S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 163–167 (2011) УДК 517.9
MSC 35R30

ФОРМУЛЫ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПОИСКА СИМВОЛА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Ю.Е. АНИКОНОВ

Abstract. We give explicit formulas for solution of the inverse problem of reconstruction of the symbol A of operator from the boundary data $w|_{t=a}$ and $w|_{t=b}$ of a solution w of the equation $\frac{\partial w}{\partial t} = Aw$.

Keywords: differential equations, inverse problems, evolution equations.

В данной работе рассматривается нелинейная задача поиска символа оператора эволюционного уравнения при переводе решения из одного временного положения в другое.

Пусть $\mathbb{R}^n$ — вещественное эвклидово пространство переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и переменная $t \in [a, b]$, $0 \le a < b$ — заданные числа. На множестве бесконечно-дифференцируемых функций $w(x,t)$ будем рассматривать линейные операторы A действующие по x с символами $\widetilde{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $Ae^{ix\xi} = \widetilde{A}(\xi)e^{ix\xi}$.

В случае $A = \Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, символ $\widetilde{A}(\xi) = -|\xi|^2$.

Упомянутая задача состоит в следующем: Найти решение $w(x,t)$ эволюционного уравнения и символ $\widetilde{A}(\xi)$ оператора A, если

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw, \tag{1}$$

$$w|_{t=a} = w_a(x), \quad w|_{t=b} = w_b(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

и функции $w_a(x)$, $w_b(x)$ — известны.

Anikonov, Yu.E., Formulas in a problem of the search of the symbol of an linear operator.

Работа поддержана РФФИ (грант 09-01-00422).

Поступила 18 мая 2011 г., опубликована 30 июля 2011 г.

Здесь и в дальнейшем ограничимся бесконечно дифференцируемыми функциями.

Сформулируем сначала формальный результат, предполагая априори, что нижеследующие формулы и операции имеют смысл.

Теорема 1. *Для решения* $(w(x,t), \widetilde{A}(\xi))$ *задачи (1), (2) имеют место формальные формулы*

$$w(x,t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{b-t}{b-a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{t-a}{b-a}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \tag{3}$$

$$\widetilde{A}(\xi) = \frac{1}{b-a} \ln \left[\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy}\right]. \tag{4}$$

Доказательство.

При $t = a$ из (3) получаем равенство

$$w(x,a) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} d\xi dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \delta(x-y) dy = w_a(x).$$

Аналогично

$$w(x,b) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} d\xi dy = w_b(x).$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{b-t}{b-a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{t-a}{b-a}} \times \\
&\times \frac{1}{b-a} \left[\ln \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy - \ln \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{b-t}{b-a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{t-a}{b-a}} \times \\
&\times \frac{1}{b-a} \ln \left[\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy}\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.
\end{aligned}$$

С другой стороны

$$Aw = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{b-t}{b-a}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy\right)^{\frac{t-a}{b-a}} \widetilde{A}(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.$$

При $\widetilde{A}(\xi) = \dfrac{1}{b-a} \ln \left[\dfrac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_b(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} w_a(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} dy} \right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$ получается равенство

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw.$$

таким образом соотношения (1), (2) выполнены Приведем достаточные условия на данные $w_a(x)$, $w_b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ задачи (1), (2), гарантирующие корректность формул (3), (4) Теоремы 1 и законность вышеприведенных операций.

Теорема 2. *Пусть*

$$w_a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) \mathrm{e}^{-\varphi_a(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi,$$

$$w_b(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) \mathrm{e}^{-\varphi_b(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varphi_a(\xi) \neq \varphi_b(\xi)$, $\psi(\xi) \neq 0$ *— бесконечно дифференцируемые функции медленного роста такие, что*

$$\varphi_a(\xi) \geq B_1 |\xi|^{2m_1}, \quad \varphi_b(\xi) \geq B_2 |\xi|^{2m_2}, \quad |\xi| \geq R$$

$$\varphi_b(\xi) - \varphi_a(\xi) \geq B|\xi^{2m}|, \quad |\xi| \geq R,$$

$m_1 \geq 1$, $m_2 \geq 1$, $B_1 > 0$, $B_2 > 0$, $R > 0$ *— постоянные.*

Тогда решение $(w(x,t), \widetilde{A}(\xi))$ *задачи (1), (2), заданное формулами (3), (4), корректно определено и*

$$\widetilde{A}(\xi) = -\frac{1}{b-a}(\varphi_b(\xi) - \varphi_a(\xi)),$$

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) \mathrm{e}^{-[\frac{b-t}{b-a}\varphi_a(\xi) + \frac{t-a}{b-a}\varphi_b(\xi)]} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi.$$

Доказательство Теоремы 2 осуществляется непосредственной проверкой.

Заметим, что если $\psi(\xi) > 0$ и $\varphi_a(\xi)$, $\varphi_b(\xi)$ — вещественные функции для $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то данные $w_a(x)$, $w_b(x)$ и решение $w(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $a \leq t \leq b$, теоремы 2 являются положительно определенными функциями, что представляет определенный интерес.

В случае финитности функции $\psi(\xi)$ символ $\widetilde{A}(\xi)$ может быть произвольной целой аналитической функцией, а данные $w_a(x)$, $w_b(x)$ можно задавать в любой области пространства $\mathbb{R}^n$, что важно для приложений.

Теорема 3. *Пусть функции* $w_a(x)$, $w_b(x)$, $w_a(x) \neq w_b(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, D *— область, продолжаются на все* $\mathbb{R}^n$ *как целые аналитические функции экспоненциального типа и* $\widehat{w}_a(\xi) = \psi(\xi)$, $\widehat{w}_a(\xi) = \psi(\xi)\mathrm{e}^{\widehat{A}(\xi)}$, *где* $\widehat{A}(\xi)$ *— целая аналитическая функция,* $\psi(\xi)$ *— непрерывная финитная функция, компактный носитель которой содержит некоторую область.*

Тогда решение задачи (1), (2), заданное формулами (3), (4) корректно определено и справедливы равенства

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) \mathrm{e}^{\frac{t-a}{b-a}\widetilde{A}(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi,$$

$$\widetilde{A}(\xi) = \frac{1}{b-a}\widehat{A}(\xi).$$

Доказательство Теоремы 3 осуществляется непосредственной проверкой.

И здесь так как $\psi(\xi)$ — финитная функция, то решение $w(x,t)$ оказывается для $t \in [a,b]$ целой аналитической функцией переменной $x \in \mathbb{R}^n$. При этом задача (1), (2) является некорректно поставленной, потому что некорректность непосредственно связана с аналитическим продолжением данных $w_a(x)$, $w_b(x)$ и символа $A(\xi)$.

В заключение рассмотрим вопрос о характере решения задачи (1), (2) при условии, что данные $w_a(x)$, $w_b(x)$ порождены решением задачи Коши эволюционного уравнения параболического типа с эллиптическим оператором A. Что в данном случае дадут формальные формулы (3), (4) теоремы 1? Получим ли решение задачи Коши и символ?

Сначала заметим, в случае эллиптического оператора A с символом $\mathcal{P}(\xi)$ — полиномом $2m$ степени, таким что $-\mathcal{P}(\xi) \geq B|\xi|^{2m}$, $m \geq 1$, $B > 0$ для решения $w(x,t)$ задачи Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw, \quad w|_{t=0} = w_0(x)$$

имеют место формулы, [1], [2].

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y) w_0(y) dy = \int \mathrm{e}^{t\mathcal{P}(\xi)} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \tag{5}$$

$\Phi(t, x-y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{t\mathcal{P}(\xi)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)} d\xi$ — фундаментальное решение,

$$\widehat{w}_0(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} w_0(y) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi y} d\xi.$$

Здесь $w_0(y)$, $\widehat{w}_0(\xi)$ — подходящие функции, например, бесконечно дифференцируемые интегрируемые. В данном случае

$$w_a(x) = w|_{t=a} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(a, x-y) w_0(y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{a\mathcal{P}(\xi)} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \quad a > 0, \tag{6}$$

$w_a(x) = w_0(x)$, если $a = 0$,

$$w_b(x) = w|_{t=b} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(b, x-y) w_0(y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{b\mathcal{P}(\xi)} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi. \tag{7}$$

В частности при $A = \Delta = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$, $\mathcal{P}(\xi) = -|\xi|^2$,

$$\Phi(t, x-y) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4t}},$$

$$w_a(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4a}} w_0(y) dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-a|\xi|^2} \widehat{w}_0(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi} d\xi, \quad \text{если } a > 0,$$

$w_a(x) = w_0(x)$, если $a = 0$,

$$w_b(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi b}}\right)^n \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|^2}{4b}} w_0(y)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-b|\xi|^2} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi.$$

Оказывается, если функции $w_a(x)$, $w_b(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ определены формулами (6), (7) решением задачи Коши эволюционного уравнения $\dfrac{\partial w}{\partial t} = Aw$ с эллиптическим оператором, то формулы (3), (4) определяют решение (5) и символ $\mathcal{P}(\xi)$.

Теорема 4. *Пусть данные $w_a(x)$, $w_b(x)$ задачи (1), (2) равны*

$$w_a(x) = \int \mathrm{e}^{a\mathcal{P}(\xi)} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

$$w_b(x) = \int \mathrm{e}^{b\mathcal{P}(\xi)} \widehat{w}_0(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\xi}d\xi,$$

$\mathcal{P}(\xi)$ — некоторый полином $2m$ степени, такой что $-\mathcal{P}(\xi) \geq B|\xi|^{2m}$, $B > 0$, $m \geq 1$, $\widehat{w}_0(\xi) \not\equiv 0$ — бесконечно дифференцируемая интегрируемая функция.

Тогда формулы (3), (4) Теоремы 1 корректно определены и имеют место равенства

$$w(x,t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Phi(t, x-y)w_0(y)dy,$$

$$\Phi(t, x-y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{t\mathcal{P}(\xi)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi(x-y)}d\xi \text{ — фундаментальное решение,}$$

$$A(\xi) = \mathcal{P}(\xi).$$

Доказательство Теоремы 4 осуществляется непосредственной подстановкой данных $w_a(x)$, $w_b(x)$ в (3), (4) с учетом равенств

$$\frac{b-t}{b-a} + \frac{t-a}{b-a} = 1, \quad \frac{a(b-t)}{b-a} + \frac{b(t-a)}{b-a} = t.$$

Список литературы

[1] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, *Уравнения с частными производными*, М., Мир, 1966. MR 0598466

[2] L. Hörmander, *Linear Partial Differential Operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1976. MR 0231038

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anikon@math.nsc.ru