S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 230–246 (2011) УДК 512.5
MSC 13A99

ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ЗАДАННЫМ МНОЖЕСТВОМ ГРУПП

А.А. КУЗНЕЦОВ, К.А. ФИЛИППОВ

Abstract. It is given a brief vevier of results on groups saturated by sets of groups.

Keywords: group, groups saturated by sets of groups.

1. Введение

В теории бесконечных групп значительное место занимают исследования бесконечных групп с различными условиями конечности, т.е. групп, которые по своему определению наделяются теми или иными свойствами конечных групп. Результаты исследований, представленных в данной статье , связаны с условием *насыщенности* группы заданным множеством групп.

Понятие насыщенности группы заданным множеством групп появилось в 1993 году в работах А.К. Шлёпкина [50].

Группа G насыщена группами из множества групп $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$.

В настоящие время сложилась следующая терминология и обозначения связанные с условием насыщенности.

Насыщающие множество — это множество $\mathfrak{M}$ из определения насыщенности.

Группа G насыщенна группой K – это случай когда множество $\mathfrak{M} = \{K\}$ — состоит из одной группы.

A.A. Kuznetsov, K.A. Philippov Groups saturated by sets of groups.

Работа поддержана РФФИ (проекты 10-01-00509-а и 09-01-00717-а), АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/3023), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (проект 14.740.12.0834).

Поступила 18 августа 2011 г., опубликована 24 августа 2011 г.

Группа G насыщенна множеством групп $\mathfrak{M}$ — это ситуация когда для любой группы $M \in \mathfrak{M}$ в G найдется группа $K \simeq M$.

$\mathfrak{M}(K)$ — это множество всех подгрупп группы G содержащих подгруппу $K \subseteq G$ и изоморфных группам из множества $\mathfrak{M}$.

$\mathfrak{M}(e)$ — это множество всех подгрупп группы G изоморфных группам из множества $\mathfrak{M}$ (здесь e – единица группы G).

Появление понятия насыщенности группы было обусловлено следующим обстоятельством.

При изучении групп с различными условиями минимальности (условие min, $min\,p$, примарная минимальность и т.п.) как правило, необходимо установить структуру группы G, которая являлася не локально конечной периодической простой группой с заданной системой конкретных конечных простых неабелевых подгрупп. Анализ этой системы подгрупп приводил в большинстве случаев к тому, что такая группа оказывалась локально конечной. Поэтому естественно было рассмотреть произвольную группу, содержащую данное множество конечных простых неабелевых подгрупп, в качестве самостоятельного условия конечности.

Понятие насыщающего множества естественным образом обобщает на произвольные группы понятие локального покрытия, играющего важную роль при изучении локально конечных групп.

Напомним понятие локального покрытия. Множество $\mathfrak{I}$ подгрупп группы G называется локальным покрытием, если $G = \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{I}} X$, и для любого $X, Y \in \mathfrak{I}$ в $\mathfrak{I}$ найдется элемент Z, такой, что $X \subseteq Z$ и $Y \subseteq Z$. Если группа обладает локальным покрытием, состоящим из некоторого множества конечных групп, то она, очевидно, локально конечна, а для групп, насыщенных тем же множеством групп, это не всегда справедливо. Примеры периодических не локально конечных групп, насыщенных заданными множествами конечных групп, хорошо известны. Так, группы Новикова-Адяна $B(m, n)$ для нечетных $n \geq 665$ насыщены одной циклической группой порядка n.

В связи с результатами Кегеля, Беляева, Боровика, Хартли и Томаса об собой роли локальных покрытий, состоящих из конечных простых групп лиева типа, естественно изучать периодические группы, насыщенные теми или иными классами групп лиева типа.

ПРОБЛЕМА 1

(вопрос 14.101 из Коуровской тетради).

Верно ли, что периодическая группа, насыщенная конечными простыми группами лиева типа, ранги которых ограничены в совокупности, сама является простой группой лиева типа конечного ранга?

Прошедшее время подтвердило обоснованность введения понятия насыщенности, а также его содержательность. Теперь можно говорить, что на его основе оформилось самостоятельное направление в теории периодических групп с условиями конечности. По указанному направлению опубликовано 58 работ [1]—[63] и защищено шесть диссертаций:

(1) А.К. ШЛЁПКИН — 1999 год. (докторская)

(2) А.Г. РУБАШКИН — 2005 год.
(3) К.А. ФИЛИППОВ — 2006 год.
(4) Л.Р. ТУХВАТУЛЛИНА — 2008 год.
(5) Д.В. ЛЫТКИНА — 2008 год.
(6) Д.Н. ПАНЮШКИН — 2010 год.

Остановимся на результатах выше перечисленных диссертационных работ, а впоследствии рассмотрим исследования других авторов по данному направлению.

2. Результаты, полученные в диссертации А.К. Шлёпкина

Результаты диссертационной работы касались решения проблемы 1.

В теоремах 1— 4 приводимых ниже исследовались группы Шункова насыщенные различными вариантами групп лиева типа ранга 1. Во всех этих случаях группа Шункова обладает периодической частью, которая будет (локально) конечна и изоморфна соответствующим группам лиева типа над подходящим локально конечным полем.

Теорема 1 ([53]). *Группа Шункова, насыщенная группами из множества* $\{L_2(p^n)\}$*, где* p *– фиксированное число, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе* $L_2(P)$*, где* P *– локально конечное поле характеристики* p.

Теорема 2 ([58]). *Группа Шункова, насыщенная группами из множества* $\{Re(q) \mid q = 3^{2n+1}\}$*, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе Ри* $Re(Q)$ *над локально конечным полем* Q *характеристики 3.*

Теорема 3 ([58]). *Группа Шункова, насыщенная группами из* $\{Sz(q)\}$*, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе Судзуки* $Sz(Q)$ *над локально конечным полем* Q *характеристики 2.*

Теорема 4 ([54]). *Группа Шункова, насыщенная группами множества* $\{U_3(2^n) \mid n = 1, 2, \ldots\}$*, обладает периодической частью, которая изоморфна простой группе* $U_3(Q)$*, где* Q *– локально конечное поле характеристики 2.*

В связи с доказанными выше теоремами естественным было отказаться от условий конечности Шункова и попытаться перенести эти результаты на произвольные периодические группы. В приводимой ниже теореме 5 рассматривается произвольная периодическая группа насыщенная множеством состоящим из конечных простых неабелевых групп при дополнительном условии конечности силовской 2-подгруппы группы G, а в теореме 6 рассматриваются произвольные периодические группы с насыщающим множеством состоящим из групп Ри. В обоих случаях группа G изоморфна соответствующей локально конечной простой группе.

Теорема 5 ([55]). *Пусть бесконечная периодическая группа* G *насыщена конечными простыми неабелевыми подгруппами и некоторая силовская 2-подгруппа* S *из* G *является конечной группой диэдра. Тогда* G *изоморфна локально конечной простой группе* $L_2(P)$*, где* P *– локально конечное поле нечетной характеристики* p.

Теорема 6 ([58]). *Пусть бесконечная периодическая группа насыщена группами из множества* $\{Re(q) \mid q = 3^{2n+1}\}$*. Тогда* G *изоморфна локально* *конечной простой группе $Re(Q)$, где Q – локально конечное поле характеристики 3.*

3. Результаты, полученные в диссертации А.Г. Рубашкина

Приводимый ниже результат касается частичного решения проблемы 1, обобщая теорему 1 на произвольные периодические группы. Пусть $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha)|\alpha \in I\}$, где K_α — конечное поле, а I — некоторое множество индексов. Отметим, что для различных α и β характеристики полей K_α и K_β могут быть различными. Оказывается, что все такие группы (локально) конечны и изоморфны $L_2(P)$ для подходящего локально конечного поля P.

Теорема 7 ([59]). *Бесконечная периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{R}$, изоморфна простой группе $L_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Для доказательства сформулированной выше теоремы необходимо было установить структуру централизатора инволюции в G, который как оказалось насыщен группами диэдра. В связи с этим возникла следующая проблема

ПРОБЛЕМА 2

Установить структуру группы насыщенной группами диэдра.

Сначала данная проблема решалась для групп Шункова, а в последствии и для периодических групп ограниченного периода

Теорема 8 ([58, 60]). *Группа Шункова, насыщенная конечными группами диэдра, обладает периодической частью, которая является (локально) конечным диэдром.*

Теорема 9 ([58, 60]). *Периодическая группа ограниченного периода, насыщенная группами диэдра, конечна.*

Что касается теоремы 9 то как показали И.Г. Лысёнок и С.В. Иванов группы $B(m, n)$, для достаточно больших чётных n, не локально конечны и насыщены прямыми произведениями конечных групп диэдра. Теорема 9 указывает, что ограничение на число прямых множителей до одного, вместе с условиями ограниченности периода и насыщенности приводит к локальной конечности группы. Таким образом актуальной становится решение следующей проблемы.

ПРОБЛЕМА 3

Изучение групп насыщенных прямыми произведениями различных групп.

Если группа периодическая и её период не ограничен, то насыщенность группами диэдра приводит к следующей конкретизации её строения.

Теорема 10 ([58, 60]). *Если G — периодическая группа, насыщенная группами диэдра и S — её силовская 2-подгруппа, то либо S — группа порядка 2 и G — (локально) конечный диэдр, либо $G = ABC = ACB = BCA = CBA$, где A — централизатор некоторой инволюции z из центра S, $B = O(C_G(v))$, v —*

произвольная инволюция из S, отличная от z, и $C = O(C_G(zv))$. При этом A — (локально) конечный диэдр, а B, C — (локально) циклические группы.

Как отмечалось ранее, примеры периодических не (локально) конечных групп, насыщенных конечным множеством конечных групп (даже одной группы простого порядка $p \geq 665$) хорошо известны — это $B(m,p)$. Однако, для случая, когда $\mathfrak{R}$ состоит из конечного множества конечных простых неабелевых групп, аналогичные примеры не локально конечных групп неизвестны. Поэтому естественно рассмотреть эту ситуацию для конечных простых неабелевых групп.

ПРОБЛЕМА 4

Пусть группа G, насыщенная группами из конечного множества конечных простых неабелевых групп $\mathfrak{M}$. Какова её структура? В частности, если G периодическая группа, то будет ли G изоморфна одной из групп указанного множества?

Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество всех конечных простых неабелевых групп в которых централизатор силовской 2-подгруппы содержит элемент нечётного порядка. Как показали А.С. Кондратьев и В.Д. Мазуров множество $\mathfrak{F}$ состоит в точности из следующих групп: $E_6^{\delta}(q)$, где q нечетно и $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > 3$, и групп $L_n^{\delta}(q)$, где q нечетно и либо $t(n) = 2$, где $t(n)$ — число слагаемых в двоичном разложении числа n, $(q - \delta 1)_{2'} > 3$, либо $n > 2$, $t(n) \neq 2$, $\frac{(q-\delta 1)_{2'}}{(3,q-\delta 1)} > 3$.

Теорема 11 ([57, 59]). *Пусть периодическая группа G, насыщена конечными простыми неабелевыми группами из конечного множества $\mathfrak{R}$, имеющего пустое пересечение с $\mathfrak{F}$. Тогда G конечна и изоморфна некоторой группе множества $\mathfrak{R}$.*

Приводимая выше теорема 11 показывает, что если периодическая группа G, насыщена конечным множеством $\mathfrak{M}$ состоящим из конечных простых неабелевых групп, то в "большенстве"случаев G конечна и изоморфна одной из групп насыщающего множества $\mathfrak{M}$.

4. Результаты, полученные в диссертации К.А. Филиппова

Хорошо известно, что центральные расширения группы Z_2 при помощи $L_2(q)$, есть либо $SL_2(q)$, либо $L_2(q) \times Z_2$. В связи с этим естественно, было рассмотреть группы насыщенные центральными расширениями группы Z_2 при помощи $L_2(q)$.

ПРОБЛЕМА 5

Пусть группа G, насыщена центральными расширениями группы Z_2 при помощи $L_2(q)$. Какова её структура? В частности, если группа периодическая, будет ли она локально конечной?

Пусть I – множество индексов, K_α — конечное поле для любого $\alpha \in I$, $\mathfrak{N} = \{SL_2(K_\alpha) | \alpha \in I\}$ (другими словами множество $\mathfrak{N}$ – это множество специальных линейных групп размерности 2 над конечными полями). Отметим, что для различных α и β характеристики полей K_α и K_β могут быть различными.

Теорема 12 ([40]). *Группа Шункова G, насыщенная множеством $\mathfrak{N}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $SL_2(P)$ для подходящего локально конечного поля P.*

Имеет место аналог теоремы 12 для произвольных периодических групп.

Теорема 13 ([40]). *Бесконечная периодическая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{N}$, изоморфна группе $SL_2(P)$ над подходящим локально конечным полем P.*

Пусть $\mathfrak{R} = \{L_2(K_\alpha)|\alpha \in I\}$ (множество проективных специальных линейных групп размерности 2 над конечными полями, причем для различных α и β характеристики полей K_α и K_β могут быть различными). Определим множество $\mathfrak{M} = \{L_2(K_\alpha) \times Z_2|L_2(K_\alpha) \in \mathfrak{R})\}$, (множество $\mathfrak{M}$ состоит из групп, являющихся набором прямымх произведений групп из множества $\mathfrak{R}$ и группы порядка 2, которую мы обозначаем через Z_2).

Теорема 14 ([45]). *Группа Шункова G, насыщенная множеством $\mathfrak{M}$, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной группе $L_2(P) \times Z_2$ для подходящего локально конечного поля P.*

Аналога теоремы 14 для произвольных периодических групп получить не удаётся. Однако удалось свести проблему к ситуации, когда G – простая группа.

Теорема 15 ([46]). *Периодическая, непростая группа G, насыщенная группами из множества $\mathfrak{M}$, изоморфна $L_2(P) \times Z_2$ для подходящего локально конечного поля P.*

Так же К.А. Филипповым были продолжены исследования по частичному решению проблемы 1. Были рассмотрены группы насыщенные конечными простыми Z-группами.

Напомним, что Z-группой (группой Цассенхауза) называется дважды транзитивная группа подстановок, в которой лишь единичная подстановка оставляет на месте более 2-х точек

Был получен следующий результат

Теорема 16 ([28]). *Группа Шункова G, насыщенная конечными простыми Z-группами, обладает периодической частью $T(G)$, изоморфной либо $L_2(P)$, либо $Sz(Q)$, где P и Q – подходящие локально конечные поля.*

Развитие идей, заложенных в доказательстве теоремы 16, позволило доказать аналог данной теоремы в классе периодических групп, что показывает следующая

Теорема 17 ([44]). *Периодическая группа G, насыщенная конечными простыми Z – группами изоморфна либо $L_2(P)$, либо $Sz(Q)$, где P и Q – подходящие локально конечные поля.*

Частный случай данной теоремы, когда силовская 2 – подгруппа группы G конечна, независимо доказанн А.И. Созутовым.

Приведем еще один результат связанный с решением проблемы 2.

Теорема 18 ([41]). *Периодическая финитно-аппроксимируемая группа, насыщенная группами диэдра, является локально конечным диэдром.*

5. Результаты, полученные в диссертации Л.Р. Тухватуллиной

Приводимый ниже результат диссертационной работы Л.Р. Тухватуллиной лежит в русле частичного решения проблемы 1. Пусть $\Re = \{U_3(2^n)|n = 1, 2, \ldots\}$.

Теорема 19 ([16, 34]). *Пусть бесконечная периодическая группа G насыщенна группами из множества $\Re$. Тогда G изоморфна группе $U_3(Q)$ над локально конечным полем Q характеристики 2.*

Следующий результат продолжает исследования по проблеме 3.

В данном результате исследуются группы насыщенные группами из конечного множества конечных простых неабелевых групп, каждая из которых является либо $L_3(p^n)$, либо $U_3(p^n)$.

Пусть δ — переменная, принимающая значения + или —. Через $L_3^{\delta}(p^n)$ обозначается группа $L_3(p^n)$, если $\delta = +$ и группа $U_3(p^n)$, если $\delta = -$.

Теорема 20 ([15]). *Пусть периодическая группа G насыщена группами из конечного множества $\Re = \{L_3^{\delta_i}(p_i^{n_i})|i = 1, 2, \ldots, m\}$. Тогда группа G изоморфна группе $L_3^{\delta_j}(p_j^{n_j})$ для некоторого $1 \leq j \leq m$.*

Также в работе Л.Р. Тухватуллиной была рассмотрена ситуация когда группа будет насыщенна конечными полудиэдральными группами в смысле следующего определения: *группа D называется конечным полудиэдром, если $D = \langle d \rangle \leftthreetimes \langle i \rangle$, $d^{4n} = i^2 = 1$, $d^i = d^{2n-1}$. Будем называть группу локально конечным полудиэдром, если она является объединением бесконечной возрастающей цепочки конечных полудиэдров.*

Таким образом, полудиэдральная группа в нашем определении не обязательно должна быть 2-группой, однако если она является 2-группой, то она является полудиэдральной группой в классическом понимании.

Оказалось, что произвольная периодическая группа насыщенная полудиэдральными группами будет локально конечным полудиэдром.

Теорема 21 ([36]). *Пусть G — бесконечная периодическая группа, насыщенная конечными полудиэдрами. Тогда G — локально конечный полудиэдр и $G = B \leftthreetimes \langle i \rangle$, где $B = V \times H$, V — конечная циклическая 2-группа, H — локально циклическая группа, не содержащая инволюций, i — инволюция. Подгруппа $V \leftthreetimes \langle i \rangle$ является конечным полудиэдром, а подгруппа $H \leftthreetimes \langle i \rangle$ — локально конечным диэдром.*

6. Результаты, полученные в диссертации Д.В. Лыткиной

В работе Д.В. Лыткиной были продолжены исследования по проблемме 5.

В приведенном ниже результате уточняется структура периодической группы, насыщенной группами из множества $\mathfrak{M}$, состоящего из центральных расширений группы порядка 2 посредством проективных специальных линейных групп размерности 2 над конечными полями.

Теорема 22 ([13]). *Пусть G — периодическая группа, насыщенная группами из класса $\mathfrak{M}$. Тогда G счетна и справедливо одно из следующих утверждений:*

1. $G \simeq SL_2(Q)$, где Q — локальное конечное поле нечетной характеристики.

2. *$G \simeq Z_2 \times L_2(Q)$, где Z_2 — группа порядка 2, Q — локально конечное поле.*

3. *G — простая группа. Все инволюции группы G сопряжены и централизатор произвольной инволюции t изоморфен $\langle t\rangle \times L_2(Q)$, где Q — бесконечное локально конечное поле характеристики 2. Все силовские подгруппы 2-подгруппы из G сопряжены и являются бесконечными элементарными абелевыми подгруппами. Если T — силовская 2-подгруппа из G, то $C_G(T) = T$ и $N_G(T)$ действует при сопряжении на множестве инволюций T транзитивно.*

Если верно утверждение 3 теоремы 22, то имеет место следующий результат.

Теорема 23 ([13])**.** *Пусть существует периодическая группа G, насыщенная группами из класса $\mathfrak{M}$, для которой выполнено утверждение 3 теоремы 22. Тогда существует счетная периодическая дважды транзитивная группа S подстановок счетного множества Ω, обладающая следующими свойствами:*

а) S содержит нормальную регулярную элементарную абелеву 2-подгруппу;

б) стабилизатор R точки не содержит инволюций, любая конечная подгруппа из R циклическая и любой нетривиальный элемент из R оставляет неподвижными ровно две точки;

в) стабилизатор P двух точек — локально циклическая группа, изоморфная мультипликативной группе бесконечного локально конечного поля характеристики 2;

г) Число орбит P на Ω равно четырем, и P действует точно на каждой из двух нетривиальных орбит;

д) стабилизатор любого двухточечного множества Δ изоморфен $\langle t\rangle \times P$ и действует транзитивно на $\Omega \setminus \Delta$;

е) стабилизатор трех точек тривиален.

Вопрос о существовании группы S остаётся открытым.

Следующий результат частично решает проблему 1 в том случае когда группа G периодическая и насыщена $L_3(q)$ над полями четной характеристики. Пусть $\mathfrak{L} = \{L_3(2^m) | m = 1, 2, \ldots\}$.

Теорема 24 ([8])**.** *Пусть G — периодическая группа, насыщенная группами из множества $\mathfrak{L}$. Тогда найдётся такое локально конечное поле Q характеристики 2, что $G \simeq L_3(Q)$. В частности, G локально конечна.*

Очевидно, что верно и обратное: группа $L_3(Q)$ для произвольного локально конечного поля Q характеристики 2 насыщена группами из множества $\mathfrak{L}$.

Данный результат получен Д.В. Лыткиной совместно с В.Д. Мазуровым

7. Результаты, полученные в диссертации Панюшкина Д.Н.

Как отмечалось ранее в теореме 19, доказать локальную конечность периодической группы, насыщенной группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times Z_2\}$, в случае, когда q — степень числа 2 не удалось. Поэтому естественно рассмотреть группу, насыщенную похожими множествами групп, в каждой из которых силовская 2-подгруппа элементарная абелева либо содержит элементарную абелеву 2-группу сколь угодно большого ранга. В приводимых ниже теоремах 25 — 28 в качестве насыщающего множества рассматриваются различные варианты прямых произведений $L_2(q)$ с элементарной абелевой силовской 2-подгруппой на абелевы группы, которые являлись либо циклическими группами, либо элементарными абелевыми группами. Во всех этих случаях группы будут являться прямыми произведениями соответствующих локально конечных групп.

Теорема 25 ([21])**.** *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(2^n) \times \langle t_m \rangle \mid n = 1, 2, ..., m = 1, 2, ...\}$, где $(|L_2(2^n)|, |t_m|) = 1$, локально конечна и изоморфна прямому произведению локально циклической группы без инволюций на локально конечную группу $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле характеристики 2.*

Теорема 26 ([20])**.** *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(5) \times \langle v \rangle\}$, где $|v| = 2^k$, $k = 1, 2, \ldots$, локально конечна и изоморфна $L \times V$, где $L \simeq L_2(5)$, V — локально циклическая 2-группа.*

Пусть $I_n = \underbrace{Z_2 \times Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{n \text{ раз}}$, где Z_2 — группа порядка два.

Теорема 27 ([22])**.** *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(5) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $L_2(5) \times N$, где N — бесконечная группа периода 2.*

Теорема 28 ([23])**.** *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(p) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, где $p \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 8)$ — фиксированное простое число, локально конечна и изоморфна $L_2(p) \times N$, где N — бесконечная группа периода 2.*

Как известно структура централизатора инволюции при изучении конечных простых неабелевых групп имеет важное значение для строения конечной простой неабелевой группы. Аналогичная ситуация складывается и при изучении бесконечных периодических групп, насыщенных конечными простыми неабелевыми группами. Известно, что централизатор инволюции в $L_3(q)$ изоморфен $GL_2(q)$. Поэтому для изучения групп насыщенных $L_3(q)$ необходимо установить структуру централизатора инволюции, который как нетрудно показать насыщен $GL_2(q)$. Отсюда вытекает необходимость изучения групп насыщенных $GL_2(q)$ или в общем случае мы приходим к следующей проблеме.

ПРОБЛЕМА 6

Как устроена группа G, насыщенная $GL_n(q)$.

Следующий результат связан с описанием периодических групп Шункова насыщенных $GL_3(q)$, где q – степень 3. Для этого как отмечалось выше необходимо было получить структуру централизатора инволюции, который насыщен $GL_2(q)$. Приводимая ниже теорема описывает структуру нормализатора силовской 3-подгруппы, централизатора инволюции.

Теорема 29 ([19])**.** *Пусть бесконечная периодическая группа Шункова G насыщенна группами из множества $\Re = \{GL_2(q)\}$, где q — степени числа 3, S — силовская 3-подгруппа группы G. Тогда:*

(1) *S — счетная элементарная абелева 3-группа;*

(2) *$C_G(S) = S \times D$, где D — бесконечная локально циклическая группа и $\pi(D_1) \cap \pi(S) = \varnothing$;*
(3) *$N_G(S) = S \leftthreetimes (D \times R)$, где R — бесконечная локально циклическая группа, изоморфная группе D и $N_G(S) = C_G(S) \leftthreetimes R$;*
(4) *$S \leftthreetimes R$ — группа Фробениуса с неинвариантным множителем R, действующим регулярно и транзитивно на множестве нееденичных элементов группы S.*

Используя данный результат планируется получить описания групп Шункова насыщенных проективными специальными линейными группами размерности 3 над полями характеристики 3.

8. Результаты, полученные А.И. Созутовым

Приводимые ниже результаты А.И. Созутова связаны с изучением периодических групп насыщенных Z-группами, а также с изучением периодических групп насыщенных конечными простыми неабелевыми группами при некоторых ограничениях на структуру централизатора инволюции, либо силовской 2-подгруппы.

Теорема 30 ([29]). *Периодическая группа с конечной силовской 2-подгруппой, насыщенная конечными простыми Z-группами, либо конечна, либо изоморфна группе $L_2(P)$ над локально конечным полем нечётной характеристики.*

Для формулировки приводимых ниже следующих результатов напомним понятия *сильно вложенной подгруппы* и *конечной инволюции.* Собственная подгруппа B группы G называется *сильно вложенной*, если B содержит инволюцию, а $B \cap B^g$ не содержит инволюций, если $g \notin B$.

Инволюция t группы G называется *конечной* инволюцией, если t вместе с любой инволюцией из G порождает конечную подгруппу, или, эквивалентно, если подгруппа $\langle t, t^g \rangle$ конечна для любого $g \in G$.

Теорема 31 ([30]). *Пусть бесконечная группа G с сильно вложенной подгруппой B и конечной инволюцией насыщена конечными простыми группами и для некоторой инволюции $i \in G$ централизатор $C_G(i)$ – 2-группа. Тогда G локально конечна и изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $Sz(Q)$ над подходящим локально конечным полем Q характеристики 2.*

Теорема 32 ([30]). *Если бесконечная периодическая группа G содержит абелеву силовскую 2-подгруппу и насыщена конечными простыми группами, то она локально конечна и изоморфна одной из групп $Re(P)$, $L_2(Q)$ над подходящими локально конечными полями P, Q.*

9. Результаты, полученные Д.В. Лыткиной

Остановимся на результатах которые были получены Д.В. Лыткиной после защиты кандидатской диссертации. Теоремы 33 и 34 касаются обобщения теорем 17 и 31 в которых условие насыщенности ослаблено до условия вложимости конечных групп чётного порядка в группе $\mathfrak{M}(K)$, а условие периодичности ослаблено до существования в группе конечной инволюции с периодическим централизатором.

Теорема 33 ([11]). *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если каждая конечная подгруппа четного порядка из G содержится в простой подгруппе, изоморфной, для некоторого m, группе $L_2(2^m)$ или $Sz(2^m)$, то G изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Теорема 34 ([11]). *Пусть группа G содержит конечную инволюцию и сильно вложенную подгруппу. Если централизатор некоторой инволюции в G является 2-группой и каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в конечной неабелевой простой подгруппе группы G, то G изоморфна $L_2(Q)$ или $Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2.*

М. Сузуки показал, что любая конечная неабелева простая C-группа, т.е. группа, в которой централизатор каждой инволюции обладает нормальной силовской 2-подгруппой, содержится во множестве

$$\mathfrak{C} = \{L_2(r), r \geqslant 4; L_3(2^m), m \geqslant 1; U_3(2^m), m \geqslant 2; Sz(2^m), m \geqslant 3\}.$$

При этом все группы из $\mathfrak{C}$, за исключением некоторых из групп $L_2(r)$, являются C-группами. Группа $L_2(r)$ тогда и только тогда является C-группой, когда либо $r = 2^m$, $m \geqslant 2$, либо $r = 9$, либо $r = 2^m \pm 1$ – простое число.

Основной целью следующих результатов является описание периодических групп, насыщенных группами из $\mathfrak{C}$.

В следующей теореме получено описание групп в которых условие насыщенности ослаблено до условия вложимости каждой подгруппы четного порядка в группы $\mathfrak{C}(K)$ насыщенных множеством $\mathfrak{C}$. Оказывается, что такие группы локально конечны и изоморфны группам из насыщающего множества, но уже над локально конечными полями.

Теорема 35 ([12]). *Пусть G – группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в подгруппе, изоморфной группе из $\mathfrak{C}$, то либо существует такое локально конечное поле P нечётной характеристики, что $G \simeq L_2(P)$, либо G изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $L_3(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Отсюда без труда выводится описание периодических групп, насыщенных C-группами. Более точно, справедлива следующая

Теорема 36 ([12]). *Пусть G – группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если любая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в некоторой конечной простой неабелевой подгруппе и централизатор каждой инволюции из G обладает нормальной силовской 2-подгруппой, то либо G является конечной простой C-группой, либо G изоморфна одной из групп $L_2(Q)$, $L_3(Q)$, $U_3(Q)$, $Sz(Q)$ для подходящего бесконечного локально конечного поля Q характеристики 2.*

Из теоремы 35 и работы Судзуки вытекает также следующий результат.

Теорема 37 **([12]).** *Пусть G – группа, содержащая конечную инволюцию, инволюцию с периодическим централизатором и сильно вложенную подгруппу, содержащую нетривиальную нормальную 2-подгруппу. Если каждая конечная подгруппа четного порядка из G содержится в конечной простой неабелевой подгруппе, то G изоморфна $L_2(Q)$, $U_3(Q)$ или $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

Эта теорема даёт возможность перенести на бесконечные группы ещё один результат Сузуки о группах с тривиальными пересеченьями силовских 2-подгрупп.

Теорема 38 **([12]).** *Пусть G – группа, содержащая конечную инволюцию и инволюцию с периодическим централизатором. Если каждая конечная подгруппа чётного порядка из G содержится в конечной простой неабелевой подгруппе и любые две различные силовские 2-подгруппы из G пересекаются по тривиальной подгруппе, то G изоморфна $L_2(Q)$, $U_3(Q)$ или $Sz(Q)$ для подходящего локально конечного поля Q характеристики 2.*

В следующем результате доказывается локальная конечность периодической группы G, насыщенной прямыми произведениями элементарной абелевой 2-группы фиксированного порядка и простой группы $L_2(q)$ при условии, что G содержит элемент порядка 4 (проблемма 3).

Теорема 39 **([17]).** *Пусть $m \geqslant 0$ целое, G — периодическая группа такая, что каждая конечная подгруппа группы G чётного порядка содержится в подгруппе вида $F = E \times R$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Если G содержит элемент порядка 4, то G является прямым произведением элементарной абелевой подгруппы порядка 2^m и подгруппы, изоморфной группе $L_2(Q)$, где Q — локально конечное поле нечётной характеристики.*

Следующий результат является частным случаем теоремы 39, в которой условие вложимости группы ослаблено, на условие насыщенности группы заданным множеством групп.

Теорема 40 **([17]).** *Пусть $m \geqslant 0$ целое, G — периодическая группа, насыщенная группами вида $E \times R$, где E — элементарная абелева группа порядка 2^m и $R \simeq L_2(q)$ для некоторого q. Если G содержит элемент порядка 4, то Gявляется прямым произведением элементарной абелевой подгруппы порядка 2^m и подгруппы, изоморфной $L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q нечётной характеристики.*

Доказательство теорем 39 и 40 использует строение 2-групп, каждая конечная подгруппа которых изоморфна подгруппе прямого произведения группы диэдра и элементарной абелевой группы или в терминах насыщенности получено описание периодических 2-групп насыщенных прямыми произведениями групп диэдра на элементарные абелевы группы.

Теорема 41 **([18]).** *Пусть m — натуральное число, G — периодическая группа, каждая конечная подгруппа четного порядка которой содержится в подгруппе, изоморфной прямому произведению элементарной абелевой 2-группы порядка, не превосходящего 2^m, и группы $L_2(q)$ для некоторого $q \geqslant 4$. Если выполнено одно из следующих условий:*

$(a)$$G$ содержит элемент порядка 4;

*$(b)G$ содержит подгруппу, изоморфную знакопеременной группе A_4 степени 4,
то $G = E \times L_2(Q)$, где E — элементарная абелева 2-группа, $|E| \leqslant 2^m$ и Q — локально конечное поле. В частности, G — локально конечная счетная группа.*

Попытки отказаться от дополнительных условий (a), (b) в теореме 41 наталкиваются на трудности, связанные с нерешённым вопросом о существовании простых не локально конечных групп определённого вида.

Пусть P — локально конечное поле. Группой типа $\Lambda(P)$ назовём содержащую инволюцию простую периодическую группу, в которой все инволюции сопряжены и централизатор каждой из них изоморфен прямому произведению группы порядка 2 на группу, изоморфную $L_2(P)$.

Известными примерами групп типа $\Lambda(P)$ являются конечная спорадическая группа Янко J_1, для которой P — поле порядка 4, и локально конечные простые группы лиева типа $^2G_2(P)$, где P — поле характеристики 3, не содержащее подполей порядка 9.

Теорема 42 ([18]). *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию. Если в G любая конечная подгруппа чётного порядка содержится в подгруппе вида $E \times R$, где $|E| \leqslant 2$, а $R \simeq L_2(q)$ для некоторого $q \geqslant 5$, то либо $G = Z \times L$, где $|Z| \leqslant 2$, а $L \simeq L_2(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q, либо $|Z| = 2$ и G — не локально конечная группа типа $\Lambda(P)$ для бесконечного локально конечного поля характеристики 2, не содержащего подполей порядка 4.*

10. Результаты, полученные Б. Амбергом и Л.С. Казариным

Исследования Амберга и Казарина касались проблемы 2, для случая, когда G периодическая группа.

Теорема 43 ([61]). *Бесконечная периодическая группа G насыщенная конечными группами диэдра, есть локально конечная группа диэдра.*

11. Результаты, полученные К.А. Филипповым

Результаты, полученные после защиты кандидатской диссертации, связаны с проблемой 3.

Теорема 44 ([49]). *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times \langle t_m \rangle \mid q = 2^n;$ $n = 2, ...; m = 1, 2, ...\}$, где $|t_m|$ — нечетное число, локально конечна и изоморфна прямому произведению $L \times V$, где $L \simeq L_2(Q)$, для некоторого локально конечного поля Q, а V — локально циклическая группа без инволюций.*

Пусть I_n – прямое произведение n экземпляров группы Z_2. $q = 2^k$ – фиксированное число.

Теорема 45 ([48]). *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_2(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $L_2(q) \times I$, где I - бесконечная группа периода 2.*

Теорема 46 ([31]). *Бесконечная периодическая группа Шункова G, насыщенная группами из множества $\Re = \{L_3(q) \times I_n | n = 1, 2, ...\}$, локально конечна и изоморфна $L_2(q) \times I$, где I - бесконечная группа периода 2.*

Пусть p – фиксированное простое нечетное число и множество X_p, состоит из групп вида $M \times Q$, где Q – единичная, или произвольная конечная 2-группа, M принадлежит фиксированному конечному множеству Y_p конечных простых неабелевых групп $L_2(q)$, $Sz(k)$ или $Re(t)$ и содержит элемент порядка p с нечетным порядком централизатора в M. Итак, X_p – конечное, или счетное множество, состоящее из конечных неразрешимых групп L указанного вида $L = M \times O_2(L)$.

Теорема 47 ([32]). *Группа Шункова G, насыщенная группами из множества X_p, обладает периодической частью $T(G) = R \times O_2(G)$, где R изоморфна одной из групп множества Y_p.*

Список литературы

[1] О.В. Васильева, К.П. Ребрик, *О группах Шункова, насыщенных $SL_2(K_2)$*, Мат-лы 38-й междунар. науч. конф.– Новосибирск, 2000, 4–5.

[2] О.В. Васильева, А.Г. Рубашкин, А.К. Шлепкин, *О периодических группах, насыщенных группами диедра*, Вестн. КрасГАУ: физ.-мат. науки, Красноярск, **3** (2004), 16–18.

[3] О.В. Васильева, А.Г. Рубашкин, А.К. Шлёпкин, *О периодических группах, насыщенных группами диедра*, Тез. докл. III всесиб. конгресса женщин-математиков. Красноярск: ПФК „ТОРРА", 2004, 33–34.

[4] А.А. Кузнецов, А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных $SL_2(q)$*, Мат-лы XXII регион. науч.-техн. конф. – Красноярск: Изд-во КрасГАСА, 2004, 7.

[5] А.А. Кузнецов, А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных $U_3(2^n)$*, Алгебра, логика и кибернетика: мат-лы междунар. конф., Иркутск, 2004, 15.

[6] Д.В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$*, Матем. системы, Красноярск: КрасГАУ, **5** (2006) 32–34.

[7] Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров, *Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^n)$*, Алгебра и её приложения: сб. тез. междунар. конф., посвящ. 75-летию В.П. Шункова, Красноярск, 2007, 87.

[8] Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров, *Периодические группы, насыщенные группами $L_3(2^m)$*, Алгебра и логика, **46**:5 (2007), 606–626. MR2378633

[9] Д.В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные группой $U_3(9)$*, Алгебра и её приложения: сб. тез. междунар. конф., посвящ. 75-летию В.П. Шункова, Красноярск, 2007, 86.

[10] Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *Периодические группы, насыщенные группой $L_3(11)$*, Матем. системы, Красноярск: КрасГАУ, **6**, (2007), 56–60.

[11] Д.В. Лыткина, В.Д. Мазуров, *О группах, содержащих сильно вложенную подгруппу*, Алгебра и логика, **48**:2 2009, 190–202. MR2573018

[12] Д.В. Лыткина, *О группах, насыщенных конечными простыми группами*, Алгебра и логика, **48**:5 (2009), 628–653. MR2640959

[13] Д.В. Лыткина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных $L_2(q)$ и ее центральными расширениями*, Матем. системы, Красноярск: КрасГАУ, **5** (2006), 35–45.

[14] Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *Периодические группы, насыщенные группой $L_3(27)$*, Матем. системы, Красноярск: КрасГАУ, **6** (2007), 61–65.

[15] Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных конечным множеством конечных простых групп*, Сиб. матем. журн., **49**:2 (2008), 394–399. MR2419663

[16] Д.В. Лыткина, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами $U_3(2^n)$*, Алгебра и логика, **47**:3 (2008), 288–306. MR2450885

[17] Д.В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп*, Сиб. мат. журнал, **52**:2 (2011), 340–349. Zbl pre05912834

[18] Д.В. Лыткина, *Периодические группы, насыщенные прямыми произведениями конечных простых групп II*, Сиб. мат. журнал, принята к печати.

[19] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, *Строение нормализатора силовской 3-подгруппы периодической группы Шункова, насыщенной конечными простыми группами* $GL_2(3^n)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **7** (2009), 48–51.

[20] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных элементарных абелевых 2-групп посредством группы* $L_2(5)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **8** (2009), 68–73.

[21] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством групп* $L_2(2^n)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **8** (2009), 87–91.

[22] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических 2-групп посредством группы* $L_2(5)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **8** (2009), 74–80.

[23] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы* $L_2(p)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ **8** (2009), 81–86.

[24] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина , К.А Филиппов, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы* $L_2(5)$, Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, **10**:1 (2010), 88–92.

[25] Д.Н. Панюшкин, Л.Р. Тухватуллина , К.А Филиппов, *О группе Шункова, насыщенной центральными расширениями циклических групп посредством проективных специальных линейных групп*, Тр. ИММ УрО РАН, **6**:2 (2010), 177–185.

[26] А.Г. Рубашкин, *О периодических группах, насыщенных группами* $L_2(p^n)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ **3** (2004), 40–59.

[27] А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов, *О существовании периодической части в группах Шункова, насыщенных группами диэдра*, Студент и научно-технический прогресс: Математика: мат-лы XLII междунар. науч.-студ. конф, Новосибирск, 2004, 15–16.

[28] А.Г. Рубашкин, К.А. Филиппов, *О группах Шункова, насыщенных конечными простыми Z-группами*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **3** (2005), 72–79.

[29] А.И. Созутов, *О некоторых группах, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **3** (2004), 101–110.

[30] А.И. Созутов, А.К. Шлёпкин, *О некоторых группах с конечной инволюцией, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Матем. заметки, **72**:3 (2002), 433–447. MR1963170

[31] А.А. Дуж, К.А. Филиппов, *О группах Шункова с одним условием насыщенности*, Алгебра, логика и приложения: сб. тез. междунар. конф., Красноярск, 2010, 85.

[32] А.А. Дуж, К.А. Филиппов, *О группах Шункова с одним условием насыщенности*, Алгебра, логика и методика обучения математике: сб. тез. всеросс. конф., посвященной 100-летию со дня рождения С.Л. Эдельмана–Красноярск, 2010, 58.

[33] Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами* $U_3(2^n)$, Студент и научно-технический прогресс. Математика: мат-лы XLV междунар. науч. студ. конф., Новосибирск: Изд-во НГУ, 2007, 14.

[34] Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами* $U_3(2^n)$, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **6** (2007), 80–89.

[35] Л.Р. Тухватуллина, К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами* $L_3(3^n)$, Алгебра и её приложения: сб. тез. междунар. конф., посвящ. 75-летию В.П. Шункова, Красноярск, 2007, 134.

[36] Л.Р. Тухватуллина, *О строении периодических групп, насыщенных полудиэдрами*, Сиб. электрон. матем. изв., **5** (2008), 14–19. MR2586618

[37] К.А. Филиппов, *Группы, насыщенные конечными неабелевыми простыми группами и их расширениями*, дис. канд. физ.-мат. наук, Красноярск, 2005.

[38] К.А. Филиппов, А.А. Кузнецов, *О локальной конечности периодических групп, насыщенных группами диэдра*, Студент и научно-технический прогресс. Математика: мат-лы XLII междунар. науч.-студен. конф., Новосибирск, 2004, 10.

[39] К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами Цассенхауза*, Мат-лы регион. науч.-техн. конф., Красноярск: Изд-во КрасГАСА, 2005, 216–217.

[40] К.А. Филиппов, А.Г. Рубашкин, *О периодических группах насыщенных $L_2(p^n)$*, Сиб. матем. журн., **6** (2005), 1388–1392. MR2195037

[41] К.А. Филиппов, А.А. Кузнецов, *О локальной конечности периодических групп, насыщенных группами диэдра*, Матем. системы. – Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **3** (2005) 34–35.

[42] К.А. Филиппов, *О периодических группах насыщенных $L_2(2^n) \times Z_2$*, Тез. докл. междунар. алгебр. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения П.Г. Конторовича и 70-летию Л.Н. Шеврина, Екатеринбург, 2005, 80.

[43] К.А. Филиппов *Группы Цассенхауза с бесконечной силовской 2-подгруппой*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **4** (2005), 109–110.

[44] К.А. Филиппов, *О периодических группах с конечной силовской 2-подгруппой, насыщенных конечными простыми Z-группами*, Актуальные социально-экономические проблемы развития АПК: прил. к Вестнику КрасГАУ, Красноярск, 2005.

[45] К.А. Филиппов, *О группах Шункова, насыщенных $L_2(2^n) \times Z_2$*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **4** (2005), 111–115.

[46] К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных $L_2(2^n) \times Z_2$*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **4** (2005), 80–81.

[47] К.А. Филиппов, *О периодических группах, насыщенных группами Цассенхауза*, Матем. сист, Красноярск: КрасГАУ, **4** (2005), 111–113.

[48] К.А. Филиппов, А.А. Дуж, *О периодической группе Шункова, насыщенной центральными расширениями конечных 2-групп посредством группы $L_2(2^n)$*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **9** (2011), 90–94.

[49] К.А. Филиппов, *О группах Шункова, насыщенных прямыми произведениями групп*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **10** (2011), 26–31.

[50] А.К. Шлёпкин, *Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы*, Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре, Красноярск, 1993, 369.

[51] А.К. Шлёпкин, *О периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Группы. Групповые кольца: тез. докл. междунар. симп., Львов, 1996.

[52] А.К. Шлёпкин, *О группах Шункова, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Тез. докл. междунар. алгебр. конф. памяти Д.К. Фадеева, СПб., 1997, 310–311.

[53] А.К. Шлёпкин, *О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Алгебра и логика, **37**:2 (1998), 224–245. MR1672893

[54] А.К. Шлёпкин, *О сопряженно бипримитивно конечных группах, насыщенных конечными простыми подгруппами $U_3(2^n)$*, Алгебра и логика, **37**:5 (1998), 606–615. MR1680432

[55] А.К. Шлёпкин, *О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простыми подгруппами*, Матем. тр., **1**:1 (1998), 129–138. MR1763702

[56] А.К. Шлёпкин, *О периодической части некоторых групп Шункова*, Алгебра и логика, **38**:1 (1999), 96–125. MR1766728

[57] А.К. Шлёпкин, А.Г. Рубашкин, *О группах, насыщенных конечным множеством групп*, Сиб. матем. журн, **45**:6 (2004), 1397–1400. MR2123302

[58] А.К. Шлёпкин, А.Г. Рубашкин, *Об одном классе периодических групп*, Алгебра и логика, **44**:1 (2005), 114–125. MR2165877

[59] А.К. Шлёпкин, А.Г. Рубашкин, *О некоторых периодических группах, насыщенных конечными простым группами*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **2** (2004), 96–100.

[60] А.К. Шлёпкин, А.Г. Рубашкин, *Об одном классе периодических групп*, Матем. системы, Красноярск: Изд-во КрасГАУ, **2** (2004), 101–110.

[61] B. Amberg, L.S. Kazarin, *Periodic groups saturated by dihedral subgroups*, Ischia group theory, Proceedings of the conference, 2010.

[62] D.V. Lytkina, *Periodic groups saturated by the group $U_3(9)$*, Сиб. электрон. матем. изв., **4** (2007), 300–303. MR2465430

[63] A.K. Shlepkin, A.G. Rubashkin, *Groups saturated by a finite set of groups*, Siberian mathematical journal, **45**:6 (2004), 1140–1142. MR2123302

Александр Алексеевич Кузнецов
Сибирский аэрокосмический университет им. М.Ф. Решетнева,
пр. имени газеты Красноярский рабочий 31,
660014, Красноярск, Россия
E-mail address: alex_kuznetsov80@mail.ru