S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 219–229 (2011) УДК 512.55
MSC 16P10, 16W20

ГРУППА АВТОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ ЛОКАЛЬНЫХ КОЛЕЦ ХАРАКТЕРИСТИКИ p

Е.В. ЖУРАВЛЕВ

Abstract. We describe the group of automorphisms of a local finite rings of characteristic p with Jacobson radical J such that $J^4 = (0)$, $J^3 \neq (0)$ and $R/J \cong GF(p^r)$, the finite field of p^r elements.

Keywords: local rings, finite rings, automorphism.

1. Введение

Все кольца R, рассматриваемые в данной работе, являются конечными, ассоциативными и содержат единицу. Обозначим через $J = J(R)$ радикал Джекобсона, R^* – группу обратимых элементов, $\operatorname{Aut} R$ – группу автоморфизмов кольца R, $F = GF(p^r)$ – конечное поле и $\mathbb{Z}_n$ – кольцо классов вычетов по модулю n.

Кольцо R называется локальным, если $R/J = F$ – поле. Все делители нуля локального кольца образуют радикал J и всякий элемент кольца является либо обратимым, либо нильпотентным. Одним из примеров локальных колец являются так называемые кольца Галуа $GR(p^{nr}, p^n)$, представимые в виде $\mathbb{Z}_{p^n}[x]/(f)$, где p – простое число, f – унитарный многочлен степени r, образ которого при естественном гомоморфизме $\mathbb{Z}_{p^n} \to \mathbb{Z}_p$ является неприводимым над $\mathbb{Z}_p$ многочленом. В частности, $GR(p^n, p^n) = \mathbb{Z}_{p^n}$ и $GR(p^r, p) = GF(p^r)$.

Следующие предложения содержат хорошо известные результаты из теории конечных колец (см. [1, 2]).

Предложение 1. *Пусть R – конечное локальное кольцо. Тогда существует простое число p и натуральные числа n, r, такие, что*

Zhuravlev E.V., Automorphism groups of finite local rings of characteristic p.

Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект 14.740.12.0834).

Поступила 18 августа 2011 г., опубликована 24 августа 2011 г.

(1) $|R| = p^{nr}$;
(2) $J^n = 0$;
(3) $|J| = p^{(n-1)r}$;
(4) $\operatorname{char} R = p^k$, *где* $1 \le k \le n$;
(5) *Если* $n = k$, *то* R *является кольцом Галуа* $GR(p^{kr}, p^k)$. *В частности,* $J = pR$ *и* $R = \mathbb{Z}_{p^k}[b]$, *где* b *– элемент* R *мультипликативного порядка* $p^r - 1$;
(6) *Если* $\operatorname{char} R = p^k$, *то* R *содержит максимальное подкольцо Галуа* $R_0 = GR(p^{kr}, p^k)$ *и если* R_0' *– другое максимальное подкольцо Галуа кольца* R, *то существует элемент* $x \in R^*$, *такой, что* $R_0' = xR_0x^{-1}$;
(7) *Существуют элементы* $\pi_1, \ldots, \pi_h \in J$ *и автоморфизмы* $\sigma_1, \ldots, \sigma_h \in Aut(R_0)$, *такие, что* R *раскладывается в прямую сумму левых* R_0*-модулей*
$$R = R_0 \oplus R_0\pi_1 \oplus \ldots \oplus R_0\pi_h,$$
причем $\pi_i r_0 = r_0^{\sigma_i}\pi_i$, *для всех* $i = \overline{1, h}$ *и для любого элемента* $r_0 \in R_0$. *Отсюда, в частности, следует равенство*
$$J = pR_0 \oplus R_0\pi_1 \oplus \ldots \oplus R_0\pi_h.$$

Множество $\{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_h\}$, следуя определениям работы [1], будем называть отмеченным базисом для радикала J. Такие базисы впервые были изучены Рагхавендраном в случае $R_0 = GF(p^r)$.

Пусть A и B – подгруппы некоторой группы G. Если A – нормальная подгруппа, $A \cap B = \{e\}$ и $G = AB$, то группа G является полупрямым произведением своих подгрупп A и B (см. [3]). Полупрямое произведение обозначим $G = A \leftthreetimes B$.

Предложение 2. (см. [1, 2]). *Пусть* R *– конечное локальное кольцо. Тогда*

(1) *Группа* R^* *кольца* R *содержит циклическую подгруппу* $\langle b \rangle$ *порядка* $p^r - 1$ *и* R^* *является полупрямым произведением групп* $1 + J$ *и* $< b >$, *то есть* $R^* = (1 + J) \leftthreetimes < b >$;
(2) *Группа* R^* *является разрешимой;*
(3) *Если* G *– подгруппа* R^* *порядка* $p^r - 1$, *то группа* G *сопряжена с* $< b >$ *в* R^*;

Известно, что группа автоморфизмов конечного поля $GF(p^r)$ является циклической порядка r и порождена автоморфизмом Фробениуса $\sigma \in \operatorname{Aut} GF(p^r)$, $\sigma : \alpha \to \alpha^p$, для всякого $\alpha \in GF(p^r)$.

Группа автоморфизмов колец Галуа $R_0 = GR(p^{nr}, p^n)$ была полностью определена Рагхавендраном [1], а именно, $\operatorname{Aut} R_0 \cong \operatorname{Aut} GF(p^r)$ и $\operatorname{Aut} R_0 =< \sigma >$, где $\sigma(\alpha) = \alpha^p$ для любого $\alpha \in R_0$.

Аль-Хамис [4] описал группу автоморфизмов конечных локальных колец в которых произведение любых двух делителей нуля есть ноль, то есть $J^2 = 0$.

Чиканджи в работах [5, 6] исследовал строение группы $\operatorname{Aut} R$ локальных колец с радикалом J индекса нильпотентности 3 при всех возможных значениях характеристики кольца, но с ограничением $\sigma_1 = \sigma_2 = \ldots = \sigma_h$ на автоморфизмы отмеченного базиса.

Наша цель – в случае $\operatorname{char} R = p$ описать строение группы $\operatorname{Aut} R$ конечных локальных колец, радикал Джекобсона J которых имеет индекс нильпотентности четыре. Таким образом будут продолжены исследования в области конечных колец и их классификации, начатые автором ранее (см. [7]).

2. Строение колец характеристики p.

Приведем сведения о строении конечных локальных колец. Рассмотрим следующую конструкцию.

Конструкция A

Пусть

(1) $F = GF(p^r)$;

(2) некоторые натуральные числа s_1, s_2, s_3 удовлетворяют условиям:

$$s_2 \le s_1^2, \quad s_3 \le s_1 s_2;$$

(3) U, V, W – соответственно s_1, s_2, s_3-мерные векторные пространства над F;

(4) $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_1 \dots, \theta_{s_2}\}$, $\{\tau_1 \dots, \tau_{s_3}\}$ – автоморфизмы поля F, а

$$A_{k_1} = (a_{ij}^{k_1})_{s_1 \times s_1},\ B_{k_2} = (b_{ij}^{k_2})_{s_1 \times s_1},\ C_{k_2} = (c_{ij}^{k_2})_{s_1 \times s_2},\ D_{k_2} = (d_{ij}^{k_2})_{s_1 \times s_2}$$

– матрицы над полем F ($k_1 = \overline{1, s_2}$, $k_2 = \overline{1, s_3}$), удовлетворяющие следующим условиям:

(a) множества $\{A_1, \dots, A_{s_2}\}, \{C_1, \dots, C_{s_3}\}, \{D_1, \dots, D_{s_3}\}$ являются множествами линейно независимых матриц;

(b) для любых чисел $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, \dots, s_1\}$ и любого числа $m \in \{1, \dots, s_3\}$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{s_2} a_{\alpha\beta}^k d_{\gamma k}^m = \sum_{k=1}^{s_2} \left(a_{\beta\gamma}^k\right)^{\sigma_\alpha} c_{\alpha k}^m;$$

(c) если $a_{ij}^k \ne 0$ для некоторого $1 \le k \le s_2$, то $\theta_k = \sigma_i \sigma_j$;

(d) если $b_{ij}^k \ne 0$ для некоторого $1 \le k \le s_3$, то $\tau_k = \sigma_i \sigma_j$;

(e) если $c_{ij}^k \ne 0$ для некоторого $1 \le k \le s_3$, то $\tau_k = \sigma_i \theta_j$;

(f) если $d_{ij}^k \ne 0$ для некоторого $1 \le k \le s_3$, то $\tau_k = \sigma_i \theta_j$.

Рассмотрим прямую сумму

$$R = F \oplus U \oplus V \oplus W$$

и множества $\{u_i\}$, $\{v_i\}$, $\{w_i\}$, являющиеся базисами соответственно U, V и W. Определим умножение на R по правилу

$$\left(\alpha_0 + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k w_k\right) \cdot \left(\alpha_0' + \sum_{k=1}^{s_1} \alpha_k' u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \beta_k' v_k + \sum_{k=1}^{s_3} \gamma_k' w_k\right) =$$

$$= \alpha_0 \alpha_0' + \sum_{k=1}^{s_1} \left(\alpha_0 \alpha_k' + \alpha_k (\alpha_0')^{\sigma_k}\right) u_k + \sum_{k=1}^{s_2} \left(\alpha_0 \beta_k' + \beta_k (\alpha_0')^{\theta_k} + \sum_{i,j=1}^{s_1} a_{ij}^k \alpha_i (\alpha_j')^{\sigma_i}\right) v_k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{s_3} \left(\alpha_0 \gamma_k' + \gamma_k (\alpha_0')^{\tau_k} + \sum_{i,j=1}^{s_1} b_{ij}^k \alpha_i (\alpha_j')^{\sigma_i} + \sum_{i=1}^{s_1} \sum_{j=1}^{s_2} \left(c_{ij}^k \alpha_i (\beta_j')^{\sigma_i} + d_{ij}^k \beta_j (\alpha_i')^{\theta_j}\right)\right) w_k,$$

где $\alpha_0,\ \alpha_0',\ \alpha_k,\ \alpha_k',\ \beta_k,\ \beta_k',\ \gamma_k,\ \gamma_k' \in F$.

Теорема 1. (см. [7]). *Векторное пространство R конструкции A является конечным локальным кольцом характеристики p, радикал Джекобсона которого имеет индекс нильпотентности четыре. Обратно, каждое такое кольцо изоморфно одному из колец конструкции A.*

С доказательством данной теоремы, а также с более подробными сведениями о строении и классификации колец можно ознакомится в работе автора [7].

3. Группа автоморфизмов.

Итак, пусть R - конечное локальное кольцо характеристики p, $J^3 \neq 0$, $J^4 = 0$. Тогда существуют неотрицательные целые числа s_1, s_2, s_3, некоторые элементы

$$u_1, \ldots, v_{s_1} \in J \setminus J^2,\ v_1, \ldots, v_{s_2} \in J^2 \setminus J^3,\ w_1, \ldots, w_{s_3} \in J^3$$

и автоморфизмы

$$\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1}, \theta_1, \ldots, \theta_{s_2}, \tau_1, \ldots, \tau_{s_3} \in \mathrm{Aut}\,(F),$$

такие, что R представимо в виде прямой суммы

$$R = F \oplus \sum_{i=1}^{s_1} Fu_i \oplus \sum_{i=1}^{s_2} Fv_i \oplus \sum_{i=1}^{s_3} Fw_i,$$

причем

$$\forall r_0 \in F \quad u_i r_0 = r_0^{\sigma_i} u_i,\quad v_i r_0 = r_0^{\theta_i} v_i \quad \text{и} \quad w_i r_0 = r_0^{\tau_i} w_i.$$

Кроме того,

$$u_i u_j = \sum_{k=1}^{s_2} a_{ij}^k v_k + \sum_{k=1}^{s_3} b_{ij}^k w_k,\quad u_i v_j = \sum_{k=1}^{s_3} c_{ij}^k w_k,\quad v_j u_i = \sum_{k=1}^{s_3} d_{ij}^k w_k$$

для некоторых матриц над полем F (см. конструкцию A)

$$A_k = (a_{ij}^k)_{s_1 \times s_1},\quad B_k = (b_{ij}^k)_{s_1 \times s_1},\quad C_k(c_{ij}^k)_{s_1 \times s_2},\quad D_k = (d_{ij}^k)_{s_1 \times s_2}.$$

Обозначим через l_1, l_2 и l_3 соответственно количество различных автоморфизмов совокупностей $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1}\}$, $\{\theta_1, \ldots, \theta_{s_2}\}$ и $\{\tau_1, \ldots, \tau_{s_3}\}$. При этом будем полагать, что именно автоморфизмы $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_{l_1}\}$, $\{\theta_1, \ldots, \theta_{l_2}\}$ и $\{\tau_1, \ldots, \tau_{l_3}\}$ являются различными.

Рассмотрим подпространства

$$U_i = \sum_{\sigma_j = \sigma_i} Fu_j, i = \overline{1, l_1},\quad V_i = \sum_{\theta_j = \theta_i} Fv_j, i = \overline{1, l_2} \quad \text{и} \quad W_i = \sum_{\tau_j = \tau_i} Fw_j, i = \overline{1, l_3},$$

где σ_j, θ_j, τ_j – автоморфизмы, связанные соответственно с u_j, v_j и w_j. Тогда

$$U = \oplus \sum_{i=1}^{l_1} U_i,\quad V = \oplus \sum_{i=1}^{l_1} V_i,\quad W = \oplus \sum_{i=1}^{l_1} W_i.$$

Если $A = (a_{ij})$ – матрица над полем F, а σ – автоморфизм поля F, то в дальнейшем символом A^σ будем обозначать матрицу $(\sigma(a_{ij}))$. Пусть A и B – матрицы над полем F размерностей $m \times n$ и $n \times k$ соответственно, и $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in Aut(F)$, $n, m, k \in N$. Обозначим через $[A, B]_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)}$ матрицу $= (c_{ij})_{m \times k}$, где $c_{ij} = a_{i1} b_{1j}^{\alpha_i} + a_{i2} b_{2j}^{\alpha_i} + \ldots + a_{in} b_{nj}^{\alpha_i}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, k}$. Если $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = \alpha$, то $[A, B]_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} = AB^\alpha$.

Теорема 2. *Пусть φ – линейное отображение кольца R.*

$$\varphi \in \mathrm{Aut}\,(R) \Leftrightarrow \varphi\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) =$$

$$= x\left(\alpha_0^\rho + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^\rho\varphi_j(u_i) + \sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i^\rho v_j + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^\rho\phi_j(v_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i^\rho w_j + \sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i^\rho w_j + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^\rho\psi_j(w_i)\right) x^{-1},$$

для некоторых $\rho \in \mathrm{Aut}\,(F)$, $\alpha_0, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, q_{ji}, n_{ji}, s_{ji} \in F$, $x \in 1+J$, $\varphi_j \in \mathrm{Aut}\,(U_j)$, если $u_i \in U_j$; $\phi_j \in \mathrm{Aut}\,(V_j)$, если $v_i \in V_j$; $\psi_j \in \mathrm{Aut}\,(W_j)$, если $w_i \in W_j$, и существуют невырожденные матрицы

$$P = (p_{ij})_{s_1\times s_1},\ R = (r_{ij})_{s_2\times s_2},\ T = (t_{ij})_{s_3\times s_3},$$

такие, что

$$P^T[A_k, P]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})} = \sum_{i=1}^{s_2} r_{ki}A_i^\rho, \quad k = \overline{1, s_2}, \tag{1}$$

$$P^T[B_k, P]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})} + P^T[C_k, Q]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})} + Q^T[D_k^T, P]_{(\theta_1,\dots,\theta_{s_2})} =$$

$$= \sum_{i=1}^{s_2} s_{ki}A_i^\rho + \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}B_i^\rho, \quad k = \overline{1, s_3}, \tag{2}$$

$$P^T[C_k, R]_{(\sigma_1,\dots,\sigma_{s_1})} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}C_i^\rho, \quad k = \overline{1, s_3}, \tag{3}$$

$$R^T[D_k^T, P]_{(\theta_1,\dots,\theta_{s_2})} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}\left(D_i^T\right)^\rho, \quad k = \overline{1, s_3} \tag{4}$$

и $\sigma_i = \sigma_j$, если $p_{ji} \neq 0$; $\theta_i = \theta_j$, если $r_{ji} \neq 0$; $\tau_i = \tau_j$, если $t_{ji} \neq 0$; $\sigma_i = \theta_j$, если $q_{ji} \neq 0$; $\theta_i = \tau_j$, если $s_{ji} \neq 0$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(R)$. Заметим, что $\varphi(F)$ – максимальное подполе кольца R. В силу предложения 1, существует $x \in R^*$ такой, что $\varphi(F) = xFx^{-1}$. Так как $R^* = (1+J)\cdot < b >$, где b – циклический порождающий поля F (см. предложение 2), то $x = (1+j)f$, где $j \in J$, $f \in F^* =< b >$, и $\varphi(F) = xFx^{-1} = (1+j)fFf^{-1}(1+j)^{-1} = (1+j)F(1+j)^{-1}$. Следовательно, будем полагать $\varphi(F) = xFx^{-1}$ для некоторого $x \in 1+J$ и $\varphi(r_0) = xr_0^\rho x^{-1}$ для любого $r_0 \in F$ и некоторого автоморфизма ρ поля F.

Рассмотрим автоморфизм $\chi = \varphi_x\varphi$, где $\varphi_x(r) = x^{-1}rx$, $x \in 1+J$, $r \in R$. Тогда

$$\chi\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \alpha_0^\rho + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^\rho\chi(u_i) + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^\rho\chi(v_i) + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^\rho\chi(w_i).$$

Так как

$$u_i \in J = \sum_{i=1}^{s_1} Fu_i \oplus \sum_{i=1}^{s_2} Fv_i \oplus \sum_{i=1}^{s_3} Fw_i,\ i = \overline{1, s_1},$$

$$v_i \in J^2 = \sum_{i=1}^{s_2} Fv_i \oplus \sum_{i=1}^{s_3} Fw_i,\ i = \overline{1, s_2},$$

$$u_i \in J^3 = \sum_{i=1}^{s_3} Fw_i,\ i = \overline{1, s_3},$$

то

$$\chi(u_i) = \sum_{i=1}^{s_1} p_{ji}u_j + \sum_{i=1}^{s_2} q_{ji}v_j + \sum_{i=1}^{s_3} n_{ji}w_j,\ i = \overline{1, s_1},$$

$$\chi(v_i) = \sum_{i=1}^{s_2} r_{ji}v_j + \sum_{i=1}^{s_3} s_{ji}w_j,\ i = \overline{1, s_2},$$

$$\chi(w_i) = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ji}w_j,\ i = \overline{1, s_3}$$

для некоторых p_{ji}, q_{ji}, n_{ji}, r_{ji}, s_{ji}, $t_{ji} \in F$.

Пусть $r_0 \in F$ и $u_i r_0 = r_0^{\sigma_i} u_i$, $v_i r_0 = r_0^{\theta_i} v_i$ и $w_i r_0 = r_0^{\tau_i} w_i$. Тогда

$$\chi(u_i r_0) = \chi(r_0^{\sigma_i} u_i) = \chi(r_0^{\sigma_i})\chi(u_i) = \chi(r_0^{\sigma_i}) \left[\sum_{i=1}^{s_1} p_{ji}u_j + \sum_{i=1}^{s_2} q_{ji}v_j + \sum_{i=1}^{s_3} n_{ji}w_j \right],$$

$$\chi(u_i r_0) = \chi(u_i)\chi(r_0) = \left[\sum_{i=1}^{s_1} p_{ji}u_j + \sum_{i=1}^{s_2} q_{ji}v_j + \sum_{i=1}^{s_3} n_{ji}w_j \right] \chi(r_0) =$$
$$= \sum_{i=1}^{s_1} p_{ji}[\chi(r_0)]^{\sigma_j} u_j + \sum_{i=1}^{s_2} q_{ji}[\chi(r_0)]^{\theta_j} v_j + \sum_{i=1}^{s_3} n_{ji}[\chi(r_0)]^{\tau_j} w_j.$$

Так как u_j, v_j и w_j – базис, то

$$\chi(r_0^{\sigma_i})p_{ji} = [\chi(r_0)]^{\sigma_j} p_{ji},\ \chi(r_0^{\sigma_i})q_{ji} = [\chi(r_0)]^{\theta_j} q_{ji},\ \chi(r_0^{\sigma_i})n_{ji} = [\chi(r_0)]^{\tau_j} n_{ji}.$$

Следовательно, если $\sigma_j \neq \sigma_i$, то $p_{ji} = 0$; если $\theta_j \neq \sigma_i$, то $q_{ji} = 0$; если $\tau_j \neq \sigma_i$, то $n_{ji} = 0$.

Аналогично, из соотношений

$$\chi(v_i r_0) = \chi(r_0^{\theta_i} v_i) = \chi(v_i)\chi(r_0) \text{ и } \chi(w_i r_0) = \chi(r_0^{\theta_i} w_i) = \chi(w_i)\chi(r_0)$$

соответственно получаем: если $\theta_j \neq \theta_i$, то $r_{ji} = 0$; если $\tau_j \neq \theta_i$, то $s_{ji} = 0$; если $\tau_j \neq \tau_i$, то $t_{ji} = 0$.

Заметим, что матрицы $P = (p_{ij})_{s_1 \times s_1}$, $R = (r_{ij})_{s_2 \times s_2}$, $T = (t_{ij})_{s_3 \times s_3}$ невырожденны и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{s_1} p_{ji}u_j = \varphi_k(u_i), \quad \varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(U_k), \quad \text{если} \quad u_i \in U_k;$$

$$\sum_{j=1}^{s_2} r_{ji}v_j = \phi_k(v_i), \quad \phi_k \in \mathrm{Aut}\,(V_k), \quad \text{если} \quad v_i \in V_k;$$

$$\sum_{j=1}^{s_3} t_{ji}w_j = \psi_k(w_i), \quad \psi_k \in \mathrm{Aut}\,(W_k), \quad \text{если} \quad w_i \in W_k.$$

Отсюда, принимая во внимание соотношение $\varphi = (\varphi_x)^{-1}\chi$, получаем

$$\varphi\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = x\left(\alpha_0^\rho + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^\rho \varphi_j(u_i) + \sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i^\rho v_j + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^\rho \phi_j(v_i) + \right. \\ \left. + \sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i^\rho w_j + \sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i^\rho w_j + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^\rho \psi_j(w_i)\right) x^{-1}.$$

Далее найдем условия, при которых указанное выше отображение является гомоморфизмом кольца R:

$$\chi(u_i)\chi(u_j) = \\ = \left(\sum_{k=1}^{s_1} p_{ki}u_k + \sum_{k=1}^{s_2} q_{ki}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} n_{ki}w_k\right)\left(\sum_{k=1}^{s_1} p_{kj}u_k + \sum_{k=1}^{s_2} q_{kj}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} n_{kj}w_k\right) = \\ = \sum_{k=1}^{s_2}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1} p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma_\nu}a_{\nu\mu}^k\right) v_k + \\ + \sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu,\mu=1}^{s_1} p_{\nu i}p_{\mu j}^{\sigma_\nu}b_{\nu\mu}^k + \sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2}\left(p_{\nu i}q_{\mu j}^{\sigma_\nu}c_{\nu\mu}^k + q_{\mu i}p_{\nu j}^{\theta_\mu}d_{\nu\mu}\right)\right) w_k,$$

$$\chi(u_iu_j) = \chi\left(\sum_{\nu=1}^{s_2} a_{ij}^\nu v_\nu + \sum_{\nu=1}^{s_3} b_{ij}^\nu w_\nu\right) = \\ = \sum_{\nu=1}^{s_2}\chi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_2} r_{k\nu}v_k\right) + \sum_{\nu=1}^{s_2}\chi\left(a_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_3} s_{k\nu}w_k\right) + \sum_{\nu=1}^{s_3}\chi\left(b_{ij}^\nu\right)\left(\sum_{k=1}^{s_3} t_{k\nu}w_k\right) = \\ = \sum_{k=1}^{s_2}\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho r_{k\nu}v_k + \sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_2}\left(a_{ij}^\nu\right)^\rho s_{k\nu} + \sum_{\nu=1}^{s_3}\left(b_{ij}^\nu\right)^\rho t_{k\nu}\right) w_k.$$

Следовательно,

$$P^T[A_k, P]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})} = \sum_{i=1}^{s_2} r_{ki}A_i^\rho,$$

$$P^T[B_k, P]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})} + P^T[C_k, Q]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})} + Q^T[D_k^T, P]_{(\theta_1,\ldots,\theta_{s_2})} = \\ = \sum_{i=1}^{s_2} s_{ki}A_i^\rho + \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}B_i^\rho.$$

Аналогично,

$$\chi(u_i)\chi(v_j) = \left(\sum_{k=1}^{s_1} p_{ki}u_k + \sum_{k=1}^{s_2} q_{ki}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} n_{ki}w_k\right)\left(\sum_{k=1}^{s_2} r_{kj}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} s_{kj}w_k\right) = \\ = \sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2} p_{\nu i} r_{\mu j}^{\sigma_\nu} c_{\nu\mu}^{k}\right) w_k,$$

$$\chi(u_iv_j) = \chi\left(\sum_{\nu=1}^{s_3} c_{ij}^{\nu} w_\nu\right) = \sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_3}\left(c_{ij}^{\nu}\right)^{\rho} t_{k\nu}\right) w_k$$

и

$$\chi(v_j)\chi(u_i) = \left(\sum_{k=1}^{s_2} r_{kj}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} s_{kj}w_k\right)\left(\sum_{k=1}^{s_1} p_{ki}u_k + \sum_{k=1}^{s_2} q_{ki}v_k + \sum_{k=1}^{s_3} n_{ki}w_k\right) = \\ = \sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_1}\sum_{\mu=1}^{s_2} r_{\mu j} p_{\nu i}^{\theta} d_{\nu\mu}^{k}\right) w_k,$$

$$\chi(v_ju_i) = \chi\left(\sum_{\nu=1}^{s_3} d_{ij}^{\nu} w_\nu\right) = \left(\sum_{k=1}^{s_3}\left(\sum_{\nu=1}^{s_3}\left(d_{ij}^{\nu}\right)^{\rho} t_{k\nu}\right) w_k\right).$$

Следовательно,

$$P^T[C_k, R]_{(\sigma_1,\ldots,\sigma_{s_1})} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki} C_i^{\rho} \quad \text{и} \quad R^T[D_k^T, P]_{(\theta_1,\ldots,\theta_{s_2})} = \sum_{i=1}^{s_3} t_{ki}(D_i^T)^{\rho}.$$

Для доказательства обратного утверждения достаточно рассмотреть отображение φ из формулировки теоремы и проверить выполнимость свойств автоморфизма. Теорема доказана.

Пусть G – подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,(R)$, состоящая из автоморфизмов, определяемых по правилу

$$g\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \\ = \alpha_0^{\rho} + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^{\rho}\varphi_k(u_i) + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^{\rho}\phi_k(v_i) + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^{\rho}\psi_k(w_i),$$

где $\varphi_k \in \mathrm{Aut}\,(U_k)$, если $u_i \in U_k$, $\phi_k \in \mathrm{Aut}\,(V_k)$, если $v_i \in V_k$, $\psi_k \in \mathrm{Aut}\,(W_k)$, если $w_i \in W_k$ и $\rho \in \mathrm{Aut}\,(F)$. Пусть G_0 – подгруппа G, состоящая из автоморфизмов g_0 таких, что

$$g_0\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \alpha_0^{\rho} + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i^{\rho} u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i^{\rho} v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i^{\rho} w_i,$$

а G_1, G_2 и G_3 – подгруппы G, состоящие соответственно из автоморфизмов

$$g_1\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i\varphi_k(u_i) + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$g_2\left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2}\beta_i\phi_k(v_i) + \sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$g_3\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i \psi_k(w_i).$$

Тогда $G_1 \times G_2 \times G_3$ – прямое произведение групп. Кроме того,

$$G=(G_1\times G_2\times G_3)\cdot G_0,\quad G_1\times G_2\times G_3 \triangleleft G \ \text{ и } \ (G_1\times G_2\times G_3)\cap G_0=\{id_R\}.$$

Следовательно, группа G является полупрямым произведением групп G_0 и $G_1 \times G_2 \times G_3$, то есть, $G = (G_1 \times G_2 \times G_3) \leftthreetimes G_0$.

Пусть H – подгруппа группы $\mathrm{Aut}\,(R)$, состоящая из автоморфизмов, определяемых по правилу

$$\varphi\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=x\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i v_j+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\right.$$
$$\left.\sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i w_j+\sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i w_j+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)x^{-1}.$$

Пусть H_0, H_1, H_2, H_3 – подгруппы H, состоящие соответственно из автоморфизмов

$$h_0\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=x\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)x^{-1},$$

$$h_1\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{\theta_j=\sigma_i} q_{ji}\alpha_i v_j+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$h_2\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{\tau_j=\sigma_i} n_{ji}\alpha_i w_j+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i,$$

$$h_3\left(\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i\right)=$$
$$=\alpha_0+\sum_{i=1}^{s_1}\alpha_i u_i+\sum_{i=1}^{s_2}\beta_i v_i+\sum_{\tau_j=\theta_i} s_{ji}\beta_i w_j+\sum_{i=1}^{s_3}\gamma_i w_i.$$

Тогда непосредственно проверяется, что $H = H_0 \times ((H_1 \times H_2) \leftthreetimes H_3)$.

Докажем, что группа $\mathrm{Aut}\,(R)$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы H и группы G. Очевидно $\mathrm{Aut}\,(R) = H \cdot G$. Пусть $\varphi \in H \cap G$. Так как $\varphi \in H$, то для всякого $\alpha \in F$ имеем либо $\varphi(\alpha) = \alpha$, либо $\varphi(\alpha) \notin F$. С другой стороны, $\varphi \in G$ и $\varphi(\alpha) = \alpha$ или $\varphi(\alpha) = \alpha^{\rho} \in F$. Следовательно, $\varphi(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in F$ и $\varphi \in ((H_1 \times H_2) \leftthreetimes H_3) \cap (G_1 \times G_2 \times G_3)$. Так как $\varphi \in G_1 \times G_2 \times G_3$, то $\varphi(U) = U$ и $\varphi(V) = V$. Но в группе H единственным элементом с таким условием является id_R. Таким образом $\varphi = id_R$, $H \cap G = \{id_R\}$ и $\mathrm{Aut}\,(R) = H \leftthreetimes G$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 3.

$$\mathrm{Aut}\,(R) = [H_0 \times ((H_1 \times H_2) \leftthreetimes H_3)] \leftthreetimes [(G_1 \times G_2 \times G_3) \leftthreetimes G_0]\,.$$

Заметим, что подгруппа H_0 группы $\mathrm{Aut}\,R$, состоящая из автоморфизмов

$$\varphi_x \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3} \gamma_i w_i \right) = \\ = x \left(\alpha_0 + \sum_{i=1}^{s_1} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{s_2} \beta_i v_i + \sum_{i=1}^{s_3} \gamma_i w_i \right) x^{-1},$$

где $x \in 1 + J$, изоморфна факторгруппе $(1+J)/(1+Z(R)\cap J)$. Причем, если среди автоморфизмов $\sigma_1, \ldots, \sigma_{s_1}, \theta_1, \ldots, \theta_{s_2}, \tau_1, \ldots, \tau_{s_3}$ отсутствуют тождественные, то

$$H_0 \cong 1 + J.$$

Автоморфизмы групп H_1, H_2, H_3, G_1, G_2 и G_3 очевидно являются невырожденными линейными преобразованиями конечномерного векторного пространства $R = F \oplus U \oplus V \oplus W$ и изоморфны невырожденным матрицам, по сути являющимся матрицами перехода от одного базиса R к другому. При этом должны быть выполнены условия (1)-(4) теоремы 2, связывающие равенствами матрицы перехода R как векторного пространства с матрицами умножения R как кольца.

Вопрос о строении группы автоморфизмов в ситуациях $\mathrm{char}\,R = p^k$, $k = 2,3,4$ остается открытым. Преполагаются аналогичные рассуждения с учетом того, что в отмеченный базис пространства R над полем F возможно добавятся элементы радикала p, p^2, p^3 и $pu_1, \ldots, pu_{s_1}$, $p^2u_1, \ldots, p^2u_{s_1}$, $pv_1, \ldots, pv_{s_2}$. Более общий случай, когда индекс нильпотентности радикала есть произвольное натуральное число, будет расмотрен автором в последующих работах.

Список литературы

[1] R. Raghavendran, *Finite associative rings* // Compositio Math., **21** (1969), 195–229. MR0246905

[2] B.R. McDonald, *Finite rings with identity*, New York: Marcel Dekker Inc., 1974. MR0354768

[3] М. Холл, *Теория групп*, М.: Издательство иностранной литературы, 1962. MR0103215

[4] Y. Al-Khamees, *Finite rings in wich the multiplication of any two zero-deviders is zero* // Arch. Math., **37** (1981), 144–149. MR0640799

[5] C.J. Chikunji, *Automorphism of completely primary finite rings of characteristic p* // Colloquium mathematicum., **111** (2008), 91–102. MR2353934

[6] C.J. Chikunji, *Automorphism groups of finite rings of characteristic p^2 and p^3* // Glasnik matematicki., **43** (2008), 25–40. MR2426661

[7] Е.В. Журавлев, *Локальные кольца порядка* p^6 *с 4-нильпотентным радикалом Джекобсона* // Сибирские электронные математические известия, **3** (2006), 15–59. MR2172790

Евгений Владимирович Журавлев
Алтайский государственный университет,
пр. Ленина 61,
656049, Барнаул, Россия
E-mail address: evzhuravlev@mail.ru, zhuravlev@math.asu.ru