S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 213–218 (2011)

УДК 512.554

MSC 17D05, 16T15

ДУАЛЬНЫЕ КОАЛГЕБРЫ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ И АССОЦИАТИВНЫХ БИАЛГЕБР

М.Е. Гончаров

Abstract. In this work we consider dual coalgebras of alternative and associative bialgebras. We prove that the dual coalgebra of an alternative (associative) bialgebra is an alternative (associative) bialgebra.

Keywords: альтернативная алгебра, альтернативная коалгебра, неассоциативная коалгебра, биалгебра Ли, дуальная коалгебра.

1. Введение.

Биалгебры Ли — это одновременно алгебры Ли и коалгебры Ли, коумножение которых является 1-коциклом. Биалгебры Ли были введены Дринфельдом [1] для изучения решений классического уравнения Янга - Бакстера. В работах [2, 3] дано определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр. В частности, были определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга-Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Там же были описаны ассоциативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. Одним из определяющих свойств ассоциативных Д-биалгебр является то, что коумножение — это дифференцирование исходной алгебры в

Goncharov M.E, Dual coalgebras of alternative and associative bialgebras.

Работа выполнена при поддержке АВЦП Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы"(проект 2.1.1.10726), гранта РФФИ (09-01-00157-А, 11-01-00938-а), Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (проект НШ-3669.2010.1), интеграционного проекта СО РАН №97, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (гос. контракты № 02.740.11.0429, 02.740.11.5191, 14.740.11.0346, 14.740.12.0834), Лаврентьевского гранта для коллективов молодых учёных СО РАН, постановление Президиума СО РАН №43 от 04.02.2010.

Поступила 18 августа 2011 г., опубликована 22 августа 2011 г.

ее тензорный квадрат, рассмотренный как бимодуль над исходной алгеброй. Такие биалгебры были введены в [4] и изучались в [5]. В последней работе были изучены некоторые свойства решений ассоциативного аналога уравнения Янга-Бакстера и свойства сбалансированных биалгебр (другое название Д-биалгебр). Ассоциативные классические уравнения Янга-Бакстера с параметрами рассматривались в [6]. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга-Бакстера, был определен в [7], где было доказано, что всякая конечномерная йорданова Д-биалгебра, которая полупроста как алгебра, принадлежит этому классу.

В работе [13] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга-Бакстера. В частности, были описаны все структуры альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона.

Хорошо известна конструкция, сопоставляющая произвольной алгебре ее дуальную коалгебру. Для алгебр Хопфа известно, что дуальная коалгебра H° алгебры Хопфа H является алгеброй Хопфа [12].

В работе [9] для любой алгебры Ли была построена конструкция ее дуальной коалгебры. В [10] было доказано, что дуальная коалгебра исходной биалгебры Ли является биалгеброй Ли.

Дуальные коалгебры для йордановых биалгебр изучались В.Н. Желябиным. В работе [8] аналог теоремы Михаэлиса был доказан для почти нётеровых йордановых алгебр. Вместе с этим в той же статье строится пример йордановой Д-биалгебры, дуальная коалгебра которой не является подалгеброй в дуальной алгебре.

В данной работе доказывается аналог теоремы Михаэлиса для альтернативных и ассоциативных Д-биалгебр.

2. Основные определения и предварительные результаты.

Для линейных пространств V и U над полем F через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над полем F. На пространстве $V \otimes V$ определим линейное отображение τ, полагая $\tau(\sum\limits_i a_i \otimes b_i) = \sum\limits_i b_i \otimes a_i$. Через V^* обозначим пространство всех линейных функционалов, заданных на пространстве V. Для элементов $f \in V^*$ и $v \in V$ выражение $\langle f, v\rangle$ обозначает значение линейного функционала f на элементе v, т.е. $\langle f, v\rangle = f(v)$. Подпространство S в V^* называется всюду плотным в V^*, если для любого элемента $a \in V$ существует $f \in S$ такой, что $\langle f, a\rangle \neq 0$.

Пусть $\rho: \ V^* \otimes U^* \to (V \otimes U)^*$ — линейное отображение, определённое равенством

$$\langle \rho(f \otimes g), \sum_i a_i \otimes b_i\rangle = \sum_i \langle f, a_i\rangle \langle g, b_i\rangle.$$

Определение. Пара (A, Δ), где A — линейное пространство над F, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй.* При этом отображение Δ называется *коумножением.*

Для элемента $a \in A$ будем использовать обозначение $\Delta(a) = \sum\limits_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

На пространстве A^* определим умножение, полагая

$$\langle fg, a\rangle = \sum_a \langle f, a_{(1)}\rangle \langle g, a_{(2)}\rangle,$$

где $f, g \in A^*, a \in A$ и $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$. Полученная алгебра называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A, Δ) задаёт бимодульное действие $\rightharpoonup, \leftharpoonup$ на A, которое определяется следующим образом:

$$f \rightharpoonup a = \sum a_{(1)} \langle f, a_{(2)} \rangle \text{ и } a \leftharpoonup f = \sum \langle f, a_{(1)} \rangle a_{(2)},$$

где $f \in A^*$ и $\Delta(a) = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

В работе [11] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *M-коалгеброй*, если дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию M.

Пусть теперь A — произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ). Алгебра A задаёт бимодульное действие $\leftharpoondown, \rightharpoondown$ на пространстве A^*, определенное формулами

$$\langle f \leftharpoondown a, b \rangle = \langle f, ab \rangle \text{ и } \langle b \rightharpoondown f, a \rangle = \langle f, ab \rangle.$$

Рассмотрим пространство $D(A) = A \oplus A^*$ и зададим на нём умножение, полагая

$$(a + f) * (b + g) = (ab + f \rightharpoonup b + a \leftharpoonup g) + (fg + f \leftharpoondown b + a \rightharpoondown g).$$

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть дублем Дринфельда.

В работе [2] дано следующее определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M — произвольное многообразие F–алгебр и A — алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A, Δ) будем называть *M-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Алгебра A называется альтернативной, если для любых $x, y \in A$ в ней выполняются следующие тождества:

$$(x, x, y) = 0 \text{ и } (y, x, x) = 0,$$

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z.

Пусть A — алгебра над полем F с умножением $m : A \otimes A \to A$, т.е. $m(a \otimes b) = ab$ для любых $a, b \in A$. Тогда имеем сопряженное к m линейное отображение $m^* : A^* \to (A \otimes A)^*$. Подпространство V из A^* называется *хорошим*, если $m^*(V) \subseteq \rho(V \otimes V)$. На пространстве V зададим коумножение $\Delta_V : V \to V \otimes V$, полагая $\Delta_V(v) = \sum v_{(1)} \otimes v_{(2)}$, если $m^*(v) = \sum \rho(v_{(1)} \otimes v_{(2)})$. Поскольку вложение ρ инъективно, то коумножение Δ_V определено корректно. Пусть теперь A° — сумма всех хороших подпространств из A^*. Тогда A° — наибольшее хорошее подпространство и поэтому A° — коалгебра с коумножением $\Delta^\circ = \Delta_{A^\circ}$ (см [9, 11]). Коалгебра (A°, Δ°) называется *дуальной коалгеброй* для алгебры A. Для любых $a, b \in A$ и любого $f \in A^\circ$ имеет место

$$f(m(a \otimes b)) = \sum f_{(1)}(a) f_{(2)}(b),$$

где $\Delta^\circ(f) = \sum f_{(1)} \otimes f_{(2)}$.

Утверждение 1([11]). Пусть A — алгебра над полем F и S — подпространство из A^* Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) Подпространство S — хорошее.

(ii) Подпространство S — A-подбимодуль A-бимодуля A^* такой, что для любого $f \in S$ подпространства $f \leftharpoondown A$ и $A \rightharpoondown f$ являются конечномерными.

Коалгебра (A, Δ) называется *локально конечномерной*, если любая конечно-порожденная подкоалгебра конечномерна. Сумму всех локально конечномерных подкоалгебр из A обозначим через $Loc(A)$.

Теорема([11]). Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Тогда $Loc(A^\circ) = \{f \in A^* \mid$ в A существует такой идеал I конечной коразмерности, что $\langle f, I\rangle = 0\}$.

Также, в работе [11] было доказано, что если A — альтернативная алгебра, то $A^\circ = Loc(A^\circ)$. Таким образом мы имеем

Следствие([11]). Пусть A — альтернативная алгебра над полем F. Тогда $A^\circ = \{f \in A^* \mid$ в A существует такой идеал I конечной коразмерности, что $\langle f, I\rangle = 0\}$.

3. Дуальные коалгебры альтернативных Д-биалгебр.

Пусть (A, Δ) — произвольная биалгебра и $D(A)$ — ее дубль Дринфельда. Для элемента $a \in D(A)$ через a_A (a_{A^*}) обозначим его проекцию на подпространство A (A^*).

Лемма 1. Пусть пара (A, Δ) — альтернативная Д-биалгебра, A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ) и (A°, Δ°) — дуальная коалгебра алгебры A. Тогда A° — подалгебра алгебры A^*.

Доказательство. Необходимо доказать, что $(A^\circ)^2 \subseteq A^\circ$. Пусть $f, g \in A^\circ$. По утверждению 1 достаточно доказать, что пространства $A \rightharpoondown (fg)$ и $(fg) \leftharpoondown A$ конечномерны. Пусть $a \in A$. Рассмотрим $a \rightharpoondown (fg)$. Так как алгебра $D(A)$ — альтернативна, то $(((a+f)*(a+f))*g)_{A^*} = ((a+f)*((a+f)*g))_{A^*}$. Следовательно,

$$(f \leftharpoondown a)g + (a \rightharpoondown f)g + (a \leftharpoonup f) \rightharpoondown g + (f \rightharpoonup a) \rightharpoondown g + a^2 \rightharpoondown g = \\ = a \rightharpoondown (fg) + f(a \rightharpoondown g) + a \rightharpoondown (a \rightharpoondown g) + f \leftharpoondown (a \leftharpoonup g). \tag{1}$$

Из равенства $((g^2)*a)_{A^*} = (g*(g*a))_{A^*}$ получаем, что

$$a^2 \rightharpoondown g = a \rightharpoondown (a \rightharpoondown g). \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$a \rightharpoondown (fg) =$$

$$= (f \leftharpoondown a)g + (a \rightharpoondown f)g + (a \leftharpoonup f) \rightharpoondown g + (f \rightharpoonup a) \rightharpoondown g - f(a \rightharpoondown g) - f \leftharpoondown (a \leftharpoonup g) = \\ \sum f_{(1)}(a) f_{(2)} g + \sum f_{(2)}(a) f_{(1)} g + \sum g_{(1)} g_{(2)}(a_{(2)}) f(a_{(1)}) + \sum g_{(1)} g_{(2)}(a_{(1)}) f(a_{(1)}) - \\ - \sum f g_{(1)} g_{(2)}(a) - \sum f_{(1)}(a_{(2)}) g(a_{(1)}) f_{(2)}.$$

Следовательно, при произвольном a элемент $a \rightharpoondown (fg)$ лежит в подпространстве, порожденном элементами $f_{(2)}g, f_{(1)}g, g_{(1)}, fg_{(1)}, f_{(2)}$. Следовательно, пространство $A \rightharpoondown (A^\circ)^2$ конечномерно. Аналогично доказывается конечномерность подпространства $(A^\circ)^2 \leftharpoondown A$. Таким образом, по утверждению 1, $(A^\circ)^2$ является хорошим подпространством, а значит $(A^\circ)^2 \subseteq A^\circ$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть пара (A, Δ) — альтернативная Д-биалгебра над полем характеристики не равной 2, A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ) и (A°, Δ°) — дуальная коалгебра алгебры A. Тогда A° — подалгебра алгебры A^*, а пара (A°, Δ°) — альтернативная Д-биалгебра.

Доказательство. По лемме 1 A° является подалгеброй алгебры A^*. Докажем, что пара (A°, Δ°) — альтернативная Д-биалгебра. В силу следствия (4.3) из [11] пара (A°, Δ°) — альтернативная коалгебра. Следовательно, по [13, теорема 1] достаточно показать, что коумножение Δ° удовлетворяет следующим двум тождествам:

$$\Delta(ab) = \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)}b \otimes a_{(1)} - a_{(2)} \otimes ba_{(1)}) + \\ + \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + b_{(1)} \otimes b_{(2)}a - ab_{(1)} \otimes b_{(2)}) \tag{3}$$

$$\sum_{ab} ((ab)_{(1)} \otimes (ab)_{(2)} + (ab)_{(2)} \otimes (ab)_{(1)}) = \\ = \sum_a (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(2)} \otimes a_{(1)}b) + \sum_b (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + ab_{(2)} \otimes b_{(1)}). \tag{4}$$

Докажем равенство (3). По [13, предложение 1] в биалгебре (A, Δ) выполнено следующее тождество:

$$\sum_b (ab_{(1)} \otimes b_{(2)} + b_{(1)}a \otimes b_{(2)}) + \sum_a (a_{(2)} \otimes ba_{(1)} + a_{(1)} \otimes ba_{(2)}) = \\ = \sum_b b_{(1)} \otimes b_{(2)}a + \Delta(ba) + \sum_a a_{(2)}b \otimes a_{(1)}. \tag{5}$$

Для элементов $a, b \in A$ и $f, g \in A^\circ$, используя (5), получаем

$$\rho(\Delta^\circ(fg))(a \otimes b) = (fg)(ab) = \rho(f \otimes g)(\Delta(ab)) = \rho(f \otimes g)(\sum a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + \\ + \sum ba_{(1)} \otimes a_{(2)} - \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}b + \sum b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + \sum b_{(2)} \otimes ab_{(1)} - \sum b_{(2)}a \otimes b_{(1)}) = \\ \rho(\sum f_{(1)}g \otimes f_{(2)} + \sum f_{(2)}g \otimes f_{(1)} - \sum fg_{(1)} \otimes g_{(2)} + \sum g_{(1)} \otimes fg_{(2)} + \\ + \sum g_{(1)} \otimes g_{(2)}f - \sum f_{(2)} \otimes gf_{(1)})(a \otimes b).$$

Поскольку A — плотное пространство в $(A^\circ)^*$, то

$$\Delta^\circ(fg) = \sum (f_{(1)}g \otimes f_{(2)} + f_{(2)}g \otimes f_{(1)} - f_{(2)} \otimes gf_{(1)}) + \\ + \sum (g_{(1)} \otimes fg_{(2)} + g_{(1)} \otimes g_{(2)}f - fg_{(1)} \otimes g_{(2)}).$$

Аналогичным образом, используя (3) и (5), находим

$$\rho(\Delta^\circ(fg) + \tau(\Delta^\circ(fg)))(a \otimes b) = \rho(f \otimes g)(\Delta(ab) + \Delta(ba)) = \\ \rho(f \otimes g)(\sum (a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + a_{(1)} \otimes ba_{(2)}) + \sum (b_{(1)} \otimes ab_{(2)} + b_{(1)}a \otimes b_{(2)})) = \\ = \rho(\sum f_{(1)}g \otimes f_{(2)} + \sum fg_{(2)} \otimes g_{(1)} + \sum g_{(1)} \otimes fg_{(2)} + \sum f_{(2)} \otimes f_{(1)}g)(a \otimes b).$$

Таким образом

$$\Delta^\circ(fg) + \tau(\Delta^\circ(fg)) = \\ = \sum (f_{(1)}g \otimes f_{(2)} + f_{(2)} \otimes f_{(1)}g) + \sum (g_{(1)} \otimes fg_{(2)} + fg_{(2)} \otimes g_{(1)})$$

и пара (A°, Δ°) — альтернативная Д-биалгебра. Теорема доказана.

В случае многообразия ассоциативных алгебр результат теоремы 1 справедлив без ограничения на характеристику основного поля.

Теорема 2. Пусть пара (A, Δ) — ассоциативная Д-биалгебра, A^* — дуальная алгебра коалгебры (A, Δ) и (A°, Δ°) — дуальная коалгебра алгебры A. Тогда A° — подалгебра алгебры A^*, а пара (A°, Δ°) — ассоциативная Д-биалгебра.

Доказательство. По лемме 1 алгебра A° является подалгеброй в A^*. Докажем, что пара (A°, Δ°) — ассоциативная Д-биалгебра. Так как (A°, Δ°) — ассоциативная коалгебра ([11]), то по [2, теорема 1] достаточно показать, что коумножение Δ° удовлетворяет следующим двум тождествам:

$$\Delta(ab) = \sum a_{(1)}b \otimes a_{(2)} + \sum b_{(1)} \otimes ab_{(2)}, \tag{6}$$

$$\sum b_{(2)} \otimes ab_{(1)} - b_{(2)}a \otimes b_{(1)} = \sum a_{(1)} \otimes a_{(2)}b - ba_{(1)} \otimes a_{(2)}. \tag{7}$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 1. Теорема доказана.

Список литературы

[1] Дринфельд В. Г. *Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера*, ДАН СССР, **268**:2 (1983), 285–287. MR0688240

[2] Желябин В. Н. *Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли*, Алгебра и логика **35**:1 (1997), 3–25. MR1454688

[3] Желябин В. Н. *Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли*, Сибирский математический журнал, **39**:2 (1998), 299–308. MR1631776

[4] Joni, S.A. and Rota G.C. *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Studies in Applied Mathematics, **61** (1979), 93–139. MR0544721

[5] Aguiar M. *On the associative analog of Lie bialgebras*, Journal of Algebra, **244** (2001), 492–532. MR1859038

[6] Polishchuk A. *Classical Yang — Baxter Equation and the A-constraint*, Advances in Mathematics, **168**:1 (2002), 56–96. MR1907318

[7] Желябин В.Н. *Об одном классе йордановых Д-биалгебр*, Алгебра и анализ, **11**:4 (1999), 64–94. MR1713931

[8] Желябин В.Н. *Дуальные коалгебры йордановых биалгебр и супералгебр*, Сибирский математический журнал, **46**:6 (2005) 1302–1315. MR2195030

[9] Michaelis W. *Lie coalgebras*, Adv. Math. V., **38** (1980), 1–54. MR0594993

[10] Michaelis W. *The dual Lie bialgebra of a Lie bialgebra*, AMS/IP Stud. Adv. Math., Editor S.-T. Yau., 4 (1997), 81–94. MR1483905

[11] Anquela J.A., Cortes T. Montaner F. *Nonassociative Coalgebras*, Communications in Algebra, **22**:12 (1994) 4693–4716. MR1285701

[12] Sweedler M. E. *Hopf algebras*, New York: W.A. Benjamin Inc., 1969. MR0252485

[13] Гончаров М.Е. *Классическое уравнение Янга — Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли — Диксона*, Сибирский математический журнал, **48**:5 (2007) 1009–1025. MR2364622

Максим Евгеньевич Гончаров
Институт математики им. С.Л. Соболева, пр. Коптюга, 4
Новосибирский государственный университет, ул. Пирогова, 2
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: gme@math.nsc.ru