S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 123–126 (2011) УДК 517.93
MSC 34D45, 37C70

СВОБОДНЫЕ ПО ПУАССОНУ ДВИЖЕНИЯ И МНОГОМЕРНЫЕ АТТРАКТОРЫ ВИНОГРАДА

В. В. ИВАНОВ

Abstract. A complete description is presented of the topology of the limit sets of Poisson free motions in Euclidean spaces.

Keywords: trajectories and limit points, Poisson free motions, Vinograd attractors, Jordan—Brouwer Separation Theorem

Наша задача в этой заметке — описать предельные множества движений, которые мы называем *свободными по Пуассону*. Новым термином мы хотим в *позитивной* форме выразить хорошо известное свойство движений, в то время как специалисты по качественной теории дифференциальных уравнений в нем же склонны усматривать проявление особого рода *неустойчивости*. Немножко забавно, что «терминологически неустойчивыми» оказываются, например, все действительные движения автономных систем, асимптотически устойчивые по Ляпунову. Мы же говорим о движениях, которые никогда не возвращаются в прошлое. Даже близко. Их «свободу» ограничивают только ожидающие их аттракторы. Мы предлагаем для них красивое имя — *аттракторы Винограда*...

Изучая движения в пространстве $\mathbb{R}^n$, мы очень часто можем позволить себе переселиться на сферу $\mathbb{S}^n$, ничего при этом не теряя, но обретая возможность исключить порою не слишком приятное разнообразие вариантов, связанное с досадной некомпактностью $\mathbb{R}^n$, поскольку сфера $\mathbb{S}^n$ не только во всех местах устроена столь же просто и одинаково, но еще и компактна. Перейти же от $\mathbb{R}^n$ к $\mathbb{S}^n$ так же легко, как и при $n = 2$, где достаточно весь горизонт плоскости собрать в единую точку, вспомнив о стереографической проекции Аполлония Пергского и ее важной роли в астрономических трудах Клавдия Птолемея...

Ivanov, V. V., Poisson free motions and multidimensional Vinograd attractors.

Работа поддержана интеграционным проектом № 107, утвержденным СО РАН.
Поступила 03.05.2011 г., опубликована 27.06.2011 г.

Любое непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{S}^n$ неотрицательной полуоси $\mathbb{R}_+$ в сферу $\mathbb{S}^n$ мы будем называть *движением* на этой сфере. Естественно, что множество $\Gamma(\varphi) := \varphi(\mathbb{R}_+)$ мы считаем его *траекторией.* Точку $x_* \in \mathbb{S}^n$ называют *предельной точкой* движения φ, если для нее можно найти такую последовательность $t_k \geq 0$, что $t_k \to \infty$ и $\varphi(t_k) \to x_*$ при $k \to \infty$. Совокупность $\Omega(\varphi)$ всех таких точек мы будем называть *аттрактором* движения φ или его *предельным множеством.* Почти очевидно, что аттрактор любого движения на сфере непуст, компактен и связен. Нетрудно доказать и обратное — каждое такое множество служит аттрактором некоторого движения.

Движение мы называем *свободным по Пуассону*, если ни одна из точек его траектории не проходится дважды и не служит его предельной точкой. Как легко понять, это значит, что движение осуществляет гомеоморфизм между «временно́й» полуосью и собственной своей траекторией. Множество на сфере мы будем называть *аттрактором Винограда*, если оно непусто, связно и при этом служит границей некоторой области. Следующая лемма, на наш взгляд, отражает одно из наиболее впечатляющих откровений Р. Э. Винограда [1].

Лемма 1. *Предельное множество любого свободного в смысле Пуассона движения на сфере представляет собой аттрактор Винограда.*

Доказательство. Каким бы ни было движение φ, его аттрактор $\Omega(\varphi)$ непуст и связен, а его дополнение открыто. Оно либо связно, либо распадается на ряд областей. Если движение свободно по Пуассону, так что $\Omega(\varphi) \cap \Gamma(\varphi) = \phi$, то его траектория лежит в указанном дополнении, а тогда она целиком содержится в одной из упомянутых областей. Пусть $G(\varphi)$ будет этой областью. Докажем, что ее граница и есть $\Omega(\varphi)$. Прежде всего мы должны согласиться, что аттрактор $\Omega(\varphi)$, представляющий собой часть замыкания траектории $\Gamma(\varphi)$, весь лежит в замыкании области $G(\varphi)$, а там он может оказаться только на ее границе $\partial G(\varphi)$, поскольку не имеет общих точек со своим личным дополнением. Столь же ясно, что на границе $\partial G(\varphi)$ нет точек открытого множества $G(\varphi)$, равно как и точек других областей, на которые распалось дополнение аттрактора $\Omega(\varphi)$. Поэтому $\partial G(\varphi)$, в свою очередь, содержится в $\Omega(\varphi)$. Лемма доказана.

Теперь мы докажем обратное утверждение. Но к этому нам нужно немного приготовиться. А именно, чтобы заданный аттрактор Винограда реализовать в виде предельного множества свободного по Пуассону движения, необходимо изучить прилегающий к нему слой области, границей которой он служит. Эта задача решена М. В. Фокиным в его работе [2]. Наряду с потрясающими своей красотой геометрическими наблюдениями, о которых надо петь или говорить стихами, он применяет более чем знаменитую теорему Римана о конформных отображениях односвязных областей, всего лишь через полвека получившую свое обоснование в трудах Гильберта, о чем увлекательно пишет Каратеодори в его великолепной книге [3]. На теорему Римана опираются и конструкции Р. Э. Винограда. Мы иначе подойдем к этим топологическим вопросам.

Простой контур, нарисованный на сфере $\mathbb{S}^2$, разбивает ее на две области. Это — теорема Жордана. Для $n \geq 3$ ее роль играет теорема Брауэра, которая в 1912 году успешно завершила муки многих знатных математиков: *связное компактное многообразие без края, вложенное в евклидово пространство или в сферу на единицу большей размерности, разбивает его или ее ровно на две области, для которых служит их общей границей* [4, с. 327]. Из этой чудесной теоремы вытекают чудесные выводы. Далее слово *континент* означает у нас компактное связное n-мерное подмногообразие сферы $\mathbb{S}^n$, где $n \geq 2$. Как только на голой сфере $\mathbb{S}^n$ зарождается континент M, на ней возникает прекрасная картина Жордана—Брауэра, где мы видим, как свободную от континента часть сферы покрывают несколько связных и открытых морей без островов, чем-то напоминающих области $D_1, \ldots, D_N$, чьи границы $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_N$ связны и, не пересекаясь между собой, все вместе составляют границу континента:

$$\mathbb{S}^n \setminus M = D_1 \cup \ldots D_N, \qquad \partial M = \Sigma_1 \cup \ldots \cup \Sigma_N.$$

Этой картине уже сто лет. Ее достоверность гарантируют теоремы Жордана и Брауэра, в чем легко убедиться, если учесть следующее простое наблюдение.

Лемма 2. *Удаляя из континента внутреннюю часть лежащего внутри него другого континента со связным краем, мы получим новый континент.*

Доказательство. Пусть континент M' имеет связный край и лежит строго внутри другого континента M''. Граница первого из них разбивает сферу $\mathbb{S}^n$ на две области G' и G''. Внутренняя часть M' связна, а значит, вся целиком расположена в одной из наших областей. Пусть это будет G'. Но область G' не может иметь точек вне множества M', поскольку иначе пересекалась бы с его границей, что противоречит ее сути. Поэтому G' совпадает с внутренней частью M'. Возьмем теперь две точки из «кольца» $K = M'' \setminus G'$ и непрерывно прогуляемся по континенту M'' от одной из них до другой. Если мы ни разу не оказались внутри M', нам повезло. Если получилось иначе, мы должны были где-то пересечь границу M'. Ясно, что при этом найдутся такие два момента $t_1 \leq t_2$, когда мы на этой границе, но как до t_1, так и после t_2 мы не на ней, а значит, мы в области G'', а точнее — в кольце K. Нам остается лишь заменить отрезок нашего пути за время от t_1 до t_2 и пробежаться по границе M', радуясь тому, что край континента, если уж связен, то линейно. Словом, кольцо K связно. Как вытекает из простых общетопологических соображений, оно обладает и всеми другими чертами континента. Лемма доказана.

Лемма 3. *В пределах неодномерной области, имеющей связную границу, лежащий в ней компакт можно раздуть до континента со связным краем.*

Доказательство. Пусть компакт F лежит в области $G \subset \mathbb{S}^n$. Из нескольких замкнутых шариков или «кубиков» легко составить связное многообразие Φ размерности n, лежащее в области G и внутри себя содержащее компакт F. Край $\partial\Phi$ многообразия Φ не обязан быть связным. Но тогда он разлагается на несколько связных компонент, ограничивающих по Жордану—Брауэру столько же попарно непересекающихся областей, не имеющих общих точек с множеством Φ, а вместе с ним покрывающих всю сферу $\mathbb{S}^n$. Если же граница области G связна, она целиком располагается в одной из упомянутых областей. Пусть D будет этой областью. Но тогда ее дополнение $M = \mathbb{S}^n \setminus D$, очевидно, представляющее собой континент, имеет ту же границу, что и D, которая, как мы твердо помним, связна. Остальные области имеют точки из G. Например, таковы их точки, близкие к их границам, составляющим части границы $\partial\Phi$ континента Φ, вместе с ним лежащей в области G. Если бы какая-то из этих областей имела точки и за пределами области G, она пересекалась бы с ее границей ∂G, что исключено. Поэтому все наши области, как и Φ, лежат в G. Но вместе с Φ они образуют M, так что $M \subset G$. Лемма доказана.

Смысл нашей «игры в кубики» выражает светлая мысль: *бывает полезно слегка раздуть множество с тем, чтобы оно обрело простые очертания.* Но эти игрушки хороши только под присмотром алгебраической топологии...

Теорема. *Класс предельных множеств свободных по Пуассону движений в любых размерностях совпадает с классом аттракторов Винограда.*

Доказательство. Одна половина теоремы — это первая из трех наших лемм. Другая половина — следствие последних двух. Случай $n = 1$ не доставляет нам ни радости, ни хлопот. Поэтому дальше $n \geq 2$. Пусть множество Ω связно и служит границей области $G \subset \mathbb{S}^n$. Для каждого номера k построим в области G континент M_k, можно — при желании — элементарный по Жордану, чья граница связна и отличается от Ω меньше чем на $1/k$, считая по Хаусдорфу. Выберем на ней ее же конечную сеть размера $1/k$. Мы можем и будем считать, что M_k лежит внутри M_{k+1}, и пройдемся без повторений по всем сетям и через все линейно связные слои $M_{k+1} \setminus M_k$. Если $n \geq 3$, это легко. Если же $n = 2$, надо соблюдать порядок. Его подсказывают нам «концентрические» контуры Жордана, которые служат границами двумерных континентов M_k. Так мы, без Римана, но свободно по Пуассону, будем стремиться к множеству Ω, проходя все ближе и ближе мимо всех его точек. Теорема доказана.

У нас нет сейчас ни возможности, ни желания ворошить историю, но автор с удовольствием сообщает читателю, что источником его вдохновения стали исследования Р. Э. Винограда [1], который описал предельные множества всех автономных движений на плоскости. Как читатель, вероятно, догадывается, этими множествами оказались в точности ... аттракторы Винограда. И это не случайно. Благодаря Бендиксону мы знаем, что на плоскости все автономные движения, кроме периодических и стационарных, свободны по Пуассону.

Неизгладимое впечатление на автора произвела и работа М. В. Фокина [2], где установлено, что класс аттракторов движений градиентных систем любой размерности совпадает с классом аттракторов Винограда. Как легко понять, все нестационарные движения таких систем свободны по Пуассону. Это значит, что в статье [2], вне всяких сомнений, еще тридцать лет тому назад мы могли бы прочесть ответы почти на все вопросы, которыми увлеклись только теперь, если бы они там были поставлены так, как в этом нашем сочинении...

Свою глубокую признательность я выражаю В. М. Чересизу — бесконечному источнику свежих знаний и носителю древних традиций. Лишь благодаря ему мне довелось узнать о превосходных трудах Р. Э. Винограда и М. В. Фокина.

Список литературы

[1] Р. Э. Виноград. *О предельном поведении неограниченной интегральной кривой* // Уч. зап. МГУ, Вып. 155, Математика, **5** (1952), 94–136. Zbl 1145.11324, MR 0082005 См. также: Докл. АН СССР, сер. мат., **66**:1 (1949), 5–8. Zbl 0037.35901

[2] М. В. Фокин. *О предельных множествах траекторий динамических систем градиентного типа* // Матем. сб., **116(158)**:4(12) (1981), 502–514. Zbl 0555.34022, MR665851

[3] К. Каратеодори. *Конформное отображение.* М-Л.: ОНТИ ГТТИ. 1934. Zbl 0005.16801

[4] А. Дольд. *Лекции по алгебраической топологии.* М.: Мир. 1976. MR 0448330

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4, 630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru