S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 19–38 (2011) УДК 517.958:533.7

MSC 35B06, 35Q35

ОПТИМАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПОДАЛГЕБР, ДОПУСКАЕМЫХ УРАВНЕНИЯМИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ В СЛУЧАЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ С РАЗДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Е. В. МАКАРЕВИЧ

Abstract. We consider the gas dynamics equations with the state equation of separated density. The optimal system of subalgebras for a 12-dimensional Lie algebra admitted by the gas dynamics equations is given. We use the decomposition of a 12-dimensional Lie algebra to the semidirect sum of a 6-dimensional Abelian ideal and a 6-dimensional subalgebra to construct the optimal system. On the first step we construct the optimal system of projections on 6 dimensional subalgebra. Then the projections are complemented with elements from Abelian ideal. We propose the compact notation of the optimal system of subalgebras for 12-dimensional Lie algebra which is constructed with the help of the optimal system for 6-dimensional subalgebra.

Keywords: optimal system of subalgebras, gas dynamics equations, state equation of the separated density.

1. Введение

Рассмотрим модель газовой динамики

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad Dp + A\nabla\cdot\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ – полная производная, $\vec{u}$ – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, ∇ – градиент, $A = \rho c^2$, c^2 – квадрат скорости звука. Для уравнения состояния $p = f(\rho, S)$ имеем $c^2 = f_\rho$, где S – энтропия [1]. Мы

Makarevich, E.V., Optimal system of subalgebras admitted by the gas dynamics equations in case of state equation with separated density.

Работа поддержана РФФИ Поволжье (грант 11-01-97018), НШ-4368.2010.1.

Поступила 22 декабря 2010 г., опубликована 16 января 2011 г.

рассматриваем уравнение состояния с разделенной плотностью $\rho = h(p)k(S)$. Тогда $A = h(p)k(S)(k(S)h'(p))^{-1} = h(p)(h'(p))^{-1} = A(p)$.

Система уравнений (1) в случае уравнения состояния с разделенной плотностью допускает алгебру Ли операторов L_{12}, со следующим базисом в декартовой системе координат:

$$
\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u,\\
&X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \quad X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,\\
&X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \quad X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,\\
&X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\\
&X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Оператор X_{12} допускается для системы (1) с коэффициентом A, нелинейно зависящим от p. Заметим, что функция $A = \gamma p$ отвечает политропному газу, оптимальная система в этом случае приведена в [2], [3]. Структура алгебры L_{12} определяется ее подалгебрами. Подалгебр различной размерности бесконечно много, поэтому их перечисляют с точностью до подобия относительно внутренних автоморфизмов – оптимальная система подалгебр (ОС). По каждой подалгебре можно построить групповое решение (1), которое должно быть действительным. Поэтому важно строить оптимальную систему подалгебр над полем действительных чисел. Подобие подалгебр определяется линейными преобразованиями векторного пространства L_{12}, которые сохраняют таблицу коммутаторов. Конструктивно такие линейные преобразования вычисляются только для внутренних автоморфизмов. Внутренние автоморфизмы вычисляются путем решения дифференциальных уравнений $\partial_{a_k} X' = [X', X_k]$, $X'|_{a_k=0} = X$, $X \in L_{12}$, где X_k, $k = 1, ..., 12$ – базисные операторы. С помощью таблицы 1 коммутаторов [4] каждое из этих уравнений можно представить в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений для координат оператора X'.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1								-3	2		1	
2							3		-1		2	
3							-2	1			3	
4								-6	5	-1		-4
5							6		-4	-2		-5
6							-5	4		-3		-6
7		-3	2		-6	5		-9	8			
8	3		-1	6		-4	9		-7			
9	-2	1		-5	4		-8	7				
10				1	2	3					10	10
11	-1	-2	-3							-10		
12				4	5	6				-10		

В этой таблице пустые клетки означают, что соответствующий коммутатор равен нулю, а вместо операторов X_i пишутся их номера i. Произвольный оператор из L_{12} записывается в виде $X = x^1 X_1 + ... + x^{12} X_{12}$. Внутренние автоморфизмы вычислены в работе [4] и действуют на координаты $x = (x^1, ..., x^{12})$

по правилу:

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&T: p_1(x') = p_1(x) + x^{11}\alpha_1 + p_3(x) \times \alpha_1;\\
&\Gamma: p_1(x') = p_1(x) - x^{10}\alpha_2, \quad p_2(x') = p_2(x) - x^{12}\alpha_2 + p_3(x) \times \alpha_2;\\
&S: p_1(x') = Sp_1(x), \quad p_2(x') = Sp_2(x), \quad p_3(x') = Sp_3(x);\\
&A_{10}: p_1(x') = p_1(x) + a_{10}p_2(x), \quad x^{10'} = x^{10} + a_{10}(x^{11} + x^{12});\\
&A_{11}: p_1(x') = a_{11}p_1(x), \quad x^{10'} = a_{11}x^{10};\\
&A_{12}: p_2(x') = a_{12}p_2(x), \quad x^{10'} = a_{12}^{-1}x^{10};\\
&\varepsilon_1: p_1(x') = -p_1(x), \quad p_2(x') = -p_2(x);\\
&\varepsilon_2: p_2(x') = -p_2(x), \quad x^{10'} = -x^{10};
\end{aligned}
$$

где $p_1(x) = (x^1, x^2, x^3)$, $p_2(x) = (x^4, x^5, x^6)$, $p_3(x) = (x^7, x^8, x^9)$ – проекции координатного вектора x на соответствующие подпространства, $\alpha_1 = (a_1, a_2, a_3), \alpha_2 = (a_4, a_5, a_6)$, a_i – групповые параметры $i = 1, ..., 12$, S – произвольное трехмерное вращение. Дискретные преобразования $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ получены нерегулярным образом.

В настоящей работе используется разложение исходной алгебры Ли L_{12} в полупрямую сумму абелева идеала J_6 и подалгебры $L_6 : L_{12} = J_6\dot{\oplus}L_6, J_6 = \{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6\}, L_6 = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$. На первом этапе перечисления всех подалгебр в L_{12} рассматриваются их проекции на подалгебру L_6. Все проекции сводятся в оптимальную систему подалгебр алгебры L_6 [5]. На втором этапе для каждой проекции из L_6 с помощью внутренних автоморфизмов, действующих в абелевом идеале J_6, и заменой базиса, проекция на J_6 приводится к наиболее простому виду. Для каждой подалгебры вычисляется нормализатор. Среди подобных подалгебр выбирается та, нормализатор которой входит в оптимальную систему. Полученная оптимальная система – таблица из 315 строк, записывается в компактном виде (137 строк) с помощью оптимальной системы L_6.

Алгебра L_{12} является идеалом для алгебры L_{13} из работы [2]. В [2] при построении оптимальной системы подалгебр алгебра L_{13} разлагалась на идеал L_{11} из работы [1] и абелеву двумерную подалгебру L_2. Это было сделано, чтобы максимально задействовать оптимальную систему из работы [1]. Этот путь неестественный, так как используется оптимальная система идеала, и приходится перебирать все возможные пары подалгебр из оптимальных систем алгебр L_{11} и L_2. Оптимальную систему L_{12} можно извлечь из оптимальной системы L_{13}, произведя некоторую работу. В нашей работе мы идем естественным путем.

2. Оптимальная система подалгебр L_6

Из таблицы коммутаторов следует, что алгебра L_{12} разлагается в полупрямую сумму идеала L_{11} и подалгебры $\{X_{12}\}$. Для L_{11} уже построена оптимальная система подалгебр [1], поэтому в работе рассматриваются только те подалгебры L_{12}, у которых проекция на $\{X_{12}\}$ не равна нулю. Имеем разложение $L_{12} = J_6\dot{\oplus}L_6$, где J_6 – абелев идеал, $L_6 = \{X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$ – подалгебра. Оптимальная система проекций на L_6 строится на основе разложения в прямую сумму $L_6 = \{X_7, X_8, X_9\} \oplus \big(\{X_{10}\}\dot{\oplus}\{X_{11}, X_{12}\}\big)$. Используются автоморфизмы $S, A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2$, действующие в L_6. Обозначим $J_3 =$

$\{X_7, X_8, X_9\}, \tilde{J}_3 = \{X_{10}\}\dot{\oplus}\{X_{11}, X_{12}\}, N_2 = \{X_{11}, X_{12}\}$, где J_3 и $\tilde{J}_3$ – идеалы в L_6, $\{X_{10}\}$ – идеал в $\tilde{J}_3$, $\{X_{11}, X_{12}\}$ – абелева подалгебра в J_3.

Перечислим все подалгебры из N_2, содержащие X_{12}.

Одномерные подалгебры – это линейная комбинация операторов X_{11} и X_{12}. Получим семейство подалгебр $\{aX_{11} + X_{12}\}$, инвариантное относительно внутренних автоморфизмов. Двумерная подалгебра в N_2 это $\{X_{11}, X_{12}\}$.

Запишем подалгебры из $\tilde{J}_3$, содержащие X_{12}.

Общий вид одномерной подалгебры таков $\{bX_{10}+aX_{11}+X_{12}\}$. С учетом действия $A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2$ в $\tilde{J}_3$ возможны три неподобные одномерные подалгебры: 1) $\{aX_{11} + X_{12}\}, a \neq -1$; 2) $\{-X_{11} + X_{12}\}$; 3) $\{X_{10} - X_{11} + X_{12}\}$. Двумерные подалгебры получаются при добавлении X_{10} к подалгебрам из N_2. С учетом уравнений подалгебры и действия $A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2$ в $\tilde{J}_3$ неподобные двумерные подалгебры принимают вид: 1) $\{aX_{11} + X_{12}, X_{10}\}$; 2) $\{X_{11}, X_{12}\}$. Трехмерная подалгебра это $\{X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$.

Перечислим все подалгебры из J_3.

Нульмерная подалгебра. Любая одномерная подалгебра с помощью вращения S подобна $\{X_7\}$. Любое двумерное подпространство S-подобно $\{X_7, X_8\}$. Для этого множества не выполняется условие подалгебры, так как $[X_7, X_8] = X_9$ – не является линейной комбинацией X_7 и X_8, следовательно двумерных подалгебр нет. Трехмерная подалгебра это $\{X_7, X_8, X_9\}$.

Перечислим все подалгебры из L_6, содержащие X_{12}.

Одномерные подалгебры бывают двух типов: с нулевой проекцией на J_3 и с ненулевой проекцией на J_3. Так как автоморфизмы распадаются на действующие в $J_3(S)$ и в $\tilde{J}_3(A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2)$, то с учетом уравнений подалгебры получим следующие неподобные одномерные подалгебры: 1) $\{bX_{11} + X_{12}\}, b \neq -1$; 2) $\{-X_{11} + X_{12}\}$; 3) $\{X_{10} - X_{11} + X_{12}\}$; 4) $\{aX_7 + bX_{11} + X_{12}\}, b \neq -1, a \neq 0$; 5) $\{aX_7 - X_{11} + X_{12}\}, a \neq 0$; 6) $\{aX_7 + X_{10} - X_{11} + X_{12}\}, a \neq 0$.

Двумерные подалгебры также бывают двух типов: с нулевой и с ненулевой проекцией на J_3. С учетом уравнений подалгебры и действия $S, A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2$ в L_6 возможны семь неподобных подалгебр: 1) $\{aX_{11}+X_{12}, X_{10}\}$; 2) $\{X_{11}, X_{12}\}$; 3) $\{X_7 + aX_{11} + bX_{12}, X_{10}\}, b \neq 0$; 4) $\{X_7 + aX_{10}, bX_{10} - X_{11} + X_{12}\}, a^2 + b^2 = 1$; 5) $\{X_7 + aX_{11}, bX_{11} + X_{12}\}, a^2 + (b + 1)^2 \neq 0$; 6) $\{X_7 + aX_{12}, X_{11}\}, a \neq 0$; 7) $\{X_7, -X_{11} + X_{12}\}$.

Трехмерные подалгебры с учетом уравнений подалгебры и действия автоморфизмов $S, A_{10}, A_{11}, A_{12}, \varepsilon_2$ в L_6 примут вид: 1) $\{X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$; 2) $\{X_7 + aX_{11}, X_{10}, bX_{11} + X_{12}\}$; 3) $\{X_7 + aX_{12}, X_{10}, X_{11}\}, a \neq 0$; 4) $\{X_7, X_{11}, X_{12}\}$.

Четырехмерные подалгебры получаются путем объединения трехмерных подалгебр из $\tilde{J}_3$ и одномерных из J_3 или путем объединения одномерных из $\tilde{J}_3$ и трехмерных из J_3, так как в J_3 нет двумерных. С учетом уравнений подалгебры и действия автоморфизмов возможны всего четыре неподобные 4-х мерные подалгебры: 1) $\{X_7, X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$; 2) $\{X_7, X_8, X_9, X_{10} - X_{11} + X_{12}\}$; 3) $\{X_7, X_8, X_9, -X_{11} + X_{12}\}$; 4) $\{X_7, X_8, X_9, aX_{11} + X_{12}\}, a \neq -1$.

Пятимерные подалгебры получаются только при объединении двумерных подалгебр из $\tilde{J}_3$ и трехмерных из J_3 (так как в J_3 нет 2-х мерных), которые при замене базиса принимают вид: 1) $\{X_7, X_8, X_9, X_{10}, aX_{11} + X_{12}\}$; 2) $\{X_7, X_8, X_9, X_{11}, X_{12}\}$.

Шестимерная подалгебра это все $L_6 : \{X_7, X_8, X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}\}$.

Проделанные вычисления сводятся в таблицу.

Таблица 2

r	i	Базис	Нормализатор
6	1	$7, 8, 9, 10, 11, 12$	$= 6.1$
5	1	$7, 8, 9, 11, 12$	$= 5.1$
	2	$7, 8, 9, 10, a11 + 12$	6.1
4	1	$7, 8, 9, a11 + 12; a \neq -1$	5.1
	2	$7, 8, 9, -11 + 12$	6.1
	3	$7, 8, 9, 10 - 11 + 12$	$5.2; a = -1$
	4	$7, 10, 11, 12$	$= 4.4$
3	1	$7, 11, 12$	$= 3.1$
	2	$7 + a11, 10, b11 + 12$	4.4
	3	$7 + a12, 10, 11; a \neq 0$	4.4
	4	$10, 11, 12$	6.1
2	1	$7 + a11, b11 + 12; a^2 + (b + 1)^2 \neq 0$	3.1
	2	$7 + a12, 11; a \neq 0$	3.1
	3	$7, -11 + 12$	4.4
	4	$7 + a10, b10 - 11 + 12; a^2 + b^2 = 1$	$3.2; a = -1, b = 0$
	5	$7 + a11 + b12, 10; b \neq 0$	4.4
	6	$11, 12$	5.1
	7	$10, a11 + 12$	6.1
1	1	$a7 + 10 - 11 + 12; a \neq 0$	$3.2; b = -1, a = 0$
	2	$10 - 11 + 12$	$5.2; a = -1$
	3	$a7 + b11 + 12; a \neq 0, b \neq -1$	3.1
	4	$a7 - 11 + 12; a \neq 0$	4.4
	5	$b11 + 12; b \neq -1$	5.1
	6	$-11 + 12$	6.1

В таблице введены следующие обозначения: r – размерность подалгебры, i – порядковый номер подалгебры данной размерности, a, b – инварианты автоморфизмов. В последнем столбце приведен нормализатор – наибольшая подалгебра, для которой исходная подалгебра есть идеал. В дальнейшем каждая строчка этой таблицы (подалгебра) обозначается в виде r.i.

3. Оптимальная система подалгебр алгебры L_{12}

Каждая подалгебра из таблицы 2 считается проекцией некоторых алгебр из L_{12} на L_6. С помощью автоморфизмов, действующих в абелевом идеале J_6, и с помощью замен базиса проекция на J_6 приводится к наиболее простому виду в классе подобных.

Рассмотрим пример такого приведения трехмерной подалгебры L_{12}, в которой два базисных оператора имеют нулевую проекцию на L_6. Возьмем подалгебру 1.6 из таблицы 2 и прибавим к ней произвольную проекцию координатного вектора на J_6, два других базисных оператора из J_6 имеют общий вид: $\{x^1X_1 + ... + x^6X_6 - X_{11} + X_{12}, y^1X_1 + ... + y^6X_6, z^1X_1 + ... + z^6X_6\}$. С помощью преобразования Γ за счет выбора α_2 сделаем $p_2(x') = 0$, так как $x^{12} = 1 \neq 0$. Преобразованием T за счет выбора α_1 сделаем $p_1(x') = 0$. Запишем условие подалгебры:

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
&[y^1X_1+...+y^6X_6,-X_{11}+X_{12}]=-y^1X_1-y^2X_2-y^3X_3-\\
&-y^4X_4-y^5X_5-y^6X_6=\lambda_1(-X_{11}+X_{12})+\\
&+\mu_1(y^1X_1+...+y^6X_6)+\nu_1(z^1X_1+...+z^6X_6),\\
&[z^1X_1+...+z^6X_6,-X_{11}+X_{12}]=-z^1X_1-z^2X_2-z^3X_3-\\
&-z^4X_4-z^5X_5-z^6X_6=\lambda_2(-X_{11}+X_{12})+\\
&+\mu_2(y^1X_1+...+y^6X_6)+\nu_2(z^1X_1+...+z^6X_6)
\end{aligned}
$$

где $\lambda_i,\mu_i,\nu_i, i=1,2$ – структурные константы подалгебры. В (4) приравняем коэффициенты при базисных операторах:

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&X_1:(1+\mu_1)y^1+\nu_1z^1=0, \quad \mu_2y^1+(1+\nu_2)z^1=0,\\
&X_2:(1+\mu_1)y^2+\nu_1z^2=0, \quad \mu_2y^2+(1+\nu_2)z^2=0,\\
&X_3:(1+\mu_1)y^3+\nu_1z^3=0, \quad \mu_2y^3+(1+\nu_2)z^3=0,\\
&X_4:(1+\mu_1)y^4+\nu_1z^4=0, \quad \mu_2y^4+(1+\nu_2)z^4=0,\\
&X_5:(1+\mu_1)y^5+\nu_1z^5=0, \quad \mu_2y^5+(1+\nu_2)z^5=0,\\
&X_6:(1+\mu_1)y^6+\nu_1z^6=0, \quad \mu_2y^6+(1+\nu_2)z^6=0,\\
&\lambda_1=0,\ \lambda_2=0,
\end{aligned}
$$

Рассмотрим три взаимоисключающих друг друга случая, исчерпывающих все возможности.

а) Пусть $p_2(y)\neq 0, p_2(z)\neq 0$. С помощью преобразования S повернем $p_2(y)$ так, что $y^5=0, y^6=0$. Так как $p_2(y)\neq 0$, то можно считать $y^4=1$. Сделаем поворот S вокруг первой оси так, чтобы $z^6=0$, при этом $p_2(y)=(1,0,0)$ не изменится. Заменой базиса сделаем $z^4=0, z^5=1$. Воспользуемся преобразованием поворота с матрицей

$$
\left\|\begin{matrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|.
$$

Проекции $p_1(y),\ p_1(z),\ p_2(y)=(1,0,0),\ p_2(z)=(0,1,0)$ перейдут в следующие:

$$
\begin{aligned}
&p_1(y')=(y^1\cos\varphi+y^2\sin\varphi,-y^1\sin\varphi+y^2\cos\varphi,y^3),\\
&p_1(z')=(z^1\cos\varphi+z^2\sin\varphi,-z^1\sin\varphi+z^2\cos\varphi,z^3),\\
&p_2(y')=(\cos\varphi,-\sin\varphi,0), \quad p_2(z')=(\sin\varphi,\cos\varphi,0).
\end{aligned}
$$

Умножим $p_1(y'), p_2(y')$ на $\cos\varphi$, а $p_1(z'), p_2(z')$ на $\sin\varphi$ и сложим (замена базиса подалгебры). Умножим $p_1(y'),\ p_2(y')$ на $-\sin\varphi$, а $p_1(z'),\ p_2(z')$ на $\cos\varphi$ и сложим. При этом восстанавливаются проекции $p_2(\bar y)=(1,0,0),\ p_2(\bar z)=(0,1,0)$, а координаты $p_1(\bar{y})$, $p_1(\bar{z})$ равны:

$$\begin{aligned}
\bar{y}^1 &= y^1\cos^2\varphi + z^2\sin^2\varphi + (y^2+z^1)\cos\varphi\sin\varphi,\\
\bar{y}^2 &= y^2\cos^2\varphi - z^1\sin^2\varphi + (-y^1+z^2)\cos\varphi\sin\varphi,\\
\bar{y}^3 &= y^3\cos\varphi + z^3\sin\varphi,\\
\bar{z}^1 &= -y^2\sin^2\varphi + z^1\cos^2\varphi + (-y^1+z^2)\cos\varphi\sin\varphi,\\
\bar{z}^2 &= y^1\sin^2\varphi + z^2\cos^2\varphi + (-y^2+z^1)\cos\varphi\sin\varphi,\\
\bar{z}^3 &= -y^3\sin\varphi + z^3\cos\varphi.
\end{aligned}$$

Выберем угол φ так, чтобы $\bar{y}^1 = \bar{z}^2$: $(y^1 - z^2)\cos^2\varphi + (-y^1 + z^2)\sin^2\varphi + 2\cos\varphi\sin\varphi(y^2+z^1) = 0$, $\Rightarrow \tan 2\varphi = \dfrac{-y^1+z^2}{y^2+z^1}$.

Преобразование A_{10} делает $\bar{y}^1 = \bar{z}^2 = 0$. Получим подалгебру $\{a2 + b3 + 4, c1 + d3 + 5, -11 + 12\}$, где a, b, c, d – произвольные постоянные.

б) Пусть $p_2(y) \neq 0$, $p_2(z) = 0$, тогда $p_1(z) \neq 0$. Преобразование S делает $p_2(y) = (y^4, 0, 0)$, $p_1(z) = (z^1, z^2, 0)$. Заменой базиса сделаем $y^4 = 1$.

Если $z^2 \neq 0$, то можно считать $z^2 = 1$, $y^2 = 0$ (замена базиса). С помощью A_{10} занулим y^1. Преобразование A_{11} делает $y^3 = 0$ или 1. Получим $\{a1+2, \varepsilon 3+4, -11+12\}$, где $\varepsilon = 0$ или 1.

Если $z^2 = 0$, то $z^1 = 1$, $y^1 = 0$ (замена базиса). Преобразование S делает $y^3 = 0$. С помощью A_{11} сделаем $y^2 = 0$ или 1. Получим подалгебру $\{1, \varepsilon 2 + 4, -11 + 12\}$, где $\varepsilon = 0$ или 1.

в) Пусть $p_2(y) = 0$, $p_2(z) = 0$, тогда преобразованием S и заменой базиса сделаем $p_1(y) = (0, 1, 0)$, $p_1(z) = (0, 0, 1)$. Получим подалгебру $\{2, 3, -11 + 12\}$.

В оптимальную систему подалгебр должны входить их нормализаторы. Нормализатор N подалгебры K_m (m – размерность подалгебры) вычисляется по следующему правилу. Разыскиваются элементы X алгебры L_{12}, для которых коммутаторы с каждым базисным оператором подалгебры K_m являются линейными комбинациями базисных операторов подалгебры . Получаются m уравнений. В каждом уравнении приравниваются коэффициенты при одинаковых базисных операторах (2). Из полученных соотношений находятся координаты элемента X в базисе (2). Какие-то координаты будут произвольными (так как K_m содержится в N). Коэффициент при произвольной координате есть базисный оператор нормализатора N.

Приведем пример вычисления нормализатора для подалгебры $Y = \{a2 + b3 + 4, c1 + d3 + 5, -11 + 12\}$. Коммутаторы вычисляются по таблице 1.

Вычислим коммутатор для первого базисного элемента подалгебры.

$$\begin{aligned}
&\left[aX_2 + bX_3 + X_4, \sum_{i=1}^{12} x^i X_i\right] = ax^7X_3 - ax^9X_1 + ax^{11}X_2 - bx^7X_2 + bx^8X_1 + \\
&+ bx^{11}X_3 - x^8X_6 + x^9X_5 - x^{10}X_1 - x^{12}X_4 = k_{11}(aX_2 + bX_3 + X_4) + \\
&+ k_{12}(cX_1 + dX_3 + X_5) + k_{13}(-X_{11} + X_{12}),
\end{aligned}$$

где $k_{1i}, i = 1, 2, 3$, координаты коммутатора в базисе подалгебры. Приравняем коэффициенты при базизных операторах в L_{12}:

$$
\begin{aligned}
&X_1 : -ax^9 + bx^8 - x^{10} = ck_{12},\\
&X_2 : ax^{11} - bx^7 = ak_{11},\\
&X_3 : ax^7 + bx^{11} = bk_{11} + dk_{12},\\
&X_4 : -x^{12} = k_{11},\\
&X_5 : x^9 = k_{12},\\
&X_6 : -x^8 = 0,\\
&X_{11} : 0 = -k_{13},\\
&X_{12} : 0 = k_{13}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Из (6) следует $x^8 = 0,\ k_{11} = -x^{12},\ k_{12} = x^9,\ k_{13} = 0$;

$$
\begin{aligned}
&x^9(a + c) + x^{10} = 0,\\
&a(x^{11} + x^{12}) = bx^7,\\
&b(x^{11} + x^{12}) = dx^9 - ax^7.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Вычислим коммутатор для второго базисного элемента.

$$
\left[cX_1 + dX_3 + X_5, \sum_{i=1}^{12} x^i X_i\right] = -cx^8X_3 + cx^9X_2 + cx^{11}X_1 - dx^7X_2 + dx^8X_1 +
$$
$$
+ dx^{11}X_3 + x^7X_6 - x^9X_4 - x^{10}X_2 - x^{12}X_5 = k_{21}(aX_2 + bX_3 + X_4) +
$$
$$
+ k_{22}(cX_1 + dX_3 + X_5) + k_{23}(-X_{11} + X_{12}).
$$

Отсюда следуют равенства

$$
\begin{aligned}
&cx^{11} + dx^8 = ck_{22},\\
&cx^9 - dx^7 - x^{10} = ak_{21},\\
&- cx^8 + dx^{11} = bk_{21} + dk_{22},\\
&- x^9 = k_{21},\\
&- x^{12} = k_{22},\\
&x^7 = 0,\\
&k_{23} = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Из (8) следует $x^7 = 0,\ k_{21} = -x^9,\ k_{22} = -x^{12},\ k_{23} = 0$. Учитывая (7), (8) получим:

$$
\begin{aligned}
&x^9(a + c) + x^{10} = 0,\\
&a(x^{11} + x^{12}) = 0,\\
&b(x^{11} + x^{12}) = dx^9,\\
&x^9(a + c) - x^{10} = 0,\\
&c(x^{11} + x^{12}) = 0,\\
&d(x^{11} + x^{12}) = -bx^9.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Из (9) следует, что $x^{10} = 0$, $(a+c)x^9 = 0$. Тогда (9) запишем в виде:

$$
\begin{aligned}
&(a+c)x^9 = 0,\\
&a(x^{11}+x^{12}) = 0,\\
&c(x^{11}+x^{12}) = 0,\\
&b(x^{11}+x^{12}) - dx^9 = 0,\\
&d(x^{11}+x^{12}) + bx^9 = 0.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Вычислим коммутатор для третьего базисного элемента.

$$
\begin{aligned}
&\left[-X_{11}+X_{12}, \sum_{i=1}^{12} x^i X_i\right] = x^1X_1 + x^2X_2 + x^3X_3 + x^{10}X_{10} + x^4X_4 + x^5X_5 +\\
&+ x^6X_6 - x^{10}X_{10} = k_{31}(aX_2 + bX_3 + X_4) + k_{32}(cX_1 + dX_3 + X_5) +\\
&k_{33}(-X_{11}+X_{12}).
\end{aligned}
$$

Отсюда следует $x^1 = ck_{32}$, $x^2 = ak_{31}$, $x^3 = bk_{31} + dk_{32}$, $x^4 = k_{31}$, $x^5 = k_{32}$, $x^6 = 0$, $k_{33} = 0 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&x^1 = cx^5,\\
&x^2 = ax^4,\\
&x^3 = bx^4 + dx^5.
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Рассмотрим уравнения (10), (11).

1) Пусть $a + c \neq 0$, тогда $x^9 = 0$, $x^{11} = -x^{12}, b, d$ – любые. Получим произвольный элемент нормализатора: $x^4(aX_2 + bX_3 + X_4) + x^5(cX_1 + dX_3 + X_5) + x^{12}(-X_{11} + X_{12})$, где x^4, x^5 , x^6 – произвольные координаты. Итак, нормализатор задается базисом: $\{aX_2 + bX_3 + X_4, cX_1 + dX_3 + X_5, -X_{11} + X_{12}\}$ для подалгебры Y с $a + c \neq 0$.

2) Пусть $a = -c \neq 0 \Rightarrow x^{11} = -x^{12}$.

а) Если $b^2 + d^2 \neq 0$, то $x^9 = 0$. Получим нормализатор: $\{aX_2 + bX_3 + X_4, -aX_1 + dX_3 + X_5, -X_{11} + X_{12}\}$, аналогичный предыдущему случаю.

б) Если $b^2+d^2 = 0$, то x^9 – любое. Получим нормализатор $\{aX_2+X_4, -aX_1+X_5, X_9, -X_{11} + X_{12}\}$ для подалгебры Y с $a = -c \neq 0$, $b = d = 0$.

3) Пусть $a = 0$, $c = 0$.

а) Если $b^2 + d^2 \neq 0$, то $x^9 = 0$, $x^{11} = -x^{12}$. Получим нормализатор: $\{bX_3 + X_4, dX_3 + X_5, -X_{11} + X_{12}\}, b^2 + d^2 \neq 0$, аналогичный случаю 1).

б) Если $b^2 + d^2 = 0$, то x^9, x^{11}, x^{12} – любые. Получим нормализатор: $\{X_4, X_5, X_9, X_{11}, X_{12}\}$ для подалгебры Y, где $a = b = \;= d = 0$. Чтобы нормализатор входил в оптимальную систему, сделаем поворот $S : X_9 \to X_7, X_4 \to X_6$.

Случаи 1), 2а), 3а) можно объединить в один случай $\{aX_2 + bX_3 + X_4, cX_1 + dX_3 + X_5, -X_{11} + X_{12}\}$ с условием $(a+c) \neq 0$ или $b^2 + d^2 \neq 0$. Итак, получили три неподобных случая.

Результаты вычислений сведены в таблицу.

Таблица 3. Оптимальная система L_{12}

r	i	Базис	Нормализатор
1	1	$a7+b11+12;\ a\neq 0,\ b\neq 0,\ b\neq -1$	3.1
	2	$1+b7+12;\ b\neq 0$	$3.8; a=0, b=0$
	3	$b7+12;\ b\neq 0$	4.5
	4	$a7-11+12;\ a\neq 0$	4.4
	5	$a7+10-11+12;\ a\neq 0$	$3.2; a=0, b=-1$
	6	$b11+12;\ b\neq 0,\ b\neq -1$	5.1
	7	$1+12$	$5.21; a=0, b=0$
	8	12	8.2
	9	$-11+12$	6.1
	10	$10-11+12$	$5.2; a=-1$
2	1	$7+a11, b11+12;\ a^2+(b+1)^2\neq 0$	3.1
	2	$a1+7, b1+12;\ a^2+b^2=1$	$3.8; a=0, b=0$
	3	$7, 12$	4.5
	4	$7+a12, 11;\ a\neq 0$	3.1
	5	$7, -11+12$	4.4
	6	$7+a10, b10-11+12;\ a^2+b^2=1$	$3.2; a=0, b=-1$
	7	$7+a12, 10;\ a\neq 0$	5.3
	8	$1+7+a12, 10;\ a\neq 0$	$4.7; a=0, b=0$
	9	$a7-(2)11+12, 4+10$	3.3
	10	$7+b11+a12, 10;\ a\neq 0,\ b\neq 0$	4.4
	11	$11, 12$	5.1
	12	$a11+12, 10;\ a\neq 0$	6.1
	13	$10, 12$	9.1
	14	$1+12, 10$	$6.8; a=0, b=0$
	15	$1, a7+b11+12;\ a^2+b^2\neq 0,\ b\neq -1$	4.5
	16	$4, a7+b11+12;\ b\neq 0$	4.6
	17	$4, a7+12;\ a\neq 0$	5.5
	18	$4, 1+a7+12;\ a\neq 0$	$4.10; a=0, b=0$
	19	$1, a7-11+12$	5.3
	20	$1, a7+10-11+12$	$4.7; a=0, b=-1$
	21	$2, 1+12$	$4.53; b=0$
	22	$1, 12$	6.7
	23	$4, a1+2+12;\ a\neq 0$	$5.50; a=0, b=0$
	24	$4, 12$	7.8
	25	$4, 1+12$	$6.17; a=0, b=0$
	26	$2+4, -11+12$	$\equiv 2.26$
3	1	$7, 11, 12$	$\equiv 3.1$
	2	$7+a11, 10, b11+12;\ a^2+b^2\neq 0$	4.4
	3	$7, 4+10, -(2)11+12$	$\equiv 3.3$
	4	$a1+7, 10, b1+12;\ a^2+b^2=1$	$4.7; a=0, b=0$
	5	$7, 10, 12$	5.3
	6	$7+a12, 10, 11;\ a\neq 0$	4.4
	7	$10, 11, 12$	6.1
	8	$1, 7+a11, b11+12;\ a^2+(b+1)^2\neq 0$	4.5
	9	$4, 7+a11, b11+12$	4.6
	10	$4, a1+7, b1+12;\ a^2+b^2=1$	$4.10; a=0, b=0$

	11	$4, 7, 12$	5.5
	12	$1, a7 + 12, 11$	4.5
	13	$4, a7 + 12, 11$	4.6
	14	$1, 7, -11 + 12$	5.3
	15	$1, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$4.7; a = 0, b = -1$
	16	$1, a7 + b11 + 12, 10;\ a^2 + b^2 \neq 0$	5.3
	17	$1, a7 - (2)11 + 12, 4 + 10$	4.8
	18	$1, 10, 12$	5.3
	19	$2, 10, 1 + 12$	7.5
	20	$a1 + 2, 4 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 3.20$
	21	$1, 4, a7 + b11 + 12;\ a \neq 0,\ b \neq -1$	5.5
	22	$2, 3, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0,\ b \neq -1$	5.4
	23	$5, 6, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0$	5.6
	24	$2, 3, a7 + 12$	6.7
	25	$2, 3, 1 + a7 + 12$	$5.21; a = 0, b = 0$
	26	$5, 6, a7 + 12;\ a \neq 0$	6.5
	27	$5, 6, 1 + a7 + 12;\ a \neq 0$	$5.17; a = 0, b = 0$
	28	$1, 4, a7 - 11 + 12$	6.2
	29	$2, 3, a7 - 11 + 12$	6.3
	30	$1, 4, a7 + 10 - 11 + 12$	$5.7; a = 0, b = -1$
	31	$2, 3, a7 + 10 - 11 + 12$	$5.8; a = 0, b = -1$
	32	$a1 + 2, 4, b11 + 12;\ b \neq 0$	4.29
	33	$1, 4, b11 + 12;\ b \neq 0,\ b \neq -1$	5.5
	34	$5, 6, 2 + a1 + 12$	$6.38; a = 0, b = 0$
	35	$5, 6, 1 + 12$	$7.19; a = 0, b = 0$
	36	$5, 6, 12$	8.7
	37	$a1 + 2, 4, b1 + c3 + 12;\ b^2 + c^2 = 1$	$5.50; a = 0, b = 0$
	38	$a1 + 2, 4, 12$	$6.20; a = 0$
	39	$1, 4, 2 + 12$	$5.50; a = 0, b = 0$
	40	$1, 4, 12$	7.8
	41	$a1 + b3 + 5, c1 + d2 + 6, -11 + 12;$ $(b + d)^2 + a^2 + c^2 = 1$	$\equiv 3.41$
	42	$-a3 + 5, a2 + 6, -11 + 12$	4.21
	43	$a1 + 2, 3 + 4, -11 + 12$	$\equiv 3.43$
	44	$1, 2 + 4, -11 + 12$	4.33
	45	$1, 2 + 4, 10 - 11 + 12$	4.33
4	1	$7, 8, 9, a11 + 12;\ a \neq -1$	5.1
	2	$7, 8, 9, -11 + 12$	6.1
	3	$7, 8, 9, 10 - 11 + 12$	$5.2; a = -1$
	4	$7, 10, 11, 12$	$\equiv 4.4$
	5	$1, 7, 11, 12$	$\equiv 4.5$
	6	$4, 7, 11, 12$	$\equiv 4.6$
	7	$1, 7 + a11, 10, b11 + 12$	5.3
	8	$1, 7, 4 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 4.8$
	9	$1, a7 + 12, 10, 11$	5.3
	10	$1, 4, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + (b + 1)^2 \neq 0$	5.5
	11	$2, 3, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	5.4
	12	$2, 3, a1 + 7, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$5.21; a = 0, b = 0$

	13	$2, 3, 7, 12$	6.7
	14	$5, 6, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	5.6
	15	$5, 6, a1 + 7, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$5.17; a = 0, b = 0$
	16	$5, 6, 7, 12$	6.5
	17	$2, 3, 7 + a12, 11$	5.4
	18	$1, 4, 7 + a12, 11$	5.5
	19	$5, 6, 7 + a12, 11$	5.6
	20	$2, 3, 7, -11 + 12$	6.3
	21	$a2 + 6, a3 - 5, 7, -11 + 12$	$\equiv 4.21$
	22	$1, 4, 7, -11 + 12$	6.2
	23	$1, 4, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$5.7; a = 0, b = -1$
	24	$2, 3, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$5.8; a = 0, b = -1$
	25	$1, 4, b7 + a11 + 12, 10;\ b \neq 0$	6.2
	26	$2, 3, 1 + a7 + 12, 10$	$6.8; a = 0, b = 0$
	27	$2, 3, a7 + 12, 10$	7.5
	28	$2, 3, a7 + b11 + 12, 10;\ b \neq 0$	6.3
	29	$2, 3, 4 + 10, a7 - (2)11 + 12;\ a \neq 0$	5.10
	30	$a1 + 2, 4, 11, 12$	$\equiv 4.30$
	31	$1, 4, 10, a11 + 12;\ a \neq 0$	6.2
	32	$1, 4, 10, 12$	8.5
	33	$1, 4, 10, 2 + 12$	$7.15; a = 0$
	34	$1, 2 + 4, 10, -11 + 12$	$\equiv 4.34$
	35	$1, 4, 5 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 4.35$
	36	$2, 3, a4 + b5 + 10, -(2)11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$\equiv 4.36$
	37	$4, 5, 6, a7 + b11 + 12;\ a \neq 0,\ b \neq 0$	6.4
	38	$1, 5, 6, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0$	6.5
	39	$2, 3, 4, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0$	6.6
	40	$1, 2, 3, a7 + b11 + 12;\ a \neq 0,\ b \neq -1$	6.7
	41	$1, 5, 6, a7 + 12;\ a \neq 0$	6.5
	42	$2, 3, 4, 1 + a7 + 12$	$6.17; a = 0, b = 0$
	43	$2, 3, 4, a7 + 12$	7.8
	44	$4, 5, 6, 1 + a7 + 12;\ a \neq 0$	$6.13; a = 0, b = 0$
	45	$4, 5, 6, a7 + 12;\ a \neq 0$	7.6
	46	$d1 + 4, b3 + 5, -b2 + 6, a7 - 11 + 12;$ $b^2 + d^2 = 1$	5.26
	47	$1, 3 + 5, -2 + 6, a7 - 11 + 12$	5.27
	48	$1, 2, 3, a7 - 11 + 12;\ a \neq 0$	7.5
	49	$1, 2, 3, a7 + 10 - 11 + 12;\ a \neq 0$	$6.8; a = 0, b = -1$
	50	$4, 5, 6, b11 + 12;\ b \neq 0$	8.1
	51	$a1 + 2, 5, 6, b11 + 12;\ b \neq 0$	5.33
	52	$2, a1 + 3, 4, b11 + 12;\ a \neq 0,\ b \neq 0$	5.34
	53	$1, 2, 4, b11 + 12;\ b \neq 0,\ b \neq -1$	5.35
	54	$1, 2, 3, b11 + 12;\ b \neq -1$	8.2
	55	$4, 5, 6, 1 + 12$	$8.11; a = 0, b = 0$
	56	$4, 5, 6, 12$	11.1
	57	$a1 + 2, 5, 6, b1 + c3 + 12;\ b^2 + c^2 = 1$	$6.38; a = 0, b = 0$
	58	$a1 + 2, 5, 6, 12$	$7.21; a = 0$
	59	$1, 5, 6, 2 + 12$	$6.38; a = 0, b = 0$

	60	$1, 5, 6, 12$	8.7
	61	$2, a1 + 3, 4, 1 + 12;\ a \neq 0$	$5.50; a = 0, b = 0$
	62	$2, a1 + 3, 4, 12;\ a \neq 0$	$6.20; a = 0$
	63	$-c2 + b3 + 4, c1 + e2 - a3 + 5,$ $-b1 + a2 + d3 + 6, -11 + 12;$ $(e = 1,\ d = 0,\ a^2 + c^2 = 1)\cup$ $(e \neq 0,\ d \neq 0,\ e \neq d)$	$\equiv 6.63$
	64	$a1 + 2, b1 + c3 + 5, d1 + 6, -11 + 12;$ $b^2 + c^2 + d^2 = 1$	$\equiv 6.64$
	65	$1, -a3 + 5, a2 + b3 + 6, -11 + 12;\ b \neq 0$	$\equiv 6.65$
	66	$1, 2, 3 + 4, -11 + 12$	5.41
	67	$1, 2, 4, -11 + 12$	6.11
	68	$1, 2, 3, -11 + 12$	9.1
	69	$1, 2, 3 + 4, 10 - 11 + 12$	5.41
	70	$1, 2, 4, 10 - 11 + 12$	$5.37; a = -1$
	71	$1, 2, 3, 10 - 11 + 12$	$8.3; a = -1$
5	1	$7, 8, 9, 11, 12$	$\equiv 5.1$
	2	$7, 8, 9, 10, a11 + 12$	6.1
	3	$1, 7, 10, 11, 12$	$\equiv 5.3$
	4	$2, 3, 7, 11, 12$	$\equiv 5.4$
	5	$1, 4, 7, 11, 12$	$\equiv 5.5$
	6	$5, 6, 7, 11, 12$	$\equiv 5.6$
	7	$1, 4, 7 + a11, 10, b11 + 12$	6.2
	8	$2, 3, 7 + a11, 10, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	6.3
	9	$2, 3, 7, 10, 12$	7.5
	10	$2, 3, 7, 4 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 5.10$
	11	$2, 3, a1 + 7, 10, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$6.8; a = 0, b = 0$
	12	$1, 4, 10, 11, a7 + 12$	6.2
	13	$2, 3, 10, 11, a7 + 12$	6.3
	14	$4, 5, 6, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	6.4
	15	$4, 5, 6, a1 + 7, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$6.13; a = 0, b = 0$
	16	$4, 5, 6, 7, 12$	7.6
	17	$1, 5, 6, 7 + a11, b11 + 12$	6.5
	18	$2, 3, 4, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	6.6
	19	$2, 3, 4, a1 + 7, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$6.17; a = 0, b = 0$
	20	$2, 3, 4, 7, 12$	7.8
	21	$1, 2, 3, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + (b + 1)^2 \neq 0$	6.7
	22	$4, 5, 6, a7 + 12, 11;\ a \neq 0$	6.4
	23	$1, 5, 6, a7 + 12, 11$	6.5
	24	$2, 3, 4, a7 + 12, 11$	6.6
	25	$1, 2, 3, a7 + 12, 11;\ a \neq 0$	6.7
	26	$a1 + 4, b3 + 5, -b2 + 6, 7, -11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$\equiv 5.26$
	27	$1, 3 + 5, -2 + 6, 7, -11 + 12$	$\equiv 5.27$
	28	$1, 2, 3, 7, -11 + 12$	7.5
	29	$1, 2, 3, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$6.8; a = 0, b = -1$
	30	$1, 2, 3, a7 + b11 + 12, 10;\ b \neq -2,\ a \neq 0$	7.5
	31	$1, 2, 3, 4 + 10, a7 - (2)11 + 12$	6.9
	32	$4, 5, 6, 11, 12$	8.1

	33	$a1+2,5,6,11,12$	$\equiv 5.33$
	34	$2,a1+3,4,11,12;\ a\neq 0$	$\equiv 5.34$
	35	$1,2,4,11,12$	$\equiv 5.35$
	36	$1,2,3,11,12$	8.2
	37	$1,2,4,10,a11+12;\ a\neq 0$	6.11
	38	$1,2,4,10,3+12$	$6.30; a=0,b=0$
	39	$1,2,4,10,12$	$7.15; a=0$
	40	$1,2,4,a5+b6+10,-(2)11+12;\ a^2+b^2=1$	$\equiv 5.40$
	41	$1,2,3+4,10,-11+12$	$\equiv 5.41$
	42	$1,2,3,10,a11+12;\ a\neq -2$	9.1
	43	$2,3,5,6,a7+10-11+12$	$7.9; a=0,b=-1$
	44	$1,2,3,4,a7+10-11+12$	$7.13; a=0,b=-1$
	45	$2,3,1+5,6,10-11+12$	6.32
	46	$1,4,5,6,a7+b11+12;\ a\neq 0$	7.6
	47	$2,3,5,6,a7+b11+12;\ b\neq 0,\ b\neq -1$	7.7
	48	$2,3,5,6,a7+12$	8.7
	49	$2,3,5,6,1+a7+12$	$7.19; a=0,b=0$
	50	$1,2,3,4,a7+b11+12;\ b\neq -1$	7.8
	51	$1,4,3+5,-2+6,a7-11+12$	6.21
	52	$2,3,5,6,a7-11+12$	8.4
	53	$1,2,3,4,a7-11+12$	8.5
	54	$1,4,5,6,b11+12;\ b\neq 0$	7.6
	55	$1,4,5,6,2+12$	$7.30; b=0$
	56	$1,4,5,6,12$	9.3
	57	$1+a3,2,5,6,b11+12;\ b\neq 0$	6.31
	58	$1+a3,2,5,6,12$	$7.21; a=0$
	59	$1+a3,2,5,6,1+12;\ a\neq 0$	$6.38; a=0,b=0$
	60	$1,a2+b3+4,c3+5,d2+6,-11+12;$ $a^2+b^2+(c+d)^2=1$	$\equiv 5.60$
	61	$2,1+a3,3+5,6,-11+12$	$\equiv 5.61$
	62	$2,3,1+5,6,-11+12$	6.32
6	1	$7,8,9,10,11,12$	$\equiv 6.1$
	2	$1,4,7,10,11,12$	$\equiv 6.2$
	3	$2,3,7,10,11,12$	$\equiv 6.3$
	4	$4,5,6,7,11,12$	$\equiv 6.4$
	5	$1,5,6,7,11,12$	$\equiv 6.5$
	6	$2,3,4,7,11,12$	$\equiv 6.6$
	7	$1,2,3,7,11,12$	$\equiv 6.7$
	8	$1,2,3,7+a11,10,b11+12$	7.5
	9	$1,2,3,7,4+10,-(2)11+12$	$\equiv 6.9$
	10	$1,2,3,a7+12,10,11;\ a\neq 0$	7.5
	11	$1,2,4,10,11,12$	$\equiv 6.11$
	12	$1,2,3,10,11,12$	9.1
	13	$1,4,5,6,7+a11,b11+12$	7.6
	14	$2,3,5,6,7+a11,b11+12;\ a^2+b^2\neq 0,\ b\neq -1$	7.7
	15	$2,3,5,6,a1+7,b1+12;\ a^2+b^2=1$	$7.19; a=0,b=0$
	16	$2,3,5,6,7,12$	8.7
	17	$1,2,3,4,7+a11,b11+12;\ a^2+(b+1)^2\neq 0$	7.8

	18	$1, 4, 5, 6, a7 + 12, 11$	7.6
	19	$2, 3, 5, 6, a7 + 12, 11$	7.7
	20	$1, 2, 3, 4, a7 + 12, 11$	7.8
	21	$1, 4, 3 + 5, 2 - 6, 7, -11 + 12$	$\equiv 6.21$
	22	$2, 3, 5, 6, 7, -11 + 12$	8.4
	23	$1, 2, 3, 4, 7, -11 + 12$	8.5
	24	$2, 3, 5, 6, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$7.9; a = 0, b = -1$
	25	$1, 2, 3, 4, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$7.13; a = 0, b = -1$
	26	$2, 3, 5, 6, 4 + 10, a7 - (2)11 + 12$	7.10
	27	$2, 3, 5, 6, 10, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0$	8.4
	28	$2, 3, 5, 6, 10, a7 + 12$	9.2
	29	$2, 3, 5, 6, 10, 1 + a7 + 12$	$8.9; a = 0, b = 0$
	30	$1, 2, 3, 4, 10, a7 + b11 + 12$	8.5
	31	$1 + a3, 2, 5, 6, 11, 12$	$\equiv 6.31$
	32	$2, 3, 1 + 5, 6, 10, -11 + 12$	$\equiv 6.32$
	33	$1, 2, 3, 4, 5 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 6.33$
	34	$1, 2, 3, 5, 6, a7 + 10 - 11 + 12$	$8.9; a = 0, b = -1$
	35	$2, 3, 4, 5, 6, a7 + b11 + 12;\ b \neq 0$	8.6
	36	$2, 3, 4, 5, 6, a7 + 12$	9.3
	37	$2, 3, 4, 5, 6, 1 + a7 + 12$	$8.11; a = 0, b = 0$
	38	$1, 2, 3, 5, 6, a7 + b11 + 12;\ b \neq -1$	8.7
	39	$1, 2, 3, 5, 6, a7 - 11 + 12$	9.2
	40	$2, 3, 4, 5, 1 + 6, -11 + 12$	$\equiv 6.40$
7	1	$4, 5, 6, 7, 8, 9, a11 + 12$	8.1
	2	$1, 2, 3, 7, 8, 9, a11 + 12;\ a \neq -1$	8.2
	3	$1, 2, 3, 7, 8, 9, -11 + 12$	9.1
	4	$1, 2, 3, 7, 8, 9, 10 - 11 + 12$	$8.3; a = -1$
	5	$1, 2, 3, 7, 10, 11, 12$	$\equiv 7.5$
	6	$1, 4, 5, 6, 7, 11, 12$	$\equiv 7.6$
	7	$2, 3, 5, 6, 7, 11, 12$	$\equiv 7.7$
	8	$1, 2, 3, 4, 7, 11, 12$	$\equiv 7.8$
	9	$2, 3, 5, 6, 7 + a11, 10, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	8.4
	10	$2, 3, 5, 6, 7, 4 + 10, -(2)11 + 12$	$\equiv 7.10$
	11	$2, 3, 5, 6, a1 + 7, 10, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$8.9; a = 0, b = 0$
	12	$2, 3, 5, 6, 7, 10, 12$	9.2
	13	$1, 2, 3, 4, 7 + a11, 10, b11 + 12$	8.5
	14	$2, 3, 5, 6, a7 + 12, 10, 11$	8.4
	15	$1, 2, 3, 4, a7 + 12, 10, 11$	8.5
	16	$2, 3, 4, 5, 6, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + b^2 \neq 0$	8.6
	17	$2, 3, 4, 5, 6, a1 + 7, b1 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$8.11; a = 0, b = 0$
	18	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 12$	9.3
	19	$1, 2, 3, 5, 6, 7 + a11, b11 + 12;\ a^2 + (b + 1)^2 \neq 0$	8.7
	20	$2, 3, 4, 5, 6, a7 + 12, 11$	8.6
	21	$1, 2, 3, 5, 6, a7 + 12, 11$	8.7
	22	$1, 2, 3, 5, 6, 7, -11 + 12$	9.2
	23	$1, 2, 3, 5, 6, 7 + a10, b10 - 11 + 12;\ a^2 + b^2 = 1$	$8.9; a = 0, b = -1$
	24	$1, 2, 3, 5, 6, 10, a7 + b11 + 12;\ b \neq -2$	9.2
	25	$1, 2, 3, 5, 6, 4 + 10, a7 - (2)11 + 12$	8.8

	26	$1,2,3,4,5,6,a7+10-11+12;\ a\neq 0$	$9.4; a=0, b=-1$
	27	$1,2,3,4,5,6,10-11+12$	$11.2; a=-1$
	28	$1,2,3,4,5,6,a7+b11+12;\ a\neq 0,\ b\neq -1$	9.3
	29	$1,2,3,4,5,6,a7-11+12;\ a\neq 0$	10.4
	30	$1,2,3,4,5,6,b11+12;\ b\neq 01$	11.1
	31	$1,2,3,4,5,6,-11+12$	12.1
8	1	$4,5,6,7,8,9,11,12$	$\equiv 8.1$
	2	$1,2,3,7,8,9,11,12$	$\equiv 8.2$
	3	$1,2,3,7,8,9,10,a11+12$	9.1
	4	$2,3,5,6,7,10,11,12$	$\equiv 8.4$
	5	$1,2,3,4,7,10,11,12$	$\equiv 8.5$
	6	$2,3,4,5,6,7,11,12$	$\equiv 8.6$
	7	$1,2,3,5,6,7,11,12$	$\equiv 8.7$
	8	$1,2,3,5,6,7,4+10,-(2)11+12$	$\equiv 8.8$
	9	$1,2,3,5,6,7+a11,10,b11+12$	9.2
	10	$1,2,3,5,6,10,11,a7+12$	9.2
	11	$1,2,3,4,5,6,7+a11,b11+12;\ a^2+(b+1)^2\neq 0$	9.3
	12	$1,2,3,4,5,6,7+a12,11;\ a\neq 0$	9.3
	13	$1,2,3,4,5,6,7,-11+12$	10.4
	14	$1,2,3,4,5,6,7+a10,b10-11+12;\ a^2+b^2=1$	$9.4; a=0, b=-1$
	15	$1,2,3,4,5,6,7+a11+b12,10;\ b\neq 0$	10.4
	16	$1,2,3,4,5,6,11,12$	11.1
	17	$1,2,3,4,5,6,10,a11+12$	12.1
9	1	$1,2,3,7,8,9,10,11,12$	$\equiv 9.1$
	2	$1,2,3,5,6,7,10,11,12$	$\equiv 9.2$
	3	$1,2,3,4,5,6,7,11,12$	$\equiv 9.3$
	4	$1,2,3,4,5,6,7+a11,10,b11+12$	10.4
	5	$1,2,3,4,5,6,7+a12,10,11;\ a\neq 0$	10.4
	6	$1,2,3,4,5,6,10,11,12$	12.1
10	1	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,a11+12;\ a\neq -1$	11.1
	2	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,-11+12$	12.1
	3	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10-11+12$	$11.2; a=-1$
	4	$1,2,3,4,5,6,7,10,11,12$	$\equiv 10.4$
11	1	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12$	$\equiv 11.1$
	2	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,a11+12$	12.1
12	1	$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$	$\equiv 12.1$

В таблице 3 введены такие же обозначения, как в таблице 2.

4. Компактная запись оптимальной системы алгебры L_{12}

Таблица 3 громоздкая, отягощенная нормализаторами и содержит повторяющиеся элементы в различных подалгебрах. Поэтому предлагается краткая запись оптимальной системы подалгебр алгебры L_{12} в виде таблицы 4.

Таблица 4. Компактная запись оптимальной системы алгебры L_{12}

r	i	Базис
1	7	$1+b7+12;\ b\neq 0$
	8	$1+12$

2	8	$a1+7, b1+12;\ a^2+b^2=1$
	9	$1+7+12, 10;\ a\neq 0$ или $10, 1.7$
	10	$a7-(2)11+12, 4+10$
	11	$1+12, 10$ или $10, 1.8$
	12-17	$1, 1.k; k=1,2,3,4,5,6$
	18-23	$4, 1.k; k=3,4,5,6,7,8$
	24	$2, 1+12$ или $2, 1.8$
	25	$4, a1+2+12;\ a\neq 0$
	26	$2+4, -11+12$
3	5	$7, 4+10, -(2)11+12$
	6	$a1+7, 10, b1+12;\ a^2+b^2=1$
	7-14	$1, 2.k; k=1,2,3,4,5,6,7,10$
	15-19	$4, 2.k; k=1,2,3,6,8$
	20	$2, 10, 1+12$
	21	$a1+2, 4+10, -(2)11+12$
	22-27	$1, 4, 1.k; k=1,2,3,4,5,6$
	28-35	$2, 3, 1.k; k=1,2,3,4,5,6,7,8$
	36-41	$5, 6, 1.k; k=3,4,5,6,7,8$
	42	$a1+2, 4, b11+12;\ b\neq 0$
	43	$5, 6, 2+a1+12$
	44	$a1+2, 4, b1+c3+12;\ \ b^2+c^2=1$ или 0
	45	$1, 4, 2+12$
	46	$a1+b3+5, c1+d2+6, -11+12;$
		$(b+d)^2+a^2+c^2=1$
	47	$-a3+5, a2+6, -11+12;\ a\neq 0$
	48	$a1+2, 3+4, -11+12$
	49	$1, 2+4, a10-11+12;\ a=0$ или 1
4	5-9	$1, 3.k; k=1,2,3,4,5$
	10	$4, 7, 11, 12$
	11-17	$1, 4, 2.k; k=1,2,3,4,5,6,7$
	18-28	$2, 3, 2.k; k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10(a\neq 0),11$
	29-33	$5, 6, 2.k; k=1,2,3,6,8$
	34	$a2+6, a3-5, 7, -11+12$
	35	$a1+2, 4, 11, 12$
	36	$1, 4, 10, 2+12$
	37	$1, 2+4, 10, -11+12$
	38	$1, 4, 5+10, -(2)11+12$
	39	$2, 3, a4+b5+10, -(2)11+12;\ a^2+b^2=1$
	40-45	$4, 5, 6, 1.k; k=3,4,5,6,7,8$
	46-49	$1, 5, 6, 1.k; k=3,4,5,6$
	50-55	$2, 3, 4, 1.k; k=3,4,5,6,7,8$
	56-61	$1, 2, 3, 1.k; k=1,2,3,4,5,6$
	62-64	$1, 2, 4, 1.k; k=2,5(b\neq 0),6$
	65	$d1+4, b3+5, -b2+6, a7-11+12;$
		$b^2+d^2=1$
	66	$1, 3+5, -2+6, a7-11+12$
	67	$a1+2, 5, 6, b11+12;\ b\neq 0$
	68-70	$2, a1+3, 4, 1.k; k=5,6,8\ a\neq 0$

	71-72	$a1+2,5,6,b1+c3+12;\ b^2+c^2=1$ или 0
	73	$1,5,6,2+12$
	74	$-c2+b3+4,c1+e2-a3+5,-b1+a2+d3+6,-11+12;$ $(e=1,\ d=0,\ a^2+c^2=1)\cup(e\neq 0,\ d\neq 0,\ e\neq d)$
	75	$a1+2,b1+c3+5,d1+6,-11+12,b^2+c^2+d^2=1$
	76	$1,3+5,a2+6,-11+12;\ a\neq -1$
	77-78	$1,2,3+4,1.k;k=2,6$
5	3	$1,7,10,11,12$
	4-7	$1,4,3.k;k=1,2,3,4$
	8-13	$2,3,3.k;k=1,2,3,4,5,6$
	14	$5,6,7,11,12$
	15-19	$4,5,6,2.k;k=1,2,3,6,8$
	20-23	$1,5,6,2.k;k=1,2,3,6$
	24-28	$2,3,4,2.k;k=1,2,3,6,8$
	29-36	$1,2,3,2.k;k=1,2,3,4,5(a\neq -2),6,7(a\neq -2),10$
	37	$a1+4,b3+5,-b2+6,7,-11+12;a^2+b^2=1$
	38	$1,3+5,-2+6,7,-11+12$
	39	$a1+2,5,6,11,12$
	40	$2,a1+3,4,11,12;\ a\neq 0$
	41-42	$1,2,4,2.k;k=6,7$
	43	$1,2,4,10,3+12$
	44	$1,2,4,a5+b6+10,-(2)11+12;\ a^2+b^2=1$
	45	$1,2,3+4,10,-11+12$
	46-53	$2,3,5,6,1.k;k=1,2,3,4,5,6,7,8$
	54-59	$1,2,3,4,1.k;k=1,2,3,4,5,6$
	60-63	$1,4,5,6,1.k;k=3,4,5,6$
	64-65	$2,3,1+5,6,1.k;k=2,6$
	66	$1,4,3+5,-2+6,a7-11+12$
	67	$1,4,5,6,2+12$
	68-70	$1+a3,2,5,6,1.k;k=5,6,8$
	71	$1,a2+b3+4,c3+5,d2+6,-11+12;\ a^2+b^2+(c+d)^2=1$
	72	$2,1+a3,3+5,6,-11+12$
6	2-3	$7,10,11,12,\{1,4\};\{2,3\}$
	4-6	$7,11,12,\{4,5,6\};\{1,5,6\};\{2,3,4\}$
	7-11	$1,2,3,3.k;k=1,2,3,4,5$
	12	$1,2,4,10,11,12$
	13-16	$1,4,5,6,2.k;k=1,2,3,6$
	17-27	$2,3,5,6,2.k;k=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11$
	28-34	$1,2,3,4,2.k;k=1,2,3,4,5,6,7$
	35	$1,4,3+5,2-6,7,-11+12$
	36	$1+a3,2,5,6,11,12$
	37	$2,3,1+5,6,10,-11+12$
	38	$1,2,3,4,5+10,-(2)11+12$
	39-44	$1,2,3,5,6,1.k;k=1,2,3,4,5,6$
	45-50	$2,3,4,5,6,1.k;k=3,4,5,6,7,8$
	51	$2,3,4,5,1+6,-11+12$
7	1-2	$4,5,6,4.k;k=1,2$
	3-6	$1,2,3,4.k;k=1,2,3,4$

	7	$1, 4, 5, 6, 7, 11, 12$
	8-13	$2, 3, 5, 6, 3.k; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
	14-17	$1, 2, 3, 4, 3.k; k = 1, 2, 3, 4$
	18-22	$2, 3, 4, 5, 6, 2.k; k = 1, 2, 3, 6, 8$
	23-30	$1, 2, 3, 5, 6, 2.k; k = 1, 2, 3, 4, 5(a \neq -2), 6, 7(a \neq -2), 10$
	31-36	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 1.k; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
8	1	$4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12$
	2-3	$1, 2, 3, 5.k; k = 1, 2$
	4-5	$7, 10, 11, 12, \{2, 3, 5, 6\}; \{1, 2, 3, 4\}$
	6	$2, 3, 4, 5, 6, 7, 11, 12$
	7-11	$1, 2, 3, 5, 6, 3.k; k = 1, 2, 3, 4, 5$
	12-18	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 2.k; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
9	1	$1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 11, 12$
	2	$1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12$
	3-6	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 3.k; k = 1, 2, 3, 4$
10	1-4	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 4.k; k = 1, 2, 3, 4$
11	1-2	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 5.k; k = 1, 2$
12	1	$1, 2, 3, 4, 5, 6, 6.1$

Эта таблица продолжает таблицу 2, но не включает нормализаторы. Нормализаторы легко вычисляются по правилу, приведенному в пункте 3. Существует программная реализация алгоритма вычисления нормализатора (Черевко А.А.). Таблица 2 полностью включена в таблицу 3, так как все подалгебры из таблицы 2 сохраняются. В таблице 4 введены следующие обозначения: $r.k$ – подалгебра из таблицы 2 и 4, где r обозначает размерность подалгебры, k – порядковый номер подалгебры размерности r. В круглых скобках указаны числовые множители. Например, для определения базиса подалгебры 2.12 надо взять оператор X_1 и оператор из подалгебры 1.1: $a7 + 10 - 11 + 12$, $a \neq 0$ из таблицы 2.

Строка таблицы может задавать несколько подалгебр. Их номера указаны во втором столбце. В третьем столбце сначала указаны номера операторов базиса, общих для всех подалгебр строки, затем указаны подалгебры их номерами из этой же таблицы, но меньшей размерности, или номерами операторов базиса подалгебр из абелева идеала J_6, которые объединены фигурными скобками. Если подалгебр несколько, то подалгебры меньшей размерности указываются через точку с запятой. Например, строка 6.4-6 задает три подалгебры: $\{7, 11, 12, 4, 5, 6\}; \{7, 11, 12, 1, 5, 6\}; \{7, 11, 12, 2, 3, 4\}$.

Замечание 1. В компактной оптимальной системе (КОС) алгебры L_{12} имеются подалгебры из абелевого идеала J_6, которые все перечислены в оптимальной системе L_{11} [1]. Число таких подалгебр может быть не существенно сокращено с помощью дополнительных автоморфизмов алгебры L_{12}.

Замечание 2. КОС имеет преимущество по сравнению с ОС в том, что для некоторых подалгебр указаны вложенные в них подалгебры меньшей размерности. Это важно для построения деревьев вложенных подалгебр, которым соответствуют вложенные друг в друга подмодели различных рангов.

Замечание 3. Нумерация подалгебр в таблицах 3 и 4 не совпадает. Более того, в таблице 4 число подалгебр данной размерности больше, чем в таблице 3. Это связано с тем, что некоторые подалгебры таблицы 3 объединены в одну строку с помощью параметра, который в таблице 4 принимает конкретное значение. Это сделано для того, чтобы несколько подалгебр записать в одну строку таблицы 4.

Список литературы

[1] Л. В. Овсянников, *Программа подмодели. Газовая динамика*, Прикладная математика и механика, **58**: 4 (1994), 30–55.

[2] С. В. Головин, *Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа*, Препринт № 5-96, РАН, Сибирское отделение, Институт гидродинамики, Новосибирск, 1996.

[3] А. А. Черевко, *Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых системой уравнений газовой динамики с уравнением состояния* $p = f(S)\rho^{5/3}$, Препринт № 4-96, РАН, Сибирское отделение, Институт гидродинамики, Новосибирск, 1996.

[4] С. В. Хабиров, *Оптимальные системы подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики*, Препринт института механики УНЦ РАН, Уфа, 1998.

[5] S. V. Khabirov, *Optimal systems of symmetry subalgebras for big models of gasdynamics*, Journal of the south African Mathematical Society, **24(2)** (2001), 133–146.

Елена Владимировна Макаревич
Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет,
ул. К. Маркса 12,
450000, Уфа, Россия
E-mail address: Makarevich_EV@mail.ru