S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 105–115 (2011) УДК 519.17

MSC 05C25

О ГРАФАХ ДЕЗА НА 14, 15 И 16 ВЕРШИНАХ

С.В. Горяинов, Л.В.Шалагинов

Abstract. We consider the following generalization of strongly regular graphs. A graph G is a Deza graph if it is regular and the number of common neighbors of two distinct vertices takes on one of two values (not necessarily depending on the adjacency of the two vertices). We list all Deza graphs with diameter two which are not strongly regular and have 14, 15 or 16 vertices.

Keywords: Deza graph, strictly Deza graph, strongly regular graph, group.

1. Введение

Все рассматриваемые в данной работе графы — неориентированные, без петель и кратных ребер.

Одним из основных объектов изучения алгебраической и комбинаторной теории графов являются сильно регулярные графы, которые были введены Боузом в 1963 г. [1]. *Сильно регулярным графом* с параметрами (v, k, λ, μ) называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k, любые две смежные вершины имеют точно λ общих соседей, а любые две несмежные вершины имеют точно μ общих соседей.

Параллельно с изучением сильно регулярных графов идет изучение графов, получаемых из сильно регулярных ослаблением некоторых условий. В 1994 г. в работе [2] М. Деза ввел класс регулярных графов, в которых число общих соседей любых двух вершин принимает одно из двух возможных значений.

Goryainov S.V., Shalaginov, L.V., On Deza grahps with 14, 15 and 16 vertices.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для молодых ученых (проект МК-938.2011.1), программы УрО РАН для молодых ученых и фонда поддержки молодых ученых ЧелГУ.

Поступила 15 апреля 2011 г., опубликована 26 мая 2011 г.

Этот класс графов строго содержит класс сильно регулярных графов. Позднее такие графы были названы графами Деза.

Графом Деза с параметрами (v, k, b, a), где $b \geq a$, называется граф на v вершинах, степень каждой вершины которого равна k и любые две различные вершины имеют a или b общих соседей.

В зависимости от параметров графы Деза можно разделить на несколько классов. Если число общих соседей двух вершин в графе Деза определяется их смежностью, то граф Деза является сильно регулярным. Если параметр a графа Деза равен 0, то граф Деза может иметь диаметр больше 2. Графы Деза диаметра 2, не являющиеся сильно регулярными, называют *точными графами Деза*.

Некоторые свойства графов Деза были изучены в работе [3]. В этой же работе было предложено несколько способов построения точных графов Деза и с использованием компьютерного перебора были найдены все точные графы Деза, имеющие не более 13 вершин.

В данной работе найдены все точные графы Деза на 14, 15 и 16 вершинах и для каждого графа найдена конструкция, позволяющая его построить. Поиск графов осуществлялся с помощью разработанного авторами алгоритма перебора.

Статья организована следующим образом. В параграфе 2 помещены некоторые конструкции графов Деза из [3]. В параграфе 3 приведены результаты работы алгоритма поиска точных графов Деза. В параграфе 4 решается проблема изоморфизма для найденных графов.

2. Некоторые конструкции графов Деза

Пусть G — конечная группа. Для непустого множества элементов $D \subset G$ положим $D^{-1} = \{d^{-1} \mid d \in D\}$ и определим DD^{-1} как мультимножество $\{dd'^{-1} \mid d, d' \in D\}$ (т.е. в DD^{-1} могут быть повторяющиеся элементы). Для подмножеств A, B из G и натуральных чисел a, b, k будем писать $DD^{-1} = aA + bB + k\{e\}$, если DD^{-1} состоит из a копий каждого элемента из A, b копий каждого элемента из B и k копий единицы e группы G.

Утверждение 1. *Пусть D — подмножество элементов группы G такое, что:*

(i) $|G| = v$ *и* $|D| = k$;
(ii) единица e группы G не принадлежит D;
(iii) $D^{-1} = D$;
(iv) найдутся такие натуральные числа a, b, k, что $DD^{-1} = aA + bB + k\{e\}$, где множества A, B и $\{e\}$ образуют разбиение G.

Пусть Γ — граф, вершинами которого являются все элементы группы G, и вершины u, w смежны тогда и только тогда, когда $w^{-1}u \in D$. Тогда Γ — граф Деза с параметрами (v, k, b, a), где $b \geq a$.

Утверждение 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ) с $k \neq \mu$, $\lambda \neq \mu$ и с матрицей смежности M. Если P — подстановочная матрица размера $v \times v$, то PM — матрица смежности графа Деза с параметрами $(v, k, \max\{\lambda, \mu\}, \min\{\lambda, \mu\})$ тогда и только тогда, когда*

P задает инволютивный автоморфизм графа Γ, переставляющий только несмежные вершины.

Пусть G_1 и G_2 — графы. *Композицией* $G_1[G_2]$ графов G_1 и G_2 называется граф с множеством вершин $V(G_1)\times V(G_2)$, и вершины (u_1,u_2), (w_1,w_2) смежны тогда и только тогда, когда либо u_1 смежна с w_1, либо $u_1=w_1$ и u_2 смежна с w_2 (см. [4]).

Утверждение 3. *Пусть $G_1 = K_x$ (полный граф на x вершинах) и $G_2 = yK_2$ (y изолированных копий K_2). Тогда граф $G_1[G_2]$ является графом Деза с параметрами $(2xy, 1+2y(x-1), 2y(x-1), 2+2y(x-2))$.*

Пусть G и H — графы. *Произведением* $G\times H$ называется граф на множестве вершин $V(G)\times V(H)$ и вершины (u_1,u_2), (w_1,w_2) смежны тогда и только тогда, когда либо $u_1=w_1$ и u_2 смежна с w_2, либо $u_2=w_2$ и u_1 смежна с w_1 (см. [4]). Заметим, что $G\times H\simeq H\times G$, поэтому в утверждении 4 порядок сомножителей не играет роли.

Утверждение 4. *Произведение графов $G\times H$ является графом Деза тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- *(i) $G\times H = K_n\times K_n, n\geq 2$, в этом случае $G\times H$ — сильно регулярный граф с параметрами $(n^2, 2n-2, n-2, 2)$;*
- *(ii) $G\times H = K_n\times K_4, n\geq 2$, в этом случае $G\times H$ — граф Деза с параметрами $(4n, 2n+2, n-2, 2)$;*
- *(iii) $G=\overline{K_n}$, $n\geq 2$, и H — граф Деза с параметрами $(n', k, b, 0)$, в этом случае $G\times H$ — граф Деза с параметрами $(nn', k, b, 0)$;*
- *(iv) G — граф Деза с параметрами $(n,k,2,0)$ и H — граф Деза с параметрами $(n',k',2,0)$, в этом случае $G\times H$ — граф Деза с параметрами $(nn', k+k', 2, 0)$.*

В таблице 1 из статьи [3] указаны параметры и конструкции всех точных графов Деза не более чем на 13 вершинах.

Таблица 1.

Параметры	Конструкции
(8,4,2,0)	Утв. 4
(8,4,2,1)	Утв. 1
(8,5,4,2)	Утв. 1
(9,4,2,1)	Утв. 1
(9,4,2,1)	Утв. 2
(10,5,4,2)	Утв. 1
(12,5,2,1)	Утв. 1, 4
(12,6,3,2)	Утв. 1
(12,6,3,2)	
(12,7,4,3)	Утв. 1
(12,7,6,2)	Утв. 1
(12,9,8,6)	Утв. 4
(13,8,5,4)	Утв. 1

Пусть Γ — граф Деза. Зафиксируем вершину u графа Γ и положим $\alpha = |\{w\in\Gamma \mid |[w]\cap[u]|=a\}|$, $\beta = |\{w\in\Gamma \mid |[w]\cap[u]|=b\}|$. В предложении 1.1 из [3] доказано, что α и β не зависят от выбора вершины u и в случае $a \neq b$ имеем $\alpha = (b(n-1) - k(k-1))/(b-a)$ и $\beta = (a(n-1) - k(k-1))/(a-b)$.

В следующей лемме из [3] найдены некоторые ограничения на параметры графа Деза.

Лемма 1. *Если существует граф Деза с параметрами* (v, k, b, a), *то выполняются следующие утверждения:*

(1) $b - a$ *делит* $b(n-1) - k(k-1)$*;*
(2) *если* $\alpha, \beta \neq 0$, *то* $a(n-1) < k(k-1) < b(n-1)$*;*
(3) *если* $\alpha \neq 0$, *то* $n \geq 2k - a$.

3. Поиск графов Деза

Поик графов Деза осуществлялся в несколько этапов:

(1) Поиск допустимых параметров.
(2) Перебор матриц смежности для параметров, найденных на 1-м шаге.
(3) Решение проблемы изоморфизма для найденных графов.
(4) Нахождение конструкций для построения графов.

На 1-м шаге была составлена программа, с помощью которой были отобраны наборы параметров, удовлетворяющие заключеню леммы 1, для каждого набора были вычислены параметры α и β по формулам (ф.1) и (ф.2). Результаты поиска приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Параметры	α	β		Параметры	α	β
(14,3,2,0)	10	3		(15,9,8,3)	8	6
(14,4,2,0)	7	6		(15,9,8,4)	10	4
(14,4,3,0)	9	4		(15,10,7,5)	4	10
(14,5,2,0)	3	10		(15,10,7,6)	8	6
(14,5,2,1)	6	7		(15,10,8,6)	11	3
(14,5,4,0)	8	5		(15,10,9,5)	9	5
(14,6,3,0)	3	10		(15,10,9,6)	12	2
(14,6,3,2)	9	4		(15,11,8,7)	2	12
(14,6,4,2)	11	2		(15,11,9,7)	8	6
(14,6,5,0)	7	6		(15,11,10,7)	10	4
(14,7,4,2)	5	8		(15,12,10,9)	8	6
(14,7,4,3)	10	3		(15,12,11,9)	11	3
(14,7,6,0)	6	7		(15,13,12,11)	12	2
(14,7,6,2)	9	4		(16,3,2,0)	12	3
(14,7,6,3)	12	1		(16,4,2,0)	9	6
(14,8,5,2)	3	10		(16,4,3,0)	11	4
(14,8,5,4)	9	4		(16,5,2,0)	5	10
(14,8,6,4)	11	2		(16,5,2,1)	10	5
(14,8,7,2)	7	6		(16,5,4,0)	10	5
(14,9,6,4)	3	10		(16,6,3,0)	5	10
(14,9,6,5)	6	7		(16,6,4,1)	10	5
(14,9,8,4)	8	5		(16,6,5,0)	9	6

(14,10,7,6)	1	12		(16,7,3,0)	1	14
(14,10,8,6)	7	6		(16,7,3,2)	3	12
(14,10,9,6)	9	4		(16,7,4,1)	6	9
(14,11,9,8)	7	6		(16,7,4,2)	9	6
(14,11,10,8)	10	3		(16,7,5,2)	11	4
(14,12,11,10)	11	2		(16,7,6,0)	8	7
(15,3,2,0)	11	3		(16,7,6,2)	12	3
(15,4,2,0)	8	6		(16,8,4,0)	1	14
(15,4,3,0)	10	4		(16,8,4,2)	2	13
(15,5,2,0)	4	10		(16,8,4,3)	4	11
(15,5,2,1)	8	6		(16,8,7,0)	7	8
(15,5,3,1)	11	3		(16,9,5,2)	1	14
(15,5,4,0)	9	5		(16,9,5,4)	3	12
(15,5,4,1)	12	2		(16,9,6,3)	6	9
(15,6,3,0)	4	10		(16,9,6,4)	9	6
(15,6,3,1)	6	8		(16,9,7,4)	11	4
(15,6,3,2)	12	2		(16,9,8,2)	8	7
(15,6,4,2)	13	1		(16,9,8,4)	12	3
(15,6,5,0)	8	6		(16,10,7,4)	5	10
(15,6,5,1)	10	4		(16,10,8,5)	10	5
(15,7,4,2)	7	7		(16,10,9,4)	9	6
(15,7,5,1)	7	7		(16,11,8,6)	5	10
(15,7,6,0)	7	7		(16,11,8,7)	10	5
(15,8,5,3)	7	7		(16,11,10,6)	10	5
(15,8,6,2)	7	7		(16,12,9,8)	3	12
(15,8,7,1)	7	7		(16,12,10,8)	9	6
(15,9,6,3)	4	10		(16,12,11,8)	11	4
(15,9,6,4)	6	8		(16,13,11,10)	9	6
(15,9,6,5)	12	2		(16,13,12,10)	12	3
(15,9,7,5)	13	1		(16,14,13,12)	13	2

Далее для каждого набора параметров перебирались $(0,1)$-матрицы, размера $v \times v$, для каждой из которых проверялось, может ли она быть матрицей смежности графа Деза. Для этого была составлена программа поиска матрицы смежности.

Из определения графа Деза следует, что $(0,1)$-матрица M является матрицей смежности графа Деза с параметрами (v,k,b,a) тогда и только тогда, когда $M^2 = aA + bB + kI$, для некоторых $(0,1)$-матриц A, B и единичной матрицы I размера $v \times v$.

После нахождения графа проверялось, что он не является сильно регулярным и имеет диаметр 2 (если $a = 0$).

В результате работы алгоритма были найдены точные графы Деза только для следующих наборов параметров: (14,9,6,4), (15,6,3,1), (16,5,2,1), (16,7,4,2), (16,8,4,2), (16,9,6,4), (16,9,8,2), (16,11,8,6), (16,12,10,8), (16,13,12,10). В таблице 3 для каждого набора параметров приведено число графов (возможно изоморфных) найденных программой для этого набора.

Таблица 3.

Параметры	Количество найденных матриц смежности
(14,9,6,4)	3168
(15,6,3,1)	27648
(16,5,2,1)	$>2\cdot 10^5$
(16,7,4,2)	103680
(16,8,4,2)	50688
(16,9,6,4)	82944
(16,9,8,2)	2025
(16,11,8,6)	167040
(16,12,10,8)	120960
(16,13,12,10)	184275

На следующем этапе из всех найденных матриц смежности необходимо было отобрать только те, которые представляют попарно неизоморфные графы.

Алгоритм был реализован на языке $C++$. Основные структуры данных:

- Двумерный целочисленный массив Cnm, $Cnm[i][j] = \binom{i}{j}$.
- Трехмерный целочисленный массив $Combination$, $Combination[i][j]$ — это массив длины $\binom{i}{j}$, элементами которого являются все возможные сочетания из n по m.
- Целочисленный массив $NumOfBits$, $NumOfBits[i]$ — количество единиц в двоичном разложении числа i. Этот массив необходим, потому что все двоичные последовательности обрабатываются как целые числа, двоичная запись которых составляет эту последовательность.

Основные функции:

- Функции инициализации всех вышеуказанных структур данных.
- Булевая функция $IsNewStrDeza$, проверяющая не нарушает ли добавление данной строки к матрице условие, что любая пара строк имеет a или b общих единиц.
- Рекурсивная фунция $Extend$, пытающаяся добавить новую строку к матрице.

4. Решение проблемы изоморфизма для найденных графов

Хотя задача проверки изоморфизма графов относится к классу NP, но не известно является ли она NP-полной или принадлежит классу P (при условии $P \neq NP$). Ввиду отсутствия быстрых алгоритмов проверки изоморфизма и необходимости проверять изоморфизм графов для большого числа матриц, генерируемых в ходе программы (см. таблицу 3), было решено модифицировать алгоритм перебора матриц смежности из предыдущего параграфа отдельно для каждого набора параметров. Для этого в функцию $Extend$ вводились ограничения перебора соответствующие заданию нумерации вершин графа.

Так как строки матрицы соответствуют вершинам в итоговом графе, то будем говорить о вершинах графа, подразумевая соответствующие строки матрицы. Номер вершины соответствует номеру строки в матрице.

Все последующие рассуждения опираются на результаты работы программы, здесь же описаны только условия задаваемые программе и результаты. Занумеруем произвольную вершину первым номером, вершины, смежные с ней, занумеруем от 2 до $k+1$. Дальнейшие ограничения будем рассматривать отдельно для каждого набора параметров.

Параметры (14,9,6,4).
Так как $\beta = 10$ а $v - k - 1 = 4$, то в окрестности вершины 1 найдутся хотя бы 6 вершин, имеющих с ней b общих соседей. Занумеруем одну из них 2, а их общих соседей от 3 до 8 ($b = 6$). Вершины, смежные с 2 и не смежные с 1, занумеруем 11 и 12. Таким образом мы однозначно определили вторую строку матрицы.

Среди общих соседей вершин 1 и 2 найдутся хотя бы три, имеющих с 1 ровно b общих соседей. Занумеруем 3 одного из этих соседей, и пусть $4, 5, 6 \in [1] \cap [2] \cap [3]$. Вводя в программу условие, что вершины 4–7 имеют с 1 ровно a общих соседей, видим, что таких графов нет, значит, вершины 2–7 попарно смежны и каждая из них смежна еще с одной вершиной из окрестности 1. Вводя в программу соответствующие ограничения, получим что каждая из вершин 8–10 смежна с двумя из вершин $\{2, ..., 7\}$. Занумеруем вершины смежные с 8 — 2,3; с 9 — 4,5; с 10 — 6,7. Среди вершин $\{2, ..., 7\}$ пары, которые имеют в окрестности 1 пять общих соседей вне $1^{\perp}$ общих соседей не имеют, остальные пары вершин имеют вне $1^{\perp}$ по одному общему соседу. Нумеруя произвольным образом соответствующие общие смежные вершины вне $1^{\perp}$, получим единственную матрицу смежности,а значит и единственный граф Деза.

Параметры (15,6,3,1).
Хотя $\alpha = k$, но найдется вершина, в окрестности которой есть имеющая с ней b общих соседей, иначе граф является сильно регулярным. Занумеруем эти вершины 1 и 2, а их общих соседей — 3, 4, 5. Вершины, смежные с 2 и не смежные с 1, занумеруем 8, 9. Вводя соответствующие ограничения получаем, что среди вершин 3, 4, 5 ровно две имеют с 1 по три общих соседа, и еще одна имеет одного общего соседа. Причем первые две смежны между собой, занумеруем их 3, 4. Последнего общего соседа вершин 1 и 3 занумеруем 6, а общего соседа 2 и 3 — 8. Единственную оставшуюся вершину из [3] занумеруем 10. Обнаруживаем, что [4] определяются однозначно. Вершина 5 имеет с 1 и 2 по одноvе общему соседу, а с 3 и 4 уже по два, значит верщина 5 смежна с 10. Оставшиеся три вершины, смежные с 5, занумеруем 11, 12 и 13. Вершины 6 и 7 имеют с 5 еще по два общих соседа, следовательно, эти общие соседи совпадают и мы занумеруем эти вершины 11 и 12. Оставшиеся вершины из [6] и [7] занумеруем 14 и 15 соответственно. При такой нумерации вершин получаются две матрицы, которые, как легко проверить, соответствуют изоморфным графам.

Параметры (16,5,2,1).
Так как $k = 5$, то в окрестности вершины 1 обязательно есть вершина, имеющая

с ней 2 общих соседей (по лемме о рукопожатиях). Занумеруем эту вершину 2. Тогда окрестность 1 изоморфна одному из следующих графов: C_5, цепь длины 4, $K_3 \cup K_2$, $K_{1,2} \cup K_2$. Последовательно задавая строение окрестности 1 в виде этих графов, находим, что [1] имеет вид $K_{1,2} \cup K_2$. Вершины, смежные с 2, занумеруем 3 и 4. Тогда вершины 5 и 6 смежны друг с другом. Остальные вершины, смежные с 2, занумеруем 7, 8. Так как $[3] \cap [4] = \{1, 2\}$, то смежные с 3 и 4 вершины занумеруем 9–11 и 12–14 соответсвенно. Из вершин 5 и 6 одна имеет по одному общему соседу с обеими вершинами 3, 4, а другая — только с одной из них. Занумеруем 9 вершину, общую для 5 и 3, 10 — общую для 3 и 6, 12 — общую для 4 и 6. Остальные вершины из [5] занумеруем 15 и 16. Последнюю смежную с 6 вершину занумеруем 15. Получим 4 матрицы смежности, которые, как не сложно проверить, соответствуют изоморфным графам.

Параметры (16,7,4,2).
Если в окрестности 1 нет вершин, имеющих с 1 четыре общих соседа, то [1] является объединением циклов. Проверив оба возможных случая, найдем, что таких графов нет. Следовательно, в окрестности 1 найдется вершина, имеющая с ней четыре общих соседа. Занумеруем эту вершину 2, а их общих соседей с 3 по 6. Оставшиеся смежные с 2 вершины занумеруем 9, 10. Вводя соответствующие условия, находим, что среди вершин $\{3, 4, 5, 6\}$ найдется ровно одна, имеющая с 1 четыре общих соседа. Занумеруем ее 3. При этом вершина 3 имеет с 2 два общих соседа 1 и 4. Оставшиеся вершины из [3] занумеруем 11 и 12. При этом окрестность вершины 4, имеющей с 2 четыре общих соседа, определяются однозначно. Далее, вершины 5 и 6 смежны либо друг с другом, либо с вершинами 7 и 8, что дает два различных типа окрестности вершины 1. В каждом из случаев, нумеруя соответствующим образом вершины, смежные с 7, получаем единственный граф. Таким образом, получаем две матрицы смежности, которые соответствуют неизоморфным графам.

Параметры (16,8,4,2).
Введя соответствующие условия, проверим, что в окрестности 1 есть вершина, имеющая с ней два общих соседа, причем такая вершина может быть только одна. Занумеруем эту вершину 2. Общих соседей 1 и 2 занумеруем 3 и 4. Несложно проверить, что вершины 3, 4 смежны. Оставшиеся вершины из окрестности 2 занумеруем с 10 по 14. Так как $\beta = 13$, то одна из вершин 3 и 4 имеет с 1 четыре общих соседей, занумеруем ее 3. Занумеруем оставшиеся две вершины из $[1] \cap [3]$ — 5 и 6. Так как в окрестности вершины 2 уже найдена вершина, имеющая с ней двух общих соседей (вершина 1), то остальные вершины ее окрестности имеют с ней по четыре общих соседа, в том числе 3, занумеруем оставшиеся две из них 10 и 11. Оставшуюся вершину из [3] занумеруем 15. Аналогично, занумеруем оставшиеся вершины окрестности 4 — 7, 8, 12, 13, и 16. Вводя аналогичным образом нумерацию для смежных с 5, 6 и 7 вершин, получим единственную матрицу смежности, которая соответствует единственному точному графу Деза.

Параметры (16,9,6,4).
Так как граф не является сильно регулярным, то в окрестности вершины 1 найдется вершина имеющая с ней шесть общих соседей. Занумеруем ее 2, а

общих соседей — с 3 по 8. Оставшиеся вершины окрестности 2 обозначим 11, 12. Из шести вершин $\{3,...,8\}$ ровно две имеют с 1 по 6 общих соседей, занумеруем их 3 и 4. Тогда 3 и 4 имеют и с вершиной 2 по шесть общих соседей. Зафиксируем их смежности аналогично предыдущим случаям. Оставшиеся шесть вершин из окрестности 1 имеют с ней еще по два общих соседа, то есть, индуцируют регулярный подграф степени два. Существуют два таких графа: C_6 и $2K_3$. Задавая каждый из них в качестве подграфа, порожденного этими вершинами, и фиксируя остальные их смежности аналогично предыдущим случаям, получаем две матрицы смежности, которые соответствуют двум неизоморфным графам Деза.

Параметры (16,9,8,2).
Так как $\alpha = 8$, а $k = 9$, то в окрестности 1 есть вершина, имеющая с ней b общих соседей, занумеруем ее 2. Так как каждая вершина степени 8 в окрестности смежна со всеми остальными вершинами, и в окрестности есть вершины степени 2, то вершин степени 8 не более 2. Значит, есть только два варианта графа окрестности: мельница $K_1 + 4K_2$ и 7-корона $K_2 + 7K_1$. Здесь "+"обозначает соединение графов, при котором каждая вершина первого графа соединяется ребром с каждой вершиной второго графа. Проверяя каждый из двух графов, находим, что реализуется только первый случай. Получаем единственную матрицу смежности, соответствующую единственному графу Деза.

Параметры (16,11,8,6).
Так как $\beta = 10$, то в окрестности 1 есть вершина имеющая с ней 6 общих соседей. Обозначим ее 2, а их общих соседей с 3 по 8. Оставшиеся вершины, смежные с 2, занумеруем с 13 по 16. Среди вершин $\{3,...,8\}$, три или ноль вершин имеют с 1 по шесть общих соседей. Во втором случае вершины 9–12 имеют с 1 по шесть общих соседей, то есть, первый случай получется из второго перенумерацией вершин. Зафиксируем, как и в предыдущих случаях, смежности вершин с 3 по 8 в [1] и вне $1^{\perp}$. Получим единственную мартицу, соответствующую единственному графу Деза.

Параметры (16,12,10,8).
Так как $\alpha = 9$, а $k = 12$, то в окрестности 1 найдется хотя бы три вершины степени десять. Легко проверить, что единственная вершина из $[1] - i^{\perp}$ для вершины i степени десять в [1], имеет с 1 восемь общих соседей, поэтому вершины степени десять в [1] образуют 3-клику, обозначим из 2, 3, 4. Теперь 2, 3, 4 несмежны в окрестности 1 с одной и той же вершиной. Вводя произвольную нумерацию оставшихся смежностей получаем единственную матрицу и единственный граф Деза.

Параметры (16,13,12,10).
Так как $\alpha = 12$, а $k = 13$, то в окрестности 1 есть вершина степени двенадцать, обозначим ее 2. Проверяем, что в окрестности 1 нет других вершин степени двенадцать и дополнительный граф к $[1] - \{2\}$ является графом степени 2 на 12 вершинах. Пусть вершина 3 смежна с вершинами с 4 по 12 и 15, 16. Тогда вершины 13 и 14 имеют общую несмежную с ними вершину 3. Но вершины, имеющие общую несмежную, имеют и вторую несмежную общую вершину, иначе у них окажется одиннадцать общих соседей, чего быть не

может. Занумеруем их вторую общую несмежную вершину — 4. Аналогично проделаем для остальных вершин окрестности 1. Получим единственную матрицу смежности, соответствующую единственному графу Деза.

В таблице 4 приведено количество неизоморфных точных графов Деза для каждого набора параметров.

Таблица 4.

Параметры	Количество неизоморфных точных графов Деза
(14,9,6,4)	1
(15,6,3,1)	1
(16,5,2,1)	1
(16,7,4,2)	2
(16,8,4,2)	1
(16,9,6,4)	2
(16,9,8,2)	1
(16,11,8,6)	1
(16,12,10,8)	1
(16,13,12,10)	1

Следующая задача — нахождение конструкции для построения каждого найденного графа.

Среди найденных наборов параметров, для двух существуют сильно регулярные графы с такими наборами параметров: (15,6,3,1) — параметры графа $\overline{T(6)}$, (16,9,6,4) — параметры графа $\overline{L(4)}$. Значит, можно получить точные графы Деза из этих сильно регулярных графов с помощью утверждения 2. Для графа $\overline{T(6)}$, с точностью до нумерации вершин, существует единственный автоморфизм и с помощью этого автоморфизма можно получить найденный нами с помощью программы точный граф Деза. Для $\overline{L(4)}$, с точностью до нумерации вершин, существует (см. [5]) два автоморфизма и с их помощью, используя утверждение 2, можно построить оба точных графа Деза, найденных программным путем.

Утверждение 3 дает простое арифметическое условие, когда существует точный граф Деза с данными параметрами. Если существуют x и y, такие что параметры графа $(2xy, 1+2y(x-1), 2y(x-1), 2y(x-2)+2)$, то существует граф Деза с такими параметрами, и его строение описано в утверждении 3. Из найденных нами наборов параметров этому условию удовлетворяют только два: (16,9,8,2) $(x=2, y=4)$ и (16,13,12,10) $(x=4, y=2)$.

Для построения графов с использованием утверждения 1 была написана программа, перебирающая разностные множества в группе. На вход программы подавались параметры графа Деза и таблица умножения подгруппы группы его автоморфизмов. Результатом ее работы являются все разностные множества заданной группы, с помощью которых можно построить граф Деза с заданными параметрами, используя конструкцию из утверждения

1. В таблице 5 приведены наборы параметров, для которых точные графы Деза были получены с помощью конструкции из утверждения 1.

Обозначения групп: C_{16} — циклическая группа порядка 16, D_{16} — группа диэдра порядка 16, $C_4 \times C_4$ — прямое произведение двух циклических, QD_{16} — полудиэдральная группа порядка 16.

Таблица 5.

Параметры	Группа
(14,9,6,4)	D_{14}
(16,5,2,1)	QD_{16}
(16,7,4,2)	$C_4 \times C_4$
(16,8,4,2)	C_{16}
(16,9,8,2)	C_{16}
(16,11,8,6)	$C_4 \times C_4$
(16,12,10,8)	C_{16}
(16,13,12,10)	C_{16}

З а м е ч а н и е 1. Некоторые графы могут быть получены как разностные множества в нескольких группах, в таблице приведена только одна из них.

З а м е ч а н и е 2. Для набора параметров (16,7,4,2) оба найденных графа могут быть построены из одной и той же группы $C_4 \times C_4$ с использованием различных разностных множеств.

Таким образом, все найденные графы удалось построить с использованием указанных теоретических конструкций. Заметим, что для этого оказалось достаточно конструкций из утверждений 1 и 2.

Список литературы

[1] R.C. Bose, *Strongly regular graphs, partial geometries and partially balanced designs*, Pacific J. Math., **13** (1963), 389–419.
[2] M. Deza, A. Deza *The ridge graph of the metric polytope and some relatives*, Polytopes: Abstract, convex and computational, T. Bisztriczky et al. (Editors), NATO ASI Series, Kluwer Academic, 1994, 359–372
[3] M. Erickson, S. Fernando, W.H. Haemers, D. Hardy, J. Hemmeter *Deza graphs: a generalization of strongly regular graphs*, J. Comb. Designs., **7** (1999), 359–405.
[4] F. Harary *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading, 1969, 36–37.
[5] Л.В. Шалагинов *О графах Деза с параметрами графов дополнительных к треугольным и решетчатым графам*, Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики". ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2011, 250–252.

Сергей Викторович Горяинов, Леонид Викторович Шалагинов
Челябинский государственный университет,
ул. Братьев Кашириных 129,
454001, Челябинск, Россия
E-mail address: 44g@mail.ru, leonidshalaginov@rambler.ru