical examples. We conclude that the proposed method can solve both over-defined and under-defined system. It has regularization properties and allows to take into account errors in the initial data and the unknowns. The algorithm does not accumulate rounding errors, and, as experience has shown, can solve both linear and nonlinear problems with many variables.

**Keywords:** adaptive methods, statistical approach, inverse problems.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Предполагается, что имеется некоторая модель, характеризующаяся набором параметров. Это может быть вектор или набор векторов, матрица (2D или 3D) или набор матриц и векторов. Обозначим значения неизвестных параметров

$$X\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n\}$$

---

KOCHNEV, V.A., ADAPTIVE METHOD FOR SOLUTION OF SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS.

© 2011 Кочнев В.А..

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

Имеется математическая модель, связывающая неизвестные значения параметров с некоторым наблюдением, или преобразованным результатом наблюдения

$$U\{u_1, u_2, \dots, u_j, \dots, u_n\}$$

представленная в виде системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений

$$U = AX$$

$$U = f(X)$$

Предполагается, что известны начальные приближения параметров модели  $X_0$  и погрешности начальных приближений и погрешности данных, используемых для решения обратной задачи. Такая постановка называется статистической [1] и известно много методов ее решения. В частности, известна полная статистическая постановка, в которой задаются не только погрешности, но и ковариационные матрицы. Из общей статистической постановки нетрудно получить рекуррентный алгоритм, позволяющий уточнять оценки параметров, переходя последовательно от уравнения к уравнению. Достоинством рекуррентного метода является то, что он за один проход всех уравнений позволяет получить искомое решение и оценку ковариационной матрицы, а следовательно, и погрешности решений [2]. Однако он, как и многие другие методы, связанные с обращением и умножением матриц, позволяет решать системы с небольшим числом неизвестных (до 100). Это обусловлено следующими причинами.

- (1) С ростом числа уравнений растут ошибки, связанные с умножением матриц
- (2) Время счета растет пропорционально  $n^3$ .
- (3) Память, необходимая для хранения ковариационных матриц, растет пропорционально  $n^2$ .

В настоящее время наиболее существенной является причина 1. В период зарождения метода (1970-1980-е годы) были важны и другие причины [3,4].

В связи с этим возникла необходимость создания метода (в классе итерационных), который был бы лишен указанных недостатков. Толчком к этому послужила острая необходимость решения нелинейной обратной кинематической задачи сейсморазведки при многократных наблюдениях отраженных волн, в которой неизвестными являются и статические поправки (вектора) и значения нулевых времен и скоростей пробега волн (матрицы). В роли  $U$  выступают времена прихода отраженных волн, которые, естественно, содержат погрешности, не учитывать которые означает обрекать алгебраическую постановку решения на неудачу. Никакой метод, в том числе и в статистической постановке, и методы регуляризации по А.Н.Тихонову (в силу причин, указанных выше), не могли решать кинематическую задачу, в которой число неизвестных было около  $10^3 - 10^4$ , а сейчас при 3D-наблюдениях  $10^5$  и более. Метод обобщает детерминированный метод проекций, известный математикам как метод Качмажа. Обоснование метода, его исследование приводится в статьях, размещенных на сайте [5]. В данной работе приводится описание алгоритма и исследование на простых примерах.

## 2. АЛГОРИТМ МЕТОДА

Каждое неизвестное на  $k + 1$  шаге уточнения будет равно

$$(1) \quad x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}(D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k} (u_i - f(X^k))$$

где  $k = i + m(l - 1)$  — номер шага уточнения (не является показателем степени),  $i$  — порядковый номер уравнения,  $l$  — номер итерации,  $m$  — число уравнений в системе,  $j$  — порядковый номер неизвестного,  $n$  — число неизвестных,  $a_{ij}$  — коэффициент в  $l$ -ом уравнении  $j$ -го неизвестного. В случае нелинейной системы он будет зависеть от  $k$ ,  $D_{xj}^k = (\sigma_{xj}^2)^k$  — оценка дисперсии неизвестного на  $k$ -ом шаге,  $D_{ui} = \sigma_{ui}^2$  — дисперсия ошибки измерения параметра  $u$  в  $i$ -ом уравнении.

Оценка дисперсии  $x_j$  на каждом шаге уменьшается следующим образом.

$$(2) \quad D_{xj}^{k+1} = D_{xj}^k \left( 1 - \frac{a_{ij}^2 (D_{xj})^k}{D_{ui} + \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 (D_{xj})^k} \right)$$

Если  $\sigma_{ui}^2 = 0$ , а  $\sigma_{xj}^2 = 1$ , то из (1) получим

$$(3) \quad x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{a_{ij}}{\sum a_{ij}^2} (u_i - f(x^k))$$

Это и есть метод проекций или метод Качмажа (или Кацмарга, [6]). В методе Качмажа оператор (2) не участвует.

## 3. ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ, ИЛЛЮСТРИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА

Рассмотрим простейший пример и сравним адаптивный метод с методом проекций. Предположим, что имеем два неизвестных и всего одно уравнение (рис.1). Имея начальное приближение  $x_0, y_0$  и используя метод Качмажа, получим уточненное решение в основании перпендикуляра от априорной точки на линию уравнения. Используя адаптивный метод, положив  $\sigma_u = 0$ , а  $\sigma_x = \sigma_y = 1$ , получим то же самое решение. Но предположим, что нам известны  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  и они сильно отличаются. В таком случае, результат будет отличаться от предыдущего.

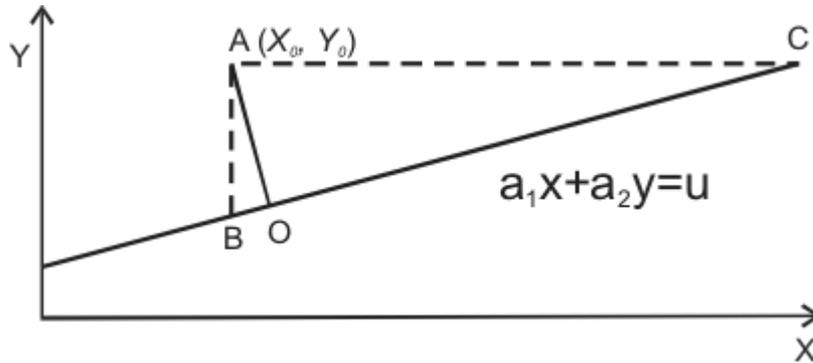


Рис. 1

Если  $\sigma_x = 0, \sigma_y = 1$ , то получим вариант решения в точке В, а если  $\sigma_x = 1, \sigma_y = 0$ , то в точке С. При других вариантах  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  получим одно из решений в интервале точек В и С. Будут те же проекции, но в пространстве, нормированном на дисперсии,  $D_x$  и  $D_y$ .

Решая эти примеры, мы предполагаем, что уравнение абсолютно достоверное, то есть  $u$  известно точно, т.е.  $\sigma_u = 0$ . А теперь предположим, что  $\sigma_u$  большое. При  $\sigma_u \rightarrow \infty$  уточнение вообще не будет происходить. При  $\sigma_u$ , меняющемся от 0 до  $\infty$ , решение будет занимать пространство в треугольнике АВС. На этом простом примере показываются регуляризующие возможности метода уточнения параметров.

Приведем простые задачи, допускающие проверку и наглядное представление результата.

Пример 1. От начального приближения  $x_0 = 0.5, y_0 = 3$ , используя различные итерационные методы, найти решение следующей системы:

$$\begin{aligned} x - y &= -1 \\ -0.5x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

Точное решение системы:  $x^* = 0, y^* = 1$ . Отклонение  $\Delta x = |x_0 - x^*| = 0.5$ ,  $\Delta y = |y_0 - y^*| = 2$ . Рассмотрим сначала наиболее благоприятные условия, положив  $\sigma_{x_0} = 0.5, \sigma_{y_0} = 2$ . Используя адаптивный метод, за 4 шага или 2 итерации приближаемся к точному решению (рис. 2). Этот же пример решим, положив  $\sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = 1$ . Как видно из рис. 2, такое же приближение удастся получить за 5 шагов, или 2.5 итерации. Уточнение на одном уравнении будем называть шагом, а уточнение на одной системе – итерацией. Следовательно, число шагов = число уравнений \* число итераций.

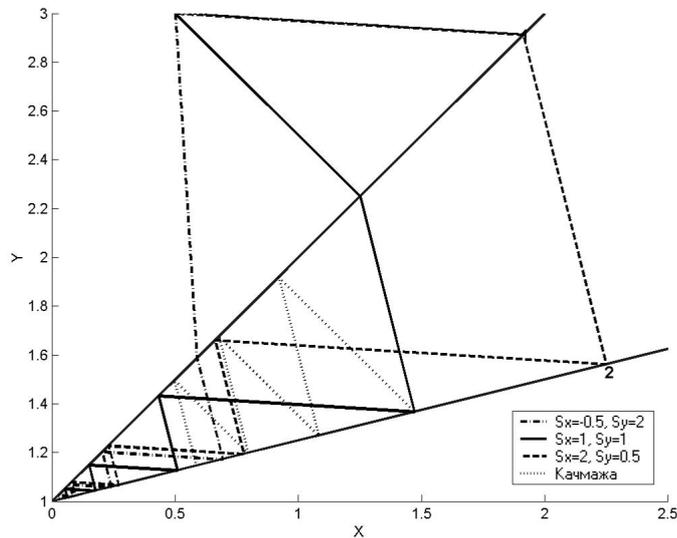


Рис. 2. Сопоставление итеративных методов решения системы линейных уравнений  $x - y = 1, -0.5x + 2y = 2$

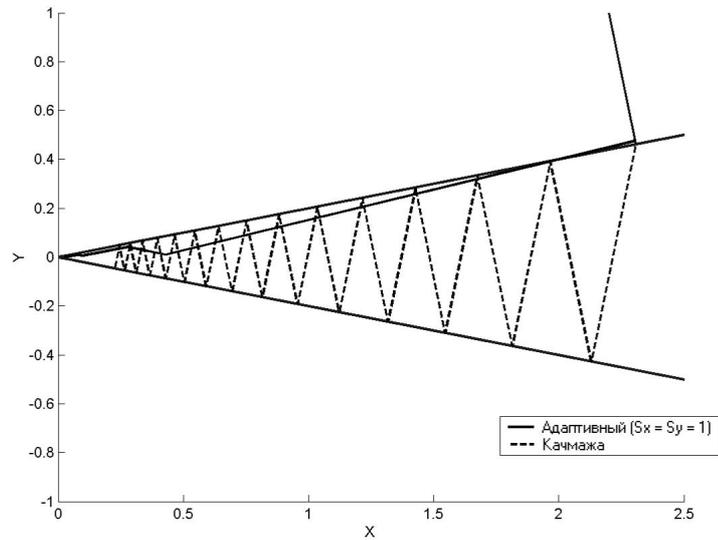


Рис. 3. Сопоставление методов при решении системы уравнений  $x - 5y = 0$ ,  $x + 5y = 0$

И, наконец, предположим, что априорная информация о достоверности неверна, приняв  $\sigma_{x_0} = 2$ ,  $\sigma_{y_0} = 0.5$ . На рис. 2 видим, что для получения того же результата необходимо на две итерации больше, чем в первом варианте и на одну по сравнению со вторым. Для сопоставления на рис. 2 приведена траектория результатов, полученных с помощью метода Качмажа. В данном примере большая скорость сходимости оказалась у адаптивного метода (при всех вариантах АСКО), а медленная – у метода Качмажа.

Пример 2. Начиная от точки  $x_0 = y_0 = 2$ , найдем решение системы численными итерационными методами

$$x - 5y = 0$$

$$x + 5y = 0$$

Следует заметить, что решить эту систему методами покоординатного спуска без поворота системы координат нельзя. Они не дают решения, т.к. не сходятся. Метод Качмажа (рис. 3) сходится на каждом шаге, но по мере приближения к решению скорость сходимости постепенно уменьшается. Что касается адаптивного метода (рис. 3), то его траектория становится более “целеустремленной” по мере приближения к решению. Это объясняется тем, что из-за больших коэффициентов перед  $y$ ,  $\sigma_y^2$  сильно уменьшается и невязка в большей степени идет на уточнение координаты  $x$ .

Пример 3. Начиная от точки  $x_0 = 0.5$ ,  $y_0 = 3$  с использованием адаптивного метода найдем решение несовместной системы трех уравнений.

$$x - y = -1$$

$$-0.5 + 2y = 2$$

$$0.333x + y = 2.167$$

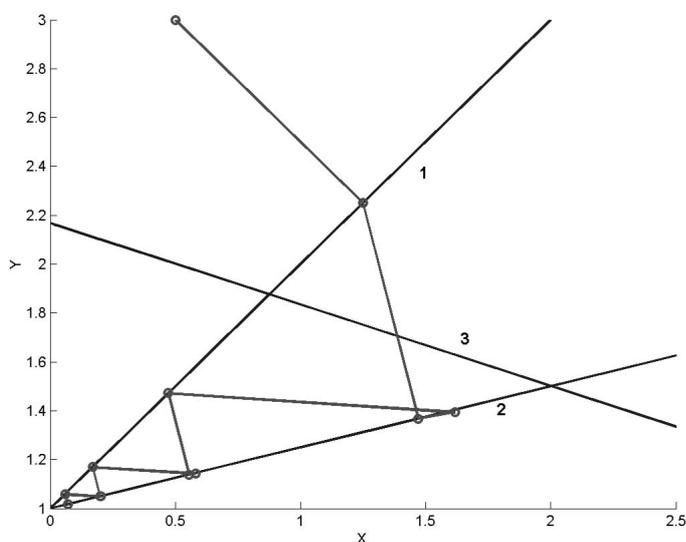


Рис. 4. Траектория поиска адаптивным методом решения неравноточной системы  $x - y = 1$ ;  $-0.5x + 2y = 2$ ;  $0.333x + y = 2.167$ ,  $\sigma_{u_1} = \sigma_{u_2} = 0.001$ ;  $\sigma_{u_3} = 0.5$

имеющих различные погрешности правых частей

$$\sigma_{u_1} = \sigma_{u_2} = 0.001; \quad \sigma_{u_3} = 0.5; \quad \sigma_x = \sigma_y = 1$$

Из рис. 4 видно, что траектория решения приближается к точке пересечения 1 и 2 линий, а уравнение 3 оказывает влияние только при первом (с его участием) уточнении (отрезок от 2 к 3 шагу), пока  $\sigma$  являются большими. Пример 4. Используя адаптивный метод, найдем решение системы из примера 3, приняв  $\sigma_{u_1} = \sigma_{u_2} = \sigma_{u_3} = 0.5$ . Как видно из рис. 5, решение постепенно приближается к центру треугольника.

#### 4. ВЫВОДЫ

- Метод обладает большей скоростью сходимости, чем метод проекций.
- Может решать системы, где число неизвестных больше, чем число уравнений, и наоборот.
- Обладает гибкими свойствами регуляризации.
- Метод не накапливает ошибок округления, так как в нем нет умножения матриц и позволяет решать системы с большим числом неизвестных. В настоящее время реально решаются задачи с числом неизвестных  $10^4$  и более.

Исследование свойств метода при решении реальных задач приведены во многих геофизических публикациях автора и его коллег. Читатель может найти эти примеры на сайте [5] и работах [7], [3], [8].

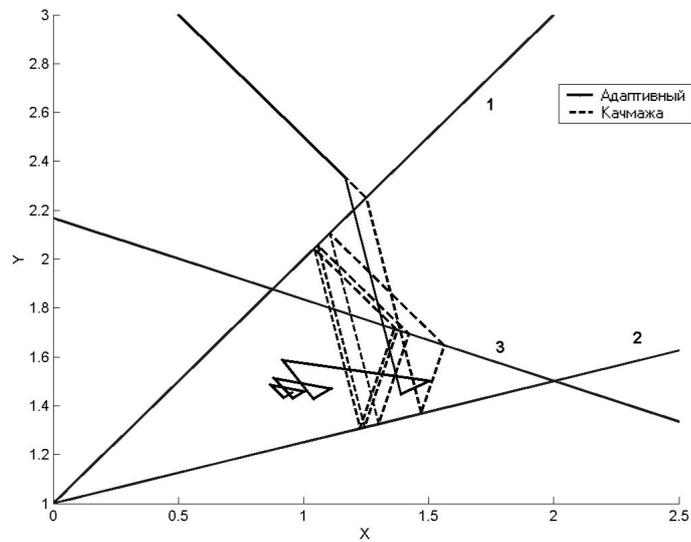


Рис. 5. Траектория решения адаптивным методом системы трех уравнений с двумя неизвестными.  $\sigma_{u1} = \sigma_{u2} = \sigma_{u3} = 0.5$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Гольцман Ф.М. *Статистические модели интерпретации*. М.: Наука, 1971. 328 p.
- [2] Tarantola A., Valette B. *Generalized nonlinear inverse problems solved using the least squares criterion*. Reviews of Geophysics and Space Physics. 1982. Vol. 20, № 2. P. 219-232. MR0656250
- [3] Кочнев В.А. *Адаптивные методы интерпретации сейсмических данных*. Новосибирск: Наука, 1988. 152 p.
- [4] Кочнев В.А. *Прослеживание волн и оценка их параметров способом меняющихся эталонов*. Сб. Обработка данных сейсморазведки на ЭВМ. Тр. Зап.Сиб. НИГНИ. 1974. № 72.
- [5] *Обратные задачи геофизики* [Электронный ресурс]. URL: <http://geoph.krasn.ru/> (проверен: 21.04.2011).
- [6] *Сейсмическая томография*. М.: Мир, 1990. 416 p.
- [7] Кочнев В.А. *Адаптивное прослеживание сейсмических волн и оценка их параметров*. Геология и геофизика. 1983. № 2. P. 95-104.
- [8] Кочнев В.А. *Адаптивные методы решения обратных задач геофизики*. Красноярск: ВЦ СО РАН, 1993. 130 p.

Владимир Алексеевич Кочнев  
 Институт вычислительного моделирования СО РАН,  
 АКАКДЕМГОРОДОК,  
 660036, КРАСНОЯРСК, РОССИЯ  
 E-mail address: [kochnev@icm.krasn.ru](mailto:kochnev@icm.krasn.ru)

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
"Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач"  
Часть I, стр. С.314–С.319 (2011)*

УДК 519.63  
MSC 34K28,65

## К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В.Г. ЛЕЖНЕВ, А.Н. МАРКОВСКИЙ

**АБСТРАКТ.** The gridless method and algorithm of approximate solution for the inverse heat conduction problem are proposed; the results of the numerical experiment are produced.

**Keywords:** Heat conduction equation, inverse heat conduction problem, complete systems, computational approaches.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В цилиндрической области  $Q \times (0, T) \ni (x, t)$ , где  $Q$  – ограниченная односвязная область в  $R^n$  ( $n = 1, 2$ ) с кусочно-гладкой границей рассматривается обратная краевая задача для уравнения теплопроводности:

$$(1) \quad u_t(x, t) = \Delta u(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q \times (0, T),$$

с граничными условиями

$$(2) \quad u(x, t) = 0, \quad x \in \partial Q,$$

требуется найти начальную функцию

$$(3) \quad \varphi(x) = u(x, 0),$$

такую что для решения  $u(x, t)$  выполняется при  $t = T$  равенство

$$(4) \quad u(x, T) = z(x), \quad x \in Q,$$

---

LEZHNEV V. G., MARKOVSKIY A. N., ABOUT SOLUTION OF INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM.

© 2011 Лежнев В.Г., Марковский А.Н..

Работа поддержана проектом (2.1.1./3828) программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010)" Министерства образования и науки Российской Федерации.

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

2. О ПРИБЛИЖЕННОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Покажем, что обратная задача (1)–(4) может быть решена приближённо с любой точностью, именно, что для любого  $\varepsilon > 0$  и суммируемой функции  $z(x)$  существует функция  $\varphi(x)$  и решение  $u^N(x, t)$  прямой задачи (1)–(3) такие что

$$\|z(x) - u^N(x, T)\| < \varepsilon.$$

Обозначим через  $\varphi_n(x)$  решение спектральной задачи:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n(x) &= \lambda_n\varphi_n(x), \quad x \in Q, \\ \varphi_n(x)|_S &= 0. \end{aligned}$$

Система функций  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , образует ортонормированный базис в  $L_2(Q)$  и  $\lambda_n < 0$ ,  $\lambda_n \rightarrow -\infty$  при  $n \rightarrow \infty$  [3].

Воспользуемся разложением заданных функций

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\varphi_n(x), \\ z(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n\varphi_n(x). \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию

$$u^N(x, t) = \sum_{n=1}^N c_n(t)\varphi_n(x),$$

подставим в уравнение (1) и продифференцируем почленно,

$$\sum_{n=1}^N \dot{c}_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n c_n(t)\varphi_n(x) + \sum_{n=1}^N a_n(t)\varphi_n(x).$$

Для коэффициентов  $c_n(t)$  получаем задачу Коши:

$$\begin{aligned} \dot{c}_n(t) &= \lambda_n c_n(t) + a_n(t), \quad t \in (0, T), \\ c_n(T) &= b_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

и искомые коэффициенты  $c_n(t)$  имеют вид

$$c_n(t) = b_n e^{-\lambda_n(T-t)} - e^{\lambda_n t} \int_t^T a_n(\tau) e^{-\lambda_n \tau} d\tau, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Функция  $u^N(x, t)$  является решением обратной задачи (1)–(4) с заданной функцией

$$u^N(x, T) = \sum_{n=1}^N c_n(T)\varphi_n(x) =: z^N(x),$$

когда начальное условие имеет вид

$$(5) \quad \varphi(x) = \sum_{n=1}^N c_n(0)\varphi_n(x).$$

Так как для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой что

$$\|z(x) - u^N(x, T)\| = \|z(x) - z^N(x)\| < \varepsilon,$$

то  $u^N(x, t)$  – приближённое решение обратной задачи (1)–(4) с начальной функцией (5).

Так как  $z(x)$  – произвольная функция из  $L_2(Q)$ , то доказано следующее утверждение.

**Лемма 1.** *Множество следов  $u(x, T)$  решений  $u(x, t)$  задачи теплопроводности (1) – (4) образуют всюду плотное множество в пространстве  $L_2(Q)$ .*

Отметим, что коэффициенты  $c_n(0)$  являются, вообще говоря, сильно растущими, то есть задача обратной теплопроводности не корректна.

### 3. ПОЛНОТА СИСТЕМ ИСТОКООБРАЗНЫХ ФУНКЦИЙ

Множество функций  $u(x, T)$  – следов решений прямой задачи теплопроводности при  $t = T$  для начальных функций  $u(x, 0) \in L_2(Q)$ , будем называть истокообразными функциями. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.** *Если  $\{u_n(x, 0)\}_{n=1}^{\infty}$  – полная в  $L_2(Q)$  система начальных функций, то система  $\{u_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$  полна на множестве истокообразных функций.*

Действительно, для произвольной истокообразной функции  $h(x)$  существует решение  $v(x, t)$  прямой задачи с начальной функцией  $v_0(x)$  такое что  $h(x) = v(x, T)$ .

Обозначим  $\alpha_n(x) = u_n(x, 0)$ , и рассмотрим линейную комбинацию

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N A_n u_n(x, t)$$

решений прямой задачи (1) – (4) с начальными функциями  $\alpha_n(x)$ .

Для разности  $w(x, t) = v(x, t) - u(x, t)$  имеем

$$w_t(x, t) = \Delta w(x, t), \quad x \in Q,$$

$$w|_S = 0,$$

$$w|_{t=0} = v_0(x) - \sum_{n=1}^N A_n \alpha_n(x).$$

Умножим дифференциальное уравнение на  $w(x, t)$  и проинтегрируем по  $Q$ , получим

$$\frac{1}{2} \int_Q \frac{\partial}{\partial t} w^2(x, t) dx = \int_Q w(x, t) \Delta w(x, t) dx = - \int_Q |\nabla w(x, t)|^2 dx,$$

и тогда

$$\int_Q \frac{\partial}{\partial t} w^2(x, t) dx < 0.$$

Интегрируя по отрезку  $(0, T)$  получаем

$$\int_Q w^2(x, T) dx < \int_Q w^2(x, 0) dx.$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$(6) \quad \int_Q w^2(x, T) dx < \left\| v_0(x) - \sum_{n=1}^N A_n \alpha_n(x) \right\|^2.$$

Так как система функций  $\alpha_n(x)$  полна в  $L_2(Q)$ , то для  $\varepsilon > 0$  найдется их линейная комбинация с коэффициентами  $A_n$  так что правая часть в (6) будет меньше  $\varepsilon$ . Подставляя вместо  $w(x, T)$  её представление, имеем

$$\left\| h(x) - \sum_{n=1}^N A_n u_n(x, T) \right\|^2 < \varepsilon,$$

то есть система следов  $u_n(x, T)$  при  $t = T$  полна на множестве истокообразных функций.

**Следствие 1.** Система следов  $\{u_n(x, T)\}_{n=1}^{\infty}$  решений прямой задачи теплопроводности полна в  $L_2(Q)$ , если множество их начальных функций  $u_n(x, 0)$  является полным в  $L_2(Q)$ .

#### 4. АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Выберем полную в  $L_2(Q)$  последовательность функций  $\{\omega_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , например, полную последовательность ступенчатых функций. Обозначим через  $u_n(x, t)$  решение прямой задачи теплопроводности (1)–(3) с начальной функцией  $\omega_n(x)$ .

Так как последовательность функций  $u_n(x, T)$  полна в  $L_2(Q)$ , то заданную при  $t = T$  функцию  $z(x)$  в обратной задаче можно аппроксимировать суммой вида

$$(7) \quad \sum_{n=1}^N B_n u_n(x, T).$$

Коэффициенты  $B_n$  определяются, например, минимизацией функции

$$(8) \quad F(B_1, \dots, B_N) = \left\| z(x) - \sum_{n=1}^N B_n u_n(x, T) \right\|^2.$$

Следовательно, приближенным решением обратной задачи (1)–(4) – искомой начальной функцией – является функция

$$(9) \quad \varphi^N(x) = \sum_{n=1}^N B_n \omega_n(x).$$

#### 5. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для решения обратной задачи в одномерном случае при  $Q = (0, 1)$  и  $f(x, t) = 0$  рассмотрим функцию

$$z(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 0.5], \\ 1 - x, & x \in [0.5, 1], \end{cases}$$

принятую в качестве модельной в монографии [1], где разрабатывается метод квазиобращения, состоящий в замене оператора, для которого нельзя обратить направление времени близким к нему оператором, допускающим обращение; так, для оператора теплопроводности добавляется малое слагаемое  $\varepsilon \Delta^2$ , ( $\varepsilon > 0$ ), что приводит к повышению порядка уравнения и заданию дополнительных граничных условий, а также ряду трудностей в случае сложной геометрии области  $Q$ .

В качестве функции  $\omega_n(x)$  возьмём систему потенциалов

$$\omega_n(x) = \ln [(x - x_n)^2 + y_n^2], \quad n = 1, 2, \dots,$$

полную в  $L_2(0, 1)$ , если последовательность точек  $(x_n, y_n)$  удовлетворяет условию базисности [4].

Положим

$$\{x_n, y_n\} = \left\{ -0.5 + \frac{2n-2}{N-1}, -0.33 + 0.1 \left[ \frac{n}{2} \right] \right\},$$

где  $N$  – число точек взятых для аппроксимации.

Для приближённого решения  $N$  прямых задач можно использовать, например, метод Фурье – представление решения в виде ряда

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^K c_{n,k}(t) \sin(\pi k x),$$

$$c_{n,k}(t) = 2 \int_0^1 \omega_k(\xi) \sin(\pi n \xi) d\xi,$$

где  $K$  – число членов ряда, достаточное для требуемой точности.

Поскольку последовательность функций  $u_n(x, T)$  полна в  $L_2(Q)$ , то заданную при  $t = T$  функцию  $z(x)$  можно аппроксимировать суммой вида (7), и коэффициенты аппроксимации определить посредством минимизации функционала (8). Необходимое условие экстремума приводит к решению линейной алгебраической системы уравнений  $Ac = b$  с матрицей Грама:

$$a_{i,j} = \int_0^1 u_i(\xi, T) u_j(\xi, T) d\xi, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

и правой частью

$$b_i = \int_0^1 z(\xi) u_i(\xi, T) d\xi, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

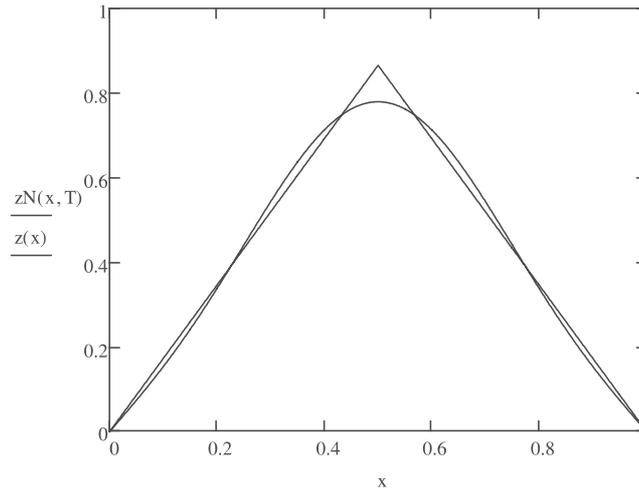


Рис. 1. Графики функций  $z(x)$  и  $z^N(x)$ ,  $\delta = 5.7 \cdot 10^{-4}$

Приближённое решение обратной задачи (1)–(4) – искомая начальная функция – представляется в виде (8).

Для оценки точности решения используем норму разности

$$\delta = \|z(x) - z^N(x)\|,$$

где  $z^N(x)$  – решение  $u(x, t)$  при  $t = T$  прямой задачи с искомой начальной функцией (8).

На рисунке представлены результаты численного расчёта при  $N = 40$ ,  $K = 20$ ,  $T = 0.1$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Латтес Р., Лионс Ж.-Л., *Метод квазиобращения и его приложения*. М.: Мир, 1970. 280 с. MR0281365
- [2] Владимиров В. С., *Уравнения математической физики*. М.: Наука, 1981. 512 с. MR0653331
- [3] Михайлов В. П., *Дифференциальные уравнения в частных производных*. М.: Наука, 1983. 424 с. MR0701394
- [4] Лежнев А. В., Лежнев В. Г., *Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики*. Краснодар: КубГУ, 2009, 111 с.

ВИКТОР ГРИГОРЬЕВИЧ ЛЕЖНЕВ  
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
ул. СТАВРОПОЛЬСКАЯ, 149.  
35000, КРАСНОДАР, РОССИЯ  
*E-mail address:* lzhnv@mail.kubsu.ru

АЛЕКСЕЙ НИКОЛАЕВИЧ МАРКОВСКИЙ  
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
ул. СТАВРОПОЛЬСКАЯ, 149.  
35000, КРАСНОДАР, РОССИЯ  
*E-mail address:* mark@kubsu.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.320–С.339 (2011)*

УДК 517.972.5  
MSC 49N45**ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  
ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ НА  
ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ОПЕРАТОРА  
ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ МОДЕЛИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

А.В. ПЕНЕНКО

ABSTRACT. An inverse coefficient heat conduction problem in layered medium is considered. Given boundary measurement data one has to determine thermal diffusivity coefficient. The paper is devoted to the construction of a numerical algorithm for the solution of the problem. The algorithm considered is a Newton-type algorithm regularized with truncated SVD and Morozov discrepancy principle. The emphasis of the paper is set on the development of numerical schemes suitable to work with piecewise-constant equation coefficients. The realized algorithm is tested in numerical experiments.

**Keywords:** inverse heat conduction problem, thermal diffusivity coefficient, numerical schemes, layered medium, truncated singular value decomposition.

---

PENENKO A.V., NUMERICAL ALGORITHM FOR THERMAL DIFFUSIVITY COEFFICIENT IDENTIFICATION IN LAYERED MEDIUM BASED ON THE SINGULAR VALUE DECOMPOSITION OF SENSITIVITY OPERATOR FOR HEATCONDUCTION COEFFICIENT INVERSE PROBLEM.

© 2011 Пененко А.В.

Работа поддержана Программами фундаментальных исследований №4 Президиума РАН и №3 Отделения математических наук РАН, проектом РФФИ 11-01-00673, госконтрактом № 14.740.11.0350 по программе «Проведение научных исследований коллективами научно-образовательных центров в области математики» ФЦП «Научно-педагогические кадры инновационной России».

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

1. ВВЕДЕНИЕ

В промышленности в настоящее время происходит активное расширение сферы применения многослойных композитных материалов. Их использование позволяет увеличить срок эксплуатации производимых изделий и улучшить их свойства. При этом естественно возникает необходимость решения задач неразрушающего контроля качества и состояния изделий из таких материалов.

Обычно, в процессе неразрушающего контроля образец подвергается некоторому воздействию, например, тепловому, радиационному или ультразвуковому, и измеряется его отклик на такое воздействие. Связать измеренные данные со структурой исследуемого образца можно посредством математической модели соответствующего физического процесса, решив определенным образом поставленную коэффициентную обратную задачу (см. например [1, 2]). Именно поэтому разработка эффективных алгоритмов решения таких задач имеет большое практическое значение.

В данной работе описан численный алгоритм ньютоновского типа решения обратной задачи, использующий регуляризацию посредством сингулярной срезки и принципа невязки Морозова. Основное внимание в работе уделено описанию набора численных схем, использованных для реализации этого алгоритма.

Статья имеет следующую структуру: в разделе 2 дана постановка обратной задачи (пункт 2.1), а также перечислены свойства оператора чувствительности модели процесса теплопроводности (пункт 2.2), связывающего разницу в коэффициентах температуропроводности модельных сред с разницей их откликов на один и тот же приложенный поток тепла; В разделе 3 описывается численный алгоритм решения обратной задачи: в пункте 3.1 строится набор численных схем, используемых для вычисления оператора чувствительности модели, а в пункте 3.2 приводится алгоритм ньютоновского типа, использующий сингулярную срезку оператора чувствительности; В разделе 4 представлены результаты численных экспериментов, проведенных посредством рассматриваемого алгоритма.

2. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

**2.1. Постановка обратной задачи.** Предположим, что исследуемый образец состоит из слоев с различными теплофизическими свойствами, причем эти свойства не изменяются на протяжении измерительного эксперимента. Кроме того, ограничимся случаем, когда теплоемкости слоев близки, а теплопроводности различны. Такое предположение верно, например, для титан-алюминиевых образцов.

В дальнейшем будут использоваться следующие обозначения: НКБ - неравенство Коши-Буняковского, ОНБ - ортонормированный базис, ГП - гильбертово пространство, ДР - дифференциально-разностный, КТП - коэффициент температуропроводности,  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_2(0,1)}$ ,  $I(a, b)$  - индикаторная функция отрезка  $(a, b)$ ,  $\{a, b\}$  - дискретное множество  $a, \dots, b$ ,  $I\{a, b\}$  - индикаторная функция дискретного множества  $\{a, b\}$ ,  $\{e_i\}_{i=1}^N$  - конечная ( $N < \infty$ ) или бесконечная ( $N = \infty$ ) последовательность  $e_1, \dots, e_N$ ,  $u(x+) := u(x+0)$ ,  $u(x-) := u(x-0)$ ,  $[u](x) := u(x+) - u(x-)$ .

Множество КТП смоделируем посредством множества  $K \subset L_2[0, 1]$  кусочно-постоянных функций на  $[0, 1]$  с разрывами в точках

$$(1) \quad 0 = x_1 < \dots < x_i < \dots < x_{N+1} = 1, \quad N \in \mathbb{N},$$

и значениями

$$(2) \quad 0 < k_{\min} \leq k_{(i+0.5)} \leq k_{\max} < \infty$$

на интервалах постоянства  $(x_i, x_{i+1})$ .

Назовем прямой задачу моделирования распределения температуры по известному коэффициенту температуропроводности и потоку тепла, приложенному к границе образца:

**Определение 1.** Решением прямой задачи при  $\{\alpha, k\} \in C_0^1[0, 1] \times K$  называется функция  $u \in \bigcap_{i=1}^N C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0, 1)) \bigcap_{i=1}^N C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0, 1])$  такая, что

$$(3) \quad u_t = (k_{(i+0.5)} u_x)_x, \quad (x, t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0, 1), \quad i \in \{1, N\},$$

$$(4) \quad k_{(1+0.5)} u_x(0+, t) = \alpha(t), \quad k_{(N+0.5)} u_x(1-, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$(5) \quad [u](x_i, t) = 0, \quad [ku_x](x_i, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i \in \{2, N\},$$

$$(6) \quad u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$(7) \quad u(0+, t) = f(t), \quad t \in [0, 1],$$

$$(8) \quad u \in \bigcap_{i=1}^N (C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0, 1)) \cap C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0, 1])).$$

Обозначим это решение через  $u(\cdot, \cdot; \alpha, k)$ .

**Определение 2.** Решением обратной задачи называется функция  $k \in K$  такая, что при  $\alpha \in C_0^1[0, 1]$  и заданной  $f$

$$u(0+, t; \alpha, k) = f(t), \quad t \in [0, 1].$$

**Определение 3.** Для  $\alpha \in C_0^1[0, 1]$  определим оператор прямой задачи

$$A : \begin{cases} K \rightarrow L_2(0, 1) \\ k \mapsto u(0+, t; \alpha, k) \end{cases}.$$

В этих обозначениях

**Определение 4.** Для  $\{\alpha, f\} \in C_0^1[0, 1] \times A(K)$  решением обратной задачи назовем функцию  $k_* \in K$  такую, что

$$A(k_*) = f.$$

Функцию  $f$  будем называть данными обратной задачи.

**2.2. Оператор чувствительности.** Функции чувствительности для модели (3)-(6) могут быть агрегированы в оператор чувствительности, который связывает разницу в модельных КТП с разницей смоделированных для этих КТП температурных откликов на поток тепла, приложенный к границе образца:

$$\mathcal{L}[\bar{k}, k] : \begin{cases} L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1) \\ y \mapsto \int_0^1 [V[k, x]^* U[\bar{k}, \alpha] y](x) dx \end{cases}, \quad \bar{k}, k \in K.$$

Оператор чувствительности строится из решений прямых и сопряженных задач:

$$(9) \quad U[k, x] : \begin{cases} L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1) \\ \alpha \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} u_x(x, \cdot; \alpha_n, k) \end{cases}, \quad k \in K, \quad x \in \bigcup_{i=1}^N (x_i, x_{i+1})$$

$$(10) \quad \{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^1[0, 1], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha,$$

$$(11) \quad V[k, x] : \begin{cases} L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1) \\ \alpha \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} v_x(x, \cdot; \alpha_n, k) \end{cases},$$

где функция  $v(x, \cdot; \mu, k)$  определяется как решение сопряженной задачи

$$(12) \quad -v_t = (k_{(i+0.5)} v_x)_x, \quad (x, t) \in (x_i, x_{i+1}) \times (0, 1), \quad i \in \{1, N\},$$

$$(13) \quad k_{(1+0.5)} v_x(0+, t) = \alpha(t), \quad k_{(N+0.5)} v_x(1-, t) = 0, \quad t \in [0, 1],$$

$$(14) \quad [v](x_i, t) = 0, \quad [kv_x](x_i, t) = 0, \quad t \in [0, 1], \quad i \in \{2, N\},$$

$$(15) \quad v(x, 1) = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$(16) \quad v \in \bigcap_{i=1}^N (C^{2,1}((x_i, x_{i+1}) \times (0, 1)) \cap C^{1,0}([x_i, x_{i+1}] \times [0, 1])).$$

Кроме того, для любых  $k, \bar{k}, k_* \in K$ ,  $f = A(k_*)$ ,  $\alpha \in C_0^1[0, 1]$ , имеют место следующие свойства [3]:

- связь между откликами и коэффициентом температуропроводности

$$(17) \quad A(k) - f = \mathcal{L}[k_*, k](k - k_*) = \mathcal{L}[k, k_*](k - k_*),$$

- связь с производной Фреше оператора прямой задачи

$$(18) \quad A'(k) = \mathcal{L}[k, k],$$

- компактность оператора чувствительности

$$(19) \quad \|V[k, \cdot]^* U[\bar{k}, \cdot] \alpha\|_{L_2((0,1) \times (0,1))} \leq \frac{\|\alpha\|}{k_{min}^2},$$

- свойство Липшицевости оператора чувствительности

$$\|V[k, \cdot]^* U[\bar{k}, \cdot] \alpha - V[k, \cdot]^* U[k_*, \cdot] \alpha\|_{L_2((0,1) \times (0,1))} \leq \frac{\|\alpha\| \|\bar{k} - k_*\|}{k_{min}^3}.$$

Введение оператора чувствительности позволяет применять для исследования обратной задачи методы анализа линейных операторов, такие как, например, сингулярное разложение [4].

### 3. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

**3.1. Вычисление алгоритмических конструкций.** При вычислении оператора чувствительности обратной задачи возникает необходимость решения краевых задач для параболических уравнений. Специфику рассматриваемой в статье обратной задачи определяют разрывные коэффициенты уравнений и необходимость как можно более точного учёта краевых условий.

Точному аналитическому решению поддается довольно узкий класс краевых задач для параболических уравнений. Основными же методами являются разностные методы и методы конечных элементов (см. например [5],[6],[7],[8]). В первом случае дифференциальные соотношения заменяются разностными конструкциями, а во втором - задача рассматривается в обобщенной постановке и решается с использованием базисных функций в конечномерных подпространствах.

Синтезом обозначенных подходов являются дискретно-аналитические схемы [9],[10],[11],[12],[13],[14]. В отличие от метода конечных элементов, решение здесь ищется не на произвольных конечномерных пространствах, а на пространствах, составленных из локальных фундаментальных решений дифференциального уравнения. В этих схемах также могут участвовать, например, разностные соотношения. В работе [15] был предложен вариационный подход к построению таких схем, основанный на аналитических решениях локально-сопряженных краевых задач. После проведения дискретизации по времени, этот метод обеспечивает точный учет условий на границах раздела слоев и на внешних границах области. Она был взят за основу для построение набора численных схем для реализации алгоритма решения обратной задачи. При этом дифференциальная модель (3)-(6) была дискретизована по времени: на  $[0, 1]$  вводилась равномерная сетка  $\{t_j\}_{j=1}^{M+1}$  с шагом  $\tau = 1/M$ , и рассматривалась следующая ДР краевая задача:

**Определение 5.** Решением ДР прямой задачи при  $\{\alpha, k\} \in L_2(0, 1) \times K$  называется функция  $u(\cdot, j) \in \prod_{i=1}^N C^2(x_i, x_{i+1}) \prod_{i=1}^N C^1[x_i, x_{i+1}]$ ,  $j \in \{1, M\}$  такая, что

$$(20) \quad \frac{u(x, j) - u(x, j-1)}{\tau} = (k(x)u_x(x, j))_x, \\ x \in (x_i, x_{i+1}), (i, j) \in \{1, N\} \times \{1, M\},$$

$$(21) \quad ku_x(0+, j) = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \alpha(\tau) d\tau =: \alpha_M(j), ku_x(1-, j) = 0, j \in \{1, M\},$$

$$(22) \quad [u](x_i, j) = 0, [ku_x](x_i, j) = 0, (i, j) \in \{2, N\} \times \{1, M\},$$

$$(23) \quad u(x, j) = 0, x \in [0, 1], j < 1.$$

Обозначим это решение через  $u_M(\cdot, \cdot; \alpha, k)$ .

Соответствующая ей сопряженная задача выглядит следующим образом:

**Определение 6.** Решением ДР сопряженной задачи при  $\{\mu, k\} \in L_2(0, 1) \times K$  называется функция  $v(\cdot, j) \in \prod_{i=1}^N C^2(x_i, x_{i+1}) \prod_{i=1}^N C^1[x_i, x_{i+1}]$ ,  $j \in \{1, M\}$  такая, что

$$(24) \quad \frac{v(x, j) - v(x, j+1)}{\tau} = (k(x)v_x(x, j))_x, \\ x \in (x_i, x_{i+1}), \quad (i, j) \in \{1, N\} \times \{1, M\},$$

$$(25) \quad kv_x(0+, j) = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \mu(\tau) d\tau =: \mu_M(j), \quad kv_x(1-, j) = 0, \quad j \in \{1, M\},$$

$$(26) \quad [v](x_i, j) = 0, \quad [kv_x](x_i, j) = 0, \quad (i, j) \in \{2, N\} \times \{1, M\},$$

$$(27) \quad v(x, j) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad j > M.$$

Обозначим это решение через  $v_M(\cdot, \cdot; \alpha, k)$ .

Заметим, что в данном частном случае формально краевая задача (24)-(27) отличается от краевой задачи (20)-(23) только направлением времени (при соответствующем сопоставлении краевых и начальных условий). Поэтому для решения сопряженной задачи можно после незначительной модификации использовать численную схему алгоритма решения прямой задачи. Сопряженная задача выбрана так, что выполнялось тождество Лагранжа:

**Лемма 1** (о тождестве Лагранжа для ДР задачи, аналогично [16]). Для любых  $\tilde{k}, \hat{k} \in K$  и  $\alpha, \mu \in L_2(0, 1)$  верно соотношение

$$\sum_{j=1}^M \left( u_M(0, j; \alpha, \tilde{k}) - u_M(0, j; \alpha, \hat{k}) \right) \mu_M(j) \tau = \\ = \int_0^1 (\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)) \left( \sum_{j=1}^M (u_M)_x(x, j; \alpha, \tilde{k}) (v_M)_x(x, j; \mu, \hat{k}) \tau \right) dx.$$

**Лемма 2** (об операторе чувствительности для ДР задачи). Пусть  $\tilde{k}, \hat{k} \in K$ ,  $\alpha \in L_2(0, 1)$ , тогда

$$A_M(\tilde{k}) - A_M(\hat{k}) = \mathcal{L}_M[\tilde{k}, \hat{k}](\tilde{k} - \hat{k}),$$

где

$$(28) \quad A_M(k) = \sum_{l=1}^M u_M(0, l; \alpha, k) I(t_l, t_{l+1}), \\ \mathcal{L}_M[\tilde{k}, \hat{k}] \sum_{i=1}^N y_{(i+0.5)} I(x_i, x_{i+1}) = \\ = \sum_{i=1}^N y_{(i+0.5)} \frac{1}{\tau} \sum_{l=1}^M \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{j=1}^M \tilde{u}_x(x, j) \hat{v}_x(x, M - (l - j)) \tau dx I(t_l, t_{l+1}), \\ \tilde{u}(x, j) := u_M(x, j; \alpha, \tilde{k}), \\ \hat{v}(x, j) := v_M(x, j; I(t_M, t_{M+1}), \hat{k}).$$

*Доказательство.* Рассмотрим набор функций  $\mu_l = \frac{1}{\tau} I(t_l, t_{l+1})$ , тогда по Лемме 1 верно соотношение

$$u_M(0, l; \alpha, \tilde{k}) - u_M(0, l; \alpha, \hat{k}) = \\ = \int_0^1 (\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)) \left( \sum_{j=1}^M (u_M)_x(x, j; \alpha, \tilde{k}) (v_M)_x(x, j; \frac{1}{\tau} I(t_l, t_{l+1}), \hat{k}) \tau \right) dx.$$

Так как  $(v_M)_x(x, j; \frac{1}{\tau} I(t_l, t_{l+1}), \hat{k}) = \frac{1}{\tau} (v_M)_x(x, M - (l - j); I(t_M, t_{M+1}), \hat{k})$ , то

$$(29) \quad u_M(0, l; \alpha, \tilde{k}) - u_M(0, l; \alpha, \hat{k}) = \\ = \int_0^1 (\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)) \frac{1}{\tau} \left( \sum_{j=1}^M \tilde{u}_x(x, j) \hat{v}_x(x, M - (l - j)) \tau \right) dx.$$

Умножим выражение (29) на  $I(t_l, t_{l+1})$  и просуммируем по  $l$  от 1 до  $M$ , в результате чего получим

$$A_M(\tilde{k}) - A_M(\hat{k}) = \int_0^1 (\tilde{k}(x) - \hat{k}(x)) \sum_{l=1}^M \left( \sum_{j=1}^M \tilde{u}_x(x, j) \hat{v}_x(x, M - (l - j)) \tau \right) dx \frac{1}{\tau} I(t_l, t_{l+1}).$$

Вводя обозначение (28) получим утверждение леммы. □

Таким образом, для построения оператора чувствительности ДР задачи, требуется вычислять интегралы по пространству от производных решений ДР прямой и сопряженной задач. По структуре они являются скалярными произведениями вида  $\int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)b(x)dx$ . По следующей Лемме (о свойствах коэффициентов Фурье), их вычисление можно свести к суммированию абсолютно сходящихся рядов, содержащих коэффициенты Фурье по ОНБ пространства  $L_2(x_i, x_{i+1})$ :

**Лемма 3** (о свойствах коэффициентов Фурье, [17]). *Для того, чтобы ортонормированная система  $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ , была ОНБ ГП  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы для любых элементов  $f, g \in H$  имели место равенства*

$$\|f\|_H^2 = \sum_{l=1}^\infty \langle f, e_l \rangle_H^2, \quad \langle f, g \rangle_H = \sum_{l=1}^\infty \langle f, e_l \rangle_H \langle g, e_l \rangle_H.$$

*Для того, чтобы ортонормированная система  $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ , была ОНБ пространства  $H$ , необходимо и достаточно, чтобы линейное многообразие, натянутое на эту систему было всюду плотным в  $H$  множестве.*

Более того, оказывается, что в нашем случае эти коэффициенты можно вычислить аналитически (Лемма 5 и Следствие 1), так как они являются линейными комбинациями значений пространственных производных в точках разрыва коэффициента. Результаты суммируются в Лемме 7. Для удобства дальнейшего изложения, введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} s_l^{i+0.5} &:= \sqrt{\frac{2}{h_{i+0.5}}} \sin\left(\frac{\pi l(x-x_i)}{h_{i+0.5}}\right) I[x_i, x_{i+1}], \\ c_l^{i+0.5} &:= \sqrt{\frac{2}{h_{i+0.5}}} \cos\left(\frac{\pi l(x-x_i)}{h_{i+0.5}}\right) I[x_i, x_{i+1}], \\ H_{i+0.5} &:= \frac{h_{i+0.5}}{\sqrt{\tau k_{(i+0.5)}}}, \quad \langle a, b \rangle_{i+0.5} := \int_{x_i}^{x_{i+1}} a(x)b(x)dx, \\ S_i^+(x) &:= \frac{\text{Sinh}\left(H_{i+0.5} \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+0.5}}\right)}{\text{Sinh}(H_{i+0.5})}, \quad S_i^-(x) := \frac{\text{Sinh}\left(H_{i-0.5} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-0.5}}\right)}{\text{Sinh}(H_{i-0.5})}, \\ F_i^+(j) &:= \langle u(\cdot, j), S_i^+ \rangle_{i+0.5}, \quad F_i^-(j) := \langle u(\cdot, j), S_i^- \rangle_{i-0.5}, \\ \Phi_l^{i+0.5} &:= \langle S_l^+, s_l^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}. \end{aligned}$$

**Лемма 4** (об ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ , [18]). *Системы функций  $\{s_l^{i+0.5}\}_{l=1}^\infty$ ,  $\{c_l^{i+0.5}\}_{l=1}^\infty$  являются ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ . Кроме того, при  $x \in (x_i, x_{i+1})$ , они связаны соотношениями*

$$s_l^{i+0.5} = -\frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left( c_l^{i+0.5} \right)_x, \quad c_l^{i+0.5} = \frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left( s_l^{i+0.5} \right)_x.$$

В Лемме 9 мы увидим, как применение локально-сопряженных задач позволяет разделить решение задачи на вычисления в отдельных слоях. В Леммах 5-7,10-11 будут приведены утверждения, которые позволяют организовать эти вычисления внутри слоев. Они в основном сводятся к вычислениям интегралов, и в данной работе они были осуществлены посредством Лемм 3, 4 и спектральных методов решения краевых задач математической физики.

**Лемма 5** (о производной решения в области). Пусть при всех  $j \in \{1, M\}$  заданы  $\alpha_{\pm}(j)$ ,  $u(x, j) \in C^2(x_i, x_{i+1}) \cap C^1[x_i, x_{i+1}]$  - решение задачи

$$(30) \quad \frac{u(x, j) - u(x, j-1)}{\tau} = k_{(i+0.5)} u_{xx}(x, j), \\ (x, j) \in (x_i, x_{i+1}) \times \{1, M\},$$

$$(31) \quad \tau k_{(i+0.5)} u_x(x_i, j) = \tau \alpha_-(j), \quad \tau k_{(i+0.5)} u_x(x_{i+1}, j) = \tau \alpha_+(j), \quad j \in \{1, M\},$$

$$(32) \quad u(x, j) = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad j < 1,$$

тогда

$$\left\langle u_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} \Phi_l^{i+0.5} \sum_{m=1}^j \frac{\tau \alpha_-(m) + (-1)^{l+1} \tau \alpha_+(m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-m}}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\hat{u}$  - решение краевой задачи

$$\frac{u(x, j)}{\tau} = k_{(i+0.5)} u_{xx}(x, j), \quad (x, j) \in (x_i, x_{i+1}) \times \{1, M\},$$

с краевыми условиями (31). Её единственное решение даётся выражением

$$\hat{u}(x, j) = \frac{-\tau \alpha_-(j) \text{Cosh}\left(H_{i+0.5} \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+0.5}}\right) + \tau \alpha_+(j) \text{Cosh}\left(H_{i+0.5} \frac{x-x_i}{h_{i+0.5}}\right)}{\text{Sinh}(H_{i+0.5})} \frac{H_{i+0.5}}{h_{i+0.5}}.$$

Проифференцируем:

$$\hat{u}_x(x, j) = \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} (\tau \alpha_-(j) S_i^+ + \tau \alpha_+(j) S_{i+1}^-), \\ (33) \quad \left\langle \hat{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} (\tau \alpha_-(j) + (-1)^{l+1} \tau \alpha_+(j)) \Phi_l^{i+0.5}.$$

Пусть теперь  $\tilde{u}(x, j)$  - решение краевой задачи (30) при заданном  $j$  с краевыми условиями

$$(34) \quad u_x(x_i, j) = u_x(x_{i+1}, j) = 0.$$

Домножим (30) скалярно на  $c_l^{i+0.5}$ :

$$(35) \quad \left\langle \tilde{u}(\cdot, j), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} - \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_{xx}(\cdot, j), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \left\langle u(\cdot, j-1), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5}.$$

Преобразуем отдельно левую и правую части (35). Для левой части (35) с учетом (34) и Леммы 4 (об ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ ):

$$(36) \quad \begin{aligned} & \left\langle \tilde{u}(\cdot, j), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} - \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_{xx}(\cdot, j), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \\ & = \left\langle \tilde{u}(\cdot, j), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} + \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), (c_l^{i+0.5})_x \right\rangle_{i+0.5} = \\ & = \frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left\langle \tilde{u}(\cdot, j), (s_l^{i+0.5})_x \right\rangle_{i+0.5} - \frac{\pi l}{h_{i+0.5}} \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \\ & = -\frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} - \frac{\pi l}{h_{i+0.5}} \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5}. \end{aligned}$$

Для правой части (35) с учетом Леммы 4 (об ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ ):

$$(37) \quad \left\langle u(\cdot, j-1), c_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = -\frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left\langle u_x(\cdot, j-1), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5}.$$

Сопоставляя (35), (36) и (37), получим

$$-\frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} - \frac{\pi l}{h_{i+0.5}} \tau k_{(i+0.5)} \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \\ = -\frac{h_{i+0.5}}{\pi l} \left\langle u_x(\cdot, j-1), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5},$$

откуда

$$(38) \quad \left\langle \tilde{u}_x(\cdot, j), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5} = \frac{\left\langle u_x(\cdot, j-1), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5}}{1 + \tau k_{(i+0.5)} \left(\frac{\pi l}{h_{i+0.5}}\right)^2} = \frac{\left\langle u_x(\cdot, j-1), s_l^{i+0.5} \right\rangle_{i+0.5}}{1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2}}.$$

По принципу суперпозиции решение задачи (30)-(32) можно представить в виде суммы

$$(39) \quad u(x, j) = \hat{u}(x, j) + \tilde{u}(x, j).$$

Объединим (39), (33), (38) и начальное условие (32):

$$\begin{aligned} \langle u_x(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} &= \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} \Phi_i^{i+0.5} (\tau \alpha_-(j) + (-1)^{l+1} \tau \alpha_+(j)) + \frac{\langle u_x(\cdot, j-1), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}}{1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2}} = \\ &= \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} \left( \sum_{m=1}^j \frac{\tau \alpha_-(m) \Phi_i^{i+0.5}}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-m}} + \sum_{m=1}^j \frac{\tau \alpha_+(m) (-1)^{l+1} \Phi_i^{i+0.5}}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-m}} \right). \end{aligned}$$

□

**Следствие 1** (о производной решения сопряженной задачи в области). Пусть при всех  $j \in \{1, M\}$  заданы  $\mu_{\pm}(j)$ , и  $v(x, j) \in C^2(x_i, x_{i+1}) \cap C^1[x_i, x_{i+1}]$  - решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{v(x, j) - v(x, j+1)}{\tau} &= k_{(i+0.5)} v_x(x, j), \\ (x, j) &\in (x_i, x_{i+1}) \times \{1, M\}, \\ \tau k_{(i+0.5)} v_x(x_i, j) &= \tau \mu_-(j), \quad \tau k_{(i+0.5)} v_x(x_{i+1}, j) = \tau \mu_+(j), \quad j \in \{1, M\}, \\ v(x, j) &= 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad j > M, \end{aligned}$$

тогда

$$\langle v_x(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \frac{H_{i+0.5}^2}{h_{i+0.5}^2} \Phi_i^{i+0.5} \sum_{m=j}^M \frac{\tau \mu_-(m) + (-1)^{l+1} \tau \mu_+(m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{m-j}}.$$

Для дальнейших выкладок и, в частности, для вычисления оператора чувствительности, нам понадобится определить вспомогательные функции  $S^{\pm}$  и  $G^{\pm}$  и исследовать их свойства:

**Лемма 6** (о вспомогательных функциях). Верно представление

$$(40) \quad \langle S_{i+1}^-, s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = (-1)^{l+1} \Phi_i^{i+0.5}.$$

Для  $H, H_1, H_2 > 0$ ,  $p \in \mathbb{N}$  ряды в правых частях

$$(41) \quad S^{\pm}(p, H) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} (\pi l)^2 H^{-4}}{(1 + (\pi l)^2 H^{-2})^{p+2}},$$

$$(42) \quad G^{\pm}(p, \tilde{H}, \hat{H}) = 2 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=0}^p \frac{(\pm 1)^{l+1} (\pi l)^2}{(1 + (\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j+1} (1 + (\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{p-j+1}},$$

сходятся абсолютно, и для  $L \in \mathbb{N}$  верны соотношения

$$(43) \quad 2 \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{(\pi l)^2 H^{-4}}{(1 + (\pi l)^2 H^{-2})^{p+2}} \leq \frac{2h_{i+0.5}}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^L \frac{1}{l^2} \right),$$

$$(44) \quad \begin{aligned} 2 \sum_{l=L+1}^{\infty} \sum_{j=0}^p \frac{(\pi l)^2}{(1 + (\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j+1} (1 + (\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{p-j+1}} &\leq \\ &\leq \frac{2 \max\{\tilde{H}, \hat{H}\}^4}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^L \frac{1}{l^2} \right). \end{aligned}$$

Для произвольных  $\{a(m)\}_{m=1}^j, \{b(m)\}_{m=1}^j$  верны соотношения

$$(45) \quad \begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j (\Phi_l^{i+0.5})^2 \frac{a(m) + (-1)^{l+1} b(m)}{(1 + (\pi l)^2 H^{-2})^{j-m}} = \\ = h_{i+0.5} \sum_{m=1}^j (S^+(j-m, H) a(m) + S^-(j-m, H) b(m)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} \tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l^{i+0.5} \hat{\Phi}_l^{i+0.5} I\{1, j\}(m) I\{j, M\}(n)}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}} = \\ = h_{i+0.5}^{-3} G^{\pm} \left( n - m, \tilde{H}, \hat{H} \right). \end{aligned}$$

*Доказательство.* Если раскрыть все обозначения, то можно убедиться в справедливости представления

$$\begin{aligned} \Phi_l^{i+0.5} &= \langle S_i^+, s_l^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \frac{\sqrt{2h_{i+0.5}\pi l}}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2}) \tilde{H}_{i+0.5}^2}, \\ \langle S_{i+1}^-, s_l^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} &= \frac{(-1)^{l+1} \sqrt{2h_{i+0.5}\pi l}}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2}) \tilde{H}_{i+0.5}^2} = (-1)^{l+1} \Phi_l^{i+0.5}. \end{aligned}$$

Для  $l \in \mathbb{N}$  верно цепочка оценок

$$\begin{aligned} \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{(\Phi_l^{i+0.5})^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2})^p} &= \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{\left( \frac{\sqrt{2h_{i+0.5}\pi l}}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2}) \tilde{H}_{i+0.5}^2} \right)^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2})^p} = \\ &= 2h_{i+0.5} \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-4}}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2})^{p+2}} \leq 2h_{i+0.5} \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-4}}{((\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2})^2} = \\ &= 2h_{i+0.5} \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{1}{(\pi l)^2} = \frac{2h_{i+0.5}}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^L \frac{1}{l^2} \right). \end{aligned}$$

По определению функций из (41) и в силу равномерной сходимости соответствующих рядов, верно соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^j (\Phi_l^{i+0.5})^2 \frac{a(m) + (-1)^{l+1} b(m)}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}_{i+0.5}^{-2})^{j-m}} = \\ = h_{i+0.5} \sum_{m=1}^j (S^+(j-m, H)a(m) + S^-(j-m, H)b(m)). \end{aligned}$$

Заметим, сначала, что при  $n \geq j \geq m$ ,  $L \geq 0$

$$\begin{aligned} \sum_{l=L+1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{l+1} 2(\pi l)^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m+1} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j+1}} \right| \leq \\ \leq \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2(\pi l)^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m+1} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j+1}} \leq \\ (46) \quad \leq \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2(\pi l)^2}{(1+(\pi l)^2 \max\{\tilde{H}, \hat{H}\}^{-2})^{n-m+2}} \leq \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{2(\pi l)^2}{((\pi l)^2 \max\{\tilde{H}, \hat{H}\}^{-2})^2} \leq \\ \leq 2 \max\{\tilde{H}, \hat{H}\}^4 \sum_{l=L+1}^{\infty} \frac{1}{(\pi l)^2} = \frac{2 \max\{\tilde{H}, \hat{H}\}^4}{\pi^2} \left( \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^L \frac{1}{l^2} \right). \end{aligned}$$

Используя (40) и учитывая, что ряд из (46) сходится абсолютно, из (42) получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} \tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l^{i+0.5} \hat{\Phi}_l^{i+0.5} I\{1, j\}(m) I\{j, M\}(n)}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}} = \\ = \sum_{j=m}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} \tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l^{i+0.5} \hat{\Phi}_l^{i+0.5}}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}} = \\ = \frac{\tilde{H}^2 \hat{H}^2}{h_{i+0.5}^4} \sum_{j=m}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} \tilde{\Phi}_l^{i+0.5} \hat{\Phi}_l^{i+0.5}}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}} = \\ = \frac{\tilde{H}^2 \hat{H}^2}{h_{i+0.5}^4} \sum_{j=m}^n \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} 2h_{i+0.5}(\pi l)^2}{\tilde{H}^2 \hat{H}^2 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m+1} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j+1}} = \\ = h_{i+0.5}^{-3} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=m}^n \frac{(\pm 1)^{l+1} 2(\pi l)^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m+1} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j+1}} = \\ = h_{i+0.5}^{-3} \sum_{j=0}^{n-m} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} 2(\pi l)^2}{(1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j+1} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-m-j+1}} = \\ = h_{i+0.5}^{-3} G^{\pm} \left( n - m, \tilde{H}, \hat{H} \right). \end{aligned}$$

□

Так как в реальных вычислениях можно считать только конечные отрезки рядов, составляющих специальные функции  $S^{\pm}$  и  $G^{\pm}$ , то соотношения (43) и (44) оказываются полезными для оценки остатков соответствующих рядов.

**Лемма 7** (о вычислении интегральных агрегатов). Для  $\alpha, \mu \in L_2(0, 1)$ ,  $\hat{k}, \tilde{k} \in K$  верно представление

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \left( \int_{x_i}^{x_{i+1}} (u_M)_x(x, j; \alpha, \tilde{k}) (v_M)_x(x, j; \mu, \hat{k}) dx \right) \tau = \\ & = \begin{bmatrix} \overline{\tau z_-}^* & \overline{\tau z_+}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda^+ & \Lambda^- \\ \Lambda^- & \Lambda^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\tau w_-} \\ \overline{\tau w_+} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

где компоненты векторов и матриц с индексами  $m, n \in \{1, M\}$  вычисляются по формулам

$$(47) \quad (\overline{\tau z_{\pm}})_m := \tau \tilde{k}_{(i+0.5)} (u_M)_x(x_{i+0.5 \pm 0.5}, m; \alpha, \tilde{k}),$$

$$(48) \quad (\overline{\tau w_{\pm}})_m := \tau \hat{k}_{(i+0.5)} (v_M)_x(x_{i+0.5 \pm 0.5}, m; \mu, \hat{k}),$$

$$(49) \quad (\Lambda^{\pm})_{mn} := \tau h_{i+0.5}^{-3} G^{\pm} (n - m, \tilde{H}_{i+0.5}, \hat{H}_{i+0.5}),$$

$$\tilde{H}_{i+0.5} = \frac{h_{i+0.5}}{\sqrt{\tau \tilde{k}_{(i+0.5)}}}, \quad \hat{H}_{i+0.5} = \frac{h_{i+0.5}}{\sqrt{\tau \hat{k}_{(i+0.5)}}}.$$

*Доказательство.* Обозначим  $\tilde{H} = \tilde{H}_{i+0.5}$ ,  $\hat{H} = \hat{H}_{i+0.5}$ ,  $\tilde{\Phi}_l = \frac{\sqrt{2h_{i+0.5}\pi l \tilde{H}^{-2}}}{1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2}}$ ,  $\hat{\Phi}_l = \frac{\sqrt{2h_{i+0.5}\pi l \hat{H}^{-2}}}{1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2}}$ ,  $u(x, j) = u_M(x, j; \alpha, \tilde{k})$ ,  $v(x, j) = v_M(x, j; \mu, \hat{k})$ ,

$$\begin{aligned} (\underline{\Lambda}_-(H, j, l))_m &:= \frac{H^2}{h_{i+0.5}^2} \frac{\Phi_l I\{1, j\}}{(1+(\pi l)^2 H^{-2})^{j-m}} =: (-1)^{l+1} (\underline{\Lambda}_+(H, j, l))_m, \\ (\overline{\Lambda}_-(H, j, l))_m &:= \frac{H^2}{h_{i+0.5}^2} \frac{\Phi_l I\{j, M\}}{(1+(\pi l)^2 H^{-2})^{m-j}} =: (-1)^{l+1} (\overline{\Lambda}_+(H, j, l))_m. \end{aligned}$$

и перейдём к векторно-матричным обозначениям из (47), (48). По Лемме 5 (о производной решения в области) и След. 1 (о производной решения сопряженной задачи в области)

$$(50) \quad \begin{aligned} \langle u_x(\cdot, j), s_{i+0.5}^l \rangle_{i+0.5} &= (\overline{\tau z_-})^* \underline{\Lambda}_- (\tilde{H}, j, l) + (\overline{\tau z_+})^* \underline{\Lambda}_+ (\tilde{H}, j, l), \\ \langle v_x(\cdot, j), s_{i+0.5}^l \rangle_{i+0.5} &= \overline{\Lambda}_- (\hat{H}, j, l) \tau w_- + \overline{\Lambda}_+ (\hat{H}, j, l) \tau w_+. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(51) \quad \begin{aligned} (\underline{\Lambda}_- (\tilde{H}, j, l) \overline{\Lambda}_- (\hat{H}, j, l)^*)_{mn} &= (\underline{\Lambda}_+ (\tilde{H}, j, l) \overline{\Lambda}_+ (\hat{H}, j, l)^*)_{mn} = \\ &= \frac{\tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l \hat{\Phi}_l I\{1, j\}(m) I\{j, M\}(n)}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}}, \\ (\underline{\Lambda}_+ (\tilde{H}, j, l) \overline{\Lambda}_- (\hat{H}, j, l)^*)_{mn} &= (\underline{\Lambda}_- (\tilde{H}, j, l) \overline{\Lambda}_+ (\hat{H}, j, l)^*)_{mn} = \\ &= \frac{(-1)^{l+1} \tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l \hat{\Phi}_l I\{1, j\}(m) I\{j, M\}(n)}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}}. \end{aligned}$$

По Леммам 3 (о свойствах коэффициентов Фурье), 4 (об ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ ), 6 (о сходимости вспомогательных функций)

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M \langle u_x(\cdot, j), v_x(\cdot, j) \rangle_{i+0.5} \tau = \\ & = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{\infty} \langle v_x(\cdot, j), s_{i+0.5}^l \rangle_{i+0.5} \langle u_x(\cdot, j), s_{i+0.5}^l \rangle_{i+0.5} \tau = \\ & = \overline{\tau z_-}^* \Lambda^+ \overline{\tau w_-} + \overline{\tau z_+}^* \Lambda^- \overline{\tau w_-} + \overline{\tau z_-}^* \Lambda^- \overline{\tau w_+} + \overline{\tau z_+}^* \Lambda^+ \overline{\tau w_+}, \end{aligned}$$

где, из (50)-(51),

$$(\Lambda^{\pm})_{mn} := \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} \tilde{H}^2 \hat{H}^2 \tilde{\Phi}_l \hat{\Phi}_l I\{1, j\}(m) I\{j, M\}(n)}{h_{i+0.5}^4 (1+(\pi l)^2 \tilde{H}^{-2})^{j-m} (1+(\pi l)^2 \hat{H}^{-2})^{n-j}} \tau.$$

По Лемме 6 (о сходимости вспомогательных функций) верно (49).  $\square$

3.1.1. *Численная схема для ДР прямой задачи.* Как было выяснено в Леммах 2 и 7, для вычисления оператора чувствительности достаточно знать производные решений прямой и сопряженной задач в точках разрыва коэффициента. Используя аналитические решения локально-сопряженных задач на интервалах постоянства коэффициента [15], получим в Лемме 9 численную схему, позволяющую находить значения решения ДР прямой задачи и его пространственной производной в точках разрыва коэффициента. Идея использования локально-сопряженных задач состоит в том, чтобы в этих точках связывать значения функции решения краевой задачи и её пространственной производной, исключая значения во внутренних точках отрезка.

**Лемма 8** (о локально сопряженных задачах). Пусть  $w(x) \in C^2(x_i, x_{i+1})$  удовлетворяет системе

$$(52) \quad w(x) = \tau k_{(i+0.5)} w_{xx}(x), \quad w(x_i) = 1, \quad w(x_{i+1}) = 0$$

и  $\hat{w}(x) \in C^2(x_{i-1}, x_i)$  удовлетворяет системе

$$(53) \quad \hat{w}(x) = \tau k_{(i-0.5)} \hat{w}_{xx}(x), \quad \hat{w}(x_{i-1}) = 0, \quad \hat{w}(x_i) = 1,$$

тогда

$$(54) \quad w(x) = S_i^+(x) := \frac{\text{Sinh}\left(H_{i+0.5} \frac{x_{i+1}-x}{h_{i+0.5}}\right)}{\text{Sinh}(H_{i+0.5})},$$

(55)

$$\tau k_{(i+0.5)} w_x(x_i) = -\frac{\text{Coth}(H_{i+0.5}) h_{i+0.5}}{H_{i+0.5}}, \quad \tau k_{(i+0.5)} w_x(x_{i+1}) = -\frac{h_{i+0.5}}{H_{i+0.5} \text{Sinh}(H_{i+0.5})},$$

$$(56) \quad \hat{w}(x) = S_i^-(x) := \frac{\text{Sinh}\left(H_{i-0.5} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-0.5}}\right)}{\text{Sinh}(H_{i-0.5})},$$

$$(57) \quad \tau k_{(i-0.5)} \hat{w}_x(x_{i-1}) = \frac{h_{i-0.5}}{H_{i-0.5} \text{Sinh}(H_{i-0.5})}, \quad \tau k_{(i-0.5)} \hat{w}_x(x_i) = \frac{h_{i-0.5} \text{Coth}(H_{i-0.5})}{H_{i-0.5}}.$$

**Лемма 9** (о схеме для ДР задачи (20)-(23), [15]). Пусть  $k \in K$ ,  $\alpha \in L_2(0, 1)$ ,  $u(\cdot, \cdot) = u_M(\cdot, \cdot; \alpha, k)$ , тогда

$$(58) \quad \begin{aligned} & (D_i^+ + R_i^+) u(x_i, j) - R_i^+ u(x_{i+1}, j) = \\ & = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) S_i^+(x) dx - \tau \alpha_M(j), \quad i = 1, \end{aligned}$$

(59)

$$\begin{aligned} & -R_i^- u(x_{i-1}, j) + (R_i^- + D_i^- + D_i^+ + R_i^+) u(x_i, j) - R_i^+ u(x_{i+1}, j) = \\ & = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, j-1) S_i^-(x) dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) S_i^+(x) dx, \quad i \in \{2, N\}, \end{aligned}$$

(60)

$$\begin{aligned} & -R_i^- u(x_{i-1}, j) + (R_i^- + D_i^-) u(x_i, j) = \\ & = \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, j-1) S_{N+1}^-(x) dx, \quad i = N+1. \end{aligned}$$

Значения производных вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} & -R_i^+ u(x_{i+1}, j) + (R_i^+ + D_i^+) u(x_i, j) - \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) S_i^+(x) dx = -\tau k_{i+0.5} u_x(x_i, j), \quad i \in \{1, N\}, \\ & (R_i^- + D_i^-) u(x_i, j) - R_i^- u(x_{i-1}, j) - \\ & - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, j-1) S_i^-(x) dx = \tau k_{i-0.5} u_x(x_i, j), \quad i \in \{2, N+1\}, \end{aligned}$$

где

$$(61) \quad D_i^\pm = \frac{h_{i\pm 0.5}}{H_{i\pm 0.5}} \text{Tanh}\left(\frac{1}{2} H_{i\pm 0.5}\right), \quad R_i^\pm = \frac{h_{i\pm 0.5}}{H_{i\pm 0.5} \text{Sinh}(H_{i\pm 0.5})}.$$

*Доказательство.* Домножим (20) на некоторую функцию  $\tau w(x) \in C^2(x_i, x_{i+1})$  и два раза проинтегрируем по частям на отрезке  $(x_i, x_{i+1})$ :

$$\begin{aligned} & \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j) w(x) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) w(x) dx = \\ & = \tau k_{(i+0.5)} u(x, j) w(x) \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} - \tau k_{(i+0.5)} u(x, j) w_x(x) \Big|_{x=x_i}^{x=x_{i+1}} + \\ & \quad + \tau k_{(i+0.5)} \int_{x_i}^{x_{i+1}} w_{xx}(x) u(x, j) dx. \end{aligned}$$

Если  $w(x)$  является решением краевой задачи (52) из Леммы 8 (о локально-сопряженных задачах), то

$$(62) \quad \tau k_{(i+0.5)} u(x_{i+1}, j) w_x(x_{i+1}) - \tau k_{(i+0.5)} u(x_i, j) w_x(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) w(x) dx = -\tau k_{(i+0.5)} u_x(x_i, j).$$

Подставляя в (62) аналитические выражения (54), (55) для решения краевой задачи, получим соотношения, связывающие значения функции решения (20)-(23) на концах интервала  $(x_i, x_{i+1})$

$$(63) \quad -\frac{h_{i+0.5}}{H_{i+0.5} \operatorname{Sinh}(H_{i+0.5})} u(x_{i+1}, j) + \frac{\operatorname{Coth}(H_{i+0.5}) h_{i+0.5}}{H_{i+0.5}} u(x_i, j) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) S_i^+(x) dx = -\tau k_{(i+0.5)} u_x(x_i, j).$$

Аналогично, рассмотрим отрезок  $(x_{i-1}, x_i)$  и на нём домножим (20) на функцию  $\tau \dot{w}(x) \in C^2(x_{i-1}, x_i)$ , где  $\dot{w}(x)$  - решение краевой задачи (53) из Леммы 8 (о локально-сопряженных задачах), тогда:

$$(64) \quad h_{i-0.5} \frac{\operatorname{Coth}(H_{i-0.5})}{H_{i-0.5}} u(x_{i-1}, j) - \frac{h_{i-0.5}}{H_{i-0.5} \operatorname{Sinh}(H_{i-0.5})} u(x_i, j) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, j-1) S_i^-(x) dx = \tau k_{(i-0.5)} u_x(x_{i-1}, j).$$

Так как

$$h_{i \pm 0.5} \frac{\operatorname{Coth}(H_{i \pm 0.5})}{H_{i \pm 0.5}} = \frac{h_{i \pm 0.5}}{H_{i \pm 0.5} \operatorname{Sinh}(H_{i \pm 0.5})} + \frac{h_{i \pm 0.5}}{H_{i \pm 0.5}} \operatorname{Tanh}\left(\frac{1}{2} H_{i \pm 0.5}\right),$$

то используя обозначения (61), выражения (63) и (64) можно переписать в виде:

$$(65) \quad -R_i^+ u(x_{i+1}, j) + (R_i^+ + D_i^+) u(x_i, j) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x, j-1) S_i^+(x) dx = -\tau k_{(i+0.5)} u_x(x_i, j),$$

$$(66) \quad (R_i^- + D_i^-) u(x_{i-1}, j) - R_i^- u(x_i, j) - \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x, j-1) S_i^-(x) dx = \tau k_{(i-0.5)} u_x(x_{i-1}, j).$$

В силу соотношений на скачках (22) при  $i \in \{1, N\}$ , объединяя соотношения (65) и (66), получим (59). Учитывая краевые условия (21) из (65) и (66) при  $i = 1, N + 1$ , получим (58) и (60), соответственно.  $\square$

**3.1.2. Вычисление правой части численной схемы.** Для получения количественных значений правой части схемы (58)-(60) из Леммы 9, необходимо вычислять интегралы функции решения краевой задачи с предыдущего шага по времени. Как и в п. 3.1 по Лемме 3 (о свойствах коэффициентов Фурье), алгоритм их табулирования можно свести к суммированию абсолютно сходящихся рядов, содержащих коэффициенты Фурье по ОНБ пространства  $L_2(x_i, x_{i+1})$ . Аналогично методике вычисления оператора чувствительности, эти коэффициенты можно получить аналитически (Лемма 10). Они выражаются через линейные комбинации значений решений ДР прямых задач в точках разрыва коэффициента.

**Лемма 10** (о решении в области). Пусть при всех  $j \in \{1, M\}$  заданы  $f_{\pm}(j)$ , и  $u(x, j) \in C^2(x_i, x_{i+1}) \cap C^1[x_i, x_{i+1}]$  - решение задачи

$$\begin{aligned} \frac{u(x, j) - u(x, j-1)}{\tau} &= k_{(i+0.5)} u_{xx}(x, j), \\ (x, j) &\in (x_i, x_{i+1}) \times \{1, M\}, \\ (67) \quad u(x_i, j) &= f_-(j), \quad u(x_{i+1}, j) = f_+(j), \quad j \in \{1, M\}, \end{aligned}$$

$$(68) \quad u(x, j) = 0, \quad x \in (x_i, x_{i+1}), \quad j < 1,$$

тогда

$$\langle u(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \sum_{m=1}^j \frac{f_-(m) + (-1)^{l+1} f_+(m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-m}} \Phi_i^{i+0.5}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\hat{u}$  - решение краевой задачи

$$\frac{\hat{u}(x, j)}{\tau} = k_{(i+0.5)} u_{xx}(x, j), \quad (x, j) \in (x_i, x_{i+1}) \times \{1, M\}$$

с краевыми условиями (67). По Лемме 8 (о локально-сопряженных задачах) её единственное решение дается выражением

$$\hat{u}(x, j) = f_-(j) S_i^+(x) + f_+(j) S_{i+1}^-(x).$$

Следовательно,

$$(69) \quad \langle \hat{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \Phi_i^{i+0.5} f_-(j) + (-1)^{l+1} \Phi_i^{i+0.5} f_+(j).$$

Рассмотрим функцию  $\tilde{u}(x, j)$  удовлетворяющую соотношениям:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{u}(x, j) - \tilde{u}(x, j-1)}{\tau} &= k_{(i+0.5)} \tilde{u}_{xx}(x, j), \quad (x, j) \in (x_i, x_{i+1}), \\ \tilde{u}(x_i, j) &= \tilde{u}(x_{i+1}, j) = 0. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot, j-1), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} &= \\ &= \langle \tilde{u}(\cdot, j) - \tau k_{(i+0.5)} \tilde{u}_{xx}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \\ &= \left( 1 + \tau k_{(i+0.5)} \frac{(\pi l)^2}{h_{i+0.5}^2} \right) \langle \tilde{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \\ &= (1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2}) \langle \tilde{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}, \end{aligned}$$

то

$$(70) \quad \langle \tilde{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \frac{\langle u(\cdot, j-1), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}}{1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2}}.$$

Вследствие принципа суперпозиции, искомый коэффициент Фурье можно представить в виде суммы двух слагаемых:

$$(71) \quad \langle u(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} = \langle \hat{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} + \langle \tilde{u}(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}.$$

Подставляя в (71) соотношения (69) и (70) и затем раскрывая рекурсивное соотношение с учетом начального условия (68), получим:

$$\begin{aligned} \langle u(\cdot, j), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5} &= \\ &= f_-(j) \Phi_i^{i+0.5} + f_+(j) (-1)^{l+1} \Phi_i^{i+0.5} + \frac{\langle u(\cdot, j-1), s_i^{i+0.5} \rangle_{i+0.5}}{1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2}} = \\ &= \sum_{m=1}^j \frac{\Phi_i^{i+0.5} f_-(j) + (-1)^{l+1} \Phi_i^{i+0.5} f_+(j)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-m}}. \end{aligned}$$

□

**Лемма 11** (о вычислении правой части). Пусть  $k \in K$ ,  $\alpha \in L_2(0, 1)$ ,  $u = u_M(\cdot, \cdot; \alpha, k)$ , тогда

$$\begin{aligned} F_i^{\pm}(j-1) &= h_{i\pm 0.5} \sum_{m=1}^{j-1} S^+(j-1-m, H_{i\pm 0.5}) u(x_i, m) + \\ &+ h_{i\pm 0.5} \sum_{m=1}^{j-1} S^-(j-1-m, H_{i\pm 0.5}) u(x_{i\pm 1}, m), \end{aligned}$$

где

$$S^\pm(p, H) := 2H^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\pm 1)^{l+1} (\pi l)^2 H^{-2}}{(1 + (\pi l)^2 H^{-2})^{p+2}}.$$

*Доказательство.* По Леммам 10 (о решении в области), 3 (о свойствах коэффициентов Фурье), 4 (об ОНБ над  $L_2(x_i, x_{i+1})$ ) имеем:

$$\begin{aligned} F_{i+1}^-(j-1) &= \langle u(\cdot, j-1), S_{i+1}^- \rangle_{i+0.5} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l+1} \Phi_l^{i+0.5} \sum_{m=1}^{j-1} \frac{\Phi_l^{i+0.5} u(x_i, m) + (-1)^{l+1} \Phi_l^{i+0.5} u(x_{i+1}, m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-1-m}} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{j-1} (\Phi_l^{i+0.5})^2 \frac{(-1)^{l+1} u(x_i, m) + u(x_{i+1}, m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-1-m}}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} F_i^+(j-1) &= \langle u(\cdot, j-1), S_i^+ \rangle_{i+0.5} = \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{j-1} (\Phi_l^{i+0.5})^2 \frac{u(x_i, m) + (-1)^{l+1} u(x_{i+1}, m)}{(1 + (\pi l)^2 H_{i+0.5}^{-2})^{j-1-m}}. \end{aligned}$$

По утверждению (45) Леммы 6 (о сходимости специальных функций), получим требуемое.  $\square$

**3.2. Алгоритм ньютоновского типа для решения обратной задачи.** Оператор чувствительности можно использовать как для численного исследования обратной задачи, так и для её решения. В приводимом далее алгоритме ньютоновского типа используется обращение оператора чувствительности. В нашем случае оператор чувствительности математической модели является компактным, а его конечномерные аппроксимации при увеличении точности аппроксимации могут становиться плохо обусловленными. Решением проблемы, выработанным в теории обратных и некорректных задач является регуляризация алгоритма. Проведем регуляризацию посредством сингулярной срезки оператора чувствительности. Алгоритмы такого типа обсуждаются в [19],[20],[21]. Однако, если производить срезку непосредственно по сингулярным числам меньше заданной величины, такой алгоритм оказывает неустойчивым. Более эффективным оказался подход, когда сингулярная срезка применяется к оператору чувствительности постепенно. На первом шаге учитывается только самый старший сингулярный вектор, на втором - два старших, и так далее. Остановка алгоритма происходит по принципу невязки Морозова. Дополнительная стабилизация алгоритма обеспечивается введением итерации Красносельского (без неё итерации алгоритма могут выходить на периодические траектории):

- (1) Положим  $\Lambda := 1$  и зададимся некоторым вспомогательным  $\hat{k}$ .
- (2) Запустим итерационный процесс по  $j$ .
  - (a) Зададим начальное приближение:  $k_1 := \hat{k}$ .
  - (b) Приближение  $\tilde{k}_{j+1}$  вычисляется как решение линейризованного уравнения

$$\mathcal{L}_{M_1}^\Lambda [k_j, \hat{k}] (\tilde{k}_{j+1} - \hat{k}) = P_1^\Lambda [k_j, \hat{k}] (f - A(\hat{k})),$$

где  $\mathcal{L}_{M_1}^\Lambda$  - начальный отрезок представления оператора  $\mathcal{L}_M$  посредством сингулярного разложения, соответствующего  $\Lambda$  старшим сингулярным числам, а  $P_1^\Lambda$  - проектор на  $\Lambda$  старших левых сингулярных векторов.

- (c)  $k_{j+1}$  выбирается посредством итерации Красносельского:

$$k_{j+1} := \gamma k_j + (1 - \gamma) \tilde{k}_{j+1}, \quad \gamma \in [0, 1].$$

- (d) Если  $\|f - A(k_{j+1})\| < \delta f$ , где  $\delta f$  - некоторая оценка сверху для  $\|f - A(k_*)\|$ , то процесс завершается.
  - (e) Уточняем вспомогательную точку:  $\hat{k} := k_\infty$ .
- (3) Если  $\hat{k}$  изменилось, то переходим к 2.

- (4) После стабилизации процесса (2)-(3) если сингулярное число  $s_{\Lambda+1}[\hat{k}, \hat{k}] > s_{\min}$ , то  $\Lambda := \Lambda + 1$  и переходим к 2.

Для количественного описания ошибок измерений в характеристиках измерительных приборов иногда указывают стандартное отклонение измерения  $\sigma$  от точных значений. На основании этих значений можно оценить ошибку в данных, используемую на шаге 2.d представленного алгоритма. Действительно, если

$$f(j) = \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt + \sigma \xi(j),$$

где случайные величины  $\xi(j)$  распределены нормально с нулевым средним и единичной дисперсией, то с вероятностью  $q$

$$\left\| \sum_{j=1}^M \left( f(j) - \frac{1}{\tau} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t) dt \right) I(t_j, t_{j+1}) \right\| < \sigma \sqrt{\tau \chi_{inv}^2(M, q)},$$

$\chi_{inv}^2(M, q)$  - решение уравнения

$$P(\chi_M^2 < \chi_{inv}^2(M, q)) = q,$$

символ  $P$  означает вероятность, а  $\chi_M^2$  - это случайная величина хи-квадрат с  $M$  степенями свободы. Исходя из этих соображений, в качестве  $\delta f$  в алгоритме выбиралась величина  $\sigma \sqrt{\tau \chi_{inv}^2(M, q)}$ .

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Исследуем сходимость построенного алгоритма решения обратной задачи численно. К модельной (металлической) пластине с известным строением прикладывался поток тепла (рис. 1, слева). Прямым моделированием находилась температура на поверхности (рис. 1, справа). По этим данным производилось восстановление неизвестного коэффициента.

Число точек сетки по времени  $M = 200$ . Рассматривались данные наблюдений различной точности (с различным стандартным отклонением от точных величин):  $1C^\circ$ ,  $0.1C^\circ$ ,  $0.01C^\circ$ ,  $0.001C^\circ$ . Результаты численных экспериментов представлены на рис. 2-5.

В первом численном эксперименте (см. рис. 2) исследовалось, как результат восстановления зависит от точности данных обратной задачи, и как решение изменяется по мере удаления от точки снятия данных измерений. Рассматривались пластины, температуропроводность которых изменялась достаточно гладко. На рис. 2 видно, как по мере уточнения данных измерений обратной задачи, улучшалось качество

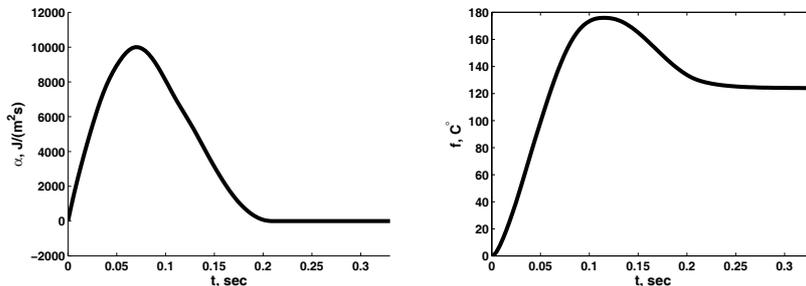


Рис. 1. Величина прикладываемого к пластине потока тепла  $\alpha$  (слева) и пример температурного отклика среды (справа)  $f$

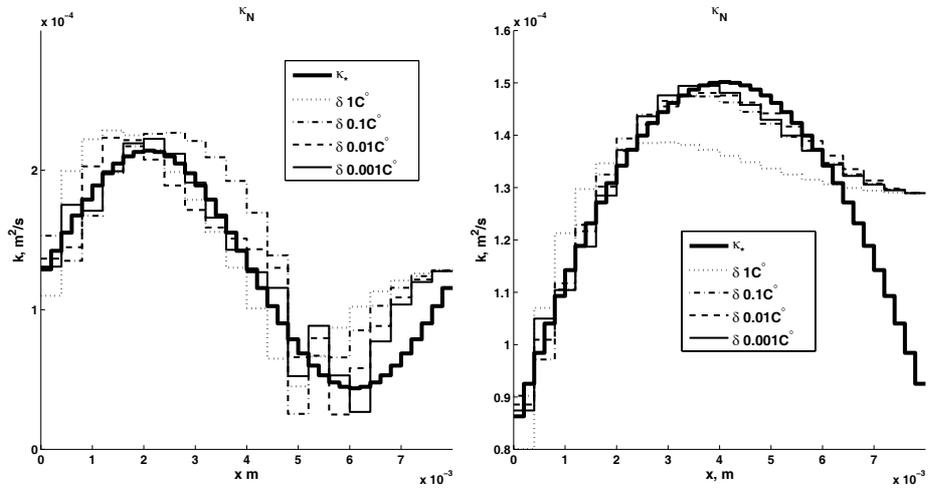


Рис. 2. Восстановления  $k_*$  при различной точности данных  $\delta$  измерений температуры на поверхности для двух модельных пластин

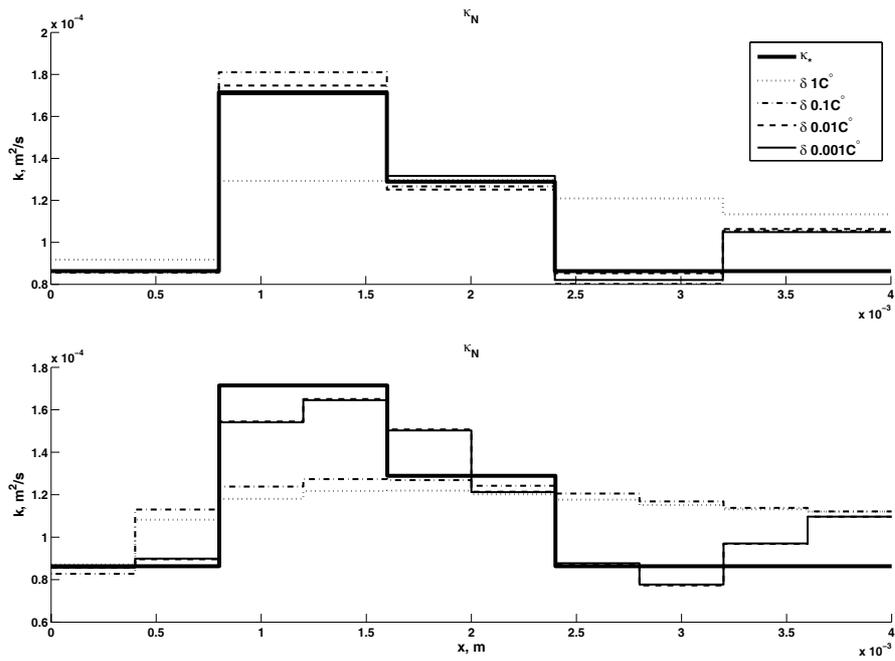


Рис. 3. Восстановление  $k_*$  при различных размерностях пространства искомых коэффициентов

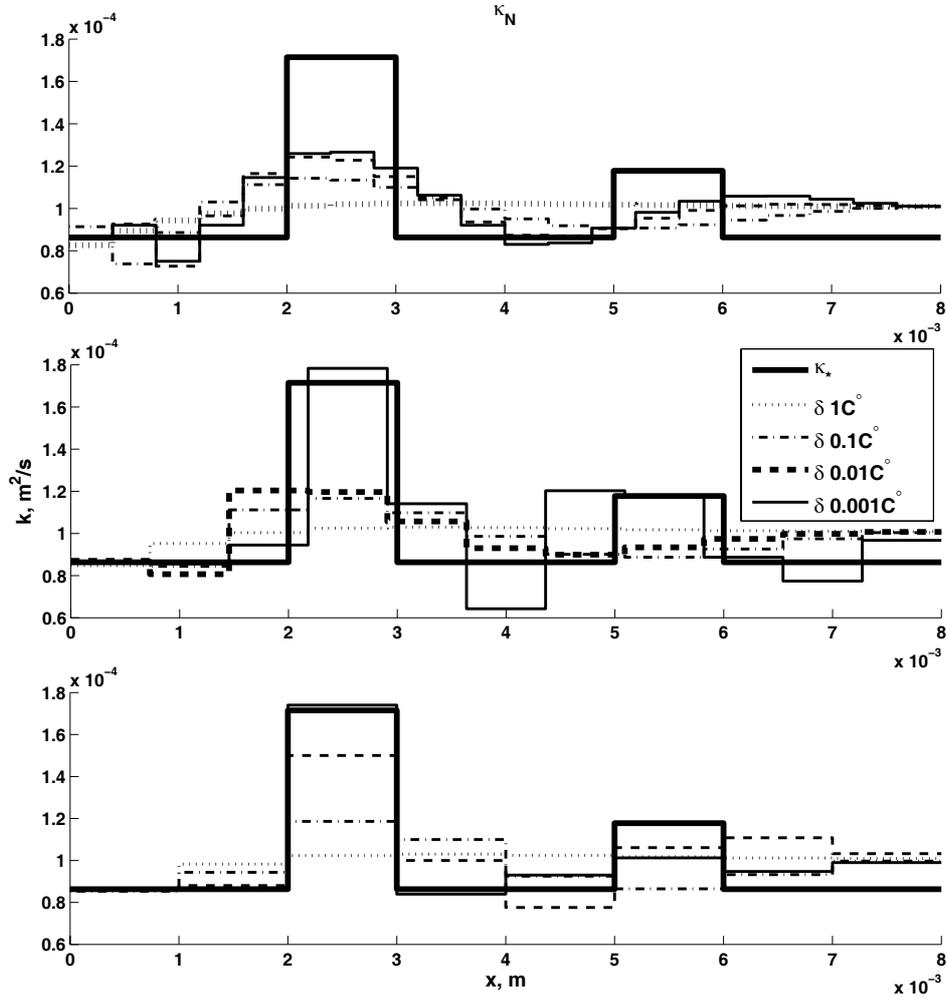


Рис. 4. Восстановление  $k_*$  при различных размерностях пространства искоемых коэффициентов

восстановления неизвестного коэффициента. Также, точность решения улучшалась по мере приближения к точке измерений ( $x = 0$ ).

Во втором численном эксперименте (рис. 3) исследовалась эффективность восстановления коэффициента температуропроводности среды, состоящего из небольшого числа слоев с резким различием в температуропроводностях между ними. При этом, в первом эксперименте серии, границы раздела слоев были известны точно (рис. 3, сверху), а во втором - кроме точных границ слоев были введены дополнительные (рис. 3, снизу).

Результаты на рис. 3 показывают, что в случае избыточного количества границ, происходит избыточное сглаживание решения. На рис. 4 приводится результат усложненной версии предыдущего эксперимента. В этом случае не только количество, но и расположения границ раздела слоев также были неизвестны.

На рис. 4 видно, как по мере уточнения информации о границах раздела слоев (сверху вниз), улучшается качество восстановления.

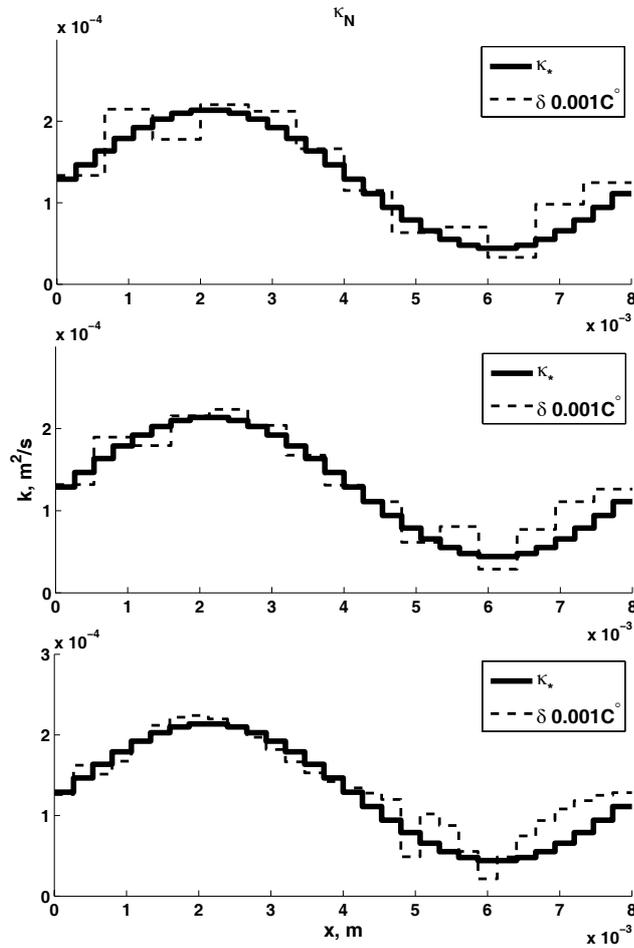


Рис. 5. Восстановление  $k_*$  при различных размерностях пространства искомого коэффициента

В численном эксперименте на рис. 5 представлен в некотором смысле обратный к экспериментам с рис. 3 и рис. 4 случай, когда среда, имеющая достаточно гладкий коэффициент температуропроводности, приближается средой, состоящей из меньшего числа слоев.

Из результатов проведенных численных экспериментов можно сделать вывод о том, что по мере уточнения модели среды (т.е. увеличения количества априорной информации о границах раздела слоев), результат восстановления также улучшается. В проведенных численных экспериментах хуже всего восстанавливались резкие границы раздела слоев. При этом, если для восстановления использовалась модель среды с избыточным количеством слоев, то наблюдался эффект сглаживания границ. С другой стороны, если коэффициент близок к непрерывной функции, то увеличение числа границ улучшало качество восстановления.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье представлена численная реализация алгоритма ньютоновского типа для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности. Данный алгоритм включает в себя регуляризацию посредством сингулярной срезки оператора чувствительности и принципа невязки Морозова. Основное внимание в статье уделено построению набора численных схем, позволяющих решать задачу в случае кусочно-постоянных коэффициентов уравнений модели. Эффективность работы построенного алгоритма была исследована численно. Численные эксперименты показали, что основную сложность при восстановлении вызывают резкие границы раздела слоев. Если эти границы становятся известны, то качество восстановления улучшается.

Так как в практических обратных задачах границы раздела слоев не всегда известны, дальнейшим шагом в развитии исследований может быть построение гибридных алгоритмов решения обратных задач, в которых границы раздела слоев восстанавливаются одними методами, например, по данным акустического зондирования среды, а величины коэффициентов теплопроводности - методами, основанными на диффузионных процессах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N.P. Avdelidisa, D.P. Almond, A. Dobbison, B.C. Hawtin, C. Ibarra-Castaneda, and X. Maldague, *Aircraft composites assessment by means of transient thermal ndt*, Progress in Aerospace Sciences **40** (2004), 143–162.
- [2] G. Goch, B. Schmitz, B. Karpuschewski, J. Geerkens, M. Reigl, P. Sprongl, and R. Ritter, *Review of non-destructive measuring methods for the assessment of surface integrity: a survey of new measuring methods for coatings, layered structures and processed surfaces*, Precision Engineering **23** (1999), 9–33.
- [3] А.В. Пененко, *О решении обратной коэффициентной задачи теплопроводности методом проекции градиента*, Сибирские электронные математические известия **23** (2010), 178–198, в сб. «Труды первой международной молодежной школы-конференции “Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач” Часть I».
- [4] В. И. Костин, В. Г. Хайдуков, В. А. Чеверда, *Обращение волновых полей для данных систем многократного перекрытия (линеаризованная постановка)*, Докл. РАН **352** (1997), no. 5, 683–686 .
- [5] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Наука, Москва, 1971. MR0347102
- [6] С. К. Годунов, В. С. Рябенкий, *Разностные схемы: введение в теорию*, Наука, Москва, 1977. MR0501716
- [7] Г. Стренг, Дж. Фикс, *Теория метода конечных элементов*, Мир, Москва, 1984. MR0458785
- [8] Г. И. Марчук, *Методы вычислительной математики*, Лань, Москва, 2009.
- [9] L. Infield and T. Hull, *The factorization method*, Reviews of Modern Physics **23** (1951), no. 1, 21–68.
- [10] T. M. El-Mistikawy and M. J. Werle, *Numerical method for boundary layers with blowing - The exponential box scheme*, AIAA J. **16** (1978), 749–751.
- [11] A. E. Berger, J. M. Solomon, and M. Ciment, *An analysis of a uniformly accurate difference method for a singular perturbation problem*, Mathematics of computation **37** (1981), no. 155, 79–94. MR0616361
- [12] В. Г. Корнеев, *О точных сеточных схемах*, Журн. вычисл. математики и мат. физики **22** (1982), no. 3, 647–654.
- [13] В. Г. Зверев, В. Д. Гольдин, *Разностная схема для решения коэективно-диффузионных задач теплопереноса*, Вычислительные технологии **7** (2002), no. 6, 24–37.
- [14] А. Ф. Воеводин, *Метод факторизации для линейных и квазILINEЙНЫХ сингулярно возмущенных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений*, Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. **12** (2009), no. 1, 1–15.
- [15] V. V. Penenko and E. A. Tsvetova, *Discrete-analytical methods for the implementation of variational principles in environmental applications*, Journal of Computational and Applied Mathematics **226** (2009), 319–330. MR2501647

- [16] A. Hasanov, P. DuChateau, and B. Pektas, *An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation*, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems **14** (2006), no. 4, 1–29. MR2258244
- [17] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, Москва, 1976. MR0481380
- [18] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, Москва, 1976. MR0435771
- [19] С. К. Годунов, А. Г. Антонов, О. П. Кирилюк, В. И. Костин, *Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах*, Наука. Сиб. отд-ние, Новосибирск, 1988. MR1215723
- [20] В. Kaltenbacher, *Some Newton-type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems*, Inverse Problems **13** (1997), 729–753. MR1451018
- [21] V. Isakov and S. Kindermann, *Identification of the diffusion coefficient in a one-dimensional parabolic equation*, Inverse problems **16** (2000), 665–680. MR1766227

АЛЕКСЕЙ ВЛАДИМИРОВИЧ ПЕНЕНКО

ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,

ПР. АКАДЕМИКА ЛАВРЕНТЬЕВА 6,

630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ

*E-mail address:* `aleks@ommgp.sccc.ru`

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.340–С.345 (2011)*

УДК 519.642.5  
MSC 45D05**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ  
ВОЛЬТЕРРЫ II РОДА С КВАДРАТИЧНОЙ  
НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Е.В. РАСТОРГУЕВА

ABSTRACT. Integral Volterra equations of the second kind are considered. It is necessary to solve these equations by means of applying numerical methods of various orders of accuracy and using special difference schemes.

**Keywords:** integral equations, numerical methods, difference schemes.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В [1] рассматривалась коэффициентная обратная задача для уравнений гиперболического типа и, в частности, нелинейное интегральное уравнение Вольтерры II рода с квадратичной нелинейностью

$$x(t) = \int_0^t K(t, s)x^2(s)ds + y(t), t \in [0, T].$$

---

RASTORGUEVA E.V., THE NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL VOLTERRA EQUATION OF THE SECOND KIND WITH SQUARE NONLINEARITY.

© 2011 РАСТОРГУЕВА Е.В.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00377).

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

Мы ограничимся случаем  $K(t, s) = 1$ , то есть будем рассматривать уравнение

$$(1) \quad x(t) = \int_0^t x^2(s)ds + y(t), t \in [0, T],$$

и эквивалентную ему задачу Коши  $x' = x^2 + y'$ ,  $x(0) = y(0)$ .

Поставлена задача провести анализ ряда численных методов решения интегрального уравнения (1) и эквивалентной ему задачи Коши. Будут использованы такие методы, как методы правых прямоугольников, трапеций и метод Рунге-Кутты 4-5-го порядка. Для нахождения приближенного решения также применим метод, состоящий из комбинации двух специальных разностных схем.

Как известно, существование решения (1) можно гарантировать лишь на небольшом интервале. В работе рассматриваются уравнения, имеющие глобальное решение, тем не менее, используемые численные методы дают приближенное решение не на всей области определения, а лишь до некоторого момента. Цель работы состоит в том, чтобы найти для каждого численного метода свой интервал, на котором нам удаётся получить приближенное решение с заданной точностью, а также проанализировать возможности впервые используемого комбинированного метода.

## 2. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

В качестве первого примера рассмотрим уравнение

$$(2) \quad x(t) = \int_0^t x^2(s)ds + 1 - t, t \in [0, T],$$

точным решением которого является функция  $\bar{x}(t) = 1$ .

Зададим в первом узле возмущение на правую часть, то есть вместо  $y_1$  возьмём  $\hat{y}_1 = y_1 - \delta$ .

В [2] приведён один из вариантов специальной разностной схемы, обобщим эти результаты. Сведём интегральное уравнение (2) к дифференциальному уравнению

$$(3) \quad x' = x^2 - 1, x(0) = 1,$$

которое интегрируется в элементарных функциях. Введём сетку узлов с шагом  $h$   $t_i = ih, i = \overline{1, n}, nh = T$ , и получим

$$(4) \quad \ln \left| \frac{x_{i+1} - 1}{x_{i+1} + 1} \right| - \ln \left| \frac{x_i - 1}{x_i + 1} \right| = 2h.$$

Это соотношение даёт специальную разностную схему

$$(5) \quad x_{i+1} = \frac{e^{2h} x_i + x_i - e^{2h} + 1}{-e^{2h} x_i + x_i + e^{2h} + 1}.$$

Применим эту схему для нахождения приближенного решения уравнения (2), а также уравнения с точным решением  $\bar{x}(t) = -1$ .

На рис. 1 изображён фазовый портрет и графики приближенных решений для различных значений  $\delta = 10^{-3}; 10^{-6}; 10^{-9}$ . Видно, как погрешность в первом узле влияет на возникновение погранслоя. Фазовый портрет показывает, что стационар  $x(t) = 1$  является неустойчивым. Численные расчёты подтверждают

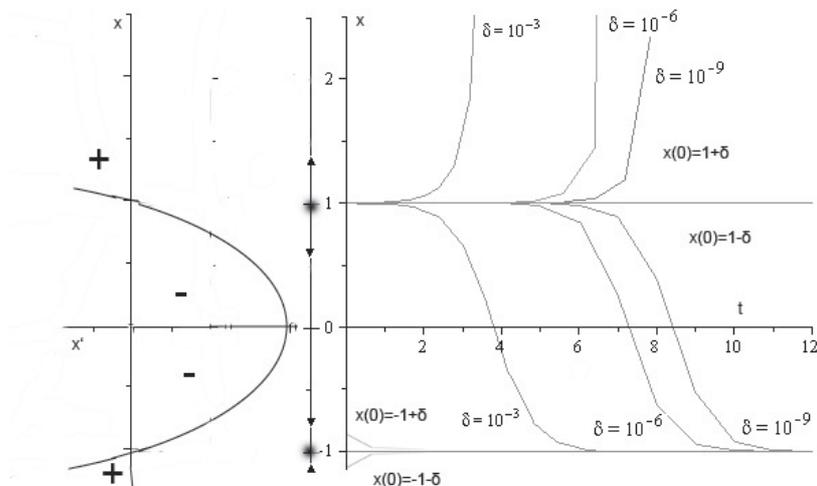


Рис. 1. Фазовый портрет для уравнения (3)

это – графики сеточных решений уравнения с начальным условием  $x(0) = 1 + \delta$  быстро уходят в бесконечность – наблюдается лавинообразный рост погрешности. Графики для уравнения с  $x(0) = 1 - \delta$  стремятся ко второму стационару  $x(t) = -1$ , который является устойчивым.

Будем считать, что численные расчёты останавливаются при следующем условии: либо значение погрешности метода  $|\varepsilon_i^h| = |\bar{x}_i - x_i^h|$  превысит  $\varepsilon$  – порог точности метода, либо время вычислений превысит  $t^*$  – порог времени счёта.

В таблицах 1-4 приведены максимальные значения  $T(\varepsilon, t^*)$  интервала  $[0, T]$ , на котором мы можем получить приближенное решение, для уравнения с возмущением на правую часть в первом узле сетки ( $\delta = 10^{-6}$ ) для каждого численного метода, используемого в работе.

Таблица 1

правые прямоугольники				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	6.4	5.257	4.2
	1 мин	6.5	5.38	4.22
	2 мин	6.68	5.432	4.29
	30 мин	6.738	5.584	4.333

Таблица 2

трапеции				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	6.4	5.243	4.1
	1 мин	6.57	5.42	4.27
	2 мин	6.925	5.775	4.625
	30 мин	7.138	5.984	4.733

Таблица 3

спец. разностная схема				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	4.6	3.456	2.304
	1 мин	4.605	3.456	2.304
	2 мин	4.613	3.465	2.31
	30 мин	4.638	3.484	2.333

Таблица 4

Рунге-Кутты 4-5				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	4.645	3.5	2.345
	1 мин	4.645	3.5	2.346
	2 мин	4.648	3.5	2.352

Численные расчёты (табл. 1-2) показывают, что с увеличением точности метода расширяется интервал, на котором мы можем получить приближенное решение. Результаты вычислений, приведённые в табл. 3-4, несколько хуже.

Для каждого метода есть своё значение  $T(\varepsilon, t^*)$ , которое не зависит от времени счёта, а это значит, не зависит и от величины шага сетки. Вопрос о том, почему мы не можем продвинуться дальше по оси  $t$  и перейти этот порог, требует дальнейших исследований.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$(6) \quad x(t) = \int_0^t x^2(s)ds + t - \frac{t^3}{3}, t \in [0, T],$$

точным решением которого является функция  $\bar{x}(t) = t$ .

Для решения уравнения воспользуемся специальной разностной схемой. Сведём интегральное уравнение к дифференциальному

$$(7) \quad x' = x^2 + \rho(t), x(0) = 0,$$

здесь  $\rho(t) = y' = 1 - t^2$ .

Положим  $\rho(t) \approx const = \rho_{i+1/2}$  при  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ . Если  $\rho(t) > 0$ , тогда вспомогательное уравнение имеет вид

$$(8) \quad v' = v^2 + \rho_{i+1/2}, v(0) = 0,$$

оно разрешается явно и даёт специальную разностную схему при  $t < 1$

$$(9) \quad x_{i+1} = \sqrt{\rho_{i+1/2}} \frac{x_i + \sqrt{\rho_{i+1/2}} \operatorname{tg} \left( h \sqrt{\rho_{i+1/2}} \right)}{\sqrt{\rho_{i+1/2}} - x_i \operatorname{tg} \left( h \sqrt{\rho_{i+1/2}} \right)}.$$

При  $\rho(t) < 0$  получим вспомогательное уравнение

$$(10) \quad v' = v^2 - \rho_{i+1/2}, v(0) = 0,$$

которое даёт специальную разностную схему при  $t > 1$

$$(11) \quad \begin{cases} x_{i+1} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1/2}} \left( e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}}} x_i + x_i - \sqrt{\rho_{i+1/2}} e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}} + \sqrt{\rho_{i+1/2}}} \right)}{-e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}}} x_i + x_i + \sqrt{\rho_{i+1/2}} e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}} + \sqrt{\rho_{i+1/2}}}}, x_{i+1} < \sqrt{\rho_{i+1/2}}; \\ x_{i+1} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1/2}} \left( e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}}} x_i + x_i - \sqrt{\rho_{i+1/2}} e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}} + \sqrt{\rho_{i+1/2}}} \right)}{-e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}}} x_i - x_i + \sqrt{\rho_{i+1/2}} e^{2h\sqrt{\rho_{i+1/2}} - \sqrt{\rho_{i+1/2}}}}, x_{i+1} > \sqrt{\rho_{i+1/2}}. \end{cases}$$

Результаты вычислений, полученные при помощи специальных разностных схем (9), (11), показывают, что при достаточно малом  $T$  метод имеет второй порядок точности.

Наблюдается интересный эффект – на рис. 2 видно, как графики приближенных решений стремятся к графику функции  $-t$ .

На рис. 3 мы видим, как далеко нам удаётся продвинуться по оси  $t$ .

В таблицах 5-8 приведены максимальные значения  $T(\varepsilon, t^*)$  интервала  $[0, T]$ , на котором мы можем получить приближенное решение, для уравнения (6) с возмущением в первом узле для каждого численного метода.

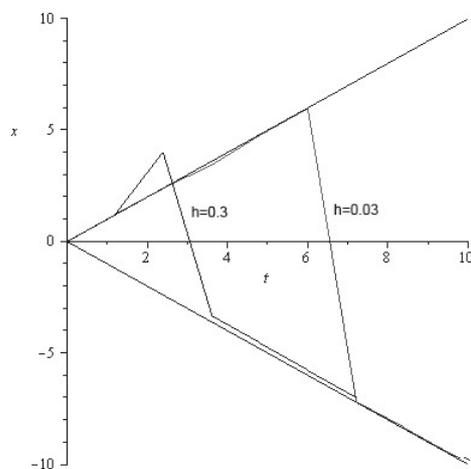


Рис. 2. Графики сеточных решений, полученных с использованием специальных разностных схем (9), (11)

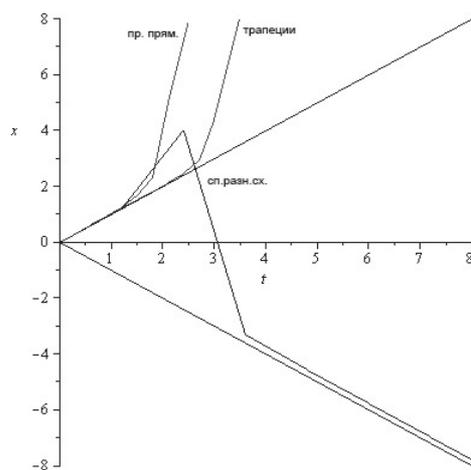


Рис. 3. Графики сеточных решений, полученных с использованием специальной разностной схемы, методов трапеций и правых прямоугольников

Таблица 5

		правые прямоугольники		
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	1.316	0.625	0.214
	1 мин	1.422	0.714	0.255
	2 мин	1.631	0.921	0.354
	30 мин	1.8	1.202	0.6

Таблица 6

		трапеции		
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
$t^*$	0.5 мин	2.867	2.434	1.903
	1 мин	2.988	2.574	2.082
	2 мин	3.192	2.808	2.363
	30 мин	3.56	3.08	2.66

Таблица 7

комбинированный метод				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
t*	0.5 мин	2.868	2.436	1.932
	1 мин	3.318	2.951	2.532
	2 мин	3.622	3.289	2.918
	30 мин	$\approx 108$	3.7	3.265

Таблица 8

Рунге-Кутты 4-5				
		$\varepsilon$		
		$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$
t*	0.5 мин	3.046	2.64	2.16
	1 мин	3.046	2.64	2.162
	2 мин	3.05	2.64	2.18

Из таблиц 5–8 видно, что использование комбинированного метода в этом случае позволяет существенно расширить интервал, на котором мы можем получить приближенное решение, но при этом в несколько раз увеличивается время счёта.

Расчёты показывают, что применение специальных разностных схем даёт наилучший результат. Отметим, что, увеличив время проведения расчётов для этого примера, нам удаётся расширить интервал, на котором мы можем получить приближенное решение, что нельзя сказать, например, об использовании других численных методов. Преимущество такого метода состоит в использовании комбинации из двух разностных схем.

### 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проведён анализ численных методов разных порядков точности, а также впервые используемого комбинированного метода. Для каждого метода были получены свои максимальные значения  $T(\varepsilon, t^*)$  интервала  $[0, T]$ , на котором мы можем получить приближенное решение с заданной точностью. Кроме того, были оценены возможности применения специальных разностных схем. На серии тестовых примеров было выявлено очевидное преимущество комбинированного метода.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Klivanov M.V., Fiddy M.A., Veilina L. et al, *Picosecond scale experimental verification of a globally convergent algorithm for a coefficient inverse problem*// Inverse Problems. –2010. – №26 045003. – 30pp. MR2608616
- [2] Калиткин Н.Н., *Численные методы*. – Москва: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука». – 1978. – 508с. MR0514844

Евгения Вениаминовна РАСТОРГУЕВА  
 ИНСТИТУТ СИСТЕМ ЭНЕРГЕТИКИ ИМ. Л.А. МЕЛЕНТЬЕВА СО РАН,  
 ул. ЛЕРМОНТОВА 130,  
 664033, ИРКУТСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* zhuzhu1987@gmail.com

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.346–С.353 (2011)*

УДК 517.958

MSC 35R30

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

В.Г. РОМАНОВ

ABSTRACT. Some inverse problems for electrodynamics equations are considered and results of their investigation are presented. Uniqueness and stability theorems are given.

**Keywords:** inverse problems, electrodynamics, uniqueness, stability estimates.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже рассматриваются некоторые постановки обратных задач для системы уравнений электродинамики. Для рассматриваемых задач приводятся результаты их исследования. Формулируются теоремы единственности решения и приводятся оценки устойчивости решений.

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Система уравнений Максвелла имеет вид

$$(1) \quad \nabla \times H = \varepsilon E_t + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t,$$

$$(2) \quad \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon E) = \rho.$$

---

ROMANOV V.G., INVERSE PROBLEMS FOR THE ELECTRODYNAMICS EQUATIONS.

© 2011 РОМАНОВ В.Г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (ГК № 14.740.11.0350) и Сибирского отделения РАН (совместный проект СО РАН и ДВО РАН – 2009 – № 93).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

Здесь  $E$  и  $H$  векторы электрической и магнитной напряженности поля, а  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  — коэффициенты диэлектрической, магнитной проницаемостей и проводимости среды, соответственно. Функция  $j = j(x, t)$  описывает внешний (сторонний) ток и всегда является заданной. К уравнениям (1) необходимо добавить начальные данные. В дальнейшем мы будем рассматривать только нулевые начальные данные, которые удобно записать в виде

$$(3) \quad H|_{t<0} = 0, \quad E|_{t<0} = 0.$$

Скалярные уравнения (2) играют подчиненную роль по отношению к системе векторных уравнений (1). В частности уравнение  $\operatorname{div}(\mu H) = 0$  всегда выполнено для любого решения системы векторных уравнений (1), если оно выполнено в начальный момент времени. Второе скалярное соотношение может рассматриваться как уравнение для определения плотности  $\rho = \rho(x, t)$  электрических зарядов, которая вычисляется после нахождения векторов  $E, H$  как решения задачи (1), (3).

Довольно часто рассматривается диффузионное приближение системы Максвелла, которое описывается равенствами

$$(4) \quad \nabla \times H = \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t,$$

$$(5) \quad \operatorname{div}(\mu H) = 0, \quad \operatorname{div}(\varepsilon E) = \rho.$$

В этом случае  $\rho = -\operatorname{div} j$ .

Если уравнения рассматриваются в ограниченной области  $\Omega$ , то на границе  $\partial\Omega$  с нормалью  $\mathbf{n}$  задаются условия

$$(6) \quad H \times \mathbf{n} = g_H, \quad \text{или} \quad E \times \mathbf{n} = g_E.$$

Скорость распространения электромагнитных колебаний находится по формуле

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Если  $j = e^{-i\omega t} \hat{j}(x)$ , то со временем устанавливаются периодические колебания с частотой  $\omega$ :

$$H = e^{-i\omega t} \hat{H}, \quad E = e^{-i\omega t} \hat{E}.$$

Тогда функции  $\hat{H}, \hat{E}$  удовлетворяют системе соотношений

$$(7) \quad \nabla \times \hat{H} = (\sigma - i\varepsilon\omega)\hat{E} + \hat{j}, \quad \nabla \times \hat{E} = i\mu\omega\hat{H}.$$

### 3. ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКА

Основы электроразведки были заложены А.Н. Тихоновым в его работе [1]. Им рассмотрен стационарный случай  $\omega = 0$ ,  $\operatorname{div} \hat{j}(x) = -\delta(x - x^0)$ ,  $\sigma = \sigma(x_3)$ ,  $\mathbb{R}_+^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | x_3 > 0\}$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \mathbb{R}_+^3$ . В этом случае  $\hat{E} = \nabla u$  и функция  $u(x, t)$  является решением задачи

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = \delta(x - x^0), \quad u|_{x_3=0} = 0; \quad u \rightarrow 0, \text{ если } |x| \rightarrow \infty.$$

В работе [1] показано, что кусочно-аналитическая функция  $\sigma \geq \sigma_0 > 0$  однозначно определяется значениями  $E_3 = \partial u / \partial x_3$  при  $x_3 = 0$ .

Обобщением метода электроразведки является метод магнитотеллурических зондирований. Основы метода заложены в работах [2]-[5].

## 4. ДИНАМИЧЕСКИЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНО-СЛОИСТЫХ СРЕД

Объект исследований — задачи об определении  $\varepsilon(x_3)$ ,  $\mu(x_3)$ ,  $\sigma(x_3)$  в  $\mathbb{R}_+^3$  по измеряемому электромагнитному полю на  $S = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\}$ . Предполагается, что  $\mathbb{R}_-^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_3 < 0\}$  однородное изотропное пространство с фиксированными постоянными  $\varepsilon_- > 0$ ,  $\mu_- > 0$ ,  $\sigma_- \geq 0$ .

*Прямая задача:*

$$(8) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + \sigma E + j, & \nabla \times E &= -\mu H_t, & (x, t) &\in \mathbb{R}^4, \\ (E, H)_{t < 0} &\equiv 0, & [E \times \mathbf{n}]_{x_3=0} &= 0, & [H \times \mathbf{n}]_{x_3=0} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $j = j^0 \delta(x - x^0) \delta(t)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$ ,  $j^0 = (1, 0, 0)$ , и символ  $[\cdot]_{x_3=0}$  означает скачок функции, стоящей в квадратных скобках, при переходе через плоскость  $x_3 = 0$ .

*Обратная задача:* найти  $\varepsilon(x_3)$ ,  $\mu(x_3)$ ,  $\sigma(x_3)$  в  $\mathbb{R}_+^3$  по данным

$$(9) \quad E_1|_{x_3=0} = f(x_1, x_2, t), \quad t \leq T, \quad T > 0.$$

**4.1. Некоторые результаты исследования обратных задач.** Пусть  $\varepsilon(x_3) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\mu(x_3) \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R}_+)$ ,  $\sigma(x_3) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+)$ ,

$$\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2, t) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} dx_1 dx_2.$$

Допустим, что функция  $\tilde{f}(\lambda_1, \lambda_2, t)$ ,  $t \leq T$ , задана для 3-х значений  $(\lambda_{1k}, \lambda_{2k})$ ,  $k = 1, 2, 3$ , таких, что

$$(10) \quad \det \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{11}^2 & \lambda_{21}^2 \\ 1 & \lambda_{12}^2 & \lambda_{22}^2 \\ 1 & \lambda_{13}^2 & \lambda_{23}^2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

В книге [6] установлены, при выполнении условия (10), теоремы локальной однозначной разрешимости обратной задачи, а также теоремы условной глобальной устойчивости и единственности ее решения.

**4.2. Анизотропные среды.** Для анизотропных сред

$$(11) \quad \varepsilon = (\varepsilon_{ij}), \quad \mu = (\mu_{ij}), \quad \sigma = (\sigma_{ij}).$$

Пусть  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\mu = \text{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_2)$ ,  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x_3) > 0$ ,  $\mu_k = \mu_k(x_3) > 0$ ,  $k = 1, 2$ , в  $\mathbb{R}_+^3$  и  $\sigma = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_- > 0$ ,  $\mu = \mu_- > 0$  в  $\mathbb{R}_-^3$ .

*Прямая задача:* найти  $H, E$ , удовлетворяющие соотношениям

$$(12) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + j, & \nabla \times E &= -\mu H_t, & (x, t) &\in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}, \\ (E, H)_{t < 0} &\equiv 0, & [E \times \mathbf{n}]_{x_3=0} &= 0, & [H \times \mathbf{n}]_{x_3=0} &= 0. \end{aligned}$$

Пусть

$$\begin{aligned} z &= \int_0^{x_3} \sqrt{\varepsilon_1(s) \mu_1(s)} ds \iff x_3 = h(z), \\ \hat{\varepsilon}_k(z) &= \varepsilon_k(h(z)), \quad \hat{\mu}_k(z) = \mu_k(h(z)), \quad k = 1, 2, \\ q_1(z) &= \hat{\varepsilon}_1(z) / \hat{\mu}_1(z), \quad q_2(z) = \hat{\mu}_1(z) \hat{\varepsilon}_2(z), \quad q_3(z) = \hat{\mu}_2(z) \hat{\varepsilon}_1(z). \end{aligned}$$

В книге [7] установлены следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $\varepsilon_k \in C^1[0, \infty)$ ,  $\mu_k \in C^1[0, \infty)$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда значения тангенциальных компонент поля  $H_k$ ,  $E_k$ ,  $k = 1, 2$ , при  $x_3 = 0$  полностью определяются заданием трех функций  $q_1(z)$ ,  $q_2(z)$ ,  $q_3(z)$ .

**Теорема 2.** Пусть  $j(x, t) = j^0 \delta(x) \delta(t)$ ,  $j^0 = (1, 0, 0)$ ,  $\varepsilon_k \in C^1$ ,  $\mu_k \in C^1[0, \infty)$ ,  $k = 1, 2$ , заданы три функции

$$f_k(t) = \tilde{E}_1(\lambda_{1k}, \lambda_{2k}, 0, t), \quad k = 1, 2, 3,$$

где функция  $\tilde{E}_1$  определена равенством

$$\tilde{E}_1(\lambda_1, \lambda_2, x_3, t) = \int_{\mathbb{R}^2} E_1(x_1, x_2, x_3, t) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} dx_1 dx_2,$$

и для  $(\lambda_{1k}, \lambda_{2k})$  выполнено условие (10). Тогда функции  $f_k(t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , однозначно определяют  $q_1(z)$ ,  $q_2(z)$ ,  $q_3(z)$  в области  $z \geq 0$ .

По контрасту отметим следующий результат, полученный Т.П. Пухначевой [8].

Пусть  $\mu = \mu_0 \text{diag}(1, 1, 1)$ ,  $\varepsilon = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ,  $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_1, \sigma_2)$ ,  $\varepsilon_k = \varepsilon_k(x_3) > 0$ ,  $\sigma_k = \sigma_k(x_3) \geq 0$ ,  $k = 1, 2$ , в  $\mathbb{R}_+^3$  и  $\varepsilon = \varepsilon_- > 0$ ,  $\mu = \mu_- > 0$ ,  $\sigma = \sigma_- \geq 0$  в  $\mathbb{R}_-^3$ ,

$$(13) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+^3 \times \mathbb{R}, \\ (E, H)_{t < 0} &\equiv 0, \quad [E \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0, \quad [H \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Пусть  $j(x, t) = j^0 \delta(x) \delta(t)$ ,  $j^0 = (1, 1, 0)$ , функции  $\varepsilon_k$ ,  $\sigma_k$  удовлетворяют некоторым условиям гладкости и заданы 4 функции

$$f_k(t) = \tilde{E}_1(\lambda_{1k}, 0, 0, t), \quad g_k(t) = \tilde{E}_2(\lambda_{1k}, 0, 0, t), \quad k = 1, 2,$$

при условии, что  $\lambda_{11} \lambda_{12} (\lambda_{11}^2 - \lambda_{12}^2) \neq 0$ . Тогда эти функции однозначно определяют  $\varepsilon_k$ ,  $\sigma_k$ ,  $k = 1, 2$ , в  $\mathbb{R}_+$ .

### 5. ТРЕХМЕРНЫЕ НЕОДНОРОДНОСТИ-ВКЛЮЧЕНИЯ В СЛОИСТУЮ СРЕДУ — ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Пусть

$$\varepsilon = \varepsilon_0(x_3) + \varepsilon_1(x), \quad \mu = \mu_0(x_3) + \mu_1(x), \quad \sigma = \sigma_0(x_3) + \sigma_1(x).$$

Предположим, что функции  $\varepsilon_1(x)$ ,  $\mu_1(x)$ ,  $\sigma_1(x)$  отличны от нуля только в некоторой ограниченной области  $\Omega \subset \mathbb{R}_+^3$  и малы по сравнению с  $\varepsilon_0(x_3)$ ,  $\mu_0(x_3)$ ,  $\sigma_0(x_3)$ , соответственно.

*Прямая задача:* найти  $H, E$ , удовлетворяющие соотношениям

$$(14) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + \sigma E + j, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4, \\ (E, H)_{t < 0} &\equiv 0, \quad [E \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0, \quad [H \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0. \end{aligned}$$

Пусть  $j = j^0 \delta(x - x^0) \delta(t)$ ,  $j^0 = (1, 0, 0)$ ,  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, 0)$  — параметр задачи.

*Обратная задача:* найти  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  в области  $\mathbb{R}_+^3$  по

$$(15) \quad E_1|_{x_3=0} = f(x_1, x_2, t, x_1^0, x_2^0), \quad t \leq T.$$

Представим функции  $H, E$  в виде

$$\begin{aligned} H(x, t, x^0) &= H^0(\bar{x} - \bar{x}^0, x_3, t) + H^1(x, t, x^0), \\ E(x, t, x^0) &= E^0(\bar{x} - \bar{x}^0, x_3, t) + E^1(x, t, x^0). \end{aligned}$$

Здесь  $(H^0, E^0)$  — решение задачи (14) при  $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma = \sigma_0$ ;  $\bar{x} = (x_1, x_2)$ ,  $\bar{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ . Тогда функции  $H^1, E^1$  удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned}\nabla \times H^1 &= \varepsilon_0 E_t^1 + \sigma_0 E^1 + \varepsilon_1 E_t^0 + \sigma_1 E^0, \\ \nabla \times E^1 &= -\mu_0 H_t^1 - \mu_1 H_t^0, \\ (E^1, H^1)_{t < 0} &\equiv 0, \quad [E^1 \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0, \quad [H^1 \times \mathbf{n}]_{x_3=0} = 0.\end{aligned}$$

Функция  $f$  допускает представление

$$f(x_1, x_2, t, x_1^0, x_2^0) = f_0(\bar{x} - \bar{x}^0, t) + f_1(\bar{x}, t, \bar{x}^0), \quad t \leq T.$$

При этом для каждого  $T > 0$  и  $\Omega$  функция  $f_1 \equiv 0$  для  $t \leq T$  и  $\bar{x}, \bar{x}^0$  достаточно удаленных от  $\Omega$ .

Обратная задача, в линейном приближении, распадается на две последовательно решаемые задачи:

- 1) найти  $\varepsilon_0, \mu_0, \sigma_0$  по  $f_0$ ,
- 2) найти  $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$  по  $f_1$ .

Результаты исследования этих задач можно найти в книге [6].

## 6. ТРЕХМЕРНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть  $\Omega \in \mathbb{R}^3$  — компактная область с гладкой границей  $\partial\Omega$  и нормалью  $\mathbf{n}$ . Рассмотрим граничную задачу

$$\operatorname{div}(\sigma(x)\nabla u) = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = f.$$

Любой гладкой функции  $f$  сопоставим

$$g(x) = \nabla u \cdot \mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Тем самым задается оператор  $\Lambda_\sigma =: f \rightarrow g$ .

*Обратная задача:* найти  $\sigma(x)$  по заданному  $\Lambda_\sigma$ .

Основной результат, который послужил затем источником многочисленных применений, является теорема единственности, установленная в работе [9].

**Теорема 4.** Если  $\Lambda_{\sigma_1} = \Lambda_{\sigma_2}$ , то  $\sigma_1 = \sigma_2$  в  $\Omega$ .

## 7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Пусть частота  $\omega \neq 0$  фиксирована. Для стационарной системы Максвелла рассмотрим граничную задачу

$$(16) \quad \begin{aligned}\nabla \times H &= (\sigma - i\varepsilon\omega)E, \quad \nabla \times E = i\mu\omega H, \quad x \in \Omega, \\ H \times \mathbf{n} &= f, \quad x \in \partial\Omega.\end{aligned}$$

Функции  $f$  сопоставим

$$g(x) = E \times \mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega.$$

Возникает оператор  $\Lambda_{(\varepsilon, \mu, \sigma)} =: f \rightarrow g$ .

*Обратная задача:* найти  $\varepsilon, \mu, \sigma$  по заданному  $\Lambda_{(\varepsilon, \mu, \sigma)}$ .

В статье [10] для этой задачи установлена следующая теорема единственности.

**Теорема 5.** Если  $\Lambda_{(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1)} = \Lambda_{(\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2)}$ , то  $(\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1) = (\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$  в  $\Omega$ .

## 8. ДИНАМИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ

Рассмотрим в области  $\Omega$  краевую задачу

$$(17) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + \sigma E, \quad \nabla \times E = -\mu H_t, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\ (H, E)|_{t=0} &= 0; \quad H \times \mathbf{n} = f, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned}$$

Функции  $f$  сопоставим

$$g(x) = E \times \mathbf{n}, \quad x \in \partial\Omega \times [0, T],$$

и введем оператор  $\Lambda_{(\varepsilon, \mu, \sigma)}^T =: f|_{\partial\Omega \times [0, T]} \rightarrow g|_{\partial\Omega \times [0, T]}$ .

*Обратная задача:* найти  $\varepsilon, \mu, \sigma$  по заданному оператору  $\Lambda_{(\varepsilon, \mu, \sigma)}^T$ .

Эта задача является полным аналогом задачи, сформулированной для частного варианта уравнений Максвелла. Она была исследована Белишевым М.И. и Исаковым В.М. [11]. Основным результатом исследования представляет собой следующая теорема.

**Теорема 6.** Если  $\sigma = 0$  и  $\Lambda_{(\varepsilon_1, \mu_1, 0)}^T = \Lambda_{(\varepsilon_2, \mu_2, 0)}^T$ , то существует  $T^* > 0$  такое, что  $(\varepsilon_1, \mu_1) = (\varepsilon_2, \mu_2)$  в  $\Omega$ , если  $T \geq T^*$ .

**8.1. Структура фундаментального решения задачи Коши.** Рассмотрим задачу Коши

$$(18) \quad \begin{aligned} \nabla \times H &= \varepsilon E_t + \sigma E + j^0 \delta(x - x^0) \delta(t), \\ \nabla \times E &= -\mu H_t, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^4; \quad (H, E)|_{t=0} = 0. \end{aligned}$$

Введем

$$\begin{aligned} \theta_k(t) &= \frac{t^k}{k!} \theta_0(t), \quad k = 1, 2, \dots, \quad \theta_0(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \\ \theta_{-1}(t) &= \delta(t), \quad \theta_{-2}(t) = \delta'(t), \quad \theta_{-3}(t) = \delta''(t). \end{aligned}$$

Структура решения задачи (18) описывается следующей теоремой (см. [12]).

**Теорема 7.** Пусть  $(\varepsilon, \mu, \sigma) \in \mathbf{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ . Если семейство геодезических линий римановой метрики  $d\tau^2 = \varepsilon\mu|dx|^2$ ,  $|dx|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$ , регулярно в  $\mathbb{R}^3$ , то решение задачи (18) представимо в виде асимптотического ряда

$$(19) \quad \begin{aligned} H(x, t, x_0) &= \theta_0(t) \sum_{k=-2}^{\infty} \left[ a^k(x, t, x^0) \theta_k(t^2 - \tau^2(x, x^0)) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t b^k(x, t-z, x^0) \theta_k((t-z)^2 - \tau^2(x, x^0)) dz \right], \\ E(x, t, x_0) &= \theta_0(t) \sum_{k=-2}^{\infty} t c^k(x, t, x^0) \theta_k(t^2 - \tau^2(x, x^0)) \\ &\quad + \sum_{k=-3}^{\infty} \int_0^t d^k(x, t-z, x^0) \theta_k((t-z)^2 - \tau^2(x, x^0)) dz, \end{aligned}$$

в котором  $\tau(x, x^0)$  — длина геодезической, соединяющей точки  $x$  и  $x^0$ , а коэффициенты разложения  $(a^k, b^k, c^k, d^k) \in \mathbf{C}^\infty$  и вычисляются по некоторым рекуррентным формулам.

**8.2. Лучевая постановка обратной задачи.** Приведенные выше формулы, описывающие структуру решения задачи (18), являются основой следующей постановки обратной задачи.

*Обратная задача.* Пусть  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\mu = \mu_0$ ,  $\sigma = \sigma_0$  вне компактной области  $\Omega$ , содержащейся в некотором шаре  $B$ , и неизвестны в  $\Omega$ . Пусть, далее, для решения задачи Коши (18) известны магнитные компоненты поля для всех  $(x, x^0) \in \partial B \times \partial B$  и для моментов времени  $t$ , лежащих в некоторой окрестности  $\tau(x, x^0)$ . Задача: найти  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  в  $\Omega$ .

Сформулированная задача распадается на 3 последовательно решаемых обратные задачи, для каждой из которых получены теоремы единственности и условной устойчивости решения (см. [13]).

**8.3. Обратные задачи с минимальной информацией.** Всегда представляют интерес обратные задачи, в которых используется такая минимальная информация о решении прямой задачи, которая позволяет однозначно определить искомые коэффициенты. Ниже приводится пример подобной задачи.

Пусть  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\sigma$  и  $j$  не зависят от  $x_3$ . Тогда функция  $u = \mu^{-1/2} E_3$  является решением задачи

$$(20) \quad u_{tt} + \hat{\sigma} u_t - c^2(\Delta u + qu) = F(x, t), \quad u|_{t < 0} = 0,$$

в которой  $\hat{\sigma} = \sigma/\varepsilon$ ,  $c = (\varepsilon\mu)^{-1/2}$ ,  $q = -\mu^{1/2}\Delta\mu^{-1/2}$ ,  $F = -\mu^{-1/2}\varepsilon^{-1}\partial j_3/\partial t$ .

Пусть  $\hat{\sigma} = 0$ ,  $c = 1$ ,  $\mu = \mu_0$  вне  $\Omega \subset B$ ,  $B$  — круг радиуса  $r$ ,  $B \subset \{x | x \cdot \nu > 0\}$ ,  $\text{dist}(\partial\Omega, \partial B) \geq d > 0$ ,

$$F(x, t) = \delta(t) \delta(x \cdot \nu), \quad \nu = (\nu_1, \nu_2), \quad |\nu| = 1,$$

Здесь  $x \cdot \nu = x_1\nu_1 + x_2\nu_2$ . Определим функцию  $\tau(x, \nu)$  как решение задачи

$$(21) \quad |\nabla\tau|^2 = c^{-2}(x), \quad \tau|_{x \cdot \nu = 0} = 0.$$

*Постановка задачи.* Пусть  $G(\nu) := \{(x, t) | x \in B, \tau(x, \nu) < t < T + \tau(x, \nu)\}$ , где  $T > 0$ . Боковую часть границы этой области обозначим через  $S(\nu)$ , нижнее основание через  $\Sigma_0(\nu)$ . Пусть, далее, для трех различных значений параметра  $\nu = \nu^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , заданы функции  $\tau(x, \nu^{(k)}) = \tau^{(k)}(x)$  на  $\partial B$  и следы решения задачи (20) и его нормальной производной на  $S(\nu^{(k)}) := S_k$ , т. е.

$$u(x, t, \nu^{(k)}) = f^{(k)}(x, t), \quad \frac{\partial}{\partial n} u(x, t, \nu^{(k)}) = g^{(k)}(x, t), \quad (x, t) \in S_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

требуется по заданным функциям  $\tau^{(k)}(x)$ ,  $f^{(k)}(x, t)$ ,  $g^{(k)}(x, t)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , найти  $c(x)$ ,  $\hat{\sigma}(x)$  и  $q(x)$ .

Пусть  $\Lambda(q_0, d)$  — множество функций  $(c, \sigma, q)$ , удовлетворяющих при некоторых фиксированных положительных числах  $q_0, d$  следующим двум условиям:

- 1)  $\text{supp}(c(x) - 1, \sigma(x), q(x)) := \Omega \subset B$ ,  $\text{dist}(\partial B, \Omega) \geq d$ ,
- 2)  $\|\sigma\|_{C^{17}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$ ,  $\|c - 1\|_{C^{19}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$ ,  $\|q\|_{C^{15}(\mathbb{R}^2)} \leq q_0$ .

Приведем оценку устойчивости решения этой задачи (см. [14]).

**Теорема 8.** Пусть  $(c_j, \hat{\sigma}_j, q_j)$ ,  $j = 1, 2$ , — функции принадлежащие  $\Lambda(q_0, d)$  и данные  $\{\tau_j^{(k)}, f_j^{(k)}, g_j^{(k)}\}$  соответствуют решению задачи (20) при  $\hat{\sigma} = \hat{\sigma}_j(x)$ ,  $c = c_j(x)$ ,  $q = q_j(x)$  и  $\nu = \nu^{(k)}$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,  $j = 1, 2$ . Пусть, кроме того, область  $B$  содержится внутри некоторого риманова круга радиуса  $\rho$  и  $T > 4\rho$ . Тогда

существует  $C > 0$ ,  $C = C(T, r, d)$ , такое, что

$$\begin{aligned} & \|c_1 - c_2\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)}^2 + \|\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|q_1 - q_2\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 \\ & \leq C \sum_{k=1}^3 \left( \|\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^3(\partial B \times \{0\})}^2 + \|(\hat{f}_1^{(k)} - \hat{f}_2^{(k)})_t\|_{\mathbf{H}^2(S')}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|(\hat{g}_1^{(k)} - \hat{g}_2^{(k)})_t\|_{\mathbf{H}^1(S')}^2 + \|\tau_1^{(k)} - \tau_2^{(k)}\|_{\mathbf{H}^5(\partial B)}^2 \right), \end{aligned}$$

в котором  $\hat{f}_j^{(k)}(x, t) = f_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$ ,  $\hat{g}_j^{(k)}(x, t) = g_j^{(k)}(x, t + \tau_j^{(k)}(x))$  и  $S' = \partial B \times [0, T]$ .

В работе [15], при условии  $\mu = 1$ , получена оценка условной устойчивости решения трехмерной обратной задачи об определении параметров  $\varepsilon$ ,  $\sigma$ .

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Тихонов А.Н., *О единственности решения задачи электроразведки*. ДАН СССР, 1949, **69**, с. 797-800. MR0033409
- [2] Тихонов А.Н., *Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры*. ДАН СССР, 1950, **73**, с. 295-297. MR0036151
- [3] Тихонов А.Н., Шахсуваров Д.Н., *О возможности использования импеданса естественного электромагнитного поля земли для изучения ее верхних слоев*. Изв. АН СССР, серия геофиз., 1956, № 4, с. 410-418.
- [4] Cagniard L., *Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting*. Geophysics, **18**, No. 3, 1953.
- [5] Тихонов А.Н., *К математическому обоснованию методов магнито-теллурических зондирований*. ЖВМиМФ, 1965, **5**, № 3, с. 545-547.
- [6] Романов В.Г., Кабанихин С.И., *Обратные задачи геоэлектрики*. М.: Наука, 1991. MR1190273
- [7] Романов В.Г., *Обратные задачи для уравнений математической физики*. М.: Наука, 1984. MR0759893
- [8] Пухначева Т.П., *Обратная задача для уравнений Максвелла в среде с анизотропной проводимостью*. Дифференциальные уравнения, 1982, **18**, № 10, с. 1780-1787. MR0679036
- [9] Sylvester J. and Uhlmann G., *A global uniqueness theorem for an inverse boundary problem*. Ann. Math., **125**, p. 153-169. MR0873380
- [10] Ola P., Päivarinta L., Somersalo E., *An inverse boundary value problem in electrodynamics*. Duke Math. J., 1993, **70**, p. 617-653. MR1224101
- [11] Белишев М.И., Исаков В.М., *О единственности определения параметров системы Максвелла по динамическим граничным данным*. Записки научных семинаров ПОМИ, 2002, **285**, с. 15-32. MR1911108
- [12] Романов В.Г., *О структуре фундаментального решения задачи Коши для системы уравнений Максвелла*. // Дифференциальные уравнения, 1986, **22**, № 9, с. 1577-1587. MR0865396
- [13] Романов В.Г., *Обратная задача электродинамики*. // Доклады АН, 2002, **386**, № 3, с. 304-309. MR2003278
- [14] Романов В.Г., *Оценка устойчивости решения в двумерной обратной задаче электродинамики*. // Сибирский матем. журн., 2003, **44**, № 4, с. 837-850. MR2041523
- [15] Романов В.Г., *Оценка устойчивости решения трехмерной обратной задачи для системы уравнений Максвелла*. // Сибирский матем. журн., 2004, **45**, № 6, с. 1347-1364. MR2123298

Владимир Гаврилович Романов  
 ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
 ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
 630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* romanov@math.nsc.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.354–С.357 (2011)*

УДК 517.948

MSC 13A99

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ЗАДАЧЕ  
ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ

А.И. СИДИКОВА

ABSTRACT. The overdetermined inverse boundary problem for heat conduction equation is considered. We apply weak projection regularization method and obtain error estimation of the solution.

**Keywords:** inverse problem, regularization, ill-posed problem, Fourier transform, error estimation.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих отраслях техники встречаются процессы, связанные с нагреванием твердых тел потоками жидкости или газа. Особую роль при этом играет информация о температуре на поверхности этих тел.

Как правило, единственным способом определения этой температуры является решение граничных обратных задач для уравнений теплообмена в твердых телах по результатам измерений внутри этих тел. Во многих случаях возникает необходимость использования результатов измерений температуры в большем числе точек, чем это требуется для однозначного определения искомым характеристик. Переход к переопределенным постановкам обратных задач обычно позволяет получить более достоверные данные [1].

---

SIDIKOVA A.I., OVERDETERMINED PROBLEM OF THERMAL DIAGNOSTICS.

© 2011 Сидикова А.И.

Работа поддержана грантом р-урал-а (грант 10-01-96000).

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

2. ПОСТАНОВКА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ

Пусть тепловой процесс описывается уравнением

$$(1) \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

решение  $u(x, t) \in C([0, 1] \times [0, \infty)) \cap C^{2,1}((0, 1) \times (0, \infty))$ ,

$$(2) \quad u(x, 0) = 0; \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$(3) \quad u(1, t) = h(t); \quad t \geq 0,$$

где

$$(4) \quad h(t) \in C^2[0, \infty), \quad h(0) = h'(0) = 0$$

и существует число  $t_0 > 0$  такое, что для любого  $t \geq t_0$

$$(5) \quad h(t) = 0.$$

$$(6) \quad \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \kappa u(0, t) = 0; \quad \kappa > 0, \quad t \geq 0,$$

где коэффициент  $\kappa$  будем считать неизвестным.

Рассмотрим множество  $M_r \subset L_2[0, \infty)$  и определяемое формулой

$$M_r = \left\{ h(t) : h(t) \in L_2[0, \infty); \int_0^\infty |h(t)|^2 dt + \int_0^\infty |h'(t)|^2 dt \leq r^2 \right\}.$$

Искомая функция

$$(7) \quad h(t) \in M_r.$$

Предположим, что при  $f_0(t)$  и  $g_0(t)$  существует функция  $h_0(t)$ , удовлетворяющая условиям (4), (5), (7) и такая, что при  $h(t) = h_0(t)$  существует решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(6) удовлетворяющее условиям

$$(8) \quad u(x_1, t) = f_0(t) \text{ и } u(x_2, t) = g_0(t); \quad 0 < x_1 < x_2 < 1, \quad t \geq 0,$$

но эти функции нам не известны, а вместо них даны некоторые функции  $f_\delta(t)$ ,  $g_\delta(t) \in L_2[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$  и число  $\delta > 0$  такие, что

$$(9) \quad \|f_\delta(t) - f_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}^2 + \|g_\delta(t) - g_0(t)\|_{L_2[0, \infty)}^2 \leq \delta^2.$$

Требуется, используя исходные данные задачи  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $\delta$ ,  $r$ ,  $f_\delta(t)$  и  $g_\delta(t)$ , определить приближенное значение  $h_\delta(t)$  и оценить его отклонение  $\|h_\delta - h_0\|_{L_2[0, \infty)}$  от точного значения  $h_0(t)$ .

3. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)–(3), (6), (7)–(9) К ЗАДАЧЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

Продолжим решение  $u(x, t)$  задачи (1)–(3) на отрицательную полуось, положив

$$u(x, t) = 0, \quad \text{при } t < 0.$$

Введем пространство  $\overline{H} = L_2(-\infty, \infty) + iL_2(-\infty, \infty)$  над полем комплексных чисел и оператор  $F$ , отображающий пространство  $\overline{H}$  в  $\overline{H}$  и определяемый формулой

$$F[h(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty h(t) e^{-i\tau t} dt; \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Из теоремы Планшереля [2] следует, что оператор  $F$  унитарен. Таким образом, (1) сведем к уравнению

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(x, \tau)}{\partial x^2} = i\tau \hat{u}(x, \tau); \quad x \in (0, 1), \quad -\infty < \tau < \infty,$$

где  $\hat{u}(x, \tau) = F[u(x, t)]$ .

$$(11) \quad \hat{u}(x_1, \tau) = \hat{f}(\tau)$$

и

$$(12) \quad \hat{u}(x_2, \tau) = \hat{g}(\tau),$$

где  $\hat{f}(\tau) = F[f(t)]$ , а  $\hat{g}(\tau) = F[g(t)]$ .

Решение уравнения (10) имеет вид

$$(13) \quad \hat{u}(x, \tau) = \begin{cases} A_1(\tau)e^{\mu_0 x \sqrt{\tau}} + B_1(\tau)e^{-\mu_0 x \sqrt{\tau}}, & \tau \geq 0, \\ A_2(\tau)e^{-\bar{\mu}_0 x \sqrt{|\tau|}} + B_2(\tau)e^{\bar{\mu}_0 x \sqrt{|\tau|}}, & \tau < 0. \end{cases}$$

где  $\mu_0 = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$ ,  $\bar{\mu}_0 = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$  а  $A_1(\tau)$ ,  $A_2(\tau)$ ,  $B_1(\tau)$  и  $B_2(\tau)$  произвольные функции.

Из (10) – (13) следует, что

$$(14) \quad \hat{h}(\tau) = \begin{cases} \frac{\hat{g}(\tau) \operatorname{sh} \mu_0(1-x_1)\sqrt{\tau} - \hat{f}(\tau) \operatorname{sh} \mu_0(1-x_2)\sqrt{\tau}}{\operatorname{sh} \mu_0(x_2-x_1)\sqrt{\tau}}, & \tau \geq 0, \\ \frac{\hat{g}(\tau) \operatorname{sh} \bar{\mu}_0(1-x_1)\sqrt{|\tau|} - \hat{f}(\tau) \operatorname{sh} \bar{\mu}_0(1-x_2)\sqrt{|\tau|}}{\operatorname{sh} \bar{\mu}_0(x_2-x_1)\sqrt{|\tau|}}, & \tau < 0. \end{cases}$$

где  $\hat{h}(\tau) = F[h(t)]$  и  $\hat{h}(\tau) = \hat{u}(1, \tau) = \lim_{x \rightarrow 1} \hat{u}(x, \tau)$ .

Таким образом, если оператор  $T$ , действующий из пространства  $\overline{H} \times \overline{H}$  в  $\overline{H}$ , определим формулой (14), где  $D(T) = \{(\hat{f}, \hat{g}) : (\hat{f}, \hat{g}) \in \overline{H} \times \overline{H}, T[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)] \in \overline{H}\}$  область определения оператора  $T$ , то задача (10) – (12) сведется к задаче вычисления значений неограниченного оператора  $T$ .

$$(15) \quad \hat{h}(\tau) = T[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)], \quad -\infty < \tau < \infty.$$

Из (9) следует, что

$$(16) \quad \|\hat{f}_\delta(\tau) - \hat{f}_0(\tau)\|^2 + \|\hat{g}_\delta(\tau) - \hat{g}_0(\tau)\|^2 \leq \delta^2,$$

а из (7), что при  $\hat{f}(\tau) = \hat{f}_0(\tau)$  и  $\hat{g}(\tau) = \hat{g}_0(\tau)$  существует точное решение  $\hat{h}_0(\tau)$  задачи (15), которое принадлежит множеству

$$\hat{M}_r = \left\{ \hat{h}(\tau) : \hat{h}(\tau) \in \overline{H}; \int_0^\infty (1+\tau^2)|\hat{h}^2(\tau)|^2 d\tau \leq r^2 \right\}.$$

Требуется, используя  $\hat{f}_\delta$ ,  $\hat{g}_\delta$ ,  $\delta$  и  $\hat{M}_r$  определить приближенное решение  $\hat{h}_\delta$  задачи (15), (16) и оценить уклонение  $\|\hat{h}_\delta - \hat{h}_0\|$ .

Для решения этой задачи используем регуляризующее семейство операторов  $\{T_\alpha : \alpha > 0\}$

$$T_\alpha[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)] = \begin{cases} T[\hat{f}(\tau), \hat{g}(\tau)]; & |\tau| \leq \alpha, \\ 0 & , \quad |\tau| > \alpha. \end{cases}$$

В качестве приближенного решения (15), (16) возьмем элемент

$$\hat{h}_\delta^\alpha(\tau) = T_\alpha[\hat{f}_\delta(\tau), \hat{g}_\delta(\tau)],$$

в котором параметр регуляризации  $\bar{\alpha}(\delta, r)$  определим из уравнения

$$\sqrt{1 + \alpha^2 e^{x^2} \sqrt{\frac{x}{2}}} = \frac{r}{c\delta},$$

где  $c$  — некоторая константа.

Метод  $\{T_{\bar{\alpha}(\delta, r)} : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  является обобщенным методом проекционной регуляризации, предложенным в [3].

Для этого метода справедлива точная по порядку оценка погрешности

$$(17) \quad \Delta_\delta[T_{\bar{\alpha}(\delta, r)}] \leq c \ln^{-2} \delta.$$

Рассмотрим

$$(18) \quad \bar{h}_\delta(t) = F^{-1}[\hat{h}_\delta(\tau)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{h}_\delta(\tau) e^{i\tau t} d\tau.$$

Окончательно, решение  $h_\delta(t)$  обратной задачи (1) – (3), (6) – (9) определим формулой

$$(19) \quad h_\delta(t) = \begin{cases} Re[\bar{h}_\delta(\tau)], & 0 \leq t < \infty, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Из (17) – (19) следует, что

$$\|h_\delta(t) - h_0(t)\| \leq c \ln^{-2} \delta.$$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 285 с. MR0958339
- [2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972. 623 с. MR0435771
- [3] Танана В.П., Сидикова А.И. Об оптимальности по порядку одного метода вычисления значений неограниченного оператора и его приложения // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12, № 3(39). С. 125–135.

Анна Ивановна Сидикова  
 Южно-Уральский Государственный Университет,  
 пр.им. В. И. Ленина, 76,  
 454080, Челябинск, Россия  
*E-mail address:* 7413604@mail.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.358–С.362 (2011)*

УДК 517.948

MSC 13A99

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ  
ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ

Е.В. ТАБАРИНЦЕВА

ABSTRACT. An order-optimal method is suggested to solve a retrospective inverse problem for a nonlinear differential-operator equation. Sharp error estimates are obtained for the approximate solution for two uniform regularization classes.

**Keywords:** retrospective inverse problem, approximate solution, error estimate.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

Пусть  $U$  и  $V$  - метрические пространства,  $M \in U$ , а  $C[U, F]$  - пространство непрерывных отображений  $U$  в  $F$ .

Рассмотрим операторное уравнение

$$(1) \quad Au = f; \quad u \in U; \quad f \in F,$$

где  $A \in C[U, F]$  - взаимно-однозначный оператор, отображающий  $U$  в  $F$ .

Предположим, что при  $f = f_0$  существует единственное точное решение  $u_0$  уравнения (1), которое принадлежит множеству  $M$ , но точное значение правой части нам не известно, а вместо него даны приближенное значение  $f_\delta \in F$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что  $\rho(f_0, f_\delta) \leq \delta$ . Требуется по исходным данным задачи  $f_\delta$  и  $\delta$  определить приближенное решение уравнения (1) и оценить его отклонение от точного решения.

---

TABARINTSEVA E.V., ON A SOLUTION TO THE RETROSPECTIVE INVERSE PROBLEM FOR A NONLINEAR DIFFERENTIAL-OPERATOR EQUATION.

© 2011 ТАБАРИНЦЕВА Е.В..

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

**Определение 1.** Семейство операторов  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть методом приближенного решения уравнения (1) на множестве  $M$ , если для любого  $\delta \in (0; \delta_0]$  оператор  $T_\delta$  непрерывно отображает пространство  $F$  в  $U$  и  $T_\delta f_\delta \rightarrow u_0$  при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно на множестве  $M$  при условии  $\rho(Au_0, f_\delta) \leq \delta$ .

Рассмотрим следующую величину, характеризующую точность метода  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  на множестве  $M$ :

$$\Delta_M(T_\delta) = \sup\{\rho(u, T_\delta f_\delta) : u \in M, \rho(Au_0, f_\delta) \leq \delta\}.$$

Обозначим

$$\omega_1(\tau; M) = \{\rho(u_1, u_2) : u_1, u_2 \in M, \rho(Au_1, Au_2) \leq \tau\}$$

модуль непрерывности оператора, обратного к  $A$ , на множестве  $M$ .

**Определение 2.** Метод  $\{T_\delta : 0 < \delta \leq \delta_0\}$  будем называть оптимальным по порядку на множестве  $M$ , если существует число  $k$  такое, что для любого  $\delta \in (0; \delta_0]$

$$\Delta(T_\delta) \leq k\omega_1(2\delta; M).$$

## 2. ЗАДАЧА С ОБРАТНЫМ ВРЕМЕНЕМ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ.

Пусть  $H$  - гильбертово пространство,  $B$  - линейный положительно определенный самосопряженный оператор с областью определения  $D(B)$ , плотной в  $H$ .

Рассмотрим задачу вычисления элемента  $g = v(t_0)$ , где  $0 < t_0 < T$ ,  $v \in C^1([0; T] \rightarrow H)$ ;  $v(t)$  удовлетворяет условиям

$$(2) \quad \frac{dv}{dt} = -Bv + \Phi(v); \quad t \in [t_0; T],$$

$$(3) \quad v(T) = f, \quad f \in H,$$

где  $\Phi : H \rightarrow H$  - отображение, удовлетворяющее условию Липшица

$$\|\Phi(v_1) - \Phi(v_2)\| \leq L\|v_1 - v_2\|.$$

Предположим, что при  $f = f_0$  существует точное решение  $g = v(t_0)$  задачи (2)-(3), удовлетворяющее одному из следующих условий:

1)  $\|g\|^2 + \|A^m g\|^2 \leq r^2$  ( $m \geq 1$ );

2) уравнение (2) имеет решение  $v(t)$ , определенное при  $t \in [0; T]$ , такое, что  $v(T) = f_0$  и  $\|v_0\| \leq r$ , где  $v(0) = v_0$ .

Таким образом, в данной задаче рассматриваются следующие множества равномерной регуляризации:

$$M_1 = \{g \in D(A^m) : \|g\|^2 + \|A^m g\|^2 \leq r^2\};$$

$$M_2 = \{g \in H : \|v_0\| \leq r\}.$$

Точное значение правой части  $f = f_0$  нам не известно, а вместо него даны приближенное значение  $f_\delta \in H$  и уровень погрешности  $\delta > 0$  такие, что  $\rho(f_0, f_\delta) \leq \delta$ . Требуется по исходным данным задачи  $f_\delta$  и  $\delta$  определить приближенное решение и оценить его отклонение от точного решения.

## 3. МЕТОД ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ.

Обозначим через  $\{E_\lambda : \lambda \geq 0\}$  разложение единицы, порожденное оператором  $B$ . Пусть  $B_\alpha$  - линейный ограниченный оператор в  $H$ , определяемый формулой

$$B_\alpha u = \int_0^\alpha \lambda dE_\lambda u.$$

Вместо неустойчивой задачи (2)-(3) рассмотрим задачу вычисления элемента  $g^\alpha = v^\alpha(t_0)$ , где  $v^\alpha(t)$  удовлетворяет условиям

$$(4) \quad \frac{dv^\alpha(t)}{dt} = -B_\alpha v^\alpha(t) + \Phi(v^\alpha(t)), \quad t \in [t_0, T];$$

$$(5) \quad v^\alpha(T) = f.$$

**Лемма 1.** Для любого элемента  $f \in D(B)$  существует единственный элемент  $\chi \in H$  такой, что решение задачи Коши

$$\frac{dv^\alpha(t)}{dt} = -B_\alpha v^\alpha(t) + \Phi(v^\alpha(t)), \quad t \in [t_0, T];$$

$$v^\alpha(t_0) = \chi$$

удовлетворяет условию  $v^\alpha(T) = f$ .

Обозначим  $g^\alpha = g^\alpha(t_0)$ , где  $v^\alpha(t)$  - удовлетворяет условиям (4)-(5);  $g_\delta^\alpha = v_\delta^\alpha(t_0)$ , где  $v_\delta^\alpha(t)$  - решение задачи (4)-(5) с приближенным финальным условием  $f_\delta$ . В качестве приближенного решения задачи (2)-(3) рассмотрим элемент

$$g_\delta^{\alpha(\delta)} = P_\delta f_\delta$$

при подходящем выборе зависимости  $\alpha = \alpha(\delta)$ .

## 4. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА ПРОЕКЦИОННОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ.

Рассмотрим величины

$$\Delta_{M_i}(\alpha, \delta) = \sup\{\|g_\delta^\alpha - g\| : g \in M_i, \|f - f_\delta\| \leq \delta\},$$

характеризующую точность построенного метода приближенного решения задачи (2)-(3) на множествах  $M_i$  ( $i = 1; 2$ ).

Воспользуемся неравенством

$$\Delta_{M_i}(\alpha, \delta) \leq \Delta_1^i(\alpha) + \Delta_2(\alpha, \delta),$$

где

$$\Delta_2(\alpha, \delta) = \sup_{\|f - f_\delta\| \leq \delta} \|g_\delta^\alpha - g^\alpha\|;$$

$$\Delta_1(\alpha) = \sup_{g \in M} \|g^\alpha - g\|$$

Имеем оценку:

$$\Delta_2(\alpha, \delta) \leq e^{LT} e^{LT} e^{\alpha(T-t_0)} \delta.$$

Оценим величину  $\Delta_1^1(\alpha)$ :

$$\Delta_1^1(\alpha) \leq r e^{2LT} e^{LT} \alpha^{-m}$$

Оценим величину  $\Delta_1^2(\alpha)$ :

$$\Delta_1^2(\alpha) \leq r e^{LT} e^{-\alpha t_0}.$$

Выберем зависимость  $\alpha = \alpha_{opt}(\delta)$  из условия минимальности полученных [ оценок величин  $\Delta_{M_i}(\alpha, \delta)$  (квазиоптимальный выбор параметра регуляризации)

**Теорема 1.** Существуют постоянные  $\delta_1 > 0$ ,  $C_1 > 0$ , такие, что для всех  $0 < \delta < \delta_0 < 1$  выполняется неравенство

$$\Delta_{M_1}(\alpha_{opt}(\delta), \delta) \leq \frac{C_1}{(\ln(1/\delta))^m};$$

Существуют постоянные  $\delta_2 > 0$ ,  $C_2 > 0$ , такие, что для всех  $0 < \delta < \delta_1$  выполняется неравенство

$$\Delta_{M_2}(\alpha_{opt}(\delta), \delta) \leq C_2 \delta^{t_0/T}.$$

### 5. ОЦЕНКА МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ ОПЕРАТОРА, ОБРАТНОГО К $A$ .

Рассмотрим отображение  $A : H \rightarrow H$ , действующее по правилу  $Ag = f$ . Оценим модуль непрерывности оператора, обратного к  $A$ , на множествах  $M_i$ , т.е. оценим величины

$$\omega_i(\delta) = \sup\{\|g_1 - g_2\| : g_1, g_2 \in M_i; \|f_1 - f_2\| < \delta\}$$

( $i = 1; 2$ ).

**Лемма 2.** Существуют положительные постоянные  $D_1, D_2$ ,  $\delta_1 < 1$ , такие, что для всех  $0 < \delta < \delta_1$  выполняются неравенства

$$\frac{D_1}{(\ln(1/\delta))^m} \leq \omega_1(\delta) \leq \frac{D_2}{(\ln(1/\delta))^m};$$

Существуют положительные постоянные  $B_1, B_2$ ,  $\delta_2$ , такие, что для всех  $0 < \delta < \delta_2$  выполняются неравенства

$$B_1 \delta^{t_0/T} \leq \omega_2(\delta) \leq B_2 \delta^{t_0/T}.$$

### 6. ВЫБОР

#### ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПО ПРИНЦИПУ НЕВЯЗКИ.

Рассмотрим функцию

$$(6) \quad \nu(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} d(E_{\lambda} f_{\delta}, f_{\delta}).$$

Рассмотрим уравнение

$$(7) \quad \nu(\alpha) = 3\delta.$$

**Лемма 2.** Пусть  $\|f_{\delta}\| > 3\delta$ , тогда уравнение (7) имеет единственное решение.

Обозначим через  $\bar{\alpha}(\delta)$  решение уравнения (7). Пусть  $B_{\delta}$  - линейный ограниченный оператор в  $H$ , определяемый формулой

$$(8) \quad B_{\delta} u = \int_0^{\bar{\alpha}(\delta)} \lambda dE_{\lambda} u$$

Приближенное решение задачи (2)-(3) определим как  $g_\delta = v_\delta(t_0)$ , где  $v_\delta(t)$  удовлетворяет условиям

$$(9) \quad \frac{dv^\delta(t)}{dt} = -B_\delta v^\delta(t) + \Phi(v^\delta(t)), \quad t \in [t_0, T];$$

$$(10) \quad v^\delta(T) = f_\delta$$

**Теорема 2.** Существует постоянная  $C_3 > 0$  такая, что

$$\Delta_{M_1}(\bar{\alpha}(\delta), \delta) \leq \frac{C_3}{(\ln(1/\delta))^m}$$

для всех  $\delta < \delta_1 < 1$ ;

Существует постоянная  $C_4 > 0$  такая, что

$$\Delta_{M_2}(\bar{\alpha}(\delta), \delta) \leq C_4 \delta^{t_0/T}$$

для всех  $\delta < \delta_2$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В.П.Танана, *О новом подходе к оценке погрешности методов решения некорректно поставленных задач*, Сиб.журн.индустр.математики, 2002, т.5, №4, с.150-163
- [2] Е.В.Табаринцева, *Об оценке погрешности метода квазиобращения при решении задачи Коши для полуминейного дифференциального уравнения*, Сиб.журн.вычислит.математики, 2005, т.8, №3, с.259-271
- [3] С.Г.Крейн, *Дифференциально-операторные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва, 1965.
- [4] В.К.Иванов, Т.И.Королук, *Об оценке погрешности при решении линейных некорректных задач*, Сиб.журн.вычислит.математики, 2005, т.8, №3, с.259-271
- [5] Д.Хенри, *Геометрическая теория полуминейных параболических уравнений*, Мир, Москва, 1985.

ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА ТАБАРИНЦЕВА  
 Южно-Уральский государственный университет,  
 пр. ЛЕНИНА 76,  
 454080, Челябинск, Россия  
*E-mail address:* eltab@rambler.ru

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.363–С.378 (2011)*

УДК 517.9  
MSC 35R30НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

В.Е. ФЕДОРОВ, Н.Д. ИВАНОВА

ABSTRACT. Nonlinear inverse problem with depending on time overdetermination for abstract Sobolev type equation in Banach space is researched. Initial Cauchy condition and initial generalized Showalter condition are used in the problem. Theorems of existence and uniqueness of mild solution and of strict solution are proved. General results are applied to nonlinear inverse evolution problems for Sobolev system and for a class of Sobolev type equations with polynomials of elliptic selfadjoint high order differential operator with respect to the spatial variables.

**Keywords:** nonlinear inverse problem, degenerate semigroup of operators, partial differential equations.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Через  $\mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства  $\mathcal{U}$  в банахово пространство  $\mathcal{F}$ . Множество линейных замкнутых операторов с областями определения, плотными в пространстве  $\mathcal{U}$ , действующих в  $\mathcal{F}$ , будем обозначать  $Cl(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . Если  $\mathcal{F} = \mathcal{U}$ , то обозначения сократятся до  $\mathcal{L}(\mathcal{U})$  и  $Cl(\mathcal{U})$  соответственно.

---

FEDOROV V.E., IVANOVA, N.D., NONLINEAR EVOLUTION INVERSE PROBLEMS FOR SOME SOBOLEV TYPE EQUATIONS.

© 2011 Федоров В.Е., Иванова Н.Д.

Работа поддержана РФФИ и Министерством образования и науки Челябинской области (грант 10-01-96007-р-урал\_а).

Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.

Пусть  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{Y}$  – банаховы пространства, операторы  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $\ker L \neq \{0\}$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ , заданы  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ ,  $u_0 \in \mathcal{U}$ . Рассмотрим соотношения

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

$$u(0) = u_0, \quad (1.2)$$

$$Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (1.3)$$

Эволюционной обратной задачей будем называть задачу отыскания из соотношений (1.1) – (1.3) пары функций  $u \in C([0, T]; \mathcal{U})$  и  $q \in C([0, T]; \mathcal{Y})$  (слабое решение) либо  $u \in C^1([0, T]; \mathcal{U}) \cap C([0, T]; D(M))$  и  $q \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$  (гладкое решение).

Заметим, что уравнения вида (1.1) являются абстрактной формой уравнений в частных производных, нередко встречающихся при математическом моделировании различных реальных процессов [1 – 3]. Такие уравнения или системы являются не разрешенными относительно старшей производной по выделенной переменной и часто называются уравнениями соболевского типа [2 – 4]. Обратные задачи для уравнений соболевского типа в другой постановке, а также для других неклассических уравнений математической физики исследовались ранее в работах [5 – 11].

В данной работе так же, как и в работе [12], касающейся линейной эволюционной обратной задачи для уравнений соболевского типа, с помощью методов теории вырожденных полугрупп операторов [2] исходная обратная задача редуцирована к системе обратной задачи для уравнения, разрешенного относительно производной по времени, и прямой задачи для уравнения с нильпотентным оператором при производной. При исследовании нелинейной обратной задачи для невырожденного уравнения используются результаты монографии [13].

Помимо условия Коши (1.2) в данной работе используется также обобщенное условие Шоултера, которое позволяет отказаться от условия согласования начального значения с другими данными задачи.

Условие (1.3) и, соответственно, обратная задача (1.1) – (1.3), возникает естественным образом, например, когда для определения неизвестного параметра  $q$  во внешнем источнике задается условие переопределения

$$\int_{\Omega} u(x, t) dx = \Psi(t), \quad t \in [0, T],$$

где  $\Omega$  – область, в которой происходит процесс, или

$$u(x_0, t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T],$$

при фиксированном  $x_0 \in \Omega$  (см. по этому поводу [13]).

## 2. УСЛОВИЯ НА ОПЕРАТОРЫ

Всюду в дальнейшем предполагаем, что  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $M \in \mathcal{C}l(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ . Обозначим  $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})\}$ ,  $R_{\mu}^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ ,  $L_{\mu}^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$ ,  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ ,  $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ,  $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ .

**Определение 1.** Пусть  $p \in \mathbb{N}_0$ . Оператор  $M$  называется *сильно  $(L, p)$ -радикальным*, если

$$(i) \exists a \in \mathbb{R} (a, +\infty) \subset \rho^L(M);$$

(ii)  $\exists K > 0 \forall \mu \in (a, +\infty) \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\{\|(R_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{U})}, \|(L_\mu^L(M))^{n(p+1)}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F})}\} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в  $\mathcal{F}$  линейал  $\overset{\circ}{\mathcal{F}}$ , такой, что

$$\|M(\mu L - M)^{-1}(L_\mu^L(M))^{p+1}f\|_{\mathcal{F}} \leq \frac{\text{const}(f)}{(\mu - a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathcal{F}}$$

при любом  $\mu \in (a, +\infty)$ ;

(iv) для любого  $\mu \in (a, +\infty)$

$$\|(R_\mu^L(M))^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}; \mathcal{U})} \leq \frac{K}{(\mu - a)^{p+2}}.$$

Эквивалентность этого, более простого определения сильной  $(L, p)$ -радиальности и того, которое было использовано в [2, 14], доказана в [15].

Обозначим через  $\mathcal{U}^0$  ( $\mathcal{F}^0$ ) ядро  $\ker(R_\mu^L(M))^{p+1}$  ( $\ker(L_\mu^L(M))^{p+1}$ ), а через  $\mathcal{U}^1$  ( $\mathcal{F}^1$ ) – замыкание линейала  $\text{im}(R_\mu^L(M))^{p+1}$  ( $\text{im}(L_\mu^L(M))^{p+1}$ ) в норме пространства  $\mathcal{U}$  ( $\mathcal{F}$ ). Через  $M_k$  ( $L_k$ ) будем обозначать сужение оператора  $M$  ( $L$ ) на  $D(M_k) = \mathcal{U}^k \cap D(M)$  ( $\mathcal{U}^k$ ),  $k = 0, 1$ .

**Теорема 1.** [2, 14] Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда

(i)  $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$ ;

(ii) проектор вдоль  $\mathcal{U}^0$  на  $\mathcal{U}^1$  (вдоль  $\mathcal{F}^0$  на  $\mathcal{F}^1$ ) имеет вид

$$P = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu R_\mu^L(M))^{p+1}, \quad (Q = s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow +\infty} (\mu L_\mu^L(M))^{p+1});$$

(iii)  $QL = LP$ ,  $QMu = MPu$  для всех  $u \in D(M)$ ;

(iv)  $L_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $M_k \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}^k; \mathcal{F}^k)$ ,  $k = 0, 1$ ;

(v) существуют операторы  $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$  и  $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$ ;

(vi) оператор  $H = M_0^{-1}L_0$  нильпотентен степени не больше  $p$ ;

(vii) существует сильно непрерывная полугруппа  $\{U(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{U}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ , разрешающая уравнение  $L\dot{u}(t) = Mu(t)$ ;

(viii) оператор  $L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}^1)$  является инфинитезимальным генератором  $C_0$ -непрерывной полугруппы  $\{U_1(t) = U(t)|_{\mathcal{U}^1} : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$ .

Теорема 1 обобщает теорему Хилле – Йосиды [16] о порождении  $C_0$ -непрерывных полугрупп операторов (см. [14]).

Снабдим область определения  $D(M)$  оператора  $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$  нормой его графика  $\|\cdot\|_{D(M)} = \|\cdot\|_{\mathcal{U}} + \|M\cdot\|_{\mathcal{F}}$ . В силу замкнутости оператора  $M$  полученное таким образом нормированное пространство является банаховым.

### 3. НЕВЫРОЖДЕННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим нелинейную обратную задачу для уравнения, разрешенного относительно производной,

$$\dot{v}(t) = Av(t) + g(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{3.1}$$

$$v(0) = v_0, \tag{3.2}$$

$$Bv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{3.3}$$

Задача заключается в отыскании функций  $v : [0, T] \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $q : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$  из соотношений (3.1) – (3.3), где  $A \in Cl(\mathcal{X})$  – инфинитезимальный генератор  $C_0$ -непрерывной полугруппы операторов,  $g : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ . Сформулируем условия разрешимости этой задачи в смысле слабых и в смысле гладких решений, найденные в работе [13].

Далее предполагается, что отображение  $g : [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  представимо в виде

$$g(t, v, q) = g_1(t, v) + g_2(t, v, q) \quad \forall (t, v, q) \in [0, T] \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y}. \quad (3.4)$$

Введем следующие обозначения

$$S_{\mathcal{X}}(a, R) = \{v \in \mathcal{X} : \|v - a\|_{\mathcal{X}} < R\}, \quad S_{\mathcal{X}}(a, R, T) = [0, T] \times S_{\mathcal{X}}(a, R).$$

Считая функцию  $\Psi$  дифференцируемой, определим значение

$$y_0 = \Psi'(0) - \overline{BA}v_0 - Bg_1(0, v_0)$$

и потребуем выполнения условий:

(А) уравнение  $Bg_2(0, v_0, q) = y_0$  относительно  $q$  имеет единственное решение  $q_0 \in \mathcal{Y}$ ;

(В) существует отображение  $g_3 : [0, T] \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ , такое, что

$$Bg_2(t, v, q) = g_3(t, Bv, q);$$

(С) существует число  $R > 0$ , такое, что для любых  $t \in [0, T]$  отображение  $y = g_3(t, \Psi(t), q)$  как функция от  $q$  в шаре  $S_{\mathcal{Y}}(q_0, R)$  имеет обратное отображение  $q = \Phi(t, y)$ ;

(D) существует число  $R > 0$ , такое, что отображение  $\Phi$  непрерывно относительно  $(t, y)$  на множестве  $S_{\mathcal{Y}}(y_0, R, T)$  и удовлетворяет условию Липшица относительно  $y$ ;

(Е) существует число  $R > 0$ , такое, что обе функции  $g_1(t, v)$  и  $g_2(t, v, q)$  являются непрерывными по совокупности всех переменных на  $S_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}((v_0, q_0), R, T)$  и удовлетворяют условию Липшица относительно  $(v, q)$ .

**Определение 2.** Слабым решением задачи (3.1) – (3.3) на отрезке  $[0, T_1]$  называется такая пара функций  $(v, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{X}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$ , что для всех  $t \in [0, T_1]$

$$v(t) = V(t)v_0 + \int_0^t V(t-s)g(s, v(s), q(s))ds,$$

где  $\{V(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{X}) : t \in \overline{\mathbb{R}}_+\}$  – полугруппа, порождаемая оператором  $A$ .

**Теорема 2.** [13] Пусть  $A$  – инфинитезимальный генератор  $C_0$ -непрерывной полугруппы в пространстве  $\mathcal{X}$ ,  $v_0 \in \mathcal{X}$ ,  $B, \overline{BA} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bv_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (А) – (Е). Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное слабое решение  $(v, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{X}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (3.1) – (3.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Определение 3.** Гладким решением задачи (3.1) – (3.3) на отрезке  $[0, T_1]$  называется такая пара  $(v, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{X}) \cap C([0, T_1]; D(A)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ , для которой выполняется (3.2) и соотношения (3.1), (3.3) при всех  $t \in [0, T_1]$ .

Для получения достаточных условий существования гладкого решения рассматриваемой обратной задачи условия (D) и (Е) будут усилены. Целесообразно заменить их следующими условиями:

(D<sub>1</sub>) существует число  $R > 0$  такое, что отображение  $\Phi$  дифференцируемо по Фреше на множестве  $S_{\mathcal{Y}}(y_0, R, T)$  и его частные производные  $\Phi_1, \Phi_2$  непрерывны в операторной норме и удовлетворяют условию Липшица относительно  $y$ ;

(E<sub>1</sub>) существует число  $R > 0$  такое, что обе функции  $g_1(t, v)$  и  $g_2(t, v, q)$  являются дифференцируемыми по Фреше на множестве  $S_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}}((v_0, q_0), R, T)$  и их частные производные  $g_{1t}, g_{1v}, g_{2t}, g_{2v}, g_{2q}$  непрерывны по операторной норме и удовлетворяют условию Липшица относительно  $(v, q)$ .

**Теорема 3.** [13] Пусть  $A$  – инфинитезимальный генератор  $C_0$ -непрерывной полугруппы в пространстве  $\mathcal{X}$ ,  $v_0 \in D(A)$ ,  $B, \overline{BA} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ ,  $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bv_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (C), (D<sub>1</sub>), (E<sub>1</sub>). Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $(v, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{X}) \cap C([0, T_1]; D(A)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (3.1) – (3.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

4. НЕЛИНЕЙНАЯ ЭВОЛЮЦИОННАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Вернемся к обратной задаче для уравнения соболевского типа

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + N(t, u(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{4.1}$$

$$u(0) = u_0, \tag{4.2}$$

$$Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T]. \tag{4.3}$$

Здесь  $\mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{Y}$  – банаховы пространства,  $L \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $M \in \mathcal{Cl}(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{F}$ ,  $\Psi : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ . Неизвестными являются функции  $u : [0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $q : [0, T] \rightarrow \mathcal{Y}$ .

**Теорема 4.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\text{im}N \subset \mathcal{F}^1$ ,  $u_0 \in \mathcal{U}^1$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y})$ ,  $BL_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (E) при  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}N$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное решение  $(u, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{U}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален. Тогда функцию  $u(t)$  можно представить в виде  $u(t) = Pu(t) + (I - P)u(t)$ . Обозначим  $Pu(t) = v(t)$ ,  $(I - P)u(t) = w(t)$ . Тогда в силу теоремы 1 и вложения  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$  задача (4.1) – (4.3) эквивалентна задаче нахождения функций  $v, w, q$  из соотношений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}QN(t, v(t) + w(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{4.4}$$

$$v(0) = v_0 \equiv Pu_0 = u_0, \tag{4.5}$$

$$BPu(t) = Bv(t) = Bu(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T], \tag{4.6}$$

$$H\dot{w}(t) = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v(t) + w(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \tag{4.7}$$

$$w(0) = w_0 \equiv (I - P)u_0. \tag{4.8}$$

Здесь оператор  $H = M_0^{-1}L_0$  нильпотентен степени не больше  $p$ .

Поскольку  $\text{im}N \subset \mathcal{F}^1$ , то  $QN = N$ ,  $(I - Q)N = 0$ . Тогда задача (4.4) – (4.8) принимает вид

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}N(t, v(t) + w(t), q(t)), \quad t \in [0, T],$$

$$v(0) = v_0, \quad (4.9)$$

$$Bv(t) = \Psi(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.10)$$

$$H\dot{w}(t) = w(t), \quad t \in [0, T], \quad (4.11)$$

$$w(0) = (I - P)u_0. \quad (4.12)$$

Нетрудно показать, что в силу нильпотентности оператора  $H$  уравнение (4.11) имеет только нулевое решение (см. [2, 14]). Поэтому условие включения  $u_0 \in \mathcal{U}^1$  является необходимым для выполнения условия (4.12), а задача (4.1) – (4.3) сведена к обратной задаче (4.9), (4.10) для разрешенного относительно производной уравнения

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}N(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T].$$

Если положить  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}N : [0, T] \times \mathcal{U}^1 \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}^1$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ , то получится в точности задача (3.1) – (3.3). Условия теоремы 2 об однозначной локальной разрешимости этой задачи в данном случае выполняются.  $\square$

В случае, когда отображение  $N$  не зависит от переменной  $(I - P)u$ , при  $p = 0$  можно отказаться от ограничения на образ  $\text{im}N$ .

**Теорема 5.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, отображение  $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  непрерывно по совокупности переменных  $(t, u, q)$ , для всех  $(t, u, q) \in [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  выполняется  $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$ , кроме того,  $u_0 \in \mathcal{U}$ ,  $q(0) \in \mathcal{Y}$ ,

$$(I - P)u_0 = -M_0^{-1}(I - Q)N(0, Pu_0, q(0)), \quad (4.13)$$

$B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ ,  $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1, \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (E) при  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}QN$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = Pu_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное решение  $(u, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{U}) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** Рассуждая, как при доказательстве теоремы 4, и используя сильную  $(L, 0)$ -радиальность оператора  $M$  и условия на отображение  $N$ , сведем задачу (4.1) – (4.3) к задаче (4.9), (4.10), (4.12) для уравнений

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1}M_1v(t) + L_1^{-1}QN(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T], \quad (4.14)$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I - Q)N(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T]. \quad (4.15)$$

Здесь оператор  $H = 0$ . По теореме 2 задача (4.9), (4.10), (4.14) при некотором  $T_1 \in (0, T]$  имеет единственное решение  $(v, q) \in C([0, T_1]; \mathcal{U}^1) \times C([0, T_1]; \mathcal{Y})$ . Тогда из уравнения (4.15) следует, что

$$w(t) = -M_0^{-1}(I - Q)N(t, v(t), q(t)), \quad t \in [0, T_1]. \quad (4.16)$$

Функция  $w(t)$  является непрерывной в силу непрерывности отображения  $N$ . Из условия (4.12) в таком случае следует условие согласования (4.13).  $\square$

В этих теоремах по сути использовалось следующее понятие слабого решения рассматриваемой задачи.

**Определение 4.** Слабым решением задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$  в условиях теоремы 4 или теоремы 5 называется такая пара функций  $(u, q) \in C([0, T_1]; U) \times C([0, T_1]; Y)$ , для которой при всех  $t \in [0, T_1]$

$$u(t) = U(t)u_0 + \int_0^t U(t-s)L_1^{-1}QN(s, u(s), q(s))ds - M_0^{-1}(I - Q)N(t, u(t), q(t)). \tag{4.17}$$

Чтобы избавиться от необходимости выполнения неудобного для проверки условия согласования (4.13), которое к тому же дополнительно предполагает априорное знание величины  $q(0)$ , заменим начальное условие (4.2) в обратной задаче на так называемое обобщенное условие Шоултера [2]

$$Pu(0) = u_0. \tag{4.18}$$

При этом слабым решением задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$  будет называть пару функций  $(u, q) \in C([0, T_1]; U) \times C([0, T_1]; Y)$ , для которой при всех  $t \in [0, T_1]$  выполняется (4.17).

**Теорема 6.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\text{im}N \subset \mathcal{F}^1$ ,  $u_0 \in U^1$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(U^1, Y)$ ,  $U^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; Y)$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (E) при  $\mathcal{X} = U^1$ ,  $g = L_1^{-1}N$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное слабое решение  $(u, q) \in C([0, T_1]; U) \times C([0, T_1]; Y)$  обратной задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Теорема 7.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, отображение  $N : [0, T] \times U \times Y \rightarrow Y$  непрерывно по совокупности переменных  $(t, u, q)$ , для всех  $(t, u, q) \in [0, T] \times U \times Y$  выполняется  $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$ , кроме того,  $u_0 \in U^1$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(U^1, Y)$ ,  $U^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^1([0, T]; Y)$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (E) при  $\mathcal{X} = U^1$ ,  $g = L_1^{-1}QN$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное слабое решение  $(u, q) \in C([0, T_1]; U) \times C([0, T_1]; Y)$  обратной задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** Задача (4.1), (4.3), (4.18) отличается от задачи (4.1) – (4.3) только отсутствием условия на  $(I - P)u(0)$ , которое при доказательстве теорем 4 и 5 лишь приводило к необходимости дополнительных условий согласования:  $u_0 \in U^1$  в теореме 4 и условие (4.13) в теореме 5. С другой стороны условие (4.18) само по себе предполагает принадлежность  $u_0 \in U^1$ . Поэтому условия теорем 4 и 6 одинаковы, а теорема 7 отличается от теоремы 5 только отсутствием дополнительного условия (4.13). □

**Определение 5.** Гладким решением задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$  называется такая пара  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; U) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; Y)$ , для которой выполняется (4.2) и соотношения (4.1), (4.3) при всех  $t \in [0, T_1]$ .

**Теорема 8.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\text{im}N \subset \mathcal{F}^1$ ,  $u_0 \in D(M_1)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, Y)$ ,  $\overline{BL_1^{-1}M_1} \in \mathcal{L}(U^1, Y)$ ,  $U^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^2([0, T]; Y)$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (C),  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  при  $\mathcal{X} = U^1$ ,  $g = L_1^{-1}N$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; U) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; Y)$  обратной задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Теорема 9.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален и выполняются следующие условия:

- (i) для всех  $(t, u, q) \in [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  выполняется  $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$ ;
- (ii)  $u_0 \in D(M)$ ,  $q(0) \in \mathcal{Y}$ ,  $(I - P)u_0 = -M_0^{-1}(I - Q)N(0, Pu_0, q(0))$ ;
- (iii)  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ ,  $BL_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1, \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ ;
- (iv) выполняются условия (3.4), (A) – (C),  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  при  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}QN$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = Pu_0$ ;

(v) на множестве  $S_{\mathcal{U} \times \mathcal{Y}}((u_0, q_0), R, T)$  отображение  $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  дифференцируемо по Фреше, а его частные производные  $N_1, N_2, N_3$  непрерывны по совокупности переменных  $(t, u, q)$  в сильной топологии.

Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (4.1) – (4.3) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Определение 6.** Гладким решением задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$  называется такая пара  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$ , для которой выполняется (4.18) и соотношения (4.1), (4.3) при всех  $t \in [0, T_1]$ .

**Теорема 10.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, p)$ -радиален,  $\text{im}N \subset \mathcal{F}^1$ ,  $u_0 \in D(M_1)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ ,  $BL_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1, \mathcal{Y})$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ,  $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ , а также выполняются условия (3.4), (A) – (C),  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  при  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}N$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Теорема 11.** Пусть оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален и выполняются следующие условия:

- (i) для всех  $(t, u, q) \in [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y}$  выполняется  $N(t, u, q) = N(t, Pu, q)$ ;
- (ii)  $u_0 \in D(M_1)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, \mathcal{Y})$ ,  $BL_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1, \mathcal{Y})$ ,  $\Psi \in C^2([0, T]; \mathcal{Y})$ ,  $Bu_0 = \Psi(0)$ ,  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ;
- (iii) выполняются условия (3.4), (A) – (C),  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  при  $\mathcal{X} = \mathcal{U}^1$ ,  $g = L_1^{-1}QN$ ,  $A = L_1^{-1}M_1$ ,  $v_0 = u_0$ ;

(iv) на множестве  $S_{\mathcal{U} \times \mathcal{Y}}((u_0, q_0), R, T)$  отображение  $N : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  дифференцируемо по Фреше, а его частные производные  $N_1, N_2, N_3$  непрерывны по совокупности переменных  $(t, u, q)$  в сильной топологии.

Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $(u, q) \in C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M)) \times C^1([0, T_1]; \mathcal{Y})$  обратной задачи (4.1), (4.3), (4.18) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** При доказательстве теорем 4 – 7 исходная задача сводилась к задаче для невырожденного уравнения. Для нее в теореме 3 доказано, что дополнительная гладкость функции  $\Psi$ , принадлежность  $v_0$  линейалу  $D(A)$  и выполнение условий  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  в условиях теоремы 2 приводят к существованию гладкого решения обратной задачи. Используя это наблюдение и рассуждая, как при доказательстве теорем 4 и 6, получим доказательства теорем 8 и 10. Надо при этом заметить, что непрерывность решения относительно нормы графика оператора  $A = L_1^{-1}M_1$  в силу гомеоморфности оператора  $L_1$  равносильна непрерывности в норме графика оператора  $M_1$ , а поскольку в условиях

теорем 8 и 10  $u(t) = Pu(t)$ , то это равносильно непрерывности решения в норме графика оператора  $M$ .

В условиях теорем 9 и 11 воспроизведем доказательства теорем 5 и 7 и к сказанному выше добавим, что функция (4.16) непрерывно дифференцируема в силу непрерывной дифференцируемости ее аргументов и требований дополнительной гладкости отображения  $N$ . Например,

$$\begin{aligned} & \|N_2(t, v(t), q(t))\dot{v}(t) - N_2(t_0, v(t_0), q(t_0))\dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{F}} \leq \\ \leq & \|N_2(t, v(t), q(t))(\dot{v}(t) - \dot{v}(t_0))\|_{\mathcal{F}} + \|(N_2(t, v(t), q(t)) - N_2(t_0, v(t_0), q(t_0)))\dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{F}} \leq \\ & \leq C\|\dot{v}(t) - \dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{U}} + \|(N_2(t, v(t), q(t)) - N_2(t_0, v(t_0), q(t_0)))\dot{v}(t_0)\|_{\mathcal{F}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $t \rightarrow t_0$ , поскольку из сильной непрерывности семейства операторов

$$\{N_2(t, v(t), q(t)) : \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{F}) : t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)\}$$

по теореме Банаха–Штейнгауза следует его равномерная ограниченность при малом  $\delta > 0$ .

При этом функция  $Mw(t) = -(I - Q)N(t, v(t), q(t))$  также непрерывна, а значит, решение непрерывно относительно нормы графика оператора  $M$ .  $\square$

### 5. НЕЛИНЕЙНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СОБОЛЕВА

Рассмотрим обратную задачу для системы уравнений Соболева [17]

$$v_t(x, t) = [v(x, t), \bar{\omega}] - r(x, t) + q(t)v(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot v(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (5.2)$$

$$v_n(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (5.3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.4)$$

$$\int_{\Omega} \langle K(x), v(x, t) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (5.5)$$

Здесь  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ , вектор  $v = (v_1, v_2, v_3)$  – скорость,  $r$  – градиент нестационарного давления,  $[\cdot, \bar{\omega}]$  – векторное произведение на вектор  $\bar{\omega} = (0, 0, \omega) \in \mathbb{R}^3$ ,  $n = (n_1, n_2, n_3)$  – вектор внешней нормали к границе области,  $v_n = (v, n)_{\mathbb{R}^3}$ . Неизвестными являются вектор-функции  $v$ ,  $r$  и функция  $q$ , а вектор-функция  $K$  и функция  $\psi$  заданы.

Обозначим  $\mathcal{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ . Замыкание линейного пространства  $\mathcal{L}$  по норме пространства  $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$  обозначим через  $\mathbb{H}_\sigma$ . Пусть  $\mathbb{H}_\pi$  – ортогональное дополнение к  $\mathbb{H}_\sigma$ ,  $\Pi : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{H}_\pi$  – ортопроектор вдоль  $\mathbb{H}_\sigma$ .

Следуя подходу С.Л. Соболева [17], используем обобщенную постановку начально-краевой задачи (5.1) – (5.4), заменив уравнение несжимаемости (5.2) и граничное условие (5.3) на уравнение

$$\Pi v(\cdot, t) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (5.6)$$

Действительно, в силу плотности множества  $\{\nabla\varphi : \varphi \in C^\infty(\Omega)\}$  в подпространстве  $\mathbb{H}_\pi$  и в силу интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \langle v, \nabla\varphi \rangle dx = \int_{\partial\Omega} v_n \varphi ds - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) \varphi dx,$$

справедливого при всех  $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ , получим, что для функции  $v \in \mathbb{H}^1 = (H^1(\Omega))^3$  выполнение условий (5.2) и (5.3) равносильно тому, что  $v \in \mathbb{H}_\sigma$  или

$\Pi v = 0$ . При этом используется тот факт, что в силу разложения Вейля  $\mathbb{H}_\pi = \nabla H^1(\Omega)$ . Отказавшись от ограничения  $v \in \mathbb{H}^1$ , получим условие (5.6).

Формулой  $G : v \rightarrow [v, \bar{\omega}]$ ,  $\bar{\omega} = (0, 0, \omega)$ , зададим линейный непрерывный оператор  $G : \mathbb{L}_2 \rightarrow \mathbb{L}_2$ . Положим  $\Sigma = I - \Pi$ ,

$$\mathcal{U} = \mathcal{F} = \mathbb{H}_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad (5.7)$$

тогда векторы имеют вид  $u = (v, r) \in \mathcal{U}$ ,  $f = (g, h) = (\Sigma f, \Pi f) \in \mathcal{F}$ . При этом использовано то, что в силу (5.6)  $v(\cdot, t) = 0 \in \mathbb{H}_\sigma$ , градиент давления  $r(\cdot, t) = \nabla P(\cdot, t) \in \nabla H^1(\Omega) = \mathbb{H}_\pi$  для всех  $t \in [0, T]$ .

Систему Соболева (5.1), (5.6) можно задать в виде (4.1) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}), \quad M = \begin{pmatrix} \Sigma G_\sigma & \mathbb{O} \\ \Pi G_\sigma & -I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{U}). \quad (5.8)$$

**Лемма 1.** Пусть заданы пространства (5.7) и операторы (5.8). Тогда оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, при этом  $\sigma^L(M) = \sigma(\Sigma G_\sigma)$ , а проекторы имеют вид

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \Pi G_\sigma & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix}.$$

**Доказательство.** Имеем

$$\mu L - M = \begin{pmatrix} \mu I - \Sigma G_\sigma & \mathbb{O} \\ -\Pi G_\sigma & I \end{pmatrix}, \quad (\mu L - M)^{-1} = \begin{pmatrix} (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-1} & \mathbb{O} \\ \Pi G_\sigma (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-1} & I \end{pmatrix}.$$

Последний оператор существует и ограничен при  $\mu \notin \sigma(\Sigma G_\sigma)$ , в частности при

$$|\mu| > a = |\omega| = \|\Sigma G_\sigma\|_{\mathcal{L}(\mathbb{H}_\sigma)}.$$

Поскольку при  $n \in \mathbb{N}$

$$(R_\mu^L(M))^n = \begin{pmatrix} (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-n} & \mathbb{O} \\ \Pi G_\sigma (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-n} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad (L_\mu^L(M))^n = \begin{pmatrix} (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-n} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

$$R_\mu^L(M)(\mu L - M)^{-1} = (R_\mu^L(M))^2,$$

$$M(\mu L - M)^{-1}L_\mu^L(M) = \begin{pmatrix} \Sigma G_\sigma (\mu I - \Sigma G_\sigma)^{-2} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{pmatrix},$$

то в силу ограниченности оператора  $\Sigma G_\sigma$  получим сильную  $(L, 0)$ -радиальность оператора  $M$ .

Используя найденные выражения, проекторы  $P$  и  $Q$  найдем по формулам из теоремы 1 (ii). Лемма доказана.  $\square$

**Теорема 12.** Пусть  $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$ ,  $K \in \mathbb{L}_2$ ,  $\psi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ , для всех  $t \in [0, T]$   $\psi(t) \neq 0$ , выполняется условие согласования  $\int \langle K(x), v_0(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \psi(0)$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  слабое решение  $v \in C([0, T_1]; \mathbb{H}_\sigma)$ ,  $r \in C([0, T_1]; \mathbb{H}_\pi)$ ,  $q \in C([0, T_1]; \mathbb{R})$  обратной задачи (5.1), (5.4) – (5.6) на отрезке  $[0, T_1]$  существует и единственно.

**Доказательство.** Сразу заметим, учитывая вид проектора  $P$  в утверждении леммы 1, что задача (5.4) для системы (5.1), (5.6) является обобщенной задачей Шоултера. При этом  $\mathcal{F}^0 = \mathbb{H}_\pi$ ,  $\mathcal{F}^1 = \mathbb{H}_\sigma$ ,  $\mathcal{U}^0 = \mathbb{H}_\pi$ ,  $\mathcal{U}^1$  изоморфно  $\mathbb{H}_\sigma$ . Отсюда следует требование  $v_0 \in \mathbb{H}_\sigma$ .

Имеем

$$N(t, u, q) = N(t, v, r, q) = \begin{pmatrix} qv \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{F}^1, \quad N(t, u, q) = N(t, Pu, q).$$

Поэтому в силу леммы 1 доказательство можно свести к проверке условий теоремы 6 или, что в данном случае то же самое, теоремы 7.

Положим  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ . Поскольку  $K \in \mathbb{L}_2$ , то

$$Bu = B(v, r) = \int_{\Omega} \langle K(x), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx \in \mathcal{Y}, \quad B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}; \mathcal{Y}).$$

Имеем  $B(0, r) = 0$ , поэтому  $\overline{\mathcal{U}^0} \subset \ker B$ . Так как  $M \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ , то автоматически выполняется условие  $BL_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1; \mathcal{Y})$ . Осталось проверить условия (3.4), (A) – (D).

Отметим, что  $L_1^{-1} = I$ . В условии (3.4) возьмем  $g(t, v, q) = g_2(t, v, q) = qv$ ,  $g_1(t, v) \equiv 0$ . Тогда  $y_0 = \psi'(0) - \int_{\Omega} \langle K(x), Gv_0(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx$ . Уравнение  $Bg_2(0, v_0, q) = q \int_{\Omega} \langle K(x), v_0(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = q\psi(0) = y_0$  имеет единственное решение  $q_0 = y_0/\psi(0)$ . Условие (B) выполняется с функциями  $g_2(t, v, q) = qv$ ,  $g_3(t, y, q) = qy$  в силу равенства

$$\int_{\Omega} \langle K(x), qv(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = q \int_{\Omega} \langle K(x), v(x, t) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx.$$

Условие (C) выполняется в силу того, что уравнение  $g_3(t, \psi(t), q) = q\psi(t) = y$  имеет решение

$$q = \frac{y}{\psi(t)} = \Phi(t, y).$$

При этом функция  $|\psi(t)|$  непрерывна на  $[0, T]$ , поэтому по теореме Вейерштрасса достигает своего минимума на этом отрезке, который больше нуля, поскольку  $\psi$  не обращается в ноль на отрезке  $[0, T]$ . Следовательно, для всех  $t \in [0, T]$ ,  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$

$$|\Phi(t, y_1) - \Phi(t, y_2)| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{\min_{s \in [0, T]} |\psi(s)|}.$$

Непрерывность функции  $\Phi$  по совокупности переменных  $(t, y)$  следует также из непрерывности функции  $\psi$ . Это означает выполнение условия (D).

При любом  $R > 0$  для всех  $(v_1, q_1), (v_2, q_2) \in S_{\mathcal{X} \times \mathcal{Q}}((v_0, q_0), R, T)$  выполняется

$$\begin{aligned} \|g_2(t, v_1, q_1) - g_2(t, v_2, q_2)\|_{\mathbb{L}_2} &\leq \|q_1 v_1 - q_2 v_1 + q_2 v_1 - q_2 v_2\|_{\mathbb{L}_2} \leq \\ &\leq (\|v_0\|_{\mathbb{L}_2} + R) \cdot |q_1 - q_1| + (|q_0| + R) \cdot \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{L}_2} \leq K (\|q_1 - q_1\| + \|v_1 - v_2\|_{\mathbb{L}_2}), \end{aligned}$$

где  $K = \max\{\|v_0\|_{\mathbb{L}_2}, |q_0|\} + R$ . Непрерывность  $g_2$  по совокупности переменных очевидна. Отсюда следует выполнение условия (E).

Теперь, воспользуемся теоремой 6 (или 7) и получим требуемое.  $\square$

**Теорема 13.** Пусть  $v_0 \in \mathbb{H}_{\sigma}$ ,  $K \in \mathbb{L}_2$ ,  $\psi \in C^2([0, T]; \mathbb{R})$ , для всех  $t \in [0, T]$   $\psi(t) \neq 0$ , выполняется условие согласования  $\int_{\Omega} \langle K(x), v_0(x) \rangle_{\mathbb{R}^3} dx = \psi(0)$ . Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $v \in C^1([0, T_1]; \mathbb{H}_{\sigma})$ ,  $r \in C^1([0, T_1]; \mathbb{H}_{\pi})$ ,  $q \in C^1([0, T_1]; \mathbb{R})$  обратной задачи (5.1), (5.4) – (5.6) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** С учетом предыдущей теоремы, остается доказать выполнение условий  $(D_1)$ ,  $(E_1)$  и сослаться, например, на теорему 10.

Очевидно, что скалярная функция  $\Phi(t, y) = y/\psi(t)$  двух числовых переменных дифференцируема, а ее частные производные

$$\Phi_1(t, y) = -\frac{y\psi'(t)}{\psi^2(t)}, \quad \Phi_2(t, y) = \frac{1}{\psi(t)}$$

непрерывны в силу непрерывности функции  $\psi'(t)$  и удовлетворяют условию Липшица по  $y$ :  $\Phi_2(t, y_1) = \Phi_2(t, y_2)$ ,

$$|\Phi_1(t, y_1) - \Phi_1(t, y_2)| \leq \max_{s \in [0, T]} \left| \frac{\psi'(s)}{\psi^2(s)} \right| \cdot |y_1 - y_2| \quad \forall t \in [0, T].$$

Далее, равенство  $g_2(t, v + h_1, q + h_2) - g_2(t, v, q) = qh_1 + vh_2 + h_1h_2$  говорит о дифференцируемости функции  $g_2$ , при этом производные  $g_{2t} \equiv 0$ ,  $g_{2v} = q$ ,  $g_{2q} = v$  непрерывны в операторной норме и удовлетворяют условию Липшица по  $(v, q)$ .  $\square$

## 6. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С МНОГОЧЛЕНАМИ ОТ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

Пусть  $P_n(\lambda) = \sum_{i=0}^n c_i \lambda^i$ ,  $Q_m(\lambda) = \sum_{j=0}^m d_j \lambda^j$ ,  $m \geq n$ ,  $c_i, d_j \in \mathbb{C}$ ,  $c_n \neq 0$ ,  $d_m \neq 0$ ,  $s \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^s$  – ограниченная область с границей  $\partial\Omega$  класса  $C^\infty$ , набор операторов  $A, B_1, \dots, B_r$  – регулярно эллиптический [18], где

$$(Au)(x) = \sum_{|\alpha| \leq 2r} a_\alpha(x) D^\alpha u(x), \quad a_\alpha \in C^\infty(\bar{\Omega}),$$

$$(B_l u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq r_l} b_{l\alpha}(x) D^\alpha u(x), \quad b_{l\alpha}(x) \in C^\infty(\partial\Omega), \quad l = 1, \dots, r.$$

Потребуем также самосопряженности оператора  $A_1 \in Cl(L_2(\Omega))$  с областью определения  $D(A_1) = H_{\{B_l\}}^{2r}(\Omega)$  [18],  $A_1 u = Au$  для  $u \in D(A_1)$ , и ограниченности справа спектра  $\sigma(A_1)$ . Через  $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$  обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  в  $L_2(\Omega)$  собственные функции оператора  $A_1$ , занумерованные по невозрастанию собственных значений  $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$  с учетом их кратности.

Рассмотрим эволюционную обратную задачу

$$P_n(A)u_t(x, t) = Q_m(A)u(x, t) + q(t)\varphi(x, t) \int_{\Omega} K(y)u(y, t)dy, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, T], \quad (6.1)$$

$$B_l A^k u(x, t) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad l = 1, \dots, r, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \quad (6.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.3)$$

$$\int_{\Omega} K(x)u(x, t)dx = \psi(t), \quad t \in [0, T]. \quad (6.4)$$

Искомыми здесь являются функции  $u(x, t)$  и  $q(t)$ .

Положим

$$\mathcal{U} = \{w \in H^{2rn}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1, \quad l = 1, \dots, r, \quad x \in \partial\Omega\},$$

$$\mathcal{F} = L_2(\Omega), \quad L = P_n(A), \quad M = Q_m(A),$$

$$D(M) = \{w \in H^{2rm}(\Omega) : B_l A^k w(x) = 0, \quad k = 0, \dots, m-1, \quad l = 1, \dots, r, \quad x \in \partial\Omega\}.$$

**Теорема 14.** Пусть  $m \geq n \geq 1$ ,  $(-1)^{m-n} \operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$ , при этом числа  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , не являются одновременно корнями многочленов  $P_n$  и  $Q_m$ . Кроме того, пусть выполняются условия:

- (i)  $\varphi \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ ,  $u_0 \in \mathcal{U}$ ;
- (ii)  $K \in H^{2(m-2n)r}(\Omega)$  при  $m > 2n$  и  $K \in L_2(\Omega)$  при  $m \leq 2n$ ,
- (iii) для всех  $k \in \mathbb{N}$ , таких, что  $P_n(\lambda_k) = 0$ , выполняется

$$\langle \varphi(\cdot, t), \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \langle K, \varphi_k \rangle = 0, \quad \langle u_0, \varphi_k \rangle = 0,$$

- (iv)  $\psi \in C^1([0, T]; \mathbb{R})$ ,  $\langle K, u_0 \rangle = \psi(0)$ , для всех  $t \in [0, T]$   $\psi(t) \neq 0$ , а также  $\langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle \neq 0$ .

Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное слабое решение  $u \in C([0, T_1]; \mathcal{U})$ ,  $q \in C([0, T_1]; \mathbb{R})$  обратной задачи (6.1) – (6.4) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** В работе [19] показано, что в рассматриваемом случае оператор  $M$  сильно  $(L, 0)$ -радиален, проекторы  $P$  и  $Q$  имеют вид  $\sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$ , где сходимость ряда понимается в смысле пространства  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{F}$  соответственно,  $\mathcal{U}^0 = \operatorname{span}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) = 0\}$ ,  $\mathcal{U}^1 = \overline{\operatorname{span}}\{\varphi_k : P_n(\lambda_k) \neq 0\}$  – замыкание в норме  $H^{2rn}(\Omega)$ .

В силу (iii)  $u_0 \in \mathcal{U}^1$ ,  $K \in \mathcal{U}^1$ , поэтому  $\mathcal{U}^0 \subset \ker B$ ; из условий (ii) на гладкость функции  $K$  следует непрерывность оператора  $BL_1^{-1}M_1$ . Действительно, для  $u \in D(M_1)$

$$BL_1^{-1}M_1 u = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle Q_m(A)u, \varphi_k \rangle \langle \varphi_k, K \rangle}{P_n(\lambda_k)} = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle Q_m(A)u, K \rangle}{P_n(\lambda_k)},$$

$$\sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle A^m u, K \rangle}{P_n(\lambda_k)} = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle A^{2n} u, A^{m-2n} K \rangle}{P_n(\lambda_k)}.$$

Последнее выражение определено уже при любом  $u \in H^{2rn}(\Omega)$ , что и требовалось.

В условии (3.4) надо взять  $\mathcal{Y} = \mathbb{R}$ ,  $N(t, u, q) = q \langle K, u \rangle \varphi(\cdot, t) : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{F}^1$  в силу условия (iii),  $g(t, u, q) = g_2(t, u, q) = q \langle K, u \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) : [0, T] \times \mathcal{U} \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$ ,  $g_1(t, q) \equiv 0$ . Обратный оператор  $L_1^{-1} = \sum_{P_n(\lambda_k) \neq 0} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle}{P_n(\lambda_k)} \varphi_k$  определен на  $\varphi(\cdot, t)$

при всех  $t \in [0, T]$  в силу условия (iii).

Для  $y_0 = \psi'(0) - BL_1^{-1}M_1 u_0$  уравнение

$$Bg_2(0, u_0, q) = q \langle K, u_0 \rangle \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, 0) \rangle = y_0$$

имеет единственное решение

$$q_0 = \frac{y_0}{\psi(0) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, 0) \rangle}.$$

Условие (B) выполняется с функцией  $g_3(t, y, q) = qy \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle$ . Условие (C) выполняется в силу того, что уравнение  $g_3(t, \psi(t), q) = y$  в силу условия (iv) имеет решение

$$q = \frac{y}{\psi(t) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle} = \Phi(t, y).$$

При этом функция  $\Phi$  непрерывна по совокупности переменных  $(t, y)$  и равномерно по  $t$  на  $[0, T]$  липшицева по  $y$ , поскольку оператор  $L_1^{-1}$  непрерывен на  $\mathcal{F}^1$  в силу теоремы 1 (v) и согласно условиям (i), (iv) настоящей теоремы

$$|\Phi(t, y_1) - \Phi(t, y_2)| \leq \frac{|y_1 - y_2|}{\min_{s \in [0, T]} |\psi(s) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, s) \rangle|}.$$

Это означает выполнение условия (D).

Имеем

$$\begin{aligned} & \|g_2(t + h_1, u + h_2, q + h_3) - g_2(t, u, q)\|_{H^{2rn}(\Omega)} = \\ & = \|(q + h_3) \langle K, u + h_2 \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t + h_1) - q \langle K, u \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t)\|_{H^{2rn}(\Omega)} \leq \\ & \leq (|q| + 1) \|K\|_{L_2(\Omega)} (\|u\|_{\mathcal{U}} + 1) \|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)} \|\varphi(\cdot, t + h_1) - \varphi(\cdot, t)\|_{L_2(\Omega)} + \\ & + (|q| + 1) \|K\|_{L_2(\Omega)} \|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)} \|\varphi\|_{C([0, T]; L_2(\Omega))} \|h_2\|_{\mathcal{U}} + \\ & + \|K\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{\mathcal{U}} \|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)} \|\varphi\|_{C([0, T]; L_2(\Omega))} |h_3| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $(h_1, h_2, h_3) \rightarrow (0, 0, 0)$  в  $[0, T] \times \mathcal{U} \times \mathbb{R}$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} & \|g_2(t, u_1, q_1) - g_2(t, u_2, q_2)\|_{H^{2rn}(\Omega)} = \\ & = \|q_1 \langle K, u_1 \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) - q_2 \langle K, u_2 \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t)\|_{H^{2rn}(\Omega)} \leq \\ & \leq (|q_0| + R) \|K\|_{L_2(\Omega)} \|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)} \|\varphi\|_{C([0, T]; L_2(\Omega))} \|u_1 - u_2\|_{\mathcal{U}} + \\ & + (\|u_0\|_{\mathcal{U}} + R) \|K\|_{L_2(\Omega)} \|L_1^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)} \|\varphi\|_{C([0, T]; L_2(\Omega))} |q_1 - q_2|. \end{aligned}$$

Все это означает выполнение условия (E). Из теоремы 4 следует требуемое.  $\square$

Изменим начальное условие Коши на условие

$$P_n(A)u(x, 0) = P_n(A)u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (6.5)$$

**Теорема 15.** Пусть  $m \geq n \geq 1$ ,  $(-1)^{m-n} \operatorname{Re}(d_m/c_n) \leq 0$ , при этом числа  $\lambda_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , не являются одновременно корнями многочленов  $P_n$  и  $Q_m$ . Кроме того, пусть выполняются условия:

- (i)  $\varphi \in C^1([0, T]; L_2(\Omega))$ ,  $u_0 \in D(M)$ ;
- (ii)  $K \in H^{2(m-2n)r}(\Omega)$  при  $m > 2n$  и  $K \in L_2(\Omega)$  при  $m \leq 2n$ ,
- (iii) для всех  $k \in \mathbb{N}$ , таких, что  $P_n(\lambda_k) = 0$ , выполняется

$$\langle \varphi(\cdot, t), \varphi_k \rangle = 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad \langle K, \varphi_k \rangle = 0, \quad \langle u_0, \varphi_k \rangle = 0,$$

(iv)  $\psi \in C^2([0, T]; \mathbb{R})$ ,  $\langle K, u_0 \rangle = \psi(0)$ , для всех  $t \in [0, T]$   $\psi(t) \neq 0$ , а также  $\langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle \neq 0$ .

Тогда при некотором  $T_1 \in (0, T]$  существует единственное гладкое решение  $u \in C^1([0, T_1]; \mathcal{U}) \cap C([0, T_1]; D(M))$ ,  $q \in C^1([0, T_1]; \mathbb{R})$  обратной задачи (6.1), (6.2), (6.4), (6.5) на отрезке  $[0, T_1]$ .

**Доказательство.** Из сильной  $(L, 0)$ -радиальности оператора  $M$  в данной задаче следует, что  $\ker L = \mathcal{U}^0$ , поэтому условие (6.5) равносильно обобщенному условию Шоултера.

Проверим выполнение условий  $(D_1)$  и  $(E_1)$ . Имеем

$$\Phi_1 = \frac{y(\psi'(t) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle + \psi(t) \langle K, L_1^{-1} \varphi'_t(\cdot, t) \rangle)}{\psi^2(t) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle^2}, \quad \Phi_2 = \frac{1}{\psi(t) \langle K, L_1^{-1} \varphi(\cdot, t) \rangle}.$$

Эти функции непрерывны по совокупности переменных  $(t, y)$  и липшицевы по  $y$  в силу условий (i), (iv). Поэтому условие  $(D_1)$  выполняется.

Далее, частные производные от  $g_2$  имеют вид  $g_{2t} = q\langle K, u \rangle L_1^{-1} \varphi'_t(\cdot, t)$ ,  $g_{2q} = \langle K, u \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t)$ ,  $g_{2u} h_1 = q\langle K, h_1 \rangle L_1^{-1} \varphi(\cdot, t)$ . Непрерывность этих производных по совокупности переменных  $(t, u, q)$  в операторной норме и их липшицевость по  $(u, q)$  доказываются так же, как аналогичные свойства отображения  $g_2$  в предыдущей теореме. По теореме 10 получаем требуемое.  $\square$

Частным случаем рассмотренной задачи является обратная задача для уравнения Дзеккера эволюции свободной поверхности фильтрующей жидкости [20]:

$$\begin{aligned}
 (\lambda - \Delta)u_t(x, t) &= \alpha \Delta u(x, t) - \beta \Delta^2 u(x, t) + q(t) \varphi(x, t) \int_{\Omega} K(y) u(y, t) dy, \\
 & \hspace{25em} (x, t) \in \Omega \times [0, T], \\
 u(x, t) = \Delta u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \\
 (\lambda - \Delta)u(x, 0) &= (\lambda - \Delta)u_0(x), \quad x \in \Omega, \\
 \int_{\Omega} K(x) u(x, t) dx &= \psi(t), \quad t \in [0, T].
 \end{aligned}$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate Differential Equations in Banach Spaces*, Marcel Dekker, New York, 1999. MR1654663
- [2] G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov, *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators*, VSP, Utrecht, Boston, 2003. MR2225515
- [3] А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, *Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа*, Физматлит, М., 2007.
- [4] Г.В. Демиденко, С.В. Успенский, *Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной*, Научная книга, Новосибирск, 1998. MR1831690
- [5] A.I. Kozhanov, *Composite Type Equations and Inverse Problems*, VSP, Utrecht, 1999. MR1745761
- [6] N.L. Abasheeva, *Determination of a right-hand side term in an operator-differential equation of mixed type*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **10** (2002), 547–560. MR1967438
- [7] V.E. Fedorov, A.V. Urazaeva, *An inverse problem for linear Sobolev type equations*, J. Inv. Ill-Posed Problems, **12** (2004), 387–396. MR2085381
- [8] M. Al Horani, A. Favini, *An identification problem for first-order degenerate differential equations*, J. of Optimization Theory and Applications, **130** (2006), 41–60.
- [9] Ю.Е. Аниконов, Н.Л. Абашеева, Н.Б. Аюпова, А.И. Кожанов, М.В. Нецадим, И.Р. Валитов, *Обратные задачи для эволюционных уравнений* (Итоговый научный отчет по междисциплинарному интеграционному проекту СО РАН: “Разработка теории и вычислительной технологии решения обратных и экстремальных задач с применением в математической физике и гравимагниторазведке”), Сибирские электронные математические известия, **5** (2008), 549–580.
- [10] А.В. Уразаева, В.Е. Федоров, *Задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений гидродинамики*, Дифференц. уравнения, **44** (2008), 1111–1119.
- [11] А.В. Уразаева, В.Е. Федоров, *О корректности задачи прогноз-управления для некоторых систем уравнений*, Мат. заметки, **85** (2009), 440–450. MR2548051
- [12] В.Е. Федоров, А.В. Уразаева, *Линейная эволюционная обратная задача для уравнений соболевского типа*, Неклассические уравнения математической физики. Сб. науч. работ, Изд-во Ин-та математики, Новосибирск, 2010, 293–310.
- [13] A.I. Prilepko, D.G. Orlovsky, I.A. Vasin, *Methods for Solving Inverse Problems in Mathematical Physics*, Marcel Dekker, New York, Basel, 2000. MR1748236
- [14] В.Е. Федоров, *Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов*, Алгебра и анализ, **12** (2000), 173–200. MR1775029

- [15] В.Е. Федоров, *Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов*, Вестник Челяб. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика, (2009), № 20 (158), вып. 11, 12–19.
- [16] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Иностранная литература, М., 1962. MR0251584
- [17] С.Л. Соболев, *Об одной новой задаче математической физики*, Изв. АН СССР. Сер. мат., **18** (1954), 3–50. MR0069382
- [18] Х. Трибель, *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.
- [19] М.В. Плеханова, В.Е. Федоров, *Критерий оптимальности в задаче управления для линейного уравнения соболевского типа*, Изв. РАН. Теория и системы управления, (2007), № 2, 37–44. MR2367895
- [20] Е.С. Дзекцер, *Обобщение уравнения движения грунтовых вод со свободной поверхностью*, ДАН СССР, **202** (1972), 1031–1033.

Владимир Евгеньевич Федоров, Наталья Дмитриевна Иванова  
Челябинский государственный университет,  
ул. Братьев Кашириных 129,  
454001, Челябинск, Россия  
E-mail address: kar@csu.ru, natalia.d.ivanova@gmail.com

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.379–С.393 (2011)*

УДК 519.633  
MSC 35L05, 65M32СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ  
РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА–ЛЕВИТАНА–КРЕЙНА

М.А. ШИШЛЕНИН, Н.С. НОВИКОВ

ABSTRACT. We consider 1D inverse acoustic problem for hyperbolic equation. The Gelfand-Levitan-Krein approach is applied to obtain set of linear integral Fredholm equation of the second kind. The Monte-Carlo method is applied. The numerical results are presented.

**Keywords:** inverse acoustic problem, Monte-Carlo method, Gelfand-Levitan equation.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматриваются обратные задачи по определению коэффициентов  $c(x)$  и  $q(x)$  уравнений

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{c'(x)}{c(x)}u_x$$

и

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$$

соответственно.

Задачи определения коэффициентов гиперболических уравнений возникают во многих прикладных областях. Так, в обратной задаче акустики искомый

---

SHISHLENIN M.A., NOVIKOV N.S. COMPARATIVE ANALYSIS OF TWO NUMERICAL METHODS FOR SOLVING OF GELFAND-LEVITAN-KREIN EQUATION.

© 2011 ШИШЛЕНИН М.А., НОВИКОВ Н.С.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00746, грант 11-01-00105 и при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350).

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

коэффициент  $c(x)$  связан с акустической жесткостью среды. Также подобные задачи возникают в сейсмике и электродинамике.

В данной работе для решения рассматриваемых задач применяется метод Гельфанда - Левитана: нелинейные обратные задачи сводятся к семейству линейных интегральных уравнений Фредгольма. Затем полученное уравнение решается с использованием метода Монте-Карло, т.е. значение искомой функции в точке представляется в виде математического ожидания некоторой случайной величины, а также с использованием метода регуляризации С. К. Годунова.

## 2. СВЕДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИКИ К УРАВНЕНИЮ М.Г. КРЕЙНА

Рассматривается следующая обратная задача: найти функцию  $c(x)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$\begin{aligned} (1) \quad & u_{tt} = u_{xx} - \frac{c'(x)}{c(x)}u_x, \quad x > 0, t > 0; \\ (2) \quad & u|_{t < 0} \equiv 0 \\ (3) \quad & u_x|_{x=0} = c(+0)\delta(t) \\ (4) \quad & u|_{x=0} = f(t) \end{aligned}$$

Данная статья опирается на работу А.С. Благовещенского ([3]), который в свою очередь дал новое доказательство результатам, полученным М.Г. Крейном.

Имеет место следующая

**Теорема:** Пусть функция  $c(x) > 0$  - гладкая. Тогда необходимыми условиями разрешимости обратной задачи (1)-(4) являются:

- 1)  $f(t)$  - гладкая при  $t \geq 0$
- 2)  $f(+0) < 0$

В дальнейшем мы будем считать, что эти условия на  $f(t)$  выполнены.

Продолжим функции  $u(x, t)$  и  $f(t)$  нечётным образом:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -u(x, -t), \quad t < 0 \\ f(t) &= -f(-t), \quad t < 0 \end{aligned}$$

Тогда функция  $u(x, t)$  является решением задачи

$$\left. \begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} - \frac{c'(x)}{c(x)}u_x, \quad x > 0, t \in \mathbb{R} \\ u|_{x=0} &= f(t); \\ u_x|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Кроме того,  $u(x, t) \equiv 0$  при  $|x| > t$ .

Заметим также, что функция  $f(t)$  имеет конечный разрыв при  $t = 0$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\left. \begin{aligned} w_{tt} &= w_{xx} - \frac{c'(x)}{c(x)}w_x, \quad x > 0, t \in \mathbb{R} \\ w|_{x=0} &= \delta(t); \\ w_x|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Имеет место следующая

**Лемма1:** Функция  $w(x, t)$  имеет вид

$$(5) \quad w(x, t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c(x)}{c(0)}} [\delta(t+x) + \delta(t-x)] + \tilde{w}(x, t),$$

где  $\tilde{w}(x, t)$  - классическая функция, гладкая при  $|t| > x > 0$ .

Кроме того,  $w(x, t) \equiv 0$  при  $|t| > x > 0$ , и имеет место соотношение

$$(6) \quad u(x, t) = \int w(x, s) f(t-s) ds$$

Далее, определим функцию  $V(x, t)$  следующим образом:

$$V(x, t) \equiv \int_0^x \frac{w(\xi, t)}{c(\xi)} d\xi$$

В силу предыдущей леммы  $V(x, t) \equiv 0$  при  $|t| > x$ . Применяя к (6) оператор

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \frac{1}{c(\xi)} (\cdot) d\xi,$$

Можно получить, что при  $|t| < x$  имеет место равенство:

$$(7) \quad -2f(0)V(x, t) - \int_{-x}^x f'(t-s)V(x, s) ds = -1;$$

Уравнение (7) называется уравнением М.Г. Крейна. При каждом фиксированном  $x > 0$  оно является интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Далее, для функции  $V(x, t)$  имеет место

**Лемма2:**

Функцию  $V(x, t)$  можно представить в виде

$$V(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{c(x)c(0)}} [\theta(t+x) - \theta(t-x)] + \tilde{V}(x, t)$$

Следовательно, разрешив уравнение (7), можно восстановить искомую функцию  $c(x)$ :

$$c(0) = \frac{1}{2V(0, 0)}, c(x) = \frac{V(0, 0)}{2V^2(x, x)}$$

### 3. ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$

С одной стороны, обратная задача для уравнения  $u_{tt} = u_{xx} - \frac{c'(x)}{c(x)}u_x$  с помощью замены  $v(x, t) = \frac{u(x, t)}{\sqrt{c(x)}}$  сводится к обратной задаче для уравнения  $u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$ . С другой стороны, обратные задачи для таких уравнений возникают и в других областях, и для этих задач также применим подход, сводящий их к системе интегральных уравнений([1]).

Рассматривается следующая обратная задача: найти функцию  $q(x)$ , удовлетворяющую соотношениям

$$(8) \quad u_{tt} = u_{xx} - q(x)u, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0;$$

$$(9) \quad u|_{t=0} = 0; \quad u_t|_{t=0} = \delta(x);$$

$$(10) \quad u_x(0, t) = 0;$$

$$(11) \quad u(0, t) = f(t)$$

Продолжим функции  $u(x, t)$  и  $f(t)$  нечётным образом:

$$u(x, t) = -u(x, -t), \quad t < 0$$

$$f(t) = -f(-t), \quad t < 0$$

Тогда для всех  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$  функция  $u(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$u_{tt} = u_{xx} - q(x)u$$

и условию

$$(12) \quad u(x, t) \equiv 0 \text{ при } |x| > t$$

Кроме того, для задачи (8)-(11) имеет место

**Лемма:**

Если  $q(x) \in C[-T/2, T/2]$ , то  $f \in C^2[0, T]$ ,  $f(+0) = \frac{1}{2}$ ,  $f'(+0) = 0$ .

Таким образом, продолженная функция имеет конечный разрыв при  $t = 0$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$\left. \begin{aligned} w_{tt} &= w_{xx} - q(x)w, \quad (x, t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \\ w|_{x=0} &= \delta(t); \\ w_x|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Можно показать, что функция  $w(x, t)$  обладает следующими свойствами:

$$(13) \quad w(x, t) \equiv 0 \text{ при } |t| > x > 0$$

Далее, имеет место тождество

$$(14) \quad w(x, t) = \frac{1}{2} [\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{w}(x, t),$$

где  $\tilde{w}(x, t)$  — кусочно-непрерывная функция, такая, что

$$(15) \quad \tilde{w}(x, x-0) = \frac{1}{4} \int_0^x q(\xi) d\xi$$

Кроме того, функции  $u(x, t)$  и  $w(x, t)$  связаны следующим соотношением:

$$(16) \quad u(x, t) = \int w(x, s) f(t-s) ds$$

Из (16), учитывая (13) и (14), получим:

$$(17) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau$$

Используя (12), получим:

$$(18) \quad \frac{1}{2} [f(t-x) + f(t+x)] + \int_{-x}^x f(t-\tau) \tilde{w}(x, \tau) d\tau = 0, \quad x > |t|$$

При каждом фиксированном  $x > 0$  соотношение (18) является интегральным уравнением Фредгольма первого рода.

Дифференцируя уравнение (18) по  $t$ , и учитывая, что функция  $f(t)$  имеет конечный разрыв при  $t = 0$ , получим уравнение Фредгольма второго рода:

$$(19) \quad \tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t - \tau)\tilde{w}(x, t)d\tau + \frac{1}{2}(f'(t - x) + f'(t + x)) = 0, \quad x > 0, t \in (-x, x)$$

Разрешив это семейство интегральных уравнений, в силу (15) можно восстановить искомую функцию  $q(x)$

$$(20) \quad q(x) = 4 \frac{d}{dx} \tilde{w}(x, x - 0)$$

#### 4. МНОГОМЕРНЫЙ АНАЛОГ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬФАНДА-ЛЕВИТАНА-КРЕЙНА

В данной главе излагается алгоритм сведения двумерной задачи акустики к семейству линейных интегральных уравнений, разработанный С.И. Кабанихиным и М.А. Шишлениным в работе ([8]).

В двумерном случае уравнение акустики выглядит следующим образом:

$$c^{-2}(x, y)u_{tt}(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) - \nabla \ln \rho(x, y)\nabla u(x, y, t)$$

Обратная задача заключается в определении функций  $c(x, y)$ ,  $\rho(x, y)$  и  $u(x, y, t)$  из соотношений

$$\left. \begin{aligned} c^{-2}u_{tt} &= \Delta u - \nabla \ln \rho \nabla u, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t < 0} &\equiv 0 \\ u_x|_{x=0} &= g(y, t) \\ u|_{x=0} &= f(y, t) \end{aligned} \right\}$$

Функции  $f(y, t)$ ,  $g(y, t)$  считаются известными. Считая, что функция  $c(x, y)$  известна, рассмотрим следующие последовательности задач:

$$\left. \begin{aligned} u_{tt}^j &= \Delta u^j - \nabla \ln \rho \nabla u^j, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0, j \in \mathbb{Z} \\ u^j|_{t < 0} &\equiv 0 \\ u_x^j|_{x=0} &= g^j(y, t) \\ u^j|_{x=0} &= f^j(y, t) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} v_{tt}^k &= \Delta v^k - \nabla \ln \rho \nabla v^k, \quad x > 0, y \in \mathbb{R}, t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ v^k|_{t < 0} &\equiv 0 \\ v_x^k|_{x=0} &= g^j(y, t) \\ v^k|_{x=0} &= h^k(y, t) \end{aligned} \right\}$$

Пусть функции  $g^i$  -  $2\pi$ -периодичны и допускают разложение в ряд Фурье:

$$g^i(y, t) = \sum_k g_k^i(t)e^{iky}$$

Тогда имеет место равенство:

$$u^i(x, y, t) = \sum_k \int_0^t g_k^i(\tau)v^k(x, y, t - \tau)d\tau, i \in \mathbb{Z}$$

Отсюда вытекает, что функции  $h^k$  вычисляются через "реальные" данные  $f^k$  из следующего соотношения:

$$f^i(y, t) = \sum_k \int_0^t g_k^i(\tau)h^k(y, t - \tau)d\tau, i \in \mathbb{Z}$$

Учитывая сказанное, рассмотрим следующую задачу:

$$\left. \begin{aligned} Au^k &\equiv u_{tt}^k = \Delta u^k - \nabla \ln \rho \nabla u^k = 0, x > 0, y \in (-\pi, \pi), t > 0, k \in \mathbb{Z} \\ u^k|_{t < 0} &\equiv 0 \\ u_x^k|_{x=0} &= e^{iky} \delta(t) \\ u^k|_{y=-\pi} &= u^k|_{y=\pi} \\ u^k|_{x=0} &= f^k(y, t) \end{aligned} \right\}$$

Всюду далее предполагаем, что  $\rho(0, y)$  - заданная положительная и достаточно гладкая функция. Также будем считать, что выполнено необходимое условие разрешимости задачи:

$$f(y, +0) = -e^{iky}, y \in (-\pi, \pi), k \in \mathbb{Z}$$

Введём последовательность вспомогательных задач:

$$\left. \begin{aligned} Aw^m &= 0, x > 0, y \in (-\pi, \pi), t \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z} \\ w^m|_{x=0} &= e^{imy} \delta(t) \\ w_x^m|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Решение такой задачи имеет вид:

$$(21) \quad w^m(x, y, t) = S^m(x, y)[\delta(x+t) + \delta(x-t)] + \tilde{w}(x, y, t)$$

Здесь  $S^m(x, y) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho(x, y)}{\rho(0, y)}}$ , а  $\tilde{w}(x, y, t)$  - некоторая кусочно-гладкая функция.

Функции  $u^k$  и  $w^m$  связаны следующим соотношением:

$$(22) \quad u^k(x, y, t) = \int_R \sum_m f_m^k(t-s) w^m(x, y, s) ds, x > 0, y \in (-\pi, \pi), t \in \mathbb{R}$$

Здесь  $f_m^k$  - соответствующие коэффициенты ряда Фурье:

$$f^k(y, t) = \sum f_m^k(t) e^{imy}$$

. Продолжим функции  $f^k$  и  $u^m$  нечётным образом в области  $t < 0$ :

$$\left. \begin{aligned} f^k(y, t) &= -f^k(y, -t), t < 0 \\ u^m(x, y, t) &= -u^m(x, y, -t), t < 0 \end{aligned} \right\}$$

Далее, применим к обеим частям (22) оператор  $\int_0^x \frac{(\cdot)}{\rho(\xi, y)} d\xi$ . Обозначив

$$(23) \quad V^m(x, y, t) = \int_0^x \frac{w^m(\xi, y, t)}{\rho(\xi, y)} d\xi,$$

получим:

$$(24) \quad \Phi^k(x, t) = \frac{1}{2} \sum_m \int_{-x}^x (f_m^k)'(t-s) \Phi^m(x, s) ds - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{iky}}{\rho(0, y)} dy, k \in \mathbb{Z}$$

Семейство уравнений (24) - двумерный аналог уравнения Гельфанда-Левитана.

Здесь  $\Phi^k(x, t) = \int_{-\pi}^{\pi} V^k(x, y, t) dy$ .

Заметим, что в силу (21) и (23)  $V^m(x, y, x-0) = \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}}$ . Поэтому

$$\Phi^m(x, x-0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imy}}{2\sqrt{\rho(x, y)\rho(0, y)}} dy$$

Следовательно, разрешив систему (24), можно восстановить искомую функцию  $\rho(x, y)$  по формуле:

$$\rho(x, y) = \frac{\pi^2}{\rho(0, y)} \left[ \sum_m \Phi^m(x, x - 0) e^{-imy} \right]^{-2}$$

### 5. ОПИСАНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло решения интегрального уравнения основан на возможности представить интеграл от произвольной функции в виде математического ожидания некоторой случайной величины ([6]), и представлении решения интегрального уравнения  $\varphi = K\varphi + g$  в виде ряда Неймана:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} K^n f$$

Для описания метода нам понадобится определение однородной цепи Маркова. Однородная цепь Маркова — последовательность случайных величин  $x_0, \dots, x_n, \dots$  такая, что распределение величины  $x_n$  определяется значением точки  $x_{n-1}$ , причем условная плотность распределения  $x_n$  при условии  $x_{n-1} = x'$  для любого  $n$  равна заданной функции  $r(x', x)$  и не зависит от номера  $n$ .

Таким образом, цепь Маркова определяется тремя величинами:

- 1)  $\pi(x)$  — плотность распределения начального состояния.
- 2)  $r(x', x)$  — плотность перехода из состояния  $x'$ .
- 3)  $p(x')$  — вероятность обрыва цепи в точке  $x'$ .

Введём также вспомогательную функцию

$$p(x', x) := r(x', x)(1 - p(x'))$$

Данная функция однозначно определяет функции  $r(x', x)$  и  $p(x')$ , поскольку

$$\int p(x', x) dx = 1 - p(x').$$

Рассмотрим теперь задачу вычисления значения функционала

$$(25) \quad I_h = (\varphi, h) = \int_X h(x)\varphi(x) dx, h \in L_{\infty};$$

для решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_X k(y, x)\varphi(y) dy + g(x), g \in L_1.$$

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено следующее ограничение на функции  $\pi(x)$  и  $p(x', x)$ :

$$\pi(x) \neq 0, \text{ если } g(x) \neq 0 \text{ и } p(x', x) \neq 0, \text{ если } k(x', x) \neq 0$$

Имеет место

**Теорема ([6]):** Предположим, что выполнено условие  $\rho(K_1) < 1$ , где  $K_1$  — интегральный оператор с ядром  $|k(y, x)|$ .

Пусть  $x_0, \dots, x_m, \dots$  — цепь Маркова, порожденная плотностями  $\pi(x)$  и  $p(x', x)$ .

Рассмотрим случайную величину

$$(26) \quad \xi_n = \sum_{i=0}^m Q_i h(x_i)$$

где веса  $Q_0, \dots, Q_m$  вычисляются следующим образом:

$$(27) \quad Q_0 = \frac{g(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_i = Q_{i-1} \cdot \frac{k(x_{m-1}, x_m)}{p(x_{m-1}, x_m)} = Q_{i-1} \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_{m-1}, x_m)(1 - p(x_{m-1}))}$$

Тогда для искомого значения функционала  $I_h$  имеет место равенство:

$$(28) \quad I_h = E\xi$$

Для приближенного вычисления математического ожидания в правой части равенства (28) используется закон больших чисел:

$$(29) \quad E\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N}{N}$$

#### 6. АЛГОРИТМ МЕТОДА МОНТЕ—КАРЛО ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГЕЛЬФАНДА—ЛЕВИТАНА И М.Г. КРЕЙНА

В данном пункте будут изложены особенности применения метода Монте—Карло для решения уравнения (19) Гельфанда—Левитана второго рода:

$$\tilde{w}(x, t) + \int_{-x}^x f'(t - \tau) \tilde{w}(x, t) d\tau + \frac{1}{2} (f'(t - x) + f'(t + x)) = 0, \quad x > 0, \quad t \in (-x, x)$$

Алгоритм применения метода для решения уравнения М.Г. Крейна аналогичен изложенному.

Из соотношения (20) следует, что для восстановления искомой функции  $q(x)$  нам необходимо вычислить значение решения уравнений (19) только в одной точке  $w(x, x - 0)$ .

Заметим, формальная подстановка  $g(s) = \delta(s - x)$  и  $\pi(s) = \delta(s - x)$  в соотношение

$$E\xi = E\left[\sum_{i=0}^m Q_i h(x_i)\right] = (\varphi, h) = (g, \varphi^*)$$

даёт:

$$\varphi^*(x) = h(x) + E\left[\sum_{i=1}^m Q_i h(x_i)\right]$$

Здесь  $\varphi^*$  - решение сопряженного уравнения:

$$\varphi^* = K^* \varphi^* + h.$$

Отсюда, рассматривая исходное уравнение как сопряженное к уравнению  $\varphi^* = K^* \varphi^* + h$ , можно получить:

$$(30) \quad \varphi(x) = E\xi^*(x) = E\left[g(x) + \sum_{i=1}^m Q_i^* g(x_i)\right]$$

Здесь

$$(31) \quad Q_0^* = \frac{h(x_0)}{\pi(x_0)} = 1, \quad Q_i^* = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{p(x_{m-1}, x_m)} = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_{m-1}, x_m)(1 - p(x_{m-1}))}$$

Использование равенства (30) для вычисления значения  $\varphi(x)$  называется методом сопряженных блужданий.

Отметим, что выбор начальной плотности в виде  $\pi(s) = \delta(s - x)$  означает, что начальное состояние цепи Маркова постоянно и равно  $x$ .

Интегральное ядро и правая часть уравнения (19) при фиксированном  $x$  выглядят следующим образом:

$$k(s, t) = -f'(t - s), \quad s, t \in (-x, x)$$

$$g(t) = -\frac{1}{2} [f'(t - x) + f'(t + x)], \quad t \in (-x, x)$$

Поскольку значение функции  $f(t)$  известно только в конечном числе точек, для получения функции на всем промежутке  $(-x, x)$  использовалось кусочно-линейное приближение.

Таким образом, алгоритм решения уравнения (19) методом Монте-Карло заключается в следующем:

- I Выбираем  $N$  - число реализаций случайной величины  $\xi$ .
- II Выбираем:
  - 1) Плотность перехода  $r(y, x)$ , при каждом  $y$  являющуюся плотностью распределения
  - 2) Вероятность обрыва цепи  $p(y)$ , при каждом  $y$  являющуюся числом из интервала  $(0, 1)$
- III Для каждого конкретного  $n \leq N$ :
  - 1) Получаем цепь Маркова - последовательность чисел  $x_0, \dots, x_m$ :
    - а) Полагаем  $x_0 = x$
    - б) Согласно вероятности обрыва цепи  $p(x_0)$  определяем, состоялся ли обрыв цепи. Если да, то  $m = 0$ , и переходим к 2). Если нет, то  $m = 1$  и переходим к в).
    - в) При заданном  $x_0$  согласно плотности  $r(x_0, x)$  вычисляем число  $x_1$ .
    - г) Повторяем пункты б) и в) пока не произойдет обрыв цепи.
  - 2) Вычисляем веса  $Q_0^*, \dots, Q_m^*$  по формулам(15):
 
$$Q_0^* = \frac{h(x_0)}{\pi(x_0)}, \quad Q_i^* = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{p(x_{m-1}, x_m)} = Q_{i-1}^* \cdot \frac{k(x_m, x_{m-1})}{r(x_{m-1}, x_m)(1 - p(x_{m-1}))}$$
  - 3) Вычисляем  $\xi_n$  согласно (30)
- IV Вычисляем приближенное значение оценки  $I_h$  согласно (18).

7. СВЕДЕНИЕ К СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.  
МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ С.К. ГОДУНОВА

Уравнения (18), (19) и (7) после дискретизации сводятся к системе линейных алгебраических уравнений. Вводя в  $R^2$  равномерную сетку с шагом  $h$ , и приближая интеграл в правой части уравнения (18) по формуле трапеций, получим:

$$\frac{1}{2} [f(t_i - x_j) + f(t_i + x_j)] + \sum_{k=-j}^{j-1} \frac{w(x_j, x_k)f(t_i - x_k) + w(x_j, x_{k+1})f(t_i - x_{k+1})}{2} h = 0;$$

Таким образом, для каждого  $x_j$  уравнение (18) сводится к системе линейных уравнений  $Ay = b$ , где  $A$  - квадратная матрица размера  $(2j + 1)$  с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= hf_{i-j}, i \neq 1, 2j + 1; \\ a_{i,j} &= \frac{1}{2}hf_{i-j}, i = 1, 2j + 1 \end{aligned}$$

Далее, правая часть имеет вид

$$b_i = -\frac{1}{2}[f_{i-2j-1} + f_i],$$

а искомое решение

$$y_j = w(x_j, x_{i-j-1}).$$

Уравнения (19) и (7) также сводятся к аналогичным системам.

Расчёты показывают, что матрица системы уравнений, полученных после дискретизации уравнения (18) является вырожденной, и даже при точных данных обратной задачи найти решение не удаётся. Для решения плохо обусловленной системы был применён метод регуляризации С.К. Годунова.

Предположим, что о решении системы  $Ay = b$  известна некоторая априорная информация, которая может быть записана в виде линейной системы  $Bu = g$  (причем точное значение правой части может быть неизвестно). Тогда будем вместо исходной системы рассматривать систему вида

$$\begin{bmatrix} (1 - \alpha)Ay = (1 - \alpha)b \\ \alpha Bu = g \end{bmatrix}.$$

Здесь параметр регуляризации  $\alpha$  выбирается исходя из условия

$$\|\alpha g\| = \|\Delta f\|$$

и известно, что число обусловленности расширенной матрицы не превосходит числа обусловленности матрицы исходной системы. Таким образом, привлечение дополнительной информации о решении позволяет улучшить устойчивость системы.

## 8. РЕЗУЛЬТАТЫ

В следующих тестовых примерах использовались следующие параметры цепей Маркова:  $r(x', x)$  — равномерное распределение на  $(-x, x)$ ,  $p(x') = 0.05$ .

Для регуляризации Годунова использовалась априорная информация о малости второй производной решения.

**Пример 1.** Решение уравнения М. Г. Крейна (7). Точное решение обратной задачи  $c(x) = \ln(2 + x)$ .

**Пример 2.** Решение уравнения М. Г. Крейна (7). Точное решение обратной задачи  $c(x) = 2 + \sin(2 + x)$ .

**Пример 3.** Решение уравнения Гельфанда–Левитана первого и второго рода. Точное решение обратной задачи  $q(x) = x - \cos(x)$ .

**Пример 4.** Решение уравнения Гельфанда–Левитана первого и второго рода. Точное решение обратной задачи  $q(x) = (1 + x^2)^{-1}$ .

Время решения задачи методом Монте-Карло в рассматриваемых случаях сопоставимо с временем решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений. Однако можно ожидать, что в многомерном случае за счёт многократного увеличения размерности СЛАУ метод Монте-Карло окажется более эффективным.

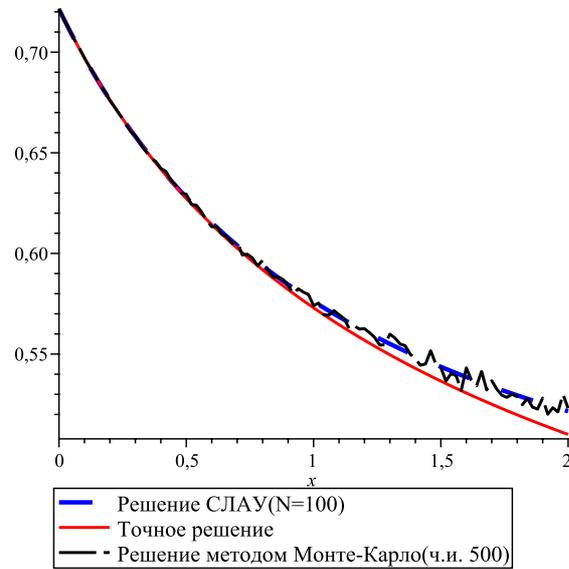


Рис. 1. Пример 1. Сравнение решения методом Монте-Карло и решения СЛАУ

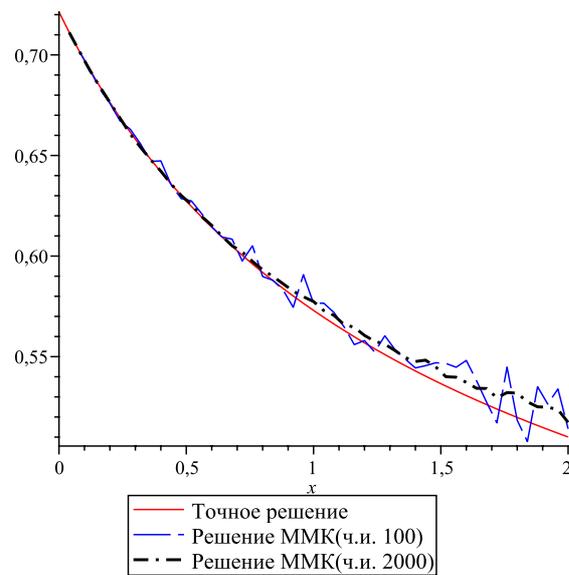


Рис. 2. Пример 1. Решение методом Монте-Карло при разном числе испытаний

При малых  $x$  точность обоих методов также примерно одинакова. При больших  $x$  может происходить ухудшение результатов метода Монте-Карло, поскольку при увеличении  $x$  увеличивается норма соответствующего интегрального оператора и начиная с некоторого значения  $x$  оператор перестаёт быть

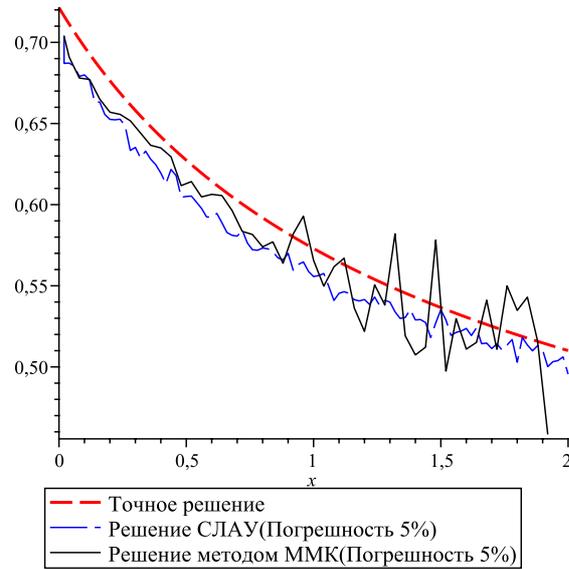


Рис. 3. Пример 1. Решение методом Монте-Карло и решение СЛАУ при неточных данных

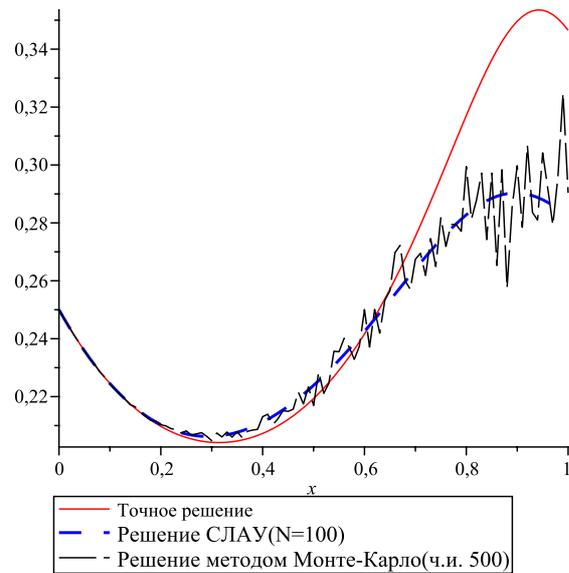


Рис. 4. Пример 2. Сравнение решения методом Монте-Карло и решения СЛАУ

сжимающим, а следовательно, условия применимости метода Монте-Карло перестают выполняться. Аналогичное поведение решения может наблюдаться при внесении достаточно больших ошибок в данные обратной задачи.

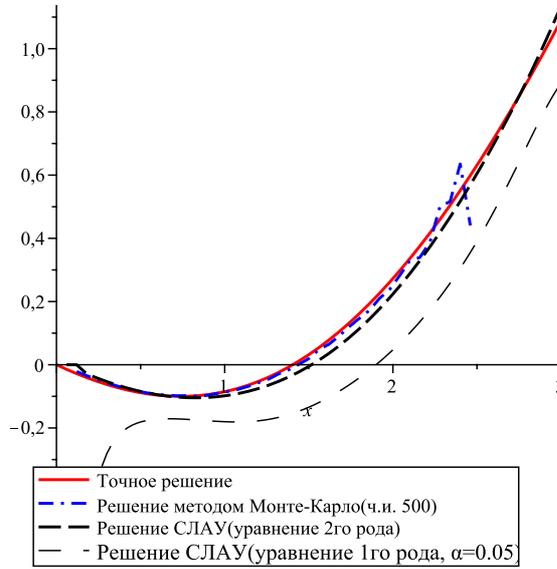


Рис. 5. Пример 3. Сравнение решения методом Монте-Карло и решения СЛАУ уравнения первого и второго рода

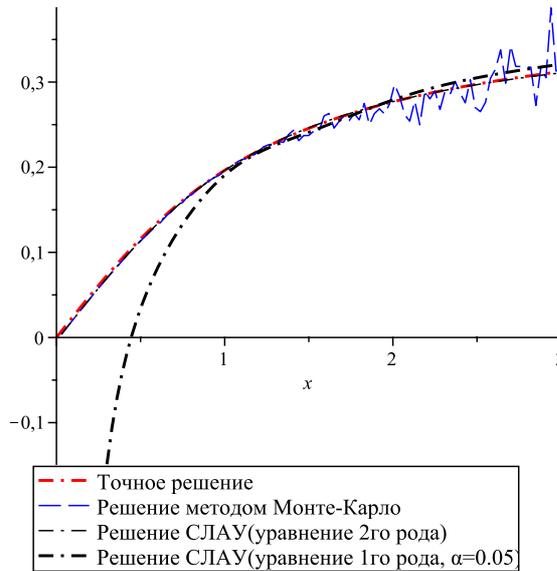


Рис. 6. Пример 4. Сравнение решения методом Монте-Карло и решения СЛАУ уравнения первого и второго рода

Характер результатов решения уравнения Гельфанда - Левитана первого рода методом регуляризации С.К. Годунова зависит от степени истинности

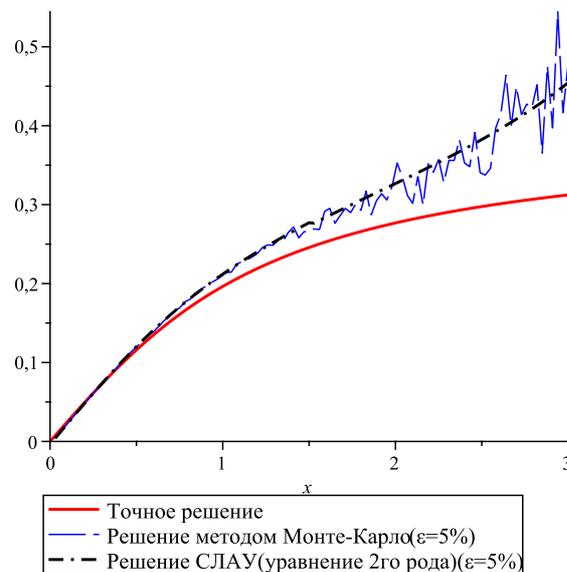


Рис. 7. Пример 4. Решение методом Монте-Карло и решение СЛАУ при неточных данных

добавляемой априорной информации, а также от выбора оптимального параметра регуляризации. Поведение решений при малых  $x$  объясняется тем, что при малых  $x$  и выбранном параметре регуляризации не удаётся преодолеть некорректность задачи. Следовательно, для каждого конкретного  $x$  необходимо заново определять оптимальный параметр регуляризации.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. // Москва: Наука, 1984. MR0759893
- [2] Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Сравнительный анализ численных методов решения обратной задачи для волнового уравнения. // Обратные задачи и информационные технологии. 2002. Т. 1, № 1.
- [3] Благоевещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. // Тр.Матем.Инст. АН СССР, 1971. MR0307558
- [4] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. // Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2008.
- [5] Бибердорф Э.А. Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. // Новосиб. гос. Ун-т, Новосибирск, 2008.
- [6] Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Курс статистического моделирования. // Москва, Наука, 1976. MR0474689
- [7] Белинская И.И. Решение некоторых гиперболических уравнений методом Монте-Карло. //Новосибирск, 1998.
- [8] S.I. Kabanikhin and M.A. Shishlenin. Numerical algorithm for two-dimensional inverse acoustic problem based on Gel'fand-Levitan-Krein equation. J. Inverse Ill-Posed Probl. 18 (2010), no. 9, 979–995. MR2787706

МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ ШИШЛЕНИН  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОВОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address: mshishlenin@ngs.ru*

НИКИТА СЕРГЕЕВИЧ НОВИКОВ  
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
УЛ. ПИРОГОВА, 2,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address: novikov-1989@yandex.ru*

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.394–С.399 (2011)*

УДК 519.63, 550.832

MSC 65M32

СОВМЕЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА  
ДВУХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

М.И. ЭПОВ, И.Н. ЕЛЬЦОВ, С.И. КАБАНИХИН, М.А. ШИШЛЕНИН

**ABSTRACT.** Inverse inverse geoelectric problems of determining conductivity of the medium are considered. We apply wave and diffusion additional information for inverse problem solution. We consider inverse problem for wave equation (wave approximation); inverse problem for diffusion equation (diffusion approximation) and inverse problem with wave and diffusion inverse problem data. Results of numerical experiments are given.

**Keywords:** inverse geoelectric problems, superposed statement.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Волновые свойства электромагнитных откликов исследуемой среды проявляются на ранней стадии процесса, в диапазоне от нуля до десятков наносекунд [2, 3]. На поздней стадии процесса доминируют диффузионные свойства. Для их описания используется квазистационарное приближение системы уравнений Максвелла. В результате совмещения двух видов информации задается и

---

ЕПОВ М.И., ЕЛЬЦОВ И.Н., КАБАНИХИН С.И., ШИШЛЕНИН М.А., SUPERPOSED STATEMENT OF INVERSE GEOELECTRIC PROBLEMS.

© 2011 Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И., Шишленин М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН “Теоретические основы принципиально новой технологии зондирования в нефтегазовых скважинах с использованием субнаносекундных электромагнитных импульсов”, при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350) и при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00105.

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

изучается целевой функционал, состоящий из суммы двух функционалов, традиционно рассматриваемых отдельно и независимо для каждой из постановок обратной задачи геоэлектрики. Основным мотивом такого совмещения является тот факт, что все рассматриваемые характеристики (волновая и диффузионная) отражают одни и те же свойства изучаемой среды (в данном случае, электрофизические).

Для каждой постановки обратной задачи электродинамики были получены теоретические результаты (теоремы единственности и устойчивости решения, а в случае волновой постановки и локальные теоремы существования), построены алгоритмы численного решения [1]. Естественно предположить, что изучение и решение двух разных постановок обратной задачи геоэлектрики одновременно в рамках совместной постановки увеличит разрешающую способность обратной задачи. Это предположение подтверждается приведенными в конце статьи численными расчетами.

2. СОВМЕЩЕННАЯ ПОСТАНОВКА ДВУХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ГЕОЭЛЕКТРИКИ

В одномерном случае процесс распространения электромагнитных волн в области  $z \in (0, L_1)$ ,  $t \in (0, T_1)$  описывается уравнением:

$$(2.1) \quad \varepsilon v_{tt} + \sigma(z)v_t + j_h(z, t) = \frac{1}{\mu}v_{zz}$$

с нулевыми начальными и граничными условиями

$$(2.2) \quad v|_{t=0} = v_t|_{t=0} = 0;$$

$$(2.3) \quad v_z|_{z=0} = 0, \quad v_z|_{z=L_1} = 0.$$

**Обратная задача 1:** найти  $\sigma(z)$  по дополнительной информации о решении прямой задачи (2.1)–(2.3)

$$(2.4) \quad v|_{z=0} = f_1(t), \quad t \in (0, T_1).$$

Здесь  $j_h(z, t)$  – источник электромагнитного тока,  $\mu_a$  – магнитная постоянная,  $\varepsilon$  – диэлектрическая постоянная.

Прямая задача для диффузионного приближения  $z \in (0, L_2)$ ,  $t \in (0, T_2)$ :

$$(2.5) \quad \sigma(z)u_t + j_p(z, t) = \frac{1}{\mu}u_{zz};$$

$$(2.6) \quad u|_{t=0} = 0;$$

$$(2.7) \quad u_z|_{z=0} = 0, \quad u_z|_{z=L_2} = 0.$$

**Обратная задача 2:** найти  $\sigma(z)$  по дополнительной информации о решении прямой задачи (2.5)–(2.7)

$$(2.8) \quad u|_{z=0} = f_2(t), \quad t \in (0, T_2).$$

**Обратная задача 3 (совмещенная постановка):** найти  $\sigma(z)$  из соотношений (2.1)–(2.8).

Будем решать обратные задачи 1, 2 и 3 методом оптимизации.

Обратная задача 1: найти минимум целевого функционала

$$(2.9) \quad J_1(\sigma) = \int_0^{T_1} [v(0, t) - f_1(t)]^2 dt.$$

Обратная задача 2: найти минимум целевого функционала

$$(2.10) \quad J_2(\sigma) = \int_0^{T_2} [u(0, t) - f_2(t)]^2 dt.$$

Обратная задача 3: найти минимум целевого функционала

$$(2.11) \quad J_3(\sigma) = J_1(\sigma) + J_2(\sigma).$$

Для нахождения градиентов функционалов введем следующие постановки сопряженных задач: сопряженная задача для обратной задачи 1:

$$(2.12) \quad \varepsilon \phi_{tt} - \sigma(z) \phi_t = \frac{1}{\mu} \phi_{zz};$$

$$(2.13) \quad \phi|_{t=T_1} = \phi_t|_{t=T_1} = 0;$$

$$(2.14) \quad \phi_z|_{z=0} = 2(v(0, t) - f_1(t)), \quad \phi|_{z=L_1} = 0.$$

Тогда градиент функционала  $J_1(\sigma)$  определяется по формуле:

$$J_1'(\sigma) = \int_0^{T_1} [v_t \phi](z, t) dt.$$

Сопряженная задача для обратной задачи 2:

$$(2.15) \quad -\sigma(z) \psi_t = \frac{1}{\mu} \psi_{zz};$$

$$(2.16) \quad \psi|_{t=T_2} = 0;$$

$$(2.17) \quad \psi_z|_{z=0} = 2(u(0, t) - f_2(t)), \quad \psi|_{z=L_2} = 0.$$

Тогда градиент функционала  $J_2(\sigma)$  определяется по формуле:

$$J_2'(\sigma) = \int_0^{T_2} [u_t \psi](z, t) dt.$$

Градиент функционала  $J_3(\sigma)$  состоит из суммы градиентов соответствующих функционалов

$$(2.18) \quad J_3'(\sigma) = J_1'(\sigma) + J_2'(\sigma).$$

Алгоритм решения обратной задачи 3:

- (1) Пусть  $\sigma^{(n)}(z)$  известно.
- (2) Решаем прямую задачу 1.
- (3) Решаем сопряженную задачу (2.12)–(2.17) для обратной задачи 1.
- (4) Решаем прямую задачу 2.
- (5) Решаем сопряженную задачу (2.15)–(2.17) для обратной задачи 2.
- (6) Находим градиент функционала

$$J_3'(\sigma^{(n)})(z) = \int_0^{T_1} [v_t^{(n)} \phi^{(n)}](z, t) dt + \int_0^{T_2} [u_t^{(n)} \psi^{(n)}](z, t) dt.$$

- (7) Находим приближенное решение на следующем шаге

$$\sigma^{(n+1)}(z) = \sigma^{(n)}(z) - \alpha J_3'(\sigma^{(n)})(z).$$

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

В численных расчетах зафиксируем следующие параметры:  $L_1 = 3$  м,  $T_1 = 40$  нс,  $L_2 = 60$  м,  $T_2 = 15$  мс,  $h_1 = L_1/200$ ,  $h_2 = L_2/200$ .

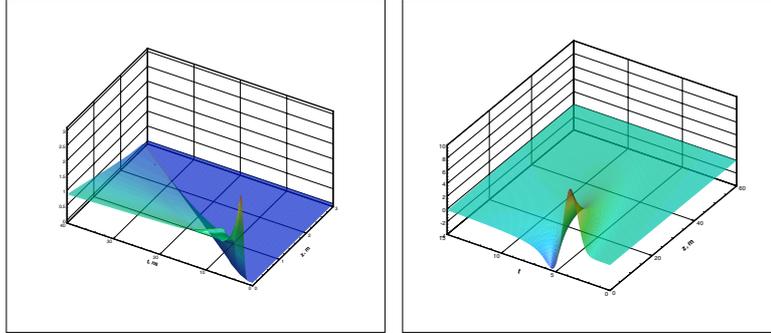


Рис. 3.1. Результат решения прямой задачи. Слева – волновое поле. Справа – диффузионное поле.

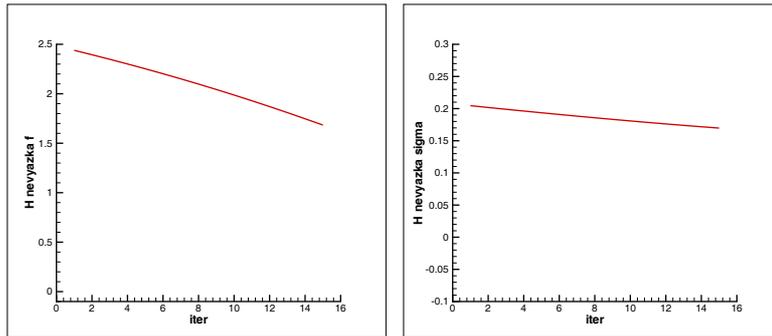


Рис. 3.2. Результат решения обратной задачи 1. Слева график функции  $J_1(\sigma^{(n)})$ , справа график функции  $S(n) = \|\sigma^{(n)} - \sigma\|$

Рис. 3.4 показывает, что при использовании совмещенной постановки норма невязки убывает быстрее, чем при использовании данных только волнового или только диффузионного процессов.

### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При использовании данных волнового и диффузионного приближения удастся существенно ускорить сходимость итерационного алгоритма нахождения параметра  $\sigma$ .

Естественно предположить, что изучение и решение двух разных постановок обратной задачи геоэлектрики одновременно в рамках совместной постановки увеличит разрешающую способность обратной задачи при поиске двух неизвестных коэффициентов  $\varepsilon$  и  $\sigma$ .

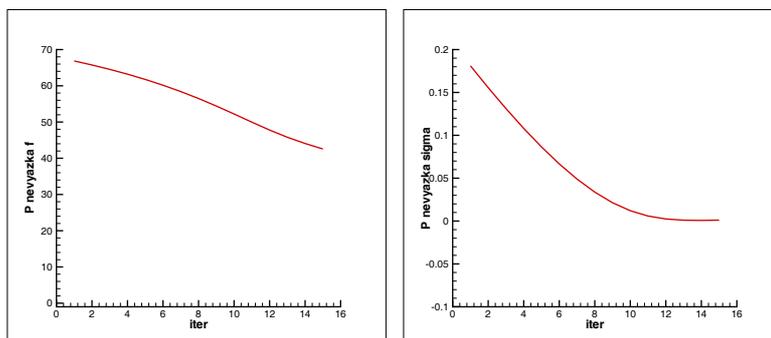


Рис. 3.3. Результат решения обратной задачи 2. Слева график функции  $J_2(\sigma^{(n)})$ , справа график функции  $S(n) = \|\sigma^{(n)} - \sigma\|$

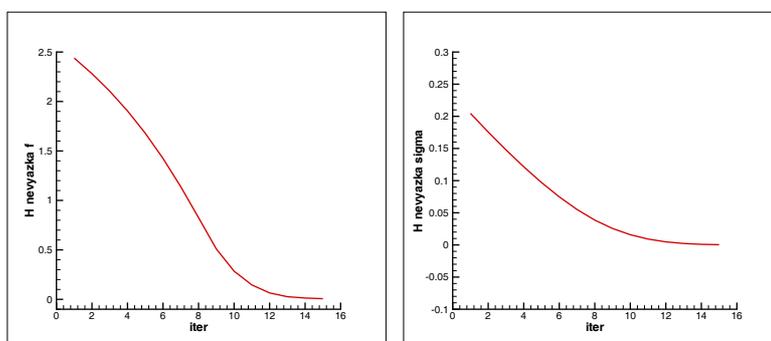


Рис. 3.4. Результат решения обратной задачи 3. Слева график функции  $J_3(\sigma^{(n)})$ , справа график функции  $S(n) = \|\sigma^{(n)} - \sigma\|$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [2] М.И. Эпов, С.И. Кабанихин, В.Л. Миронов, К.В. Музалевский, М.А. Шишленин. Сравнительный анализ двух методов расчета электромагнитных полей в околоскважинном пространстве нефтегазовых коллекторов // Сибирский журнал индустриальной математики, 14 (2) (2011), С.132-С.138
- [3] Романов В.Г., Кабанихин С.И., Шишленин М.А. Исследование математической модели электромагнитного зонда в осесимметричной скважине // Сибирские Электронные Математические Известия, 7 (2010), ИМ СО РАН, Новосибирск, С.307-С.321.

Михаил Иванович Эпов  
 Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука,  
 пр. академика Коштюга, 3,  
 630090, Новосибирск, Россия  
*E-mail address:* EpovMI@ipgg.nsc.ru

Игорь Николаевич Ельцов  
 Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука,  
 пр. академика Коштюга, 3,  
 630090, Новосибирск, Россия  
*E-mail address:* yeltsovin@ipgg.nsc.ru

СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ КАБАНИХИН  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА ЛАВРЕНТЬЕВА 6,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* [ksi52@mail.ru](mailto:ksi52@mail.ru)

МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ ШИШЛЕНИН  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* [mshishlenin@ngs.ru](mailto:mshishlenin@ngs.ru)

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Труды второй международной молодежной школы-конференции  
“Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач”  
Часть I, стр. С.400–С.410 (2011)*

УДК 519.63  
MSC 65N21, 65F22ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ  
В ОКОЛОСКВАЖИННОМ ПРОСТРАНСТВЕ  
НА НЕДОСТУПНОЙ ЧАСТИ ГРАНИЦЫ

М. И. ЭПОВ, И. Н. ЕЛЬЦОВ, С. И. КАБАНИХИН, М. А. ШИШЛЕНИН

**ABSTRACT.** We propose the method of recovering the boundary conditions on inaccessible part of the boundary for Helmholtz equation. The inverse problem is considered. We apply Landweber iteration method for inverse problem solution. SVD method is applied for ill-posed analysis of inverse problem.

**Keywords:** inverse problem, Helmholtz equation, continuation problem.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

При численном решении задач математической физики одной из важных проблем является выбор граничных условий. Во многих задачах геофизики, медицины и других прикладных областях, измерение граничных условий на определенной части границы либо практически невозможно (на больших глубинах, во внутренних частях тела), либо связано с большими затратами. В этой связи при практических расчетах граничные условия на недоступной части границы задают приближенно. Например, если процесс затухает достаточно

---

ЕПОВ М.И., ЕЛЬЦОВ И.Н., КАБАНИХИН С.И., ШИШЛЕНИН М.А., RECOVERING BOUNDARY CONDITIONS ON INACCESSIBLE PART OF THE BOUNDARY.

© 2011 Эпов М.И., Ельцов И.Н., Кабанихин С.И., Шишленин М.А.

Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН “Теоретические основы принципиально новой технологии зондирования в нефтегазовых скважинах с использованием субнаносекундных электромагнитных импульсов”, при финансовой поддержке ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009-2013 гг. (гос. контракт № 14.740.11.0350) и при финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-00105.

*Поступила 28 декабря 2011 г., опубликована 30 декабря 2011 г.*

быстро при удалении от источников, то граничные условия полагают однородными. Если носитель неоднородности сравнительно невелик, а вмещающая среда однородна, то иногда оказывается возможным найти аналитическое решение в однородной вмещающей среде и принять его значения на недоступной части границы за приближенные граничные условия основной задачи.

Задача продолжения электромагнитного поля рассматривается как специально сформулированная обратная задача восстановления граничного условия. Предложен способ итерационного уточнения граничных условий на недоступной части границы на основе метода итераций Ландвебера.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

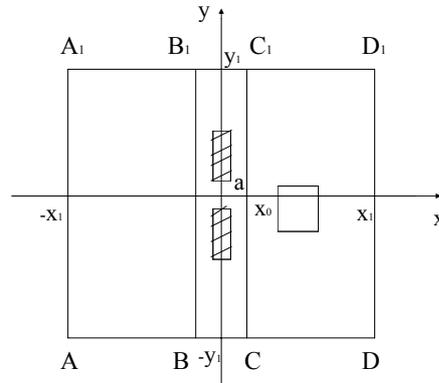
Идея построения краевых задач для дифференциальных уравнений путем переноса граничных условий восходит к работе [1] (В. С. Владимиров, 1955), где изучалась краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. В работе [2] (М. В. Федорюк, 1972) впервые был использован операторный метод сноса краевых условий из бесконечности для уравнения Гельмгольца, которые рассматривались в полужилиндре с однородными условиями на границе. В случае финитной правой части доказано, что условие ограниченности решения на бесконечности эквивалентно операторному краевому условию на некотором сечении волновода. В [3] (А. А. Константинов, В. П. Маслов, А. М. Чеботарев, 1988) найдены псевдодифференциальные краевые условия на сфере, эквивалентные условиям излучения. В работе [4] (И. В. Безменов, 1994) предложена постановка граничных условий для решения уравнения Гельмгольца внутри ограниченной области с искусственной, достаточно гладкой границей, и доказана равномерная сходимость решений внутренней задачи к решению задачи, поставленной в неограниченной области с условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности, при неограниченном увеличении размеров области. В работе [5] (Т. Ш. Кальменов, Д. Сураган, 2009) предложена новая постановка граничных условий нелокального типа для уравнения Лапласа, эквивалентных условиям излучения Зоммерфельда. В работе [6] (S. I. Kabanikhin, A. L. Karchevsky, 1995) был предложен градиентный метод определения условия на недоступной части  $\Gamma_1$  границы  $\Gamma$  по дополнительной информации о решении на части границы  $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_1$ .

В данной работе предложен метод продолжения решения уравнения Гельмгольца в зону недоступности методом, основанном на решении специальным образом сформулированной обратной задачи. Предполагается, что граница  $\Gamma = \partial\Omega$  исследуемой области  $\Omega$  состоит из двух частей  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Граница  $\Gamma_2$  недоступна для измерения, а на некоторой части границы  $\Gamma_1$  (или внутри области  $\Omega$ ) можно измерять значение решения и производной решения по нормали. В результате решения задачи продолжения удастся восстановить значение решения уравнения Гельмгольца в зоне недоступности. Решение задачи продолжения осуществляется путем замены этой задачи на некоторую специальную обратную задачу.

## 3. ИЗМЕНЕНИЕ ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЗАДАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ И НАЛИЧИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ

**Задача 1.** Рассмотрим сначала задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$(3.1) \quad \omega^2 \varepsilon u + \Delta u = j(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_1$$

Рис. 3.1. Область  $\Omega_1$ 

с однородными граничными условиями

$$(3.2) \quad u|_{\partial\Omega_1} = 0.$$

Здесь область  $\Omega_1 = (-x_1, x_1) \times (-y_1, y_1)$ , источник задан в виде

$$j(x, y) = \theta(a - |x|)\theta(a - |y|).$$

Прямая задача (3.1)—(3.2) является типичной для моделирования электромагнитного поля в окрестности зоны действия скважинного георадара. Прямоугольник  $BCC_1B_1$  обозначает разрез скважины диаметра  $BC$ , внутри которой расположен георадар, состоящий из двух антенн (заштрихованные прямоугольники на рис. 3.1) и источника, заключенного между ними. Предполагая, что мы можем передвигать георадар верх-вниз по оси  $y$ , мы будем называть *дополнительной информацией (или данными моделирования)* значения решения прямой задачи  $u(x, y)$  при  $y = 0$ . Понятно, что значение функции  $f(y) = u(0, y)$  будет характеризовать электромагнитные свойства среды в области  $\Omega_1$ . Если, например, при прочих равных условиях, предположить наличие в области объекта, достаточно сильно отличающегося по своим электромагнитным свойствам от свойств области, то и значения функции  $f(y)$ , могут значительно измениться.

В первом случае будем предполагать, что граница области  $\Omega_1$  расположена достаточно далеко от начала координат, которое расположено в центре георадара. Одной из проблем численного моделирования электромагнитного поля в ограниченных областях является выбор граничных условий на границе области  $\Omega_1$ , особенно на той ее части, которая недоступна для непосредственных измерений. Во-первых, чем дальше мы выбираем границу области, тем больше потребуются вычислений. Во-вторых, при каждом выборе граничных условий (однородные условия, асимптотические условия и т.д.) мы будем получать, вообще говоря, разные данные моделирования  $f(y)$ . В третьих, на практике

может оказаться, что в непосредственной близости от рассматриваемой области  $\Omega_1$  будут находиться объекты, электромагнитные свойства которых существенно отличаются от свойств области  $\Omega_1$  (см. рис. 3.1). Это обстоятельство также может существенно изменить данные моделирования  $f(y)$ .

В данной работе мы численно подтвердим высказанные аргументы и предложим численный метод определения граничных условий на недоступной части границы, основанный на использовании дополнительной информации о решении прямой задачи.

Будем предполагать, на части границы  $\Gamma_1$  (а именно, на отрезке  $DD_1$ ) измерения невозможны, а на остальной части границы заданы граничные условия Дирихле (значения функции  $u$  на границе). На рис. 3.1 приведены данные моделирования  $u(0, y)$  для трех различных случаев:

- (1) среда вне скважины  $BB_1C_1C$  однородна, условие на  $\Gamma_1$  однородно:  $u(x, y) = 0$ .
- (2) среда вне скважины однородна, граничное условие на  $\Gamma_1$  равно значению решения, продолженного источником  $j$ , расположенным в начале координат.
- (3) граничное условие то же, что и в случае 2, но справа от скважины добавлено включение.

#### 4. ИЗМЕНЕНИЕ ДАННЫХ МОДЕЛИРОВАНИЯ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ, ПОЛОЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ И НАЛИЧИЯ ВКЛЮЧЕНИЙ

**Задача 2.** Рассмотрим задачу

$$\omega^2 \varepsilon u + \Delta u = j(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_2$$

с граничными условиями

$$u_x|_{x=0} = g(y), \quad u|_{x=x_1} = q(y), \quad u|_{y=\pm y_1} = 0.$$

Здесь  $\Omega_2 = (0, x_1) \times (-y_1, y_1)$ .

#### 5. АЛГОРИТМ УТОЧНЕНИЯ ГРАНИЧНОГО УСЛОВИЯ

Рассмотрим обратную задачу о восстановлении граничного условия  $q(y)$ , если известна дополнительная информация о решении прямой задачи

$$u|_{x=0} = f(y).$$

Решение обратной задачи ищется методом минимизации функционала невязки:

$$J(q) = \int_{-y_1}^{y_1} [u(0, y) - f(y)]^2 dy.$$

Строится итерационный метод решения:

$$q_{n+1}(y) = q_n(y) - \alpha_n J'(q_n).$$

Вводится сопряженная задача

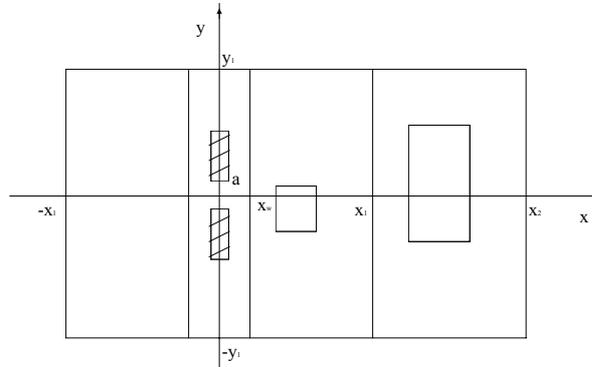
$$\omega^2 \varepsilon \psi + \Delta \psi = 0$$

в области  $\bar{\Omega} = (0, x_1) \times (-y_1, y_1)$ , с граничными условиями

$$\psi_x|_{x=0} = 2(u(0, y) - f(y)), \quad \psi|_{x=x_1} = 0, \quad \psi|_{y=\pm y_1} = 0.$$

Можно показать, что

$$J'(q)(y) = \psi_x(x_1, y).$$

Рис. 4.1. Область  $\Omega_2$ 

Алгоритм решения задачи восстановления граничного условия функции  $q(y)$

- (1) Пусть известно  $q_n(y)$ ;
- (2) Решаем прямую задачу

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon u_n + \Delta u_n &= j(x, y), & (x, y) \in (0, x_1) \times (-y_1, y_1), \\ u_x|_{x=0} &= g(y), & u|_{x=x_1} = q_n(y), \\ u|_{y=\pm y_1} &= 0, \end{aligned}$$

- (3) Вычисляем норму невязки

$$J(q_n) = \int_{-y_1}^{y_1} [u_n(0, y) - f(y)]^2 dy.$$

- (4) Решаем сопряженную задачу

$$\begin{aligned} \omega^2 \varepsilon \psi_n + \Delta \psi_n &= 0, & (x, y) \in (0, x_1) \times (-y_1, y_1), \\ \psi_{n,x}|_{x=0} &= 2(u_n(0, y) - f(y)), & \psi_n|_{x=x_1} = 0, \\ \psi_n|_{y=\pm y_1} &= 0. \end{aligned}$$

- (5) Вычисляем градиент функционала невязки

$$J'(q_n)(y) = \psi_{n,x}(x_1, y),$$

- (6) Находим приближение на следующем шаге:

$$q_{n+1}(y) = q_n(y) - \alpha_n J'(q_n).$$

## 6. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ РАСЧЕТОВ

Для решения прямой и сопряженной задачи применен метод конечных элементов [9].

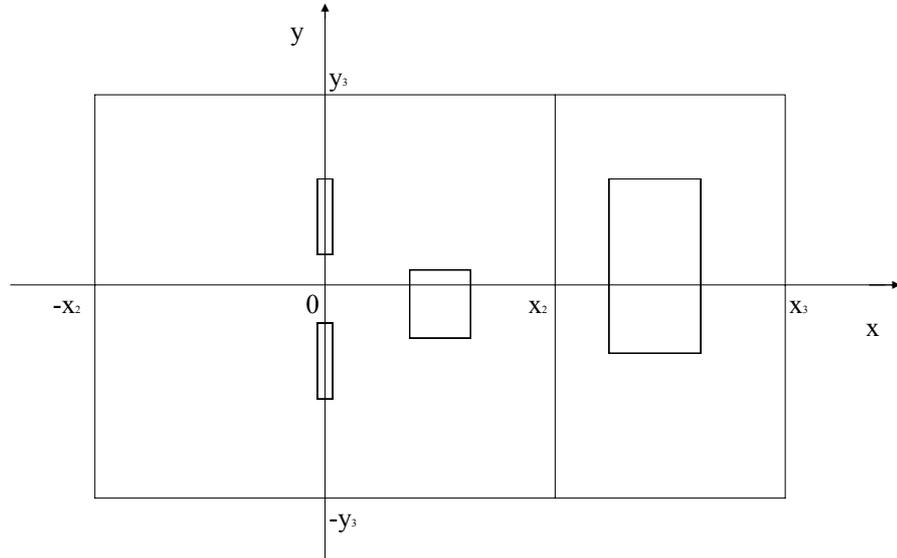


Рис. 6.1. Область  $\Omega_2$

Зафиксируем параметры:  $\omega = 0.15$ ,  $x_1 = 1$  м.,  $x_2 = 3$  м.,  $y_1 = 3$  м. Область  $\Omega_1$  разбивалась на 116403 треугольников, число вершин 59052. Область  $\Omega_2$  разбивалась на 427336 треугольников, число вершин 214767.

Электромагнитное поле генерируется антенной размерами  $a = 0.002$  м, длина антенны 0.4 м. Расстояние между антеннами 0.004 м. Внутри антенны  $\epsilon = 1$ . Антенна помещена в скважину, радиус скважины  $x_1 = 0.1$  м. Внутри скважины  $\epsilon = 81$ . Вмещающая среда  $\epsilon = 1$ . Первое включение:  $x \in [0.2, 0.4]$  м.,  $y \in [-0.5, 0.5]$  м. и внутри  $\epsilon = 20$ . Второе включение:  $x \in [1.5, 2.5]$  м.,  $y \in [-1, 2.5]$  м. и внутри  $\epsilon = 40$ .

На рис. 6.4 приведены результаты расчетов прямой задачи с нулевыми граничными условиями в области  $\Omega_1$ . На рисунках изображены два графика функции  $u(0, y)$  в точке  $x = 0$ : 1 – в случае однородной среды, 2 – в случае одного включения. Расчеты были проведены для разных частот  $\omega = 0.15$  (рисунок слева) и  $\omega = 0.4$  (рисунок справа).

На рис. 6.3 приведены результаты расчетов прямой задачи с нулевыми граничными условиями в области  $\Omega_2$  и частотой  $\omega = 0.15$ . На рисунке слева изображены три графика функции  $u(0, y)$  в точке  $x = 0$ , на рисунке справа изображены три графика функции  $u(1, y)$  в точке  $x = 1$  м. График 1 – решение в области  $\Omega_1$ , график 2 – решение в области  $\Omega$  с одним включением, график 3 – решение в области  $\Omega$  с двумя включениями.

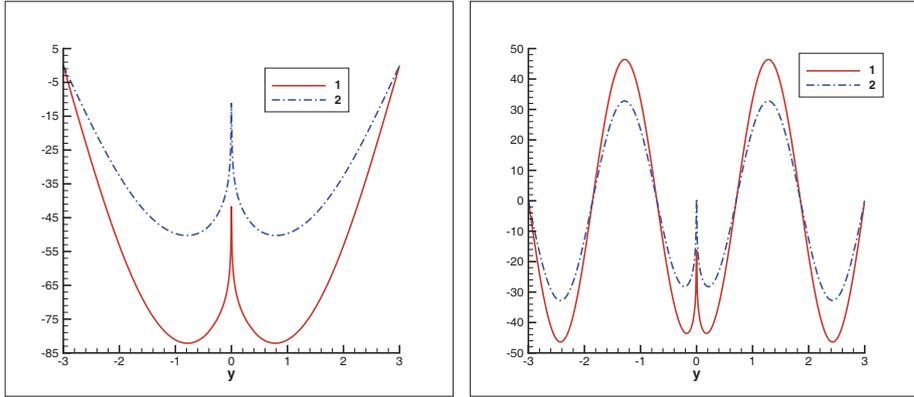


Рис. 6.2.  $u(0, y)$ :  $\omega = 0.15$  (слева),  $\omega = 0.4$  (справа)

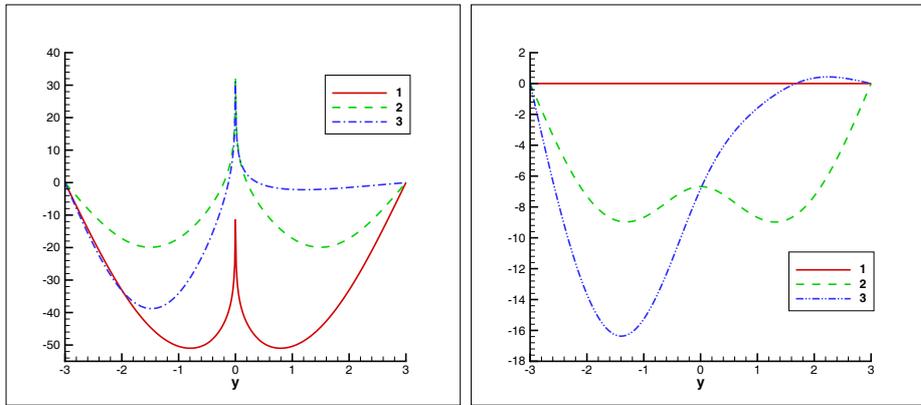


Рис. 6.3.  $u(0, y)$  (слева),  $u(1, y)$  (справа)

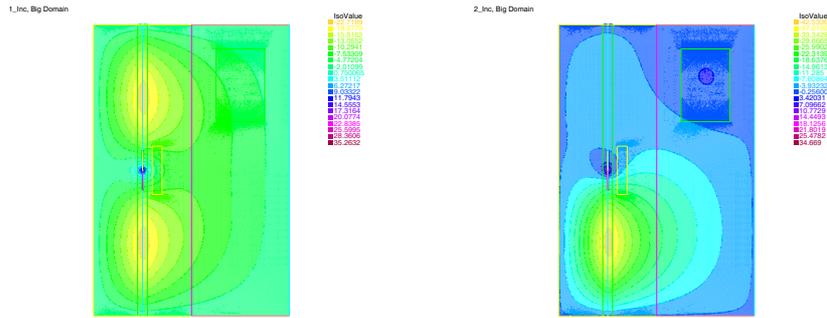


Рис. 6.4. Решение прямой задачи с одной зоной неоднородности (слева) и двумя зонами неоднородностей (справа)

Расчеты прямой задачи показали, что измеряемые данные зависят от положения второго включения после границы  $x_1$ , размеров, параметра  $\varepsilon$  внутри включения и внутри среды.

На рис. 6.5 приведены результаты решения обратной задачи восстановления граничного условия в случае одного включения в области  $\Omega_2$  и частотой  $\omega = 0.15$ . Рисунок слева функция  $u(0, y)$  в точке  $x = 0$  м.: график 1 – точные данные, график 2 – приближенные данные после 1500 итераций. Рисунок справа функция  $u(1, y)$  в точке  $x = 1$  м.: график 1 – точное решение, график 2 – начальное приближение, график 3 – приближенное решение после 1500 итераций.

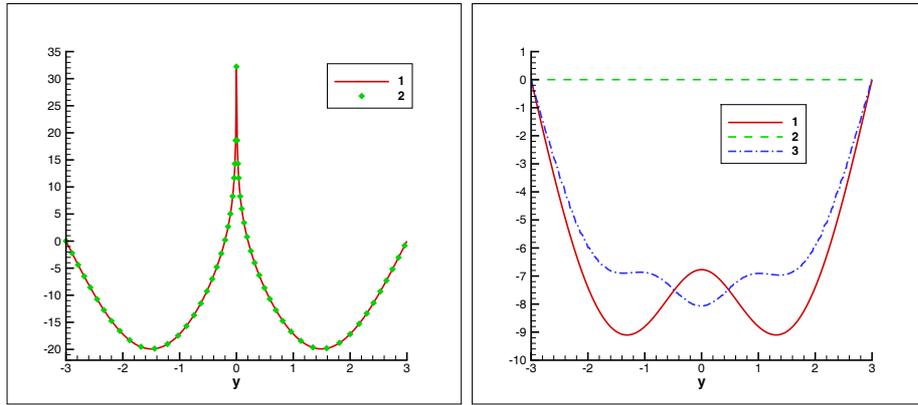


Рис. 6.5.  $u(0, y)$  (слева),  $u(1, y)$  (справа)

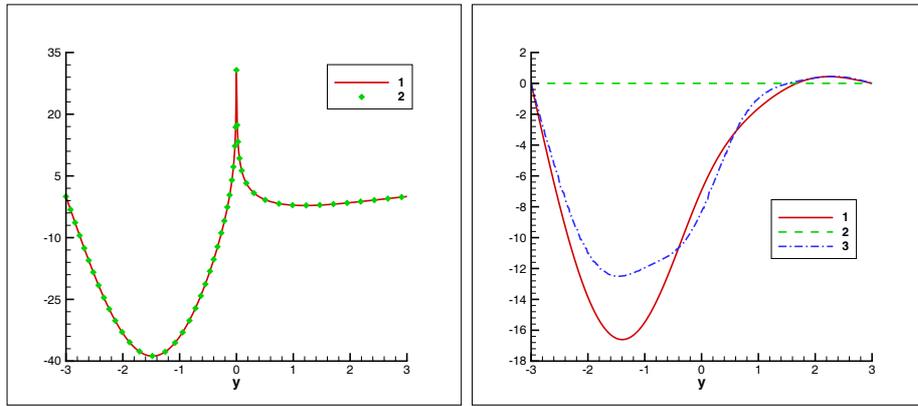


Рис. 6.6.  $u(0, y)$  (слева),  $u(1, y)$  (справа)

На рис. 6.6 приведены результаты решения обратной задачи восстановления граничного условия в случае двух включений и частотой  $\omega = 0.15$ . Рисунок слева функция  $u(0, y)$  в точке  $x = 0$  м.: график 1 – точные данные, график 2 – приближенные данные после 1500 итераций. Рисунок справа функция  $u(1, y)$  в

точке  $x = 1$  м.: график 1 – точное решение, график 2 – начальное приближение, график 3 – приближенное решение после 1500 итераций.

Норма невязки убывает монотонно и после 1500 итераций для рис. 6.5 равна 0.081 и для рис. 6.6 равна 0.106.

## 7. СИНГУЛЯРНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ

Пусть  $h_x = L_x/N_x$ ,  $h_y = L_y/N_y$ .

Запишем задачу продолжения в дискретном виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_x^2} u_{i-1,j} + c_{i,j} u_{i,j} + \frac{1}{h_x^2} u_{i+1,j} + \frac{1}{h_y^2} u_{i,j-1} + \frac{1}{h_y^2} u_{i,j+1} &= j_{i,j}, \\ i = \overline{1, N_x - 1}, \quad j = \overline{1, N_y - 1}; \\ u_{i, N_y} = u_{i, 0} = 0, \quad i = \overline{0, N_x}; \\ u_{1,j} = f_j + h_x g_j, \quad j = \overline{1, N_y - 1}; \\ u_{0,j} = f_j, \quad j = \overline{1, N_y - 1}. \end{aligned}$$

Здесь  $c_{i,j} = \omega \varepsilon_{i,j} - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2}$ .

Запишем задачу продолжения в виде системы линейных алгебраических уравнений:

$$BU = J.$$

Здесь  $B$  – квадратная матрица размерности  $(N_x + 1)(N_y + 1)$ ,  $U$  – вектор неизвестных (поле):

$$U = (u_{0,0}, u_{0,1}, \dots, u_{0,N_y}, \dots, u_{N_x,0}, u_{N_x,1}, \dots, u_{N_x,N_y})^T,$$

$J$  – вектор правой части (источник, приемник, граничные условия).

Размерность матрицы  $B$ :  $(N_x - 1)(N_y - 1) + 2(N_y + 1) + 2(N_x - 1) = (N_x + 1)(N_y + 1)$ . Первое слагаемое – элементы сетки, второе – граничные условия, третье слагаемое – данные  $u_x|_{x=0}$  и данные обратной задачи  $u|_{x=0}$  (результаты измерений).

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{h_y^2} & c_{1,1} & \frac{1}{h_y^2} & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{h_x^2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_x^2} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_y^2} & c_{1,2} & \frac{1}{h_y^2} & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_x^2} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{h_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1}{h_x^2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы строятся по следующему алгоритму:

$$B_{k,(i+1)(N_y+1)+j+1} = \frac{1}{h_x^2}, \quad B_{k,i(N_y+1)+j+1} = c_{i,j}, \quad B_{k,(i-1)(N_y+1)+j+1} = \frac{1}{h_x^2},$$

$$B_{k,i(N_y+1)+j+2} = \frac{1}{h_y^2}, \quad B_{k,i(N_y+1)+j} = \frac{1}{h_y^2}.$$

Граничные условия при  $y = 0$ :  $B_{k,i(N_y+1)+1} = 1$ .

Граничные условия при  $y = N_y$ :  $B_{k, i(N_y+1)+N_y+1} = 1$ .

Данные  $u|_{x=0}$ :  $B_{k, k-(N_x-1)(N_y-1)+1} = 1$

Данные  $u_x|_{x=0}$ :  $B_{k, k-(N_x-1)(N_y-1)+3} = 1$ ,  $B_{k, k-(N_x-1)(N_y-1)+2} = -1$ .

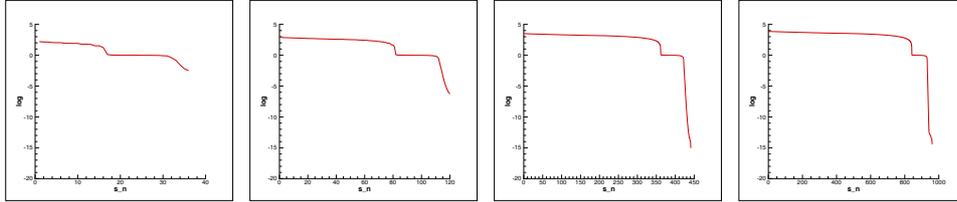


Рис. 7.1. Графики  $\log \sigma_n$ . Размерность сетки и число обусловленности. Слева направо:  $N_x = N_y = 5$ ,  $\mu(B) = 4.95 \cdot 10^4$ ;  $N_x = N_y = 10$ ,  $\mu(B) = 2.11 \cdot 10^9$ ;  $N_x = N_y = 20$ ,  $\mu(B) = 3.33 \cdot 10^{18}$ ,  $N_x = N_y = 30$ ,  $\mu(B) = 1.95 \cdot 10^{18}$

На рис. 7.1 приведены четыре графика  $\log \sigma_n$ . Расчеты показывают, что с увеличением размерности сетки число обусловленности возрастает. Степень убывания сингулярных чисел дискретной задачи продолжения показывает степень некорректности задачи.

### 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод определения граничного условия для уравнения Гельмгольца в зоне недоступности, основанный на решении специальным образом сформулированной обратной задачи. Обратная задача решена методом итераций Ландвебера. Численные расчеты показали, что восстановленное граничное условие позволяет описать параметры среды расположенной за недоступной частью границы. Восстановленные граничные условия можно использовать при прямом моделировании электромагнитного поля в окрестности скважины. Проведен сингулярный анализ дискретной задачи продолжения. Показано, что с увеличением размерности сетки число обусловленности возрастает.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Владимиров В.С. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. Прикл. матем. и механ. 19:3 (1955), 315–324. MR0069593
- [2] Федорюк М.В. Уравнение Гельмгольца в волноводе (отгонка краевого условия от бесконечности). Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 12:2 (1972), 374–387.
- [3] Константинов А.А., Маслов В.П., Чеботарев А.М. Снос краевых условий для уравнений с частными производными. Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 28:2 (1988), 1763–1778. MR0977260
- [4] Безменов И.В. Перенос условий излучения Зоммерфельда на искусственную границу области, основанный на вариационном принципе. Математический сборник, 185:3 (1994), 3–24. MR1300137
- [5] Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала. Доклады Академии наук. 2009. Т. 428. № 1. С. 16–19.
- [6] Kabanikhin S.I., Karchevsky A.L. Optimizational method for solving the Cauchy problem for elliptic equation. ЖИП. 1995. V.3, № 1. P. 21–46. MR1332876
- [7] Кабаныхин С.И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

- [8] Кабанихин С.И., Карчевский С.Л. Оптимизационный алгоритм решения задачи Коши для эллиптического уравнения. Доклады АН СССР. 1998. Т. 359, № 4, С. 445–447.
- [9] Larry J.Segerlind, Applied finite element analysis. New York, 1984. Zbl 0644.73066

МИХАИЛ ИВАНОВИЧ ЭПОВ  
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ ИМ. А.А. ТРОФИМУКА,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, 3,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* EpovMI@ipgg.nsc.ru

ИГОРЬ НИКОЛАЕВИЧ ЕЛЬЦОВ  
ИНСТИТУТ НЕФТЕГАЗОВОЙ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ ИМ. А.А. ТРОФИМУКА,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА, 3,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* yeltsovin@ipgg.nsc.ru

СЕРГЕЙ ИГОРЕВИЧ КАБАНИХИН  
ИНСТИТУТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ГЕОФИЗИКИ СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА ЛАВРЕНТЬЕВА 6,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* ksi52@mail.ru

МАКСИМ АЛЕКСАНДРОВИЧ ШИШЛЕНИН  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА СО РАН,  
ПР. АКАДЕМИКА КОПТЮГА 4,  
630090, НОВОСИБИРСК, РОССИЯ  
*E-mail address:* mshishlenin@ngs.ru