S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 191–212 (2011) УДК 512.531.2
MSC 20M14

СТРОЕНИЕ ПОЛУГРУПП, ДОПУСКАЮЩИХ ВНЕШНЕПЛАНАРНЫЕ ГРАФЫ КЭЛИ

Д.В. СОЛОМАТИН

Abstract. We describe some semigroups with outerplanar Cayley graphs.

Keywords: planar, outerplanar, Cayley graph, semigroups.

1. Введение

История изучения планарных (частным случаем которых являются внешнепланарные) графов Кэли, восходит к работам Машке 1896 года [40]. Внимание математиков к обозначенному направлению не ослабевает на протяжении длительного периода времени. Последнее обусловлено тем, что графы Кэли, представляющие собой одномерные комплексы Кэли, играют важную роль в комбинаторной теории групп. Так, например, если представление группы имеет планарный комплекс Кэли, то проблема равенства слов этого представления разрешима. Более того, известно описание конечных групп, допускающих плоские графы Кэли [26]. Наличие подобных свойств и вызывает особый интерес к графам, отражающим структуру полугрупп [41]. Понятие графа Кэли для полугрупп ввел в рассмотрение Б.Зелинка в 1980 году [43]. Важность этого понятия для комбинаторной теории полугрупп продемонстрирована в работах С.В.Марголиса, Дж.К.Микина [39], а также Б.Штейнберга [42]. В частности, ими рассматривались E-унитарные инверсные моноиды и графы Кэли в представлениях полугрупп. М.-К.Хейдеманн [34] сопоставлял графы Кэли и коммуникационные сети. Активно занимался исследованием графов Кэли А.В.Келарев [35], изучая неориентированные графы Кэли. Позднее, совместно

Solomatin, D.V., Semigroups with outerplanar Cayley graphs.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект 14.740.12.0834).

Поступила 10 июля 2011 г., опубликована 19 августа 2011 г.

с С.Дж.Квином [37]–[38], ими рассматривались группы и полугруппы, удовлетворяющие некоторым комбинаторным свойствам определяющимся по графу Кэли. Такой подход упрощает обнаружение связей графов с группами и полугруппами при помощи теоретико-полугрупповых методов [28]. Подобным образом описываются все конечные инверсные полугруппы и коммутативные инверсные полугруппы с двудольными графами Кэли. Кроме того, А.В.Келарев и К.Е.Преджер [36] изучали транзитивные графы Кэли групп и полугрупп. Что касается важного свойства планарности графа, то оно исследовалось в основном для групп [1]–[3]. Ключевой проблемой исследования полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, является нахождение алгоритма распознавания внешнепланарных графов, реализуемых как графы Кэли полугрупп.

Основной целью представляется исследование внешнепланарных графов Кэли полугрупп. На пути достижения указанной цели, в данной работе будут решены вопросы внешнепланарности графов Кэли для следующих классов:

1) конечные свободные коммутативные полугруппы;

2) конечные свободные коммутативные моноиды;

3) рассыпчатые полугруппы;

4) конечнопорожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством;

5) свободные частично коммутативные полугруппы и n-веерные полурешетки.

Особый интерес представляет вопрос:

6) о допустимости графов и взятых с некоторой ориентацией и пометкой ребер, в качестве графов Кэли полугрупп.

В ряде работ [11]–[25] начато исследование свойства планарности для графов Кэли полугрупп. В частности, получен критерий планарности графов Кэли конечных полугрупп, являющихся коммутативно-свободными или прямыми произведениями циклических полугрупп, моноидов и полугрупп с нулем; охарактеризованы свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы, допускающие планарные графы Кэли.

Поэтому дальнейшие исследования естественно посвятить изучению вопросов внешнепланарности графов Кэли в таких классах, как:

7) свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы;

8) прямые произведения циклических моноидов и полугрупп с нулем;

9) прямые произведения циклических полугрупп;

10) ординальные суммы прямоугольных полугрупп.

Основным, для обоснования планарности, был выбран известный критерий Понтрягина-Куратовского [5, с. 160], но можно предложить и другие, в зависимости от способа задания полугруппы. Так, если задана полугруппа S таблицей Кэли (произвольной матрицей A, прошедшей тест ассоциативности, например, по Лайту), то рассматривается несколько возможных способов применения тестов планарности для графов Кэли полугрупп. Критерий же Понтрягина-Куратовского, равно как и эквивалентный ему критерий Вагнера, подразумевает поиск подграфов специального вида, в той или иной форме, что подчеркивает важную роль последних. В связи с этим, как раз и представляет особый интерес вопрос о допустимости графов, в качестве графов Кэли полугрупп. Итак, для продолжения дальнейших изысканий в намеченной области, зададимся целью исследования структуры полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли. Для достижения поставленной цели, решаются выше сформулированные задачи. Концепт доказательства: если обнаруженные в результате исследования условия выполнены, то полугруппа допускает внешнеплоскую укладку её графа Кэли (то есть такую укладку, при которой все вершины принадлежат одной грани, а ребра не пересекаются в плоскости) и схема этой укладки изображается; обратно, по закону контрапозиции, если найденные условия не выполнены, то указывается подграф, гомеоморфный запрещенным конфигурациям. Для решения задачи аналогично с исследованием полугрупп допускающих планарные графы, потребуется заменить запрещенные конфигурации K_5 и $K_{3,3}$ на K_4 и $K_{2,3}$, так как в силу критерия Чартрэнда-Харари [33] граф внешнепланарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных K_4 или $K_{2,3}$.

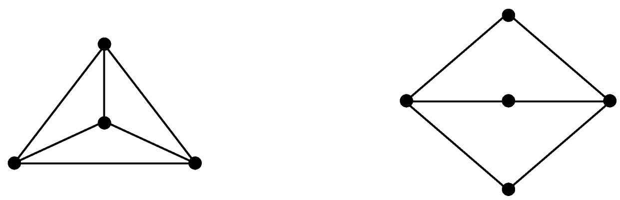

Рис. 1. Полный граф K_4 и полный двудольный граф $K_{2,3}$.

В основном содержании сформулированы необходимые и достаточные условия внешнепланарности графов Кэли большинства обозначенных классов полугрупп. Расположение материала и вся архитектура работы основана на спецкурсе, который читался автором на математическом факультете ОмГПУ для студентов и бакалавров 2010–2011уч.гг. При изложении материала мы старались определять и комментировать все основные понятия, используемые в тексте.

Определение графа можно найти в [5]. Для полноты изложения, перечислим определения более редких понятий:

Пусть S полугруппа, X – множество порождающих её элементов. Через $Cay(S, X)$ обозначим *граф Кэли* полугруппы S относительно X. Граф $Cay(S, X)$ состоит из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a, x, b), где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Заметим, что в данном случае граф Кэли является ориентированным мультиграфом с реберной раскраской. Вершины графа, как обычно изображаются точками на плоскости, а дуга (a, x, b) – линией направленной от a к b и помеченной элементом x. В данной работе будем придерживаться такого понимание графа Кэли, оно является аналогичным определению графа Кэли [1, с. 3] связанного с группой.

Обратим внимание на то, что наше понимание графа Кэли полугрупп отличается от введенного в [43], где *графом Кэли* $Cay(S, T)$ полугруппы S относительно её подмножества T называется граф с вершинами из S, и множеством дуг A состоящим из таких упорядоченных пар (x, y), где $x \neq y$ и $xt = y$ для некоторого $t \in T$. Такой граф является ориентированным графом без петель и многократных ребер.

Плоским графом называем граф, вершины которого являются точками плоскости, а ребра – непрерывными плоскими линиями без самопересечений, соединяющими вершины так, что никакие два ребра не имеют общих точек, кроме инцидентной им обоим вершины. Любой граф, изоморфный плоскому графу, называется планарным.

Два графа называются *гомеоморфными*, если оба они могут быть получены из одного и того же графа подразбиением его ребер.

Основой ориентированного мультиграфа называем граф, полученный из данного графа удалением петель и заменой всех дуг, соединяющих две вершины одним ребром, соединяющим эти вершины. Ориентированный мультиграф называем планарным, если его основа является планарным графом.

Будем говорить, что *полугруппа S допускает планарный граф Кэли*, если для некоторого множества X основа графа $Cay(S, X)$ является планарным графом.

2. Конечные свободные коммутативные полугруппы

Полугруппа, заданная конечным множеством X образующих и соотношениями вида $x^{r+m} = x^r$, $xy = yx$ для любых элементов x, y из X и любых натуральных чисел r и m, называется *конечной свободной коммутативной полугруппой*. В классе полугрупп с нулём *конечной свободной коммутативной полугруппой с нулём* называется полугруппа, заданная конечным множеством образующих и соотношениями вида $xy = yx$, обязательно $x^r = 0$, где 0 является нулевым элементом, и возможно $x^{r+m} = x^r$, для любых элементов x, y из X и любых натуральных чисел r и m.

В данном параграфе описываются конечные свободные коммутативные полугруппы, а также конечные свободные коммутативные полугруппы с нулём, графы Кэли которых являются внешнепланарными.

Теорема 2.1. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

(1) $S = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m – любые натуральные числа;

(2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих условий:

а) $h = 1$, $m \leq 2$, $t = 1$; или $r = 1$, $m = 1$, $t \leq 2$;

б) $r \leq 2$, $h \leq 2$, $m \leq 2$, $t \leq 2$ при $r + m \leq 3$, $h + t \leq 3$.

Доказательство. Известно [11], что Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1) $S = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$, где r и m – любые натуральные числа;

2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, где для натуральных r, m, h, t выполняется одно из следующих условий:

а) $m \leq 2$, $t \leq 2$;

б) $r = 1$, $h = 1$, $t = 2$; или $r = 1$, $h = 2$, $t = 1$;

в) $r = 1$, $h = 1$, $m = 2$; или $r = 2$, $h = 1$, $m = 1$;

г) $r = 1$, $m = 1$; или $h = 1$, $t = 1$;

3) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^{k+l} = c^k \rangle$, где k и l – натуральные числа, причем $l \leq 2$.

Из имеющегося списка выберем полугрупп, графы Кэли которых внешнепланарны, проанализировав каждую серию ограничений:

(1) При $S = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$ внешнеплоская укладка соответствующего графа Кэли очевидна. Граф содержит $(r + m - 1)$ вершин, по количеству элементов полугруппы, расположив которые по прямой линии слева направо в порядке порождения и соединив дугой вершины a^{r+m-1} и a^r, получим искомую укладку графа, приведенную на Рис.2.1.1.

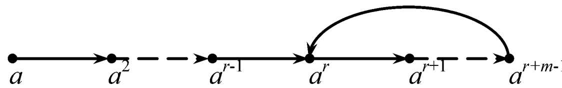

Рис. 2.1.1. Общий вид графа Кэли полугруппы $S = \langle a | a^{r+m} = a^r \rangle$.

В связи с отсутствием ограничений на r и m, получили, что все свободные полугруппы с одним порождающим элементом имеют внешнепланарный граф Кэли. Случай с двумя порождающими элементами менее тривиален.

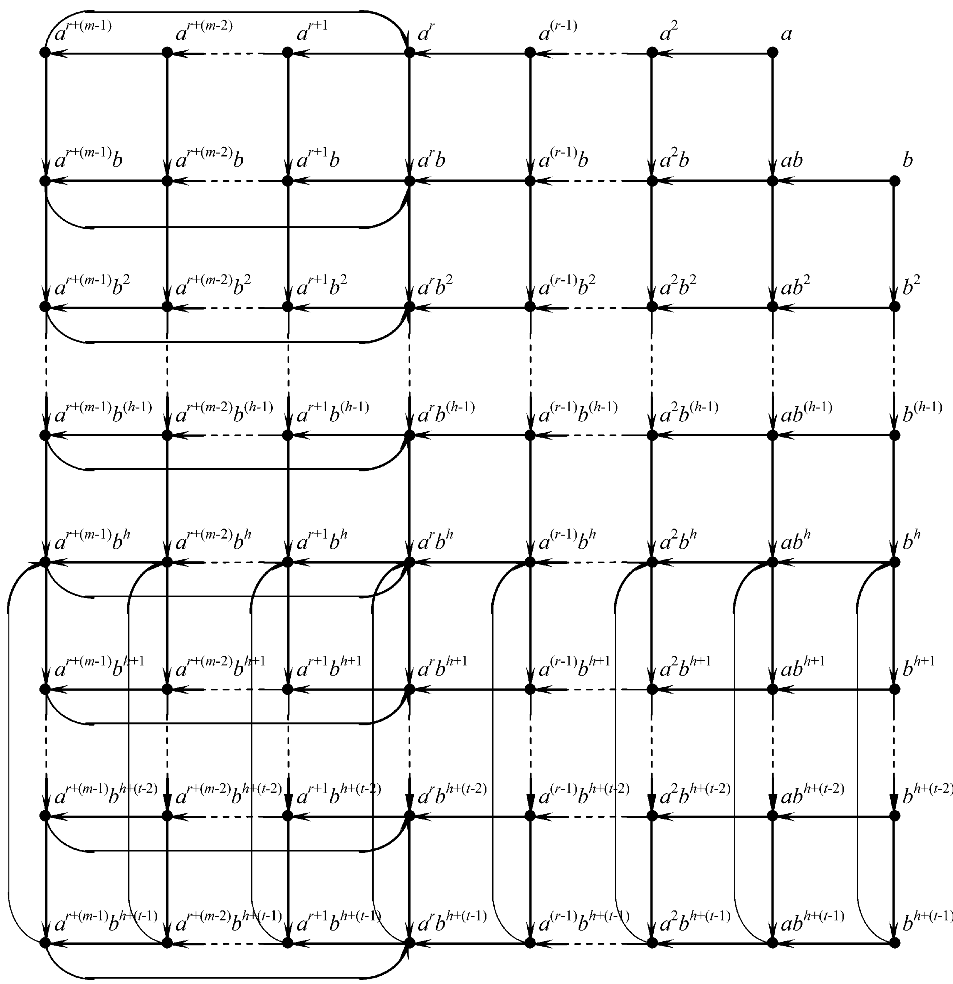

Рис. 2.1.2. Общий вид графа Кэли полугруппы
$S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$.

(2) Докажем для полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h \rangle$, что её граф Кэли внешнепланарен тогда и только тогда, когда:

а) $h = 1$, $m \leq 2$, $t = 1$; или $r = 1$, $m = 1$, $t \leq 2$;

б) $r \leq 2$, $h \leq 2$, $m \leq 2$, $t \leq 2$ при $r + m \leq 3$, $h + t \leq 3$;

Достаточность указанных ограничений на r, h, m и t для внешнепланарности доказывается приведением такой плоской укладки графа Кэли, что все его вершины принадлежат внешней грани. В каждом из указанных случаев граф имеет $((r+m)(h+t)-1)$ вершин, так как полугруппа S содержит $((r+m)(h+t)-1)$ элементов. Расположим горизонтально те из них, что получены при умножении на образующий a, вертикально – на b.

Как видно по Рис.2.1.2, ребра графа, соответствующие умножению на a и на b элементов полугруппы, с не превышающими $r + (m-1)$ и $h + (t-1)$ степенями, не пересекаются. Более того, при выполнении выше перечисленных ограничений на показатели степеней образующих элементов, ребра графа Кэли, соединяющие элементы, содержащие множитель $a^{r+(m-1)}$ с элементами, содержащими множитель a^r и $b^{h+(t-1)}$ с b^h, являются петлями или соединяют близлежащие вершины дугой, либо имеют иную возможность укладки на одной грани в плоскости без пересечения с другими ребрами. Таким образом, получили искомую укладку графа Кэли. В остальных случаях эти требования не выполняются, что видно из Рис.2.1.2 и доказательства аналогичной теоремы о планарности.

(3) Для доказательства не внешнепланарности графа Кэли 3-порожденной полугруппы $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^{k+l} = c^k \rangle$ приведём его плоскую укладку для $l = 2$ на Рис.2.1.3, выделив обнаруживаемый уже при $l = k = 1$ подграф, гомеоморфный $K_{2,3}$.

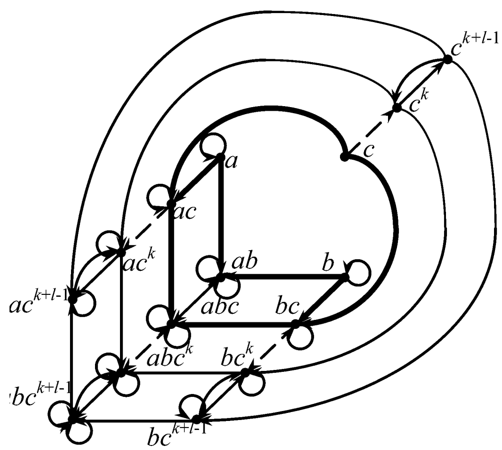

Рис. 2.1.3. Планарный граф Кэли, содержащий подграф гомеоморфный $K_{2,3}$, полугруппы $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^{k+l} = c^k \rangle$.

Доказательство завершено.

Перейдем к рассмотрению полугрупп с нулём.

Теорема 2.2. Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих внешнепланарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

(1) $S = \langle a | a^r = 0 \rangle$, где r – любое натуральное число;

(2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^r = 0, b^h = 0 \rangle$, где r, h – натуральные числа, причем $r \leq 2$, $h \leq 2$;

(3) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0\rangle$, где для натуральных r, m, h выполняется хотя бы одно из следующих условий:

а) $h = 1$;

б) $r + m = 3$, $h = 2$;

в) $r + m = 2$, $h > 2$.

(4) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^1 = 0\rangle$.

Доказательство. Известно [11], что Граф Кэли конечной свободной коммутативной полугруппы S с нулём 0 относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задана копредставлением одного из следующих видов:

1) $S = \langle a | a^r = 0\rangle$, где r – любое натуральное число;

2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^r = 0, b^h = 0\rangle$, где r, h – любые натуральные числа;

3) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0\rangle$, где r, m, h – натуральные числа, причем $m \leq 2$, либо $h = 1$;

4) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^k = 0\rangle$, где k – любое натуральное число.

Из имеющегося списка выберем полугрупп, графы Кэли которых внешнепланарны, проанализировав каждую серию ограничений:

(1) Граф Кэли полугруппы $S = \langle a | a^r = 0\rangle$ содержащий r вершин, по числу элементов полугруппы, является внешнепланарным. Его укладка на плоскости близка к изображенной на Рис 2.1.1. с единственным отличием в том, что цикл заменяется петлёй.

(2) С графом Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^r = 0, b^h = 0\rangle$, где $r \leq 2$, $h \leq 2$, аналогичная ситуация. В этом случае его укладка содержит подграф изображенного на Рис.2.1.2. графа с вершинами соответствующими элементам, содержащим a и b в степенях, не превышающих $(r-1)$ и $(m-1)$. А также содержит вершину 0 соединенную ребрами с элементами вида $a^{r-1}b^i$ и $a^j b^{h-1}$, где $i < h$ и $j < r$.

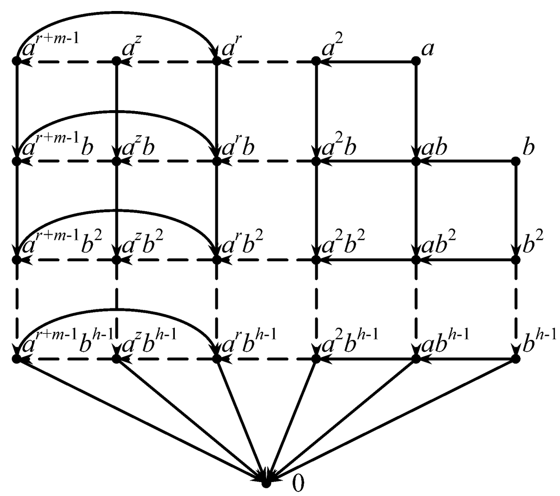

Рис. 2.2.1. Граф Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0\rangle$.

(3) Докажем что граф Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0\rangle$ внешнепланарен тогда и только тогда, когда: $h = 1$ или $r + m = 3$, $h = 2$ или $r + m = 2$, $h > 2$.

Достаточность указанных ограничений на r, h и m доказывается приведением соответствующей укладки графа Кэли. В каждом из указанных случаев граф имеет $((r+m)h)$ вершин, ибо полугруппа S содержит $((r+m)h)$ элементов. Расположим горизонтально элементы полугруппы, полученные при умножении на образующий элемент a, вертикально – на b. Как видно по Рис.2.2.1, при выполнении вышеперечисленных ограничений на показатели степеней образующих элементов, ребра графа Кэли не пересекаются и образуют внешнеплоскую укладку графа.

Для доказательства необходимость ограничений, воспользуемся законом контрапозиции. Если не выполняются условия: $h = 1$ или $r + m = 3$, $h = 2$ или $r+m = 2$, $h > 2$, то граф Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^h = 0\rangle$ не является внешнепланарным, так как его основа содержит подграф, гомеоморфный $K_{2,3}$.

(4) Для полугруппы $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = a, b^2 = b, c^k = 0\rangle$ граф Кэли, очевидно, внешнепланарен при $k = 1$, но уже при $k = 2$ и более в его основе обнаруживается подграф, гомеоморфный $K_{2,3}$ как выделенный полужирными линиями на Рис.2.1.3.

Таким образом, получили критерий внешнепланарности графа Кэли для конечных свободных коммутативных полугрупп.

3. Конечные свободные коммутативные моноиды

Под циклическим моноидом понимается любой гомоморфный образ свободного моноида с одним образующим. Очевидно, что любой циклический моноид изоморфен либо циклической группе, либо получен из циклической полугруппы внешним присоединением единицы. Конечный моноид называется свободным коммутативным, если он является свободным коммутативным произведением циклических моноидов в классе моноидов.

Легко понять, что *конечный свободный коммутативный моноид* имеет копредставление вида $S = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n | a_j^{m_j} = 1, a_i^{r_i+m_i} = a_i^{r_i}, i \in I, j \in J\rangle$, где $I \cup J = \overline{1, n}$, $I \cap J = \emptyset$, $J \neq \emptyset$, в классе всех коммутативных моноидов. Заметим, что соотношение вида $a_j^{m_j} = 1$ эквивалентно соотношениям вида: $a_j^{1+m_j} = a_j$, $a_k a_j^{m_j} = a_k$ для любого индекса $k \in \overline{1, n}$. Граф Кэли будем рассматривать относительно множества образующих, указанных в копредставлении; понятно, что это множество является множеством свободных образующих моноида S. Перечислим конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие внешнепланарные графы Кэли:

Теорема 3.1. Граф Кэли свободного коммутативного моноида S с циклическими соотношениями внешнепланарен тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:

(1) $S = \langle a | a^m = 1\rangle$, где m – любое натуральное число;

(2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1\rangle$, либо $S = \langle a, b | ab = ba, a^m = 1, b^t = 1\rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений:

а) $t = 1$; б) $m \leq 2$, $t = 2$;

(3) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c = 1\rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$.

Доказательство. Известно [14], что граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:

1) $S = \langle a | a^m = 1 \rangle$, где m – любое натуральное число;

2.1) $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, где для натуральных r, m, t выполнено одно из следующих ограничений: а) $t \le 2$; б) $m \le 2$, $t > 2$;

2.2) $S = \langle a, b | ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, где m и t – натуральные числа, причем $t \le 2$;

3.1) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h, c^k = 1 \rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k выполнено одно из следующих ограничений: а) $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$; б) $m \le 2$, $t \le 2$, $k = 1$; в) $m \le 2$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$;

3.2) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \le 2$;

3.3) $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$;

4) $S = \langle a, b, c, d | ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc,$
$a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \le 2$.

(1) Для доказательства подробно рассмотрим каждую из возможных ситуаций. Если полугруппа порождена одним образующим элементом, то граф допускает внешнеплоскую укладку для любого числа элементов такой полугруппы.

(2) Докажем что граф Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, либо $S = \langle a, b | ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \rangle$, внешнепланарен тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из ограничений: а) $t = 1$; б) $m \le 2$, $t = 2$. Достаточность указанных ограничений для планарности доказывается приведением внешнеплоской укладки графа Кэли на основании схемы по Рис.3.1.1. В противном случае в основе усматривается подграф, гомеоморфный $K_{2,3}$.

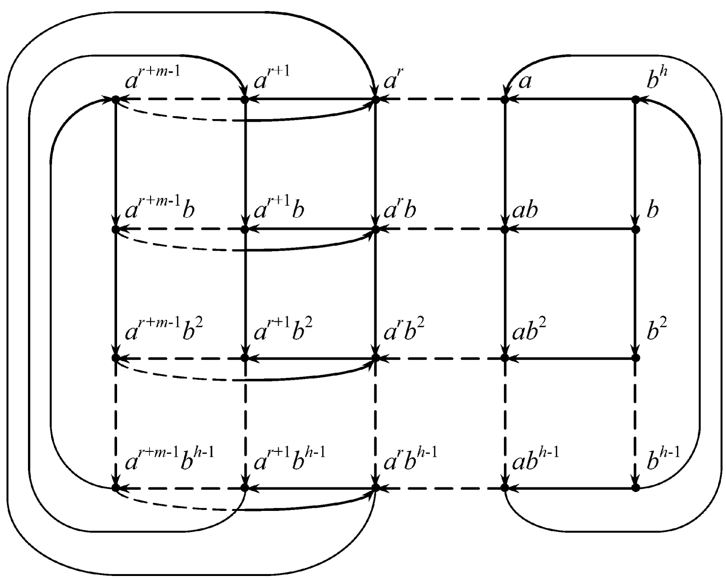

Рис. 3.1.1. Граф Кэли полугруппы $S = \langle a, b | ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$.

(3) Перейдем к рассмотрению случая, при котором множество образующих полугруппы состоит из трех элементов.

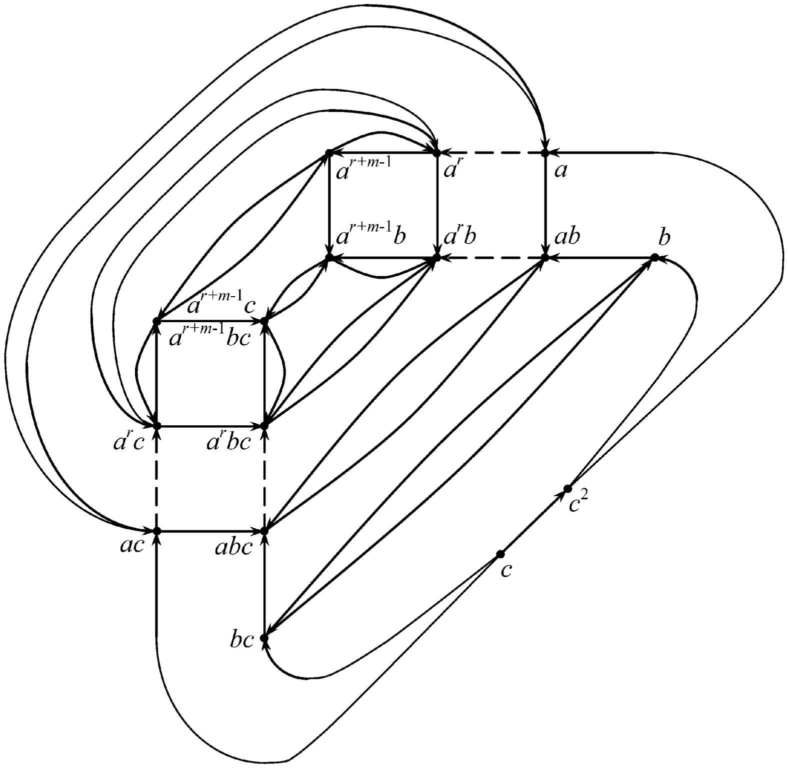

Рис. 3.1.2. Граф Кэли коммутативной полугруппы
$S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = 1\rangle$.

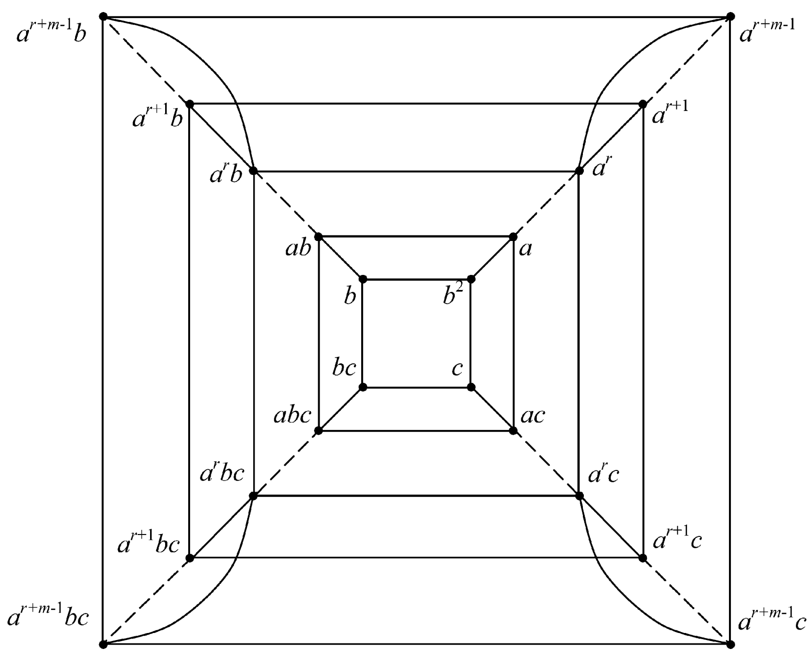

Рис. 3.1.3. Основа графа Кэли коммутативной полугруппы
$S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1\rangle$.

Для полугрупп $S = \langle a, b, c | ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c = 1\rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \leq 2$, имеется внешнеплоская укладка. В противном случае обнаруживается гомеоморфный графу K_4 подграф, равно как и на Рис.3.1.2, Рис.3.1.3.

В каждом из остальных случаев основа графа содержит подграф, гомеоморфный графу $K_{2,3}$. Таким образом, получен критерий внешнепланарности графа Кэли конечных свободных коммутативных моноидов.

4. Рассыпчатые полугруппы

Известно, что свойство планарности графа Кэли не является инвариантом полугруппы, а существенно зависит от выбора порождающих элементов. Поэтому естественно рассматривать графы Кэли полугрупп относительно минимальных множеств образующих. Особый случай доставляют полугруппы, в которых любое минимальное множество образующих совпадает со всей полугруппой. Нетрудно показать, что это возможно тогда и только тогда, когда полугруппа S является рассыпчатой, то есть для любых элементов a, b из S выполняется $ab = a$ или $ab = b$.

Решим задачу описания рассыпчатых полугрупп, допускающих внешнепланарный граф Кэли. Любая рассыпчатая полугруппа является ординальной суммой сингулярных полугрупп [28, с. 50]. Напомним, что ординальной суммой попарно непересекающихся полугрупп S_e, где e пробегает цепь P, называется полугруппа $S = \bigcup_{e\in P} S_e$, в которой при $e < f$ для любых $a \in S_e$ и $b \in S_f$ действует правило умножения $ab = ba = a$. Полугруппа называется *сингулярной*, если она является полугруппой левых или правых нулей.

Лемма. Основа графа Кэли n-элементной полугруппы правых нулей является полным графом K_n.

Доказательство. Множество вершин графа Кэли полугруппы правых нулей совпадает с множеством элементов этой полугруппы, причем каждый из них входит в множество образующих. Более того, граф Кэли полугруппы правых нулей содержит помеченное ребро (a, x, b) тогда и только тогда, когда $x = b$. Следовательно, любая вершина графа Кэли такой полугруппы, будет соединена дугой с каждой вершиной этого графа. То есть основа этого графа является полным графом K_n.

Теорема 4.1. Пусть S - рассыпчатая полугруппа и $S = \bigcup_{e\in P} S_e$, соответствующая ординальная сумма сингулярных полугрупп. Тогда S допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:

(1) $|P| = 1$ и $|S| < 4$, если S – полугруппа правых нулей;

(2) $|P| = 2$ и выполнено одно из условий:

а) обе компоненты – полугруппы правых нулей и $|S| < 4$;

б) только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей, при этом $|S_e| \leq 2$, и другая компонента также содержит менее трех элементов;

в) обе компоненты – полугруппы левых нулей, и одна из них одноэлементная, либо каждая содержит не более двух элементов;

(3) $|P| = 3$ и выполнено одно из условий:

а) все компоненты – полугруппы правых нулей и $|S| < 4$;

б) все компоненты являются полугруппами левых нулей и $|S| < 5$;

Доказательство. Известно [15], что рассыпчатая полугруппа $S = \bigcup_{e \in P} S_e$, заданная ординальной суммой сингулярных полугрупп, допускает планарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:

1) $|P| = 1$ и $|S| < 5$, если S – полугруппа правых нулей;

2) $|P| = 2$ и выполнено одно из условий:

а) обе компоненты – полугруппы правых нулей и $|S| < 5$;

б) только одна из компонент S_e является полугруппой правых нулей, при этом $|S_e| \leq 3$, а другая компонента содержит менее трех элементов;

в) обе компоненты – полугруппы левых нулей, и одна из них содержит менее трех элементов;

3) $|P| = 3$ и выполнено одно из условий:

а) все компоненты – полугруппы правых нулей и $|S| < 5$;

б) две из компонент содержат по одному элементу, а третья компонента – полугруппа левых нулей;

в) все компоненты являются полугруппами левых нулей, и более того: ($|S| \leq 5$ или $|S_e| = 2$ для любого $e \in P$);

4) $|P| = 4$ и $|S| \leq 5$.

Для полугрупп, удовлетворяющих условию теоремы, строится внешнеплоская укладка соответствующего графа Кэли. Если полугруппа не удовлетворяет приведенным выше условиям, то основа её графа Кэли содержит подграф, гомеоморфный K_4 или $K_{2,3}$.

(1) Если $|P| = 1$, то в исследуемой полугруппе $S = \bigcup_{e \in P} S_e$ внешнепланарность зависит непосредственно от внешнепланарности полугрупп левых или правых нулей. Основа графа Кэли полугруппы левых нулей L состоит из множества изолированных вершин L и, следовательно, является внешнепланарным для любого числа вершин. Если единственной компонентой является полугруппа правых нулей, то по лемме, при числе элементов не менее 4, соответствующий граф Кэли не является внешнепланарным.

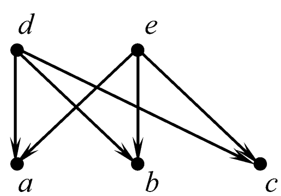

Рис. 4.1.1. Ориентированная основа Графа Кэли полугруппы $S = \{a, b, c\} \cup \{d, e\}$, где $\{a, b, c\}$, $\{d, e\}$ являются полугруппами левых нулей.

(2) Рассмотрим возможные ситуации объединения двух полугрупп, когда $|P| = 2$. Граф Кэли, в таком случае будет являться двудольным графом, причем в каждой из долей будут находиться вершины соответствующие объединяемым полугруппам. Но так как P – цепь, каждый элемент одной полугруппы будет связан ребром с каждым элементом другой. Хорошо известно, что двудольный граф не будет являться внешнепланарным, если число вершин в одной из его компонент больше либо равно 3, в другой – больше либо равно 2. Например, основа графа Кэли полугруппы $S = \{a, b, c\} \cup \{d, e\}$, являющейся ординальной суммой двух полугрупп левых нулей является полным двудольным графом $K_{2,3}$. Ориентированная основа такого графа изображена на Рис.4.1.1.

Предположим теперь, что одна из объединяемых полугрупп является полугруппой правых нулей. Если в ней не более двух элементов, то граф Кэли допускает внешнеплоскую укладку. В противном случае, выбрав три минимально возможных неудовлетворяющих условию внешнепланарности, элемента полугруппы правых нулей, по лемме получим полный граф K_3. Причем каждая из его вершин, в силу того, что P является цепью, будет соединена ребром с одной из вершин, соответствующей элементу второй компоненты ординальной суммы. Таким образом получим подграф, гомеоморфный K_4. Если же и вторая компонента – полугруппа правых нулей, то соединение каждой вершины графа K_2 с каждой вершиной графа K_2 будет содержать K_4 в качестве подграфа, следовательно, условие $|S| < 4$ необходимо для выполнения внешнепланарности в данном случае.

(3) Пусть $|P| = 3$. Если все объединяемые компоненты являются полугруппами левых нулей, то при объединении трех двухэлементных полугрупп и при объединении двух одноэлементных с полугруппой левых нулей произвольного порядка граф Кэли имеет плоскую укладку, аналогичную изображенным на Рис.4.1.2 и Рис.4.1.3 плоским укладкам соответствующих основ, не являющихся внешнепланарными при $n \geq 3$, так как обнаруживается подграф, гомеоморфный $K_{2,3}$. Если все объединяемые компоненты являются полугруппами правых нулей, то для плоской укладки необходимо и достаточно чтобы $|S| < 4$, так как каждая вершина графа Кэли будет соединена ребром с каждой вершиной, иначе будет присутствовать подграф K_4.

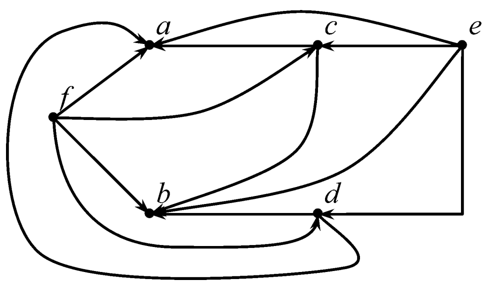

Рис. 4.1.2. Ориентированная основа Графа Кэли ординальной суммы трех двухэлементных полугрупп левых нулей $S = \{a, b\} \cup \{c, d\} \cup \{e, f\}$.

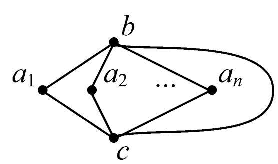

Рис. 4.1.3. Основа графа Кэли ординальной суммы двух одноэлементных полугрупп с полугруппой левых нулей $S = \{b\} \cup \{c\} \cup \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

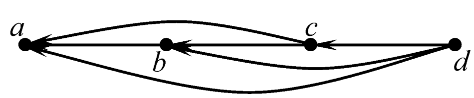

Рис. 4.1.4. Подграф Графа Кэли полугруппы $S = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{d\}$.

(4) Граф Кэли наименьшей возможной полугруппы, для которой $|P| = 4$, содержит подграф, гомеоморфный графу K_4, изображенный на Рис.4.1.4. Причем независимо от того, образуют складываемые множества полугруппы правых или левых нулей и в каком порядке они располагаются, так как достаточно выбрать по одному представителю.

Что и требовалось доказать.

5. Конечнопорожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством

Прежде чем сформулировать полученный результат, напомним, что *графом Кэли* полугруппы S относительно множества образующих её элементов X, мы называем конечный ориентированный мультиграф $Cay(S, X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a, x, b), где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$. Таким образом, для каждого элемента из S, граф Кэли имеет соответствующую вершину, и для всех элементов $a \in S$, $x \in X$, имеются дуги от a до ax, помеченные элементом x.

Вышеупомянутое определение задает ориентированный мультиграф с помеченными ребрами. Но существует несколько небольших разновидностей, например, в некоторых контекстах, вместо правого умножения используется левое. Тем самым можно разделять правые и левые графы Кэли. Очевидно, что данные понятия совпадают для случая коммутативных полугрупп, в противном же случае их можно исследовать с точностью до антиизоморфизма, а принцип двойственности позволяет не воспроизводить соответствующие утверждения для одного из взаимно двойственных случаев.

Теорема 5.1. Нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп: $S_{2,k} = \langle a, b | ab = b^k \rangle$, при $k \leq 3$, $S_3 = \langle a, b | aba = ba \rangle$ или изоморфна полугруппе $S_{2,1} = \langle a, b | ab = b \rangle$.

Доказательство. Известно [20], что нециклическая полугруппа с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда она антиизоморфна одной из полугрупп:

$S_1 = \langle a, b | ab = ba \rangle$, $S_{2,k} = \langle a, b | ab = b^k \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, $S_3 = \langle a, b | aba = ba \rangle$, $S_4 = \langle a, b | aba = b \rangle$, $S_5 = \langle a, b | a^2 = b^2 \rangle$, $S_6 = \langle a, b | aba^2 = ba \rangle$; или изоморфна одной из полугрупп: S_1, $S_{2,1}$, S_4, S_5.

Выполним проверку допустимости внешнепланарного графа Кэли вышеупомянутых полугрупп. В большинстве случаев элементы a и b неразложимы, следовательно, они входят в любое множество образующих. Более того, $\{a, b\}$ – минимальное множество образующих, поэтому графы Кэли рассматриваются относительно них. Планарность графа Кэли свободной коммутативной 2-порожденной полугруппы $S_1 = \langle a, b | ab = ba \rangle$ не вызывает сомнений, тем не менее, внешнепланарным он не является.

Для оставшихся некоммутативных полугрупп встаёт вопрос о равенстве слов, но каких либо принципиальных трудностей при его решении не возникает. Достаточно лишь внимательно выполнять преобразования, с использованием определяющих соотношений. Покажем, например, что в полугруппе изоморфной $S_{2,1}$ для любого n, $a^n b = b$. Действительно, при $n = 1$, $ab = b$ является определяющим соотношением данной полугруппы, а если $a^n b = b$ при некотором $n = k$, то $a^n = b$ и при $n = k + 1$, так как $a^{k+1} b = (a^k a) b = a^k (ab) = a^k b = b$, следовательно, $a^n b = b$ для любого n. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что каждый элемент данной полугруппы представим в виде $b^i a^j$, а дугами, помеченными элементами a и b, в графе Кэли соединяются соответственно $b^i a^j$ с $b^i a^{j+1}$ и $b^i a^j$ с b^{i+1}, для $i, j \geq 0$. Поэтому внешнеплоскую укладку можно осуществить в виде приведенной на Рис.5.1.1.

Перейдём к рассмотрению графов Кэли полугрупп антиизоморфных вышеуказанным на Рис.5.1.2 и Рис.5.1.3. Вершины графов Кэли таких полугрупп будут соответствовать элементам, полученным умножением образующих слева и выполнением дальнейших преобразований используя определяющие соотношения. При анализе оставшихся вариантов, усматриваются запрещенные конфигурации $K_{2,3}$ и K_4. Теорема доказана.

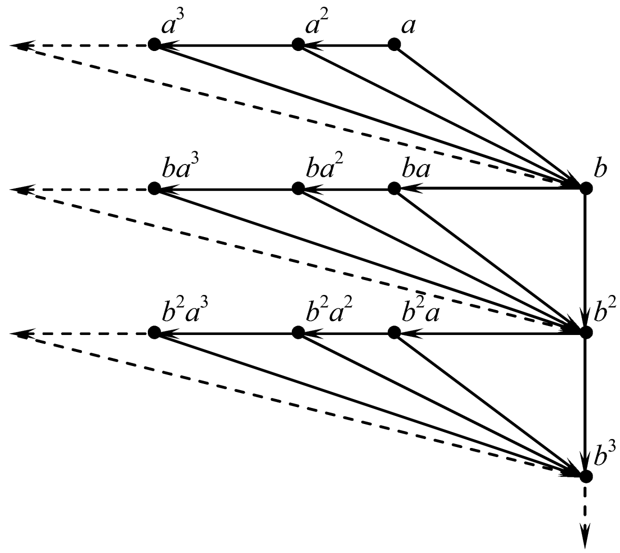

Рис.5.1.1. Схема внешнеплоской укладки графа Кэли полугруппы, изоморфной $S_{2,1} = \langle a, b | ab = b \rangle$.

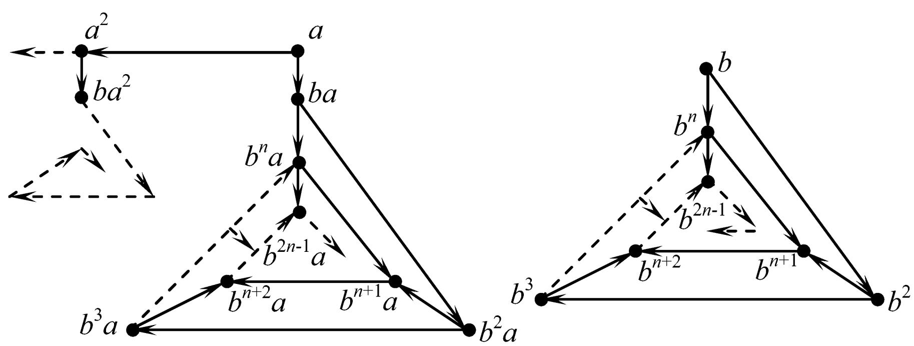

Рис.5.1.2. Схема плоской укладки графа Кэли полугруппы, антиизоморфной $S_{2,n} = \langle a, b | ab = b^n \rangle$, при $n \geq 1$, который является внешнепланарным при $n \leq 3$.

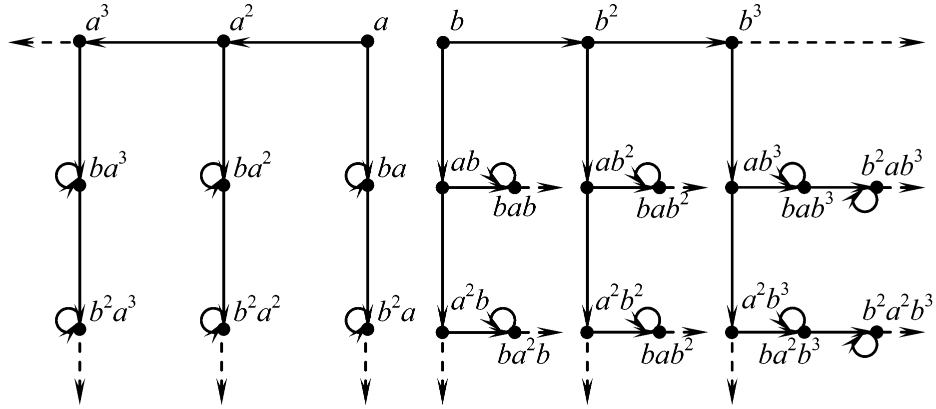

Рис.5.1.3. Схема внешнеплоской укладки графа Кэли полугруппы, антиизоморфной $S_3 = \langle a, b | aba = ba \rangle$.

6. Свободные частично коммутативные полугруппы и n-веерные полурешетки

Напомним из [9, с. 1296] и [29, с. 460], что если дан обыкновенный граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу, как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, \ldots, a_n\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i a_j = a_j a_i$ для тех и только тех a_i и a_j, которые соединены ребром в графе Γ.

В следующей теореме описывается влияние графа коммутативности множества образующих элементов частично коммутативной свободной полугруппы на внешнепланарность графа Кэли последней. Как оказалось, существенной является валентность вершин графа коммутативности, то есть не только число элементов множества образующих, но и количество коммутирующих пар влияет на внешнепланарность графа Кэли полугруппы.

Теорема 6.1. Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы $S(\Gamma)$, соответствующей графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, внешнепланарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе Γ равна нулю, то есть полугруппа $S(\Gamma)$ некоммутативная.

Доказательство. Известно [22], что Граф Кэли частично коммутативной свободной полугруппы $S(\Gamma)$, соответствующей графу коммутативности Γ множества образующих её элементов, планарен тогда и только тогда, когда степень любой вершины в графе не превосходит единицы.

Если графы коммутативности множества образующих частично коммутативной свободной полугруппы удовлетворяет условию теоремы, то данная полугруппа вообще не содержит коммутирующих элементов, тогда основа её графа Кэли является лесом – внешнепланарным графом. Если же имеется хотя бы одна пара коммутирующих среди образующих элементов, то в графе Кэли данной полугруппы обнаруживается не внешнепланарный подграф, схематично представленный на Рис.6.1.1, где s – слово, завершающееся элементом, не коммутирующим с a, b, c, d.

Теорема 6.1 доказана.

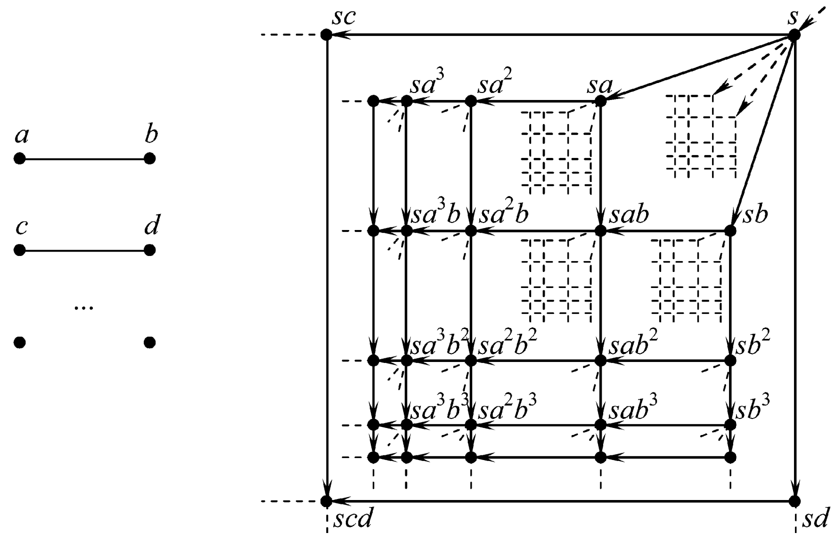

Рис.6.1.1. Фрагмент графа коммутативности и схема укладки графа Кэли соответствующей полугруппы.

Перейдем теперь к n-веерным полурешеткам. Напомним, что полурешеткой называется коммутативная полугруппа идемпотентов [28, с. 31].

Будем называть n-*веерной* полурешетку S_k^n с нулем, для $1 \leq n \leq k$, заданную копредставлением $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k | a_i^2 = a_i, a_i a_j = a_j a_i, a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n} = 0 \rangle$, где $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – пробегают все размещения без повторений из k элементов $1, 2, \ldots, k$ по n, а i, j принимают всевозможные значения от 1 до k. Следующая теорема выделяет в классе таких полугрупп все допускающие внешнепланарные графы Кэли полугруппы, на языке ограничений количества элементов фиксированной длины. Для краткости формулировки, обозначим $S^{(2)}$ – множество всех ненулевых слов полугруппы S вида $a_i a_j$, $i \neq j$.

Теорема 6.2. n-веерная полурешетка $S = S_k^n$ допускает внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $n \leq 2$.

Доказательство. Известно [22], что n-веерная полурешетка $S = S_k^n$ допускает планарный граф Кэли тогда и только тогда, когда $|S^{(2)}| \leq 3$, то есть слов длины 2 в данной полугруппе не более чем 3, для внешнепланарности ограничение более сильное и требует полного отсутствия оных. В самом деле, пусть S_k^n – исследуемая полурешетка, порожденная k образующими.

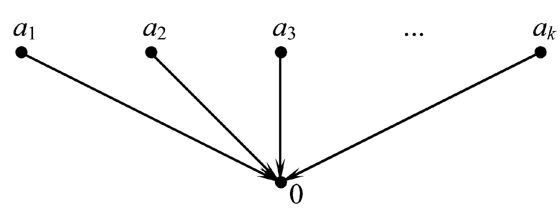

Рис.6.2.1. Схема внешнеплоской укладки ориентированной основы графа Кэли полугруппы $S = S_k^2$ при $k \geq 1$.

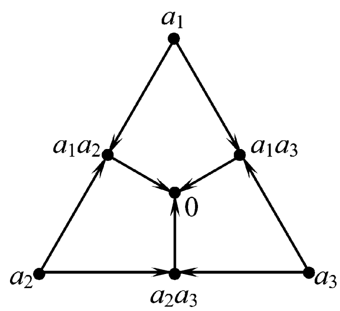

Рис.6.2.2. Ориентированная основа графа Кэли полугруппы S_3^n при $n \geq 3$.

Отметим, что всякая n-веерная полурешетка обладает единственным минимальным порождающим множеством $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. В связи с этим, изучая вопрос планарности, имеет смысл рассматривать графы Кэли полугруппы относительно минимального порождающего множества. Рассмотрим различные значения параметров n и k. Для полугруппы $S = S_k^2$, при значении $k \geq 1$, схема внешнепланарной укладки ориентированной основы её графа Кэли относительно минимального множества образующих приведена на Рис.6.2.1, в то же время $S = S_k^1 = \{0\}$ очевидно допускает внешнепланарный граф Кэли.

В случае же, когда $S = S_3^n$, для возможных $n \geq 3$, схема укладки ориентированной основы графа Кэли полугрупп относительно минимального множества образующих приведена на Рис.6.2.2, при этом внешнепланарным данный граф не является, так как содержит подграф, гомеоморфный графу K_4 с некоторой ориентацией ребер. Кроме того, прочие полугруппы не удовлетворяют условию планарности их графа Кэли.

Теорема доказана.

7. О допустимости графов K_4 и $K_{2,3}$ взятых с некоторой ориентацией и пометкой ребер, в качестве графов Кэли полугрупп

При изучении вопросов планарности важную роль играю графы K_5 и $K_{3,3}$. Ранее [12] было доказано, что если $Cay(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S, то $Cay(S, E)$:

1) не изоморфен полному двудольному графу $K_{3,3}$ с любой ориентацией и раскраской (разметкой) ребер;

2) изоморфен полному графу K_5 с единственной ориентацией ребер тогда и только тогда, когда S имеет копредставление:
$S = \langle a, b | ab = ba, a = b^2 = a^3b, a^2 = ab^2, b = a^3 = a^2b^2 \rangle$.

Продолжая исследование в данном направлении заметим, что при изучении вопросов внешнепланарности, на основании критерия Чартрэнда-Харари, ключевая роль отводится графам K_4 и $K_{2,3}$. Ниже показано, что не существует полугрупп, графы Кэли которых изоморфны полному графу K_4 или полному двудольному графу $K_{2,3}$ с некоторой ориентацией и раскраской ребер.

Теорема 7.1. Если $Cay(S, E)$ – граф Кэли конечной полугруппы S, то $Cay(S, E)$:

(1) не изоморфен полному графу K_4 с любой ориентацией и раскраской ребер;

(2) не изоморфен полному двудольному графу $K_{2,3}$ с любой ориентацией и раскраской ребер.

Доказательство. Пусть n – число вершин, m – ребер, t – число элементов порождающего множества полугруппы заданной некоторыми соотношениями. Тогда число ребер соответствующего возможного графа Кэли $m = tn$. Таким образом, $K_{2,3}$ и K_4 с любой ориентацией ребер не являются графом Кэли, поскольку их число ребер не делится на число вершин.

Что и требовалось доказать.

8. Заключение

Для классификации групп с внешнепланарными графами Кэли важно получить ответы на следующие открытые вопросы: найти условия, при которых свободное коммутативное произведение двух конечных полугрупп A, B с внешнепланарными графами Кэли обладает тем же свойством; найти условия, при которых прямое произведение двух полугрупп A, B с внешнепланарными графами Кэли обладает тем же свойством; найти условия, при которых раздувание (inflation) полугруппы с внешнепланарным графом Кэли обладает тем же свойством; описать внешнепланарные графы Кэли полугруппы, полученной раздуванием полугруппы правых нулей; описать конечные коммутативные клиффордовы полугруппы (в частности, полурешетки), допускающие внешнепланарный граф Кэли (с точностью до групп); найти абстрактную характеристику графов Кэли полугрупп; описать полугруппы, полученные добавлением соотношения (не являющегося следствием исходных соотношений), допускающие внешнепланарный граф; описать полугруппы Фибоначчи, допускающие внешнепланарный граф Кэли.

Список литературы

[1] Ж.Т. Беленкова, *Все плоские графы Кэли группы S_4*, Препринт. Омск: Омский госуниверситет, 1997.

[2] Ж.Т. Беленкова, В.А. Романьков, *Плоские графы Кэли конечных групп*, Препринт. Омск: Омский госуниверситет, 1997.

[3] Ж.Т. Беленкова, В.А. Романьков, *Регулярные графы Кэли*, Сиб. мат. журн. Депонирована в ВИНИТИ, **802-В97**, 1997.

[4] В.А. Евстигнеев, *Применение теории графов в программировании*, Под ред. А. П. Ершова. Москва, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985. Zbl 0561.90060

[5] В.А. Емеличев, О.И. Мельников, В.И. Сараванов, Р.И. Тышкевич, *Лекции по теории графов*, Москва, Наука, 1990. MR 1158046

[6] А.А. Зыков, *Основы теории графов*, Москва, Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1987. MR 0909295

[7] Р. Линдон, П. Шупп, *Комбинаторная теория групп*, Москва, Мир, 1980. MR 0593321

[8] В. Липский, *Комбинаторика для программистов*, Пер. с польск., Москва, Мир, 1988.

[9] Л.Ю. Полякова, *Резольвенты для свободных частично коммутативных моноидов*, Сибирский математический журнал, **48** (2007), 1295–1304. MR 2397511

[10] А. Скопенков, *Миникурс по топологической теории графов*, http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/kuratow.pdf

[11] Д.В. Соломатин, *Конечные свободные коммутативные полугруппы с планарными графами Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **3** (2003), 32–38.

[12] Д.В. Соломатин, *О допустимости некоторых графов в качестве графов Кэли полугрупп*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **4** (2004), 32–34.

[13] Д.В. Соломатин, *Рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли*, Международная алгебраическая конференция в Екатеринбурге, посвященная столетию со дня рождения П.Г.Конторовича и 70-летию Л.Н.Шеврина (тезисы докладов). Екатеринбург, Изд-во УрГУ, (2005), 14–15.

[14] Д.В. Соломатин, *Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие планарный граф Кэли*, Вестник Омского университета. Омск, Изд-во ОмГУ, **4** (2005), 36–38.

[15] Д.В. Соломатин, *Рассыпчатые полугруппы с планарными графами Кэли*, Известия ВГПУ: Серия "Естественные и математические науки". - Волгоград: Изд-во "Перемена". **13** (2005), 27–31.

[16] Д.В. Соломатин, *Прямые произведения циклических моноидов и полу-групп с нулем, допускающие планарный граф Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов: Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **6** (2006), 51–63.

[17] Д.В. Соломатин, *Прямые произведения циклических полугрупп, допускающие планарный граф Кэли*, Сибирские Электронные Математические Известия, http://semr.math.nsc.ru, **3** (2006), 238–252. MR 2276023

[18] Д.В. Соломатин, *Определение планарности графов Кэли прямых произведений циклических полугрупп*, Программа для ЭВМ, зарегистрированная в ОФАП №50200501609 от 24 ноября 2005 года.

[19] Д.В. Соломатин, *Проверка допустимости графа в качестве графа Кэли полугруппы*, Программа для ЭВМ, зарегистрированная в ОФАП №50200600078 от 02 февраля 2006 года.

[20] Д.В. Соломатин, *Конечнопорожденные полугруппы с одним определяющим соотношением и с тождеством, допускающие планарные графы Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **6** (2007), 42–48.

[21] Д.В. Соломатин, *Ординальные суммы прямоугольных полугрупп, допускающие планарные графы Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **7** (2008), 33–41.

[22] Д.В. Соломатин, *Свободные частично коммутативные полугруппы и n-веерные полурешетки с планарными графами Кэли*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **8** (2009), 36–39.

[23] Д.В. Соломатин, *Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы с планарными графами Кэли*, Международная конференция "Мальцевские чтения посвященная столетию со дня рождения А.И.Мальцева (тезисы докладов). Новосибирск, Изд-во НГУ, (2009), 166–167.

[24] Д.В. Соломатин, *О критериях планарности для графов Кэли полугрупп*, Математика и информатика: наука и образование: Межвузовский сборник научных трудов. Ежегодник. Омск, Изд-во ОмГПУ, **9** (2010), 44–46.

[25] Д.В. Соломатин, *Вероятностный алгоритм обнаружения подграфа, гомеоморфного заданному*, Стохастические модели в биологии и предельные алгебры = Stochastic models in biology and limit algebras: Международная конференция (2-7 августа, 2010 г.): Труды конференции. / Ом. филиал Ин-та математики им. С.Л.Соболева СО РАН. Омск, Изд-во Ом. гос. ун-та, (2010), 98–100.

[26] Х. Цишанг, Э. Фогт, Х.-Д. Колдевай, *Поверхности и разрывные группы*, Москва, Наука, 1988. MR 1024542

[27] Л.Н. Шеврин, М.В. Волков, *Тождества полугрупп*, Известия высших учебных заведений: Математика. Казань, Изд-во казанского университета, **282** (1985), 3–47. MR 0829099

[28] Л.Н. Шеврин, *Полугруппы*, Общая алгебра / Под ред. Л.А. Скорнякова, Москва, Наука, **2** (1991), Гл. IV, 11–191. MR 1146434

[29] V. Diekert, Y. Métivier, *Partial commutation and traces*, Handbook of formal languages. Berlin, Springer-Verl., **3** (1997), 457–533. MR 1470025

[30] L. Babai, *Some applications of graph contractions*, J. Graph Theory, **1** (1977), 125–130. MR 0460171

[31] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, - Cambridge University Press, 1993. MR 1271140

[32] G. Cooperman, L. Finkelstein, N. Sarawagi, *Application of Cayley graphs*, Appl.Algebra, Alg. Algo. End Error-Correcting Codes. - Springer-Verlag Lecture Notes in Comp. Sci., 508–520. MR 1123964

[33] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969. MR 0256911

[34] M.-C. Heydemann, *Cayley graphs and interconnection networks*, In G.Hahn and G.Sabidussi, editors, Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications. Kluwer, Dordrecht, (1997), 167–224. MR 1468790

[35] A.V. Kelarev, *On undirected Cayley graphs*, Australasian Journal Combinatorics, **25** (2002), 73–78. MR 1884037

[36] A.V. Kelarev, C.E. Praeger, *On transitive Cayley graphs of groups and semigroups*, European Journal of Combinatorics, **24** (2003), 59–72. MR 1957965

[37] A.V. Kelarev, S.J. Quinn, *A Combinatorial Property and Cayley Graphs of Semigroups*, Semigroup Forum, **66** (2003), 89–96. MR 1939667

[38] A.V. Kelarev, J.C. Meakin, *On complete and bipartite Cayley graphs*, Arbeitstagung Allgemeine Algebra **62**: Abstracts, June 14–17, 2001, Linz, Austria, pp. 25. (2001) [Conference Extract].

[39] S.W. Margolis, J.C. Meakin, *E-unitary inverse monoids and the Cayley graph of a group representation*, Journal of Pure and Applied Algebra., **58** (1989), 45–76. MR 0996174

[40] H. Maschke, *The representation of finite groups*, Amer. J. Math., **18** (1896), 156–194. MR 1505708

[41] A. Oliveira, P. Silva, *Inverse automata and monoids and the undecidability of the Cayley subgraph problem for groups*, Glasg.Math.J., **42** (2000), 421–437. MR 1793810

[42] B. Steinberg, *Finite state automata: a geometric approach*, Trans.Amer. Math.Soc., **353** (2001), 3409–3464. MR 1837243

[43] B. Zelinka, *Graphs of Semigroups*, Casopis. Pest. Mat., **106** (1981), 407–408. MR 0637820

Денис Владимирович Соломатин
Омский государственный педагогический университет,
наб. Тухачевского 14,
644099, Омск, Россия
E-mail address: denis_2001j@bk.ru