S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 179–190 (2011) УДК 512.552.4
MSC 16R10

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МНОГООБРАЗИЙ КОЛЕЦ, В КОТОРЫХ КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ СВОИМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

А.С. КУЗЬМИНА

Abstract. Denote by $\Gamma(R)$ the zero-divisor graph of an associative ring R. In this paper, we study varieties of associative rings, where an isomorphism of $\Gamma(R)$ and $\Gamma(S)$ implies an isomorphism of the rings R and S for any finite rings R, S.

Keywords: zero-divisor graph, variety of associative rings, finite ring.

1. Введение

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Определение. *Графом делителей нуля кольца* R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Обычно граф делителей нуля кольца R обозначается через $\Gamma(R)$. Мы также будем использовать это обозначение.

Понятие графа делителей нуля было введено в работе [4]. И. Бек ввел это понятие для *коммутативного* кольца и вершинами графа делителей нуля считал все элементы кольца. В статье [3] определение было изменено: в качестве

Kuzmina, A.S., On some properties of ring varieties, where isomorphic zero-divisor graphs of finite rings give isomorhic rings.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект 14.740.12.0834).

Поступила 12 августа 2011 г., опубликована 17 августа 2011 г.

вершин графа делителей нуля коммутативного кольца авторы этой работы рассматривали лишь ненулевые делители нуля. Затем понятие графа делителей нуля было распространено и на *некоммутативный* случай (см., например, [5, 2]).

Нетрудно привести примеры неизоморфных колец, графы делителей нуля которых равны. В связи с этим интерес представляет такой вопрос: при каких условиях из равенства графов делителей нуля следует изоморфизм колец? Некоторые результаты, дающие ответ на этот вопрос для коммутативных колец, были получены в работе [1].

В настоящей работе данная проблема исследуется на языке многообразий, а именно: исследуются многообразия ассоциативных колец, в которых каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля. Другими словами, изучаются свойства многообразия колец $\mathfrak{M}$, для которого из равенства $\Gamma(R) = \Gamma(S)$ для конечных колец $R, S \in \mathfrak{M}$, следует, что $R \cong S$.

Введем обозначения и понятия, используемые в настоящей работе.

Полным n–вершинным графом K_n называется граф (без петель и кратных ребер), все n вершин которого смежны между собой. *Порядком конечного графа* называется число вершин в этом графе.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп A_i, где $i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е., другими словами, $R = A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называется *разложимым* (в обозначении $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$). Соответственно кольцо называется *неразложимым*, если оно не является разложимым.

Кольцо R называется *подпрямо неразложимым*, если пересечение всех ненулевых идеалов кольца R является ненулевым идеалом кольца R [9, С. 317]. Всякое кольцо является подпрямой суммой подпрямо неразложимых колец [9, теорема 1, С. 317].

Далее, через $J(R)$ мы будем обозначать радикал Джекобсона кольца R [10, с. 73]. Порядок конечного кольца R мы будем обозначать через $|R|$. Под термином *локальное кольцо* мы понимаем такое конечное кольцо R с единицей, для которого фактор-кольцо $R/J(R)$ является полем. Через $D(R)$ обозначим множество всех делителей нуля кольца R.

Мультипликативную группу кольца R с единицей будем обозначать через R^*, а кольцо всех матриц размера $n \times n$ над кольцом R – через $M_n(R)$.

Для любых элементов x, y кольца R положим $[x, y] = xy - yx$.

Наибольший общий делитель d чисел a, b будем записывать так: $d = (a, b)$.

Через $\mathbb{Z}_n$ мы будем обозначать кольцо классов вычетов по модулю n. Для простого числа p будем полагать, что $GF(p^n)$ – поле из p^n элементов. Кроме того, введем следующие обозначения колец (p – простое число):

$N_{p^2} = \langle a \rangle, a^2 = pa, p^2 a = 0;$

$N_{0,p^n} = \langle a \rangle, p^n a = 0, a^2 = 0;$

$N_{p,p} = \langle c \rangle \dotplus \langle d \rangle, pc = pd = 0, c^2 = d, cd = dc = d^2 = 0;$

$A_p = \begin{pmatrix} GF(p) & GF(p) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; A_p^0 = \begin{pmatrix} GF(p) & 0 \\ GF(p) & 0 \end{pmatrix}.$

Пусть $\mathbb{Z}\langle X \rangle = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ – свободное ассоциативное кольцо от счетного числа переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$. Многочлен

$f(x_1, \ldots, x_d)$ *существенно зависит* от $x_1, x_2, \ldots$, если $f(0, x_2, \ldots, x_d) = \ldots = f(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) = 0$. Минимальная из степеней одночленов, входящих в запись $f(x_1, \ldots, x_d)$ с ненулевым коэффициентом, называется *нижней степенью многочлена* $f(x_1, \ldots, x_d)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец. Через $T(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех многочленов из $\mathbb{Z}\langle X\rangle$, являющихся тождествами на всех кольцах из многообразия $\mathfrak{M}$. Назовем множество $T(\mathfrak{M})$ *идеалом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$. Если идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ порождается (как вполне характеристический идеал) многочленами $f_i, i \in I$, то будем использовать следующее обозначение: $T(\mathfrak{M}) = \{f_i \mid i \in I\}^T$.

Через $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ обозначается объединение многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Нетрудно заметить, что $T(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) = T(\mathfrak{M}) \cap T(\mathfrak{N})$.

Обозначим $\mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s} = var\ N_{0,p_1} \vee \ldots \vee var\ N_{0,p_s}$, где $p_1, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа.

Напомним, что конечное кольцо R называется *критическим*, если оно не принадлежит многообразию, порожденному всеми собственными подкольцами и фактор-кольцами кольца R [12]. Многообразие называется *кроссовым*, если все его кольца локально конечны, оно содержит только конечное число критических колец и может быть задано конечным числом тождеств [12]. Согласно [12] многообразие ассоциативных колец является кроссовым в том и только в том случае, когда оно порождается конечным ассоциативным кольцом.

Пусть R, S – конечные кольца. Равенство графов $\Gamma(R)$ и $\Gamma(S)$ равносильно существованию биективного отображения $\alpha : D(R)\setminus\{0\} \longrightarrow D(S)\setminus\{0\}$, такого, что:

$$\forall\, a, b \in D(R)\setminus\{0\} :\ (ab = 0 \text{ или } ba = 0) \ \Leftrightarrow\ \Big(\alpha(a)\alpha(b) = 0 \text{ или } \alpha(b)\alpha(a) = 0\Big).$$

Будем называть такие отображения Γ - *отображениями* колец R и S. Таким образом, в общем случае вопрос может переформулирован следующим образом: при каких условиях такое Γ - отображение α колец R и S может быть продолжено до изоморфизма колец R и S? Интерес также представляет изучение свойств таких отображений.

В настоящей работе данная проблема изучается на языке многообразий. В общем виде задача можно быть переформулирована следующим образом: описание многообразий колец, в которых для любых конечных колец R, S существование Γ - отображения колец R и S влечет за собой изоморфизм колец R и S. В настоящей работе, в частности, доказано, что если многообразие $\mathfrak{M}$ содержит поле $\mathbb{Z}_p$, где p – некоторое простое число, и все конечные кольца этого многообразия однозначно определяются своими графами делителей нуля, то любое конечное подпрямо неразложимое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$, не изоморфное полю $\mathbb{Z}_p$, нильпотентно.

2. Некоторые вспомогательные результаты

По теореме Тарского любое нетривиальное многообразие колец содержит одно из минимальных многообразий: $var\ \mathbb{Z}_p$ или $var\ N_{0,p}$, где p – некоторое простое число [7]. Оказывается, что в минимальных многообразиях все конечных кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Этот факт доказан в следующем предложении.

Предложение 1. *В многообразиях $var\ \mathbb{Z}_p$ и $var\ N_{0,p}$, где p – любое простое число, конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля.*

Доказательство. Пусть R – конечное ненулевое кольцо из многообразия $var\ \mathbb{Z}_p$, где p – некоторое простое число. Тогда $R \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p}_{n}$ для некоторого натурального числа n [9]. Поскольку $R^* \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p^* \times \ldots \times \mathbb{Z}_p^*}_{n}$, то $\Gamma(R)$ содержит ровно $p^n - (p-1)^n - 1$ вершин. Если существует такое конечное кольцо $S \in var\ \mathbb{Z}_p$, $S \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p}_{m}$, $m \in \mathbb{N}$, что $\Gamma(R) = \Gamma(S)$, то $p^n - (p-1)^n - 1 =$ $= p^m - (p-1)^m - 1$. Пусть $n \geq m$. Тогда имеем, что

$$p^m(p^{n-m} - 1) = (p-1)^m \left((p-1)^{n-m} - 1\right).$$

Последнее равенство не верно при $n > m$. Следовательно, $n = m$. Поэтому $R \cong S$.

Пусть теперь R – конечное ненулевое кольцо из многообразия $var\ N_{0,p}$, где p – некоторое простое число. Тогда $R \cong \underbrace{N_{0,p} \oplus \ldots \oplus N_{0,p}}_{n}$ для некоторого натурального числа n. Число вершин в графе $\Gamma(R)$ равно $p^n - 1$. Пусть $S \in var\ N_{0,p}$ – такое конечное кольцо, что $\Gamma(R) = \Gamma(S)$. Для некоторого натурального числа m имеем $S \cong \underbrace{N_{0,p} \oplus \ldots \oplus N_{0,p}}_{m}$. Тогда в графе $\Gamma(S)$ содержится $p^m - 1$ вершин. Так как $\Gamma(R) = \Gamma(S)$, то $p^n - 1 = p^m - 1$, т.е. $m = n$ и $R \cong S$. Предложение доказано.

Замечание. Из доказательства предложения 1 видно, что в многообразиях $var\ \mathbb{Z}_p$ и $var\ N_{0,p}$ конечные кольца однозначно определяются даже порядками своих графов делителей нуля.

Докажем следующее несложное утверждение, которым в дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Тогда справедливы следующие утвержения:*

(1) если $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$, где p – простое число, то $\mathfrak{M}$ не содержит других полей;
(2) либо $x^t \in T(\mathfrak{M})$, где $t > 0$, либо $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа p;
(3) многообразие $\mathfrak{M}$ не содержит локальных колец, не являющихся полями;
(4) $N_{0,p^n} \notin \mathfrak{M}$ при $n \geq 2$ для любого простого числа p.

Доказательство. Утверждение (1) очевидно, поскольку для любых двух полей F_1 и F_2 имеем $\Gamma(F_1) = \emptyset = \Gamma(F_2)$.

Докажем теперь утверждение (2). Рассмотрим приведенно свободное однопорожденное кольцо $F \in \mathfrak{M}$. Пусть N – его верхний ниль-радикал [6, С. 43]. Если $F = N$, то $x^t \in T(\mathfrak{M})$. Если же $F \neq N$, то теореме Андрунакиевича-Рябухина [8, С. 288] имеем $F/N = \sum\limits_{i \in I} \oplus_s R_i$ – подпрямое произведение колец R_i, где R_i – кольцо без делителей нуля для любого i. Поскольку $R_1 \in \mathfrak{M}$, то и его поле частных K тоже содержится в многообразии $\mathfrak{M}$ [6, С. 52]. Если характеристика поля K равна нулю, то $\mathbb{Z} \in \mathfrak{M}$, т.е. $\mathbb{Z}_q \in \mathfrak{M}$ для любого простого числа q; противоречие (см. утверждение (1)). Следовательно, характеристика поля K равна некоторому простому числу p. Из утверждения (1) следует, что $K \cong \mathbb{Z}_p$.

Доказательство утверждения (3) вытекает из того замечания, что для любого конечного локального кольца R радикал Джекобсона $J(R)$ совпадает со множеством делителей нуля кольца R [10, С. 74], т.е. $\Gamma(R) = \Gamma(J(R))$.

Для доказательства утверждения (4) достаточно заметить, что $\Gamma(N_{0,p^n}) = \Gamma(\underbrace{N_{0,p} \oplus \ldots \oplus N_{0,p}}_{n}) = K_{p^n-1}$. Действительно, если $N_{0,p^n} \in \mathfrak{M}$, то и $N_{0,p} \in \mathfrak{M}$, а следовательно, и $\underbrace{N_{0,p} \oplus \ldots \oplus N_{0,p}}_{n} \in \mathfrak{M}$, что противоречит тому, что в многообразии $\mathfrak{M}$ каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля. Предложение доказано.

Предложение 3. *В многообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s}$ каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля.*

Доказательство. Легко видеть, что $T(\mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s}) = \{p_1 \ldots p_s x,\ xy\}^T$. Поэтому для любого конечного кольца $R \in \mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s}$ имеем

$$R \cong \oplus_{i=1}^{s} \left(\underbrace{N_{0,p_i} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_i}}_{n_i} \right),$$

где $n_i \geq 0$ для всех i.

Пусть R и S – конечные кольца из многообразия $\mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s}$, такие, что $\Gamma(R) = \Gamma(S)$. Тогда

$$R \cong \oplus_{i=1}^{s} \left(\underbrace{N_{0,p_i} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_i}}_{n_i} \right), \quad S \cong \oplus_{i=1}^{s} \left(\underbrace{N_{0,p_i} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_i}}_{m_i} \right),$$

где $n_i \geq 0$, $m_i \geq 0$ для всех i, причем $\Gamma(R) = K_{p_1^{n_1} \ldots p_s^{n_s} - 1}$ и $\Gamma(S) = K_{p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s} - 1}$. Отсюда $p_1^{n_1} \ldots p_s^{n_s} - 1 = p_1^{m_1} \ldots p_s^{m_s} - 1$, т.е. $n_1 = m_1, \ldots, n_s = m_s$. Поэтому $R \cong S$. Предложение доказано.

Замечание. В многообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\ldots,p_s}$ так же, как и в многообразиях $var\ \mathbb{Z}_p$ и $var\ N_{0,p}$, конечные кольца однозначно определяются порядками своих графов делителей нуля.

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма, доказанная в работе [11].

Лемма 1 [11, лемма 2]**.** *Пусть R – неразложимое конечное кольцо. Тогда $\Gamma(R) = K_2$ в том и только в том случае, когда R изоморфно одному из следующих колец:*

$$N_{0,3}, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3[x]/(x^2).$$

Следствие. *Пусть R – конечное кольцо. Тогда $\Gamma(R) = K_2$ в том и только в том случае, когда R изоморфно одному из следующих колец:*

$$N_{0,3}, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3[x]/(x^2), \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2.$$

Доказательство. Легко видеть, что если разложимое кольцо R имеет граф делителей нуля, равный графу K_2, то это кольцо изоморфно кольцу $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$. Остальное следует из леммы 1. Следствие доказано.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Предложение 4. *В многообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$, где p – простое число (возможно, совпадающее с одним из чисел p_i), каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля тогда и только тогда, когда $(p_i, p) \neq (3, 2)$ при $i \leq s$.*

Доказательство. Действительно, если в многообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$ каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля, то тогда $N_{0,3} \notin \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$ или $\mathbb{Z}_2 \notin \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$, поскольку $\Gamma(N_{0,3}) = \Gamma(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = K_2$.

Обратно, рассмотрим многообразие $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$, где p – простое число (возможно, совпадающее с одним из чисел p_i) и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ ни при каком значении i. Докажем, что конечные кольца из этого мноогобразия однозначно определяются своими графами делителей нуля. Пусть $R, S \in \mathfrak{M}$ – конечные кольца, такие, что $\Gamma(R) = \Gamma(S)$. Покажем, что $R \cong S$.

Если оба кольца R и S содержатся в подмногообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$, то по предложению 3 эти кольца изоморфны. Эти кольца изоморфны также и в случае, если они оба содержатся в подмногообразии $var\ \mathbb{Z}_p$ (см. предложение 1).

Рассмотрим случай, когда одно из колец, например, кольцо R, содержится в подмногообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$, а второе – кольцо S – содержится в подмногообразии $var\ \mathbb{Z}_p$. Поскольку $S \in var\ \mathbb{Z}_p$, то $S \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_p}_{m}$, $m \in \mathbb{N}$. Заметим, что в кольце R существует по крайней мере одна вершина, смежная со всеми остальными вершинами графа $\Gamma(R)$, или $\Gamma(R) = K_1$. Так как $\Gamma(R) = \Gamma(S)$, то такая вершина существует и в графе $\Gamma(S)$, или и $\Gamma(S) = K_1$. Однако $\Gamma(S) \neq K_1$. Кроме того, легко видеть, что в $\Gamma(S)$ существует вершина, смежная со всеми остальными, только в том случае, когда $S \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, т.е. $\Gamma(S) = K_2$. По следствию леммы 1 имеем $R \cong N_{0,3}$. Таким образом, $(p_i, p) = (3, 2)$ для некоторого числа $i \leq s$. Противоречие. Следовательно, этот случай невозможен.

Рассмотрим, далее, общий случай.

Заметим, что если $p_i \neq p$ для всех $i \leq s$, то многообразие $\mathfrak{M}$ имеет следующий идеал тождеств:

$$T(\mathfrak{M}) = \{p_1p_2\dots p_s px, [x,y], x(y-y^p), p_1p_2\dots p_s(x-x^p), pxy\}^T.$$

Действительно, пусть

$$\mathfrak{N} = var\,\langle p_1p_2\dots p_s px = 0, [x,y] = x(y-y^p) = 0, p_1p_2\dots p_s(x-x^p) = 0, pxy = 0\rangle\,.$$

Тогда, очевидно, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Докажем обратное включение. Пусть A – кольцо из многообразия $\mathfrak{N}$. Тогда $A = A_1\oplus\dots\oplus A_s\oplus B$, где $p_iA_i = (0)$, $A_i \triangleleft A$, $i \leq s$, и $B \triangleleft A$, $pB = (0)$. Поскольку $p_i \neq p$, $i \leq s$, то ввиду тождества $pxy = 0$ получаем, что $A_1^2 = (0), \dots, A_s^2 = (0)$, т.е. $A_i \in var\; N_{0,p_i}$, $i \leq s$, и $A_1\oplus\dots\oplus A_s \in \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$. Ввиду тождества $p_1p_2\dots p_s(x-x^p) = 0$ получаем, что идеал B кольца A удовлетворяет тождеству $x-x^p = 0$, т.е. $B \in var\;\mathbb{Z}_p$. Таким образом, $A = C\oplus B$, где $B \in var\;\mathbb{Z}_p$ и $C = A_1\oplus\dots\oplus A_s \in \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$. В частности, $A \in \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$.

Если же некоторое простое число p_i совпадает с числом p, то идеал тождеств многообразия $\mathfrak{M}$ равен $T(\mathfrak{M}) = \{p_1p_2\dots p_s x, [x,y], x(y-y^p), pxy\}^T$. Действительно, пусть $\mathfrak{N} = var\,\langle p_1p_2\dots p_s x, [x,y], x(y-y^p), pxy\rangle$. Тогда $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$. Для доказательства обратного включения рассмотрим произвольное конечное кольцо $A \in \mathfrak{N}$. Тогда $A = A_1\oplus\dots\oplus A_s$, где $p_iA_i = (0)$, $A_i \triangleleft A$, $i \leq s$. Если $p_j \neq p$, то в силу тождества $pxy = 0$ получаем, что $A_j^2 = (0)$, т.е. $A_j \in var\; N_{0,p_j}$. Если $p_i = p$, то кольцо A_i удовлетворяет тождествам $px = 0$, $[x,y] = 0$, $x(y-y^p) = 0$. Известно, что конечное кольцо A_i либо является нильпотентным, либо содержит ненулевой идемпотент [10, С. 31]. Если $A_i^N = (0)$ для некоторого числа $N \geq 2$, то в силу тождества $xy = xy^p$, получаем, что $A_i^2 = (0)$, т.е. $A_i \in var\; N_{0,p_i}$. Пусть A_i – ненильпотентное кольцо и e – его ненулевой идемпотент. Тогда $A_i = eA_i \oplus (1-e)A_i$, где $(1-e)A_i = \{r - er;\; r \in A_i\}$. В кольце eA_i идемпотент e является единицей. Поэтому eA_i удовлетворяет тождеству $x = x^p$, т.е. $eA_i \in var\;\mathbb{Z}_p$. Рассуждая аналогичным образом относительно идеала $(1-e)A_i$, получим, что кольцо A_i раскладывается в прямую сумму идеалов, каждый из которых принадлежит либо многообразию $var\; N_{0,p}$, либо многообразию $var\;\mathbb{Z}_p$. В частности, $A \in \mathfrak{M}$. Поскольку многообразие $\mathfrak{N}$ является кроссовым, то $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, т.е. $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

Выше приведенные рассуждения показывают, что произвольное конечное кольцо из многообразия $\mathfrak{M} = \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s} \vee var\;\mathbb{Z}_p$ раскладывается в прямую сумму идеалов, каждый из которых принадлежит либо многообразию $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$, либо многообразию $var\;\mathbb{Z}_p$. Пусть R и S – конечные кольца из многообразия $\mathfrak{M}$. Можно считать в силу предыдущего рассуждения, что одно из этих колец, например R, не содержится ни в многообразии $\mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$, ни в многообразии $var\;\mathbb{Z}_p$. Поэтому $R \cong R_1 \oplus R_2$ и $S \cong S_1 \oplus S_2$, где $R_1, S_1 \in \mathfrak{L}_{p_1,\dots,p_s}$, $R_2, S_2 \in var\;\mathbb{Z}_p$, причем ни одно из колец R_1, R_2 не является нулевым. Значит,

$$R_2 \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p}_{m}, \quad S_2 \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p}_{n},$$

где $m \geq 1, n \geq 0$. Наконец,

$$R_1 \cong \left(\oplus_{i=1}^{r_1} N_{p_1}\right) \oplus \dots \oplus \left(\oplus_{i=1}^{r_s} N_{p_s}\right), \quad S_1 \cong \left(\oplus_{i=1}^{t_1} N_{p_1}\right) \oplus \dots \oplus \left(\oplus_{i=1}^{t_s} N_{p_s}\right).$$

Заметим, что все ненулевые элементы кольца R являются вершинами графа $\Gamma(R)$. Выберем в $\Gamma(R)$ вершины, которые смежны со всеми вершинами графа $\Gamma(R)$. В это множество попадут все элементы подкольца R_1 и только они.

Множество таких вершин образуют полный подграф $K_{p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}-1}$ графа $\Gamma(R)$. Аналогично выберем вершины в графе $\Gamma(S)$, которые смежны со всеми вершинами графа $\Gamma(S)$. Это множество образует полный подграф $K_{p_1^{t_1}\dots p_s^{t_s}-1}$ графа $\Gamma(S)$. Поскольку $\Gamma(R) = \Gamma(S)$, то $p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s} - 1 = p_1^{t_1}\dots p_s^{t_s} - 1$. Отсюда $r_1 = t_1, \dots, r_s = t_s$, т.е. $R_1 \cong S_1$. Количество вершин графа $\Gamma(R)$, не попавших в подграф $K_{p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}-1}$, равно количеству вершин графа $\Gamma(S)$, не попавших в подграф $K_{p_1^{t_1}\dots p_s^{t_s}-1}$, т.е. $p_1^{r_1}\dots p_s^{r_s}(p^m-1) = p_1^{t_1}\dots p_s^{t_s}(p^n-1)$. Отсюда $m=n$, т.е. $R_2 \cong S_2$. Таким образом, $R \cong S$. Предложение доказано.

Следующее предложение дает нам примеры неизоморфных колец, графы делителей нуля которых имеют одинаковое строение.

Предложение 5. *Для любого простого числа p выполняется*

$$\Gamma\left(N_{p^2}\right) = \Gamma\left(N_{p,p}\right) = \Gamma\left(A_p\right) = \Gamma\left(A_p^0\right) = \Gamma\left(N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p\right).$$

Доказательство. Напомним, что $N_{p^2} = \langle a \rangle, a^2 = pa, p^2a = 0$. Кольцо N_{p^2} является нильпотентным и имеет порядок p^2, поэтому в графе $\Gamma\left(N_{p^2}\right)$ точно p^2-1 вершин. Граф $\Gamma\left(N_{p^2}\right)$ содержит в качестве подграфа граф K_{p-1}, который образован вершинами λpa, где λ – число, взаимно простое с p. Любая другая из оставшихся $p(p-1)$ вершин графа $\Gamma\left(N_{p^2}\right)$ смежна со всеми вершинами подграфа K_{p-1} и только с ними.

Точно такое же строение имеют графы делителей нуля остальных колец. Действительно, множество матриц вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbb{Z}_p^*$, образуют в графе $\Gamma(A_p)$ подграф K_{p-1}. Любая другая вершина графа $\Gamma(A_p)$ смежна со всеми матрицами вида $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbb{Z}_p^*$, и только с ними. Аналогично рассматривается граф $\Gamma(A_p^0)$.

Рассмотрим, далее, кольцо $N_{p,p} = \langle c \rangle \dotplus \langle d \rangle$, где $pc = pd = 0$, $c^2 = d$, $cd = dc = d^2 = 0$. Вершины μd, где $\mu \in \mathbb{Z}_p^*$, образуют полный граф K_{p-1}. Остальные вершины графа $\Gamma(N_{p,p})$ смежны со всеми этими вершинами и только с ними.

Наконец, в графе делителей нуля кольца $N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p$ подграф K_{p-1} образуют вершины $(b, \overline{0})$, где $b \in N_{0,p} \setminus \{0\}$. Остальные вершины попарно между собой не смежны, зато смежны с каждой из вершин подграфа K_{p-1}. Предложение доказано.

Из последнего предложения легко получаем ряд следствий для многообразий, в которых все конечные кольца однозначно определены своими графами делителей нуля.

Следствие 1. *Если в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то $A_p, A_p^0 \notin \mathfrak{M}$ для любого простого числа p.*

Доказательство. Кольцо A_p содержит подкольца S_1 и S_2, такие, что $S_1 \cong \mathbb{Z}_p$ и $S_2 \cong N_{0,p}$. Если $A_p \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа p, то $N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$. По предложению 5 имеем $\Gamma(A_p) = \Gamma(N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p)$. Получили противоречие с тем, что в многообразии $\mathfrak{M}$ всякое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля. Значит, $A_p \notin \mathfrak{M}$ для любого простого числа p. Аналогично доказывается, что $A_p^0 \notin \mathfrak{M}$ для всех простых чисел p. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, причем $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа p, то $N_{p,p} \notin \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Предположим, что $N_{p,p} \in \mathfrak{M}$. Поскольку $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ и кольцо $N_{p,p}$ содержит подкольцо, изоморфное кольцу $N_{0,p}$, то $N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$. По предложению 5 имеем $\Gamma(N_{p,p}) = \Gamma(N_{0,p} \oplus \mathbb{Z}_p)$. Получили противоречие с тем, что в многообразии $\mathfrak{M}$ любое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля. Следовательно, $N_{p,p} \notin \mathfrak{M}$. Следствие доказано.

Следствие 3. *Если в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то $N_{q^2} \notin \mathfrak{M}$ для любого нечетного простого числа q.*

Доказательство. Нетрудно показать, что $T(N_{q^2}) = \{xyz, q^2x, qxy, [x,y]\}^T$ при $q \geq 3$. Заметим, что $N_{q,q} \in var\ N_{q^2}$ при $q \geq 3$. Предположим, что $N_{q^2} \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа $q \geq 3$. Тогда $N_{q,q} \in var\ N_{q^2} \subseteq \mathfrak{M}$. По предложению 5 $\Gamma(N_{q,q}) = \Gamma(N_{q^2})$. Получили противоречие с условием, что все конечные кольца из многообразия $\mathfrak{M}$ однозначно определяются своими графами делителей нуля. Следствие доказано.

Замечание. Заметим, что $T(N_4) = \{xyz, 4x, 2xy, 2x+x^2\}^T$ и $N_{2,2} \notin var\ N_4$, поскольку в кольце $N_{2,2}$ не выполняется тождество $2x + x^2 = 0$.

Предложение 6. *Если в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, причем $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа p, то справедливы следующие утверждения:*

(1) порядок любого конечного ненильпотентного подпрямо неразложимого кольца $R \in \mathfrak{M}$ равен p^t для некоторого натурального числа t;

(2) в $T(\mathfrak{M})$ содержится многочлен вида

$$\alpha(xy + \delta yx) + f(x,y),$$

где $\delta \in \{0,1\}$, число α является взаимно простым с числом p и $f(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (1). Заметим, что по предложению 2 (1) для любого простого числа q, отличного от числа p, выполняется $\mathbb{Z}_q \notin \mathfrak{M}$. Пусть R – конечное ненильпотентное подпрямо неразложимое кольцо из многообразия $\mathfrak{M}$, причем $|R| = q^t$, где q – простое число, не равное числу p, и $t > 0$. Если $J(R) = (0)$, по теореме Веддерберна – Артина имеем $R \cong \oplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(GF(q^{s_i}))$ [10, С. 80]. Поскольку $\mathbb{Z}_q \notin \mathfrak{M}$, то $R = (0)$; противоречие. Пусть теперь $J(R) \neq (0)$. Тогда $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(GF(q^{s_i}))$ [10, С. 74, 80]. Поскольку $\mathbb{Z}_q \notin \mathfrak{M}$, то $R/J(R) = (0)$, т.е. $R = J(R)$. Снова приходим к противоречию. Таким образом, $|R| = p^t$.

Докажем теперь (2). Нетрудно проверить, что $T(N_{p,p}) = \{px,\ [x,y],\ xyz\}^T$. По следствию 2 предложения 5 имеем $N_{p,p} \notin \mathfrak{M}$. Следовательно, существует многочлен $f(x_1,\ldots,x_d) \in T(\mathfrak{M})$, такой, что $f(x_1,\ldots,x_d) \notin T(N_{p,p})$. Можно считать, что многочлен $f(x_1,\ldots,x_d)$ существенно зависит от переменных $x_1,\ldots,x_d$. Если $d \geq 3$, то $f(x_1,\ldots,x_d) \in T(N_{p,p})$; противоречие. Значит, $d = 1$ или $d = 2$. Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно.

Пусть $d = 1$. Тогда $f(x) = \alpha x + \beta x^2 + x^3 g(x)$, где $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Если α и β делятся на p, то $f(x) \in T(N_{p,p})$; противоречие. Следовательно, одно из чисел α, β взаимно просто с числом p. Если $(\alpha, p) = 1$, то, домножив многочлен $f(x)$ справа на y, мы получим, что в $T(\mathfrak{M})$ содержится многочлен вида $\alpha xy + h(x,y)$, где $h(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Пусть α делится на число p. Тогда $(\beta, p) = 1$. Линеаризовав тождество $f(x) = 0$, получим, что $\beta(xy + yx) + h(x,y) \in T(\mathfrak{M})$, где $h(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2.

Рассмотрим теперь случай, когда $d = 2$. Можно считать, что многочлен $f(x,y)$ имеет следующий вид: $f(x,y) = \alpha xy + \beta[x,y] + g(x,y)$, где $g(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Если α делится на p, то $f(x,y) \in T(N_{p,p})$; противоречие. Следовательно, $(\alpha, p) = 1$. Сделав в тождестве $f(x,y) = 0$ замену $y = x$, получим, что $\alpha x^2 + x^3 g_1(x) \in T(\mathfrak{M})$. Линеаризовав последний многочлен, получим, что $\alpha(xy + yx) + h(x,y) \in T(\mathfrak{M})$, где $h(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Предложение доказано.

3. Доказательство основного результата

Теперь мы можем приступить к доказательству основного результата работы.

Теорема. *Пусть в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, причем $\mathbb{Z}_p \in \mathfrak{M}$ для некоторого простого числа p. Тогда для любого конечного подпрямо неразложимого кольца $R \in \mathfrak{M}$ выполняется одно из следующих условий:*
(1) $R \cong \mathbb{Z}_p$;
(2) $R = J(R)$.

Доказательство. Пусть $R \in \mathfrak{M}$ – конечное подпрямо неразложимое ненильпотентное кольцо. По предложению 6 (1) имеем $|R| = p^t$, где $t > 0$. Пусть сначала $J(R) = (0)$. Тогда по теореме Веддерберна – Артина имеем $R \cong \oplus_{i=1}^{N} M_{n_i}(GF(p^{s_i}))$ [10, С. 80]. В силу неразложимости кольца R заключаем, что $R \cong M_n(GF(p^s))$. По следствию 1 предложения 5 $A_p \notin \mathfrak{M}$. Поэтому $R \cong GF(p^s)$. Из предложения 2 (1) следует, что $R \cong \mathbb{Z}_p$.

Пусть теперь $(0) \neq J(R) \neq R$. Тогда $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^{k} M_{n_i}(GF(p^{s_i}))$ [10, С. 74, 80]. Аналогично тому, как это было сделано выше, можно показать, что $R/J(R) \cong \oplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}_p$. По предложению 6 (2) кольцо R удовлетворяет тождеству вида $\alpha(xy+\delta yx)+f(x,y)=0$, где $\delta\in\{0,1\}$, число α является взаимно простым с числом p и $f(x,y)$ – многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Поскольку $(\alpha,p)=1$, то по лемме о наибольшем общем делителе найдутся $u,v\in\mathbb{Z}$, такие, что $\alpha u+p^tv=1$. Поскольку $p^tR=(0)$, то

$$0=u\Big(\alpha(xy+\delta yx)+f(x,y)\Big)+p^tv(xy+\delta yx)=xy+\delta yx+g(x,y),$$

где $g(x,y)=uf(x,y)$. Обозначим $h(x,y)=xy+\delta yx+g(x,y)$.

Пусть $e_1,...,e_k$ – система ортогональных идемпотентов, такая, что образ элемента $e=e_1+\ldots+e_k$ является единицей в фактор-кольце $R/J(R)$. Покажем, что для любого $i\in\{1,2,\ldots,k\}$ правый идеал $e_iJ(R)$ является двусторонним идеалом кольца R. Пусть $J(R)^N=0$. Тогда из тождества $h(x,y)=0$ следует, что

$$J(R)(e_iJ(R))\subseteq\delta e_iJ(R)^2+e_iJ(R)^3+J(R)e_iJ(R)^2+J(R)^2e_iJ(R)\subseteq\ldots\subseteq$$
$$\subseteq e_iJ(R)+J(R)^N=e_iJ(R).$$

Итак, $J(R)e_iJ(R)\subseteq e_iJ(R)$. Пусть, далее, $s\notin J(R)$. Тогда $s=\sum_{j=1}^k\alpha_je_j+q$, где $q\in J(R)$, $0\neq\alpha_j\notin J(R), j=1,...,k$. Учитывая, что $e_je_i=0$ при $i\neq j$, имеем $se_iJ(R)==\alpha_ie_iJ(R)+qe_iJ(R)$. Поскольку $J(R)e_iJ(R)\subseteq e_iJ(R)$, то $qe_iJ(R)\subseteq e_iJ(R)$. Далее, $q_i=\alpha_ie_i-e_i\alpha_i\in J(R), e_i^2=e_i, i=\overline{1,k}$. Поэтому

$$\alpha_ie_iJ(R)=(\alpha_ie_i)e_iJ(R)=(q_i+e_i\alpha_i)e_iJ(R)\subseteq J(R)e_iJ(R)+e_iJ(R)\subseteq e_iJ(R).$$

Следовательно, $se_iJ(R)=\alpha_ie_iJ(R)+qe_iJ(R)\subseteq e_iJ(R)$. Тем самым доказано, что $e_iJ(R)\lhd R, i=\overline{1,k}$. Аналогично доказывается, что правые идеалы $(1-e_i)J(R)=\{b-e_ib|b\in J(R)\}$, $J(R)(1-e_i)=\{b-be_i|b\in J(R)\}$ и $J(R)e_i$, где $i=\overline{1,k}$, являются двусторонними идеалами кольца R.

Поскольку $R\neq J(R)$, то, по крайней мере, один из идемпотентов e_i не равен нулю. Не нарушая общности, мы можем положить, что $e_1\neq0$.

Предположим, что $e_1J(R)=(0)$. Докажем, что в этом случае $J(R)e_1\neq(0)$. Предположим противное: $J(R)e_1=(0)$. Рассмотрим идеал $I=Re_1R$. Поскольку $e_1\neq0$, то $I\neq(0)$. Покажем, что $I\cap J(R)=(0)$. Пусть элемент $q=\sum\limits_i x_ie_1y_i\in I\cap J(R)$. Мы можем записать $x_i=\sum\limits_j\alpha_{ij}e_j+q_i$, $y_i=\sum\limits_l\beta_{il}e_l+q_i'$, где $q_i,q_i'\in J(R)$, $\beta_{il}e_l-e_l\beta_{il}=q_{il}'\in J(R)$, $\alpha_{ij}\notin J(R)\setminus\{0\}$, $\beta_{il}\notin J(R)\setminus\{0\}$ для всех i,j,l. Тогда имеем

$$q=\sum_i\left((\sum_j\alpha_{ij}e_j+q_i)e_1(\sum_l\beta_{il}e_l+q_i')\right)=\sum_{i,j,l}\alpha_{ij}e_je_1\beta_{il}e_l=$$
$$=\sum_{i,l}\alpha_{i1}e_1e_1(e_l\beta_{il}+q_{il}')=\sum_i\alpha_{i1}e_1\beta_{i1}.$$

Далее,

$$q=\sum_i\alpha_{i1}e_1e_1\beta_{i1}=\sum_i\alpha_{i1}e_1(\beta_{i1}e_1+q_{i1}')=(\sum_i\alpha_{i1}e_1\beta_{i1})e_1.$$

Итак, видим, что $q=qe_1=0$. Следовательно, $I\cap J(R)=(0)$, причем $J(R)\neq(0)$ и $I\neq(0)$. Получили противоречие с тем, что кольцо R подпрямо неразложимо. Поэтому $J(R)e_1\neq(0)$. Так как $J(R)(1-e_1)$ – идеал кольца R и $J(R)e_1\cap J(R)(1-e_1)=(0)$, то $J(R)(1-e_1)=0$. Отсюда следует, что $J(R)==J(R)e_1$. Значит, $J(R)^2=J(R)e_1J(R)=(0)$. По предложению 2 (4) имеем $J(R)\cong N_{0,p}$. Поэтому $pJ(R)=(0)$. Однако $pe_1=pe_1^2=e_1(pe_1)\in e_1J(R)=(0)$, т.е. $pe_1 = 0$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $u \in J(R)$. Тогда подкольцо, порожденное элементами u и e_1, изоморфно кольцу A_p^0, т.е. $A_p^0 \in \mathfrak{M}$, что по следствию 1 предложения 5 невозможно. Значит, $e_1 J(R) \neq (0)$. Аналогично доказывается, что $J(R)e_1 \neq (0)$.

Докажем теперь, что $e_i = 0$ при $i \geq 2$. Предположим противное: $e_2 \neq 0$. Так как $e_1 J(R) \cap e_2 J(R) = (0)$ и $J(R)e_1 \cap J(R)e_2 = (0)$, то в силу того, что кольцо R подпрямо неразложимо и $e_1 J(R) \neq (0)$, $J(R)e_1 \neq (0)$, имеем $e_2 J(R) = (0)$ и $J(R)e_2 = (0)$. Аналогично тому, как это было сделано выше для идемпотента e_1, можно показать, что равенства $e_2 J(R) = (0)$ и $J(R)e_2 = (0)$ одновременно выполняется не могут. Значит, $e_2 = \ldots = e_k = 0$, $k = 1$ и $R/J(R) \cong \mathbb{Z}_p$. Поэтому любой элемент a из кольца R может быть записан таким образом: $a = e_1\alpha + q = \beta e_1 + q'$, где $q, q' \in J(R), \alpha, \beta \notin J(R) \setminus \{0\}$. Значит, $e_1 a = e_1\alpha + q = a$ и $ae_1 = \beta e_1 + q' = a$. Итак, e_1 – единица кольца R, т.е. R – локальное кольцо, причем $J(R) \neq (0)$. Получили противоречие, поскольку в многообразии $\mathfrak{M}$ по предложению 2 (3) не может содержаться локальное кольцо, не являющееся полем. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Akbari S., Mohammadian A. *On the zero-divisor graph of a commutative ring* , Journal of Algebra, **274** (2004), 847–855. MR 2043378

[2] Akbari S., Mohammadian A. *On zero-divisor graphs of finite rings*, Journal of Algebra, **314** (2007), 168–184. MR 2331757

[3] Anderson D.F., Livingston P.S. *The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring*, Journal of Algebra, **217** (1999), 434–447. MR 1700509

[4] Beck I. *Coloring of Commutative Rings*, Journal of Algebra, **116** (1988), 208–226. MR 0944156

[5] Redmond S.P. *The zero-divisor graph of a noncommutative ring*, Int. J.Commut. rings **1(4)** (2002), 203–211. MR 2084907

[6] Rowen L.H. *Polynomial Identities in Ring Theory*, Academic Press, 1980. MR 0576061

[7] Tarski A. *Equationally complete rings and relation algebras*, Indag. Math., **18** (1956), 39–46. MR 0082961

[8] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. *Радикалы алгебр и структурная теория*, Наука, Москва, 1979. MR 0548864

[9] Джекобсон Н. *Строение колец*, Изд-во иностр. литературы, Москва, 1961. MR 0081264

[10] Елизаров В.П. *Конечные кольца*, Гелиос АРВ, Москва, 2006.

[11] Кузьмина А.С. *Описание конечных ненильпотентных колец, имеющих планарные графы делителей нуля*, Дискретная математика, **4** (2009), 60–75. MR 2641018

[12] Львов И.В. *О многообразия ассоциативных колец I*, Алгебра и логика, **12(3)** (1973), 269–297. MR 0389973

Анна Сергеевна Кузьмина
Алтайская государственная педагогическая академия,
ул. Молодежная 55,
656031, Барнаул, Россия
E-mail address: akuzmina1@yandex.ru