S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 247–267 (2011) УДК 519.632.4

MSC 65N06

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИЙ С ПОГРАНСЛОЙНЫМИ СОСТАВЛЯЮЩИМИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ДВУХСЕТОЧНОМ МЕТОДЕ

А.И. ЗАДОРИН, Н.А. ЗАДОРИН

Abstract. As known, elliptic equation with regular boundary layers can be solved using difference scheme on an uniform mesh or on a mesh, dense in boundary layers. In both cases we have to solve a linear system of equations by iterations. We can reduce a number of iterations, if we preliminarily solve a problem on a coarse mesh. In this case we need to interpolate the mesh solution from a coarse mesh to a fine mesh. In a case of the uniform mesh we construct interpolations, fitted to the boundary layer components. We prove that in a case of Shishkin mesh the polynomial interpolation has the property of an uniform accuracy and may be used in a two-grid method.

Keywords: boundary layer, nonpolynomial interpolation, elliptic problem, two-grid method.

Введение

Как известно, равномерная сходимость разностных схем для двумерных линейных эллиптических задач с регулярными пограничными слоями может быть обеспечена сгущением сетки в областях пограничного слоя [1]-[5] или, в случае равномерной сетки, подгонкой схемы к погранслойным составляющим решения [5]-[7]. В обоих случаях пятиточечная разностная схема представляет собой систему линейных уравнений, которая обычно решается на основе итераций.

Zadorin A.I., Zadorin N.A. Interpolation of functions with the boundary layer components and its application in a two-grid method.

Работа поддержана РФФИ (проекты 10-01-00726, 11-01-00875).

Поступила 12 мая 2011 г., опубликована 7 сентября 2011 г.

Количество итераций можно уменьшить за счет предварительного решения краевой задачи на вспомогательной грубой сетке. Тогда возникает необходимость в интерполяции найденного на грубой сетке решения в узлы исходной сетки. В работе построены и исследованы сплайн-интерполяционные формулы, точные на погранслойных составляющих, показана возможность их применения при решении задачи с пограничными слоями на равномерной сетке двухсеточным методом. Показано, что, в случае построения разностной схемы на сгущающейся в погранслоях сетке Г.И. Шишкина, метод полиномиальной сплайн-интерполяции является равномерно точным и его можно использовать в двухсеточном методе.

Обозначения. Всюду под C и $C_j, j \geq 0$, будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от погранслойных составляющих и шагов сетки. В случае экспоненциального пограничного слоя эти постоянные не зависят от параметра ε. Различные постоянные можем обозначать одной буквой. Определим нормы функции непрерывного аргумента $\|v(x,y)\| = \max\limits_{0\leq x,y\leq 1} |v(x,y)|$, $\|v(x)\| = \max\limits_{0\leq x\leq 1} |v(x)|$ и сеточной функции $\|v^h\|_h = \max\limits_{i,j} |v^h_{i,j}|$. Пусть $[v]_\Omega$ – проекция функции $v(x,y)$ на сетку Ω, $\|v\|_V = \max\limits_{(x,y)\in V} |v(x,y)|$, $V-$ замкнуто.

1. Постановка дифференциальной задачи

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a(x)u_x + b(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega;$$

$$u(x,y) = g(x,y),\ (x,y) \in \Gamma, \tag{1.1}$$

где $\Omega = (0,1)^2,\ \Gamma = \overline{\Omega}\setminus\Omega,$ функции a, b, c, f, g - достаточно гладкие,

$$a(x) \geq \alpha > 0,\quad b(y) \geq \beta > 0,\quad c(x,y) \geq 0,\ \varepsilon > 0. \tag{1.2}$$

При выполнении условий (1.2) решение задачи (1.1) является равномерно ограниченным и в соответствии с [5] в нем можно выделить экспоненциальные погранслойные составляющие:

$$u(x,y) = p(x,y) + \Big[g(0,y) - w(0,y)\Big]\Phi(x) +$$

$$+\Big[g(x,0) - w(x,0)\Big]\Theta(y) - \Big[g(0,0) - w(0,0)\Big]\Phi(x)\Theta(y), \tag{1.3}$$

где $p(x,y) - w(x,y) = O(\varepsilon)$, $p(x,y)$ – регулярная составляющая решения, с равномерно ограниченными первыми производными:

$$|p'_x(x,y)|,\ |p'_x(x,y)| \leq C_0, \tag{1.4}$$

$w(x,y)$ – решение вырожденной задачи:

$$a(x)w_x + b(y)w_y - c(x,y)w = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega,\ w(1,y) = g(1,y),\ w(x,1) = g(x,1),$$

погранслойные составляющие имеют вид:

$$\Phi(x) = \exp(-a(0)\varepsilon^{-1}x),\quad \Theta(y) = \exp(-b(0)\varepsilon^{-1}y). \tag{1.5}$$

Представление (1.3) для решения задачи (1.1) будет учитываться при построении формул сплайн-интерполяции, применяемых в двухсеточном методе решения этой задачи.

2. Двухсеточный метод

Пусть Ω_h – прямоугольная сетка исходной области $\bar{\Omega}$, с N интервалами в каждом направлении и узлами, $\{x_i, y_j\}$, $i, j = 0, 1, \dots, N$. Разностную схему для задачи (1.1) запишем в общем виде:

$$L^h u^h = f^h. \tag{2.1}$$

Предполагаем, что разностная схема является равномерно точной и для некоторой постоянной C_1

$$||u^h - [u]_{\Omega_h}||_h \le C_1 \Delta_h. \tag{2.2}$$

Разностная схема (2.1) для задачи (1.1) может быть построена как на равномерной, так и на неравномерной сетках. В случае задачи (1.1) разностная схема, как правило, является пятиточечной, и ее можно разрешить на основе итераций:

$$u^{(m+1)} = G(u^{(m)}),\ u^{(0)}\ -\ \text{задано}. \tag{2.3}$$

Если матрица системы (2.1) является диагонально преобладающей или M-матрицей, то ряд итерационных методов для ее разрешения являются сходящимися [8], [9]. Пусть для решения системы (2.1) применяется сходящийся итерационный метод и справедлива оценка сходимости итераций:

$$||u^{(m+1)} - u^h||_h \le q_h ||u^{(m)} - u^h||_h,\ q_h < 1. \tag{2.4}$$

Чтобы итерационная погрешность не доминировала над погрешностью разностной схемы, итерации необходимо продолжать, пока не выполнится условие:

$$\|u^{(m)} - u^h\|_h \le \Delta_h.$$

Учитывая (2.4), несложно заключить, что для этого потребуется

$$N_h \approx d\, N^2 \log_{q_h}(\Delta_h/\delta_h) \tag{2.5}$$

арифметических действий; мы предположили, что для реализации одной итерации необходимо выполнить dN^2 арифметических действий (пропорциональное числу неизвестных), $\delta_h = ||u^{(0)} - u^h||_h$.

Недостатком итерационных методов при численном решении эллиптических уравнений, таких как методы Якоби или Зейделя, является их невысокая скорость сходимости. В этом случае эффективным решением проблемы является использование многосеточного алгоритма. Скорость сходимости многосеточного метода не зависит от числа неизвестных в системе. С другой стороны, многосеточный метод устанавливает лишь структуру алгоритма, эффективность которого во многом зависит от адаптации его компонент к конкретной задаче. Многосеточный метод для уменьшения числа арифметических действий при решении систем уравнений был предложен Р.П. Федоренко [10]. Далее этот метод развивался в целом ряде работ, отметим [11]-[18].

Многосеточный метод для решения эллиптических задач с преобладающей конвекцией исследовался, например, в [16]-[18]. Сложности, преодолеваемые в этих работах, связаны с сильной несимметричностью матрицы системы линейных уравнений и потерей диагонального преобладания при определенных соотношениях коэффициента диффузии и шага сетки. От разностных схем не требовалось свойство равномерной по малому параметру сходимости.

Из многосеточных методов в ряде работ выделяется класс двухсеточных методов, например, [19]-[21]. В этих работах краевая задача предварительно решается на достаточно грубой сетке. Затем найденное сеточное решение интерполируется на исходную сетку и принимается за начальное приближение для итераций. Это приводит к выигрышу в количестве арифметических действий. В соответствии с [19], при таком подходе решение нелинейной задачи на исходной сетке может быть заменено на решение этой нелинейной задачи на довольно грубой сетке (с намного меньшим числом узлов) и на решение линейной задачи на исходной сетке. То есть практически на заданной сетке вместо нелинейной задачи решаются одна-две линейные задачи, соответствующие итерациям Ньютона.

Представляет интерес исследование двухсеточного метода в случае сингулярно - возмущенных краевых задач. Известно. что от разностной схемы в случае задачи с пограничным слоем целесообразно требовать свойство сходимости, равномерной по малому параметру [3]. Метод интерполяции сеточного решения с грубой сетки на исходную должен обладать точностью, порядок которой не ниже порядка точности разностной схемы. Поэтому следует требовать, чтобы и формула сплайн-интерполяции обладала точностью, равномерной по малому параметру.

Эти вопросы исследовались в следующих работах. В [22], [23] предложено применить двухсеточный метод для численного решения сингулярно возмущенной задачи в случае нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Для решения краевой задачи применялась схема А.М. Ильина [6], на равномерной сетке, обладающая равномерной по малому параметру точностью порядка $O(h)$. Использовалась формула сплайн-интерполяции [24], так же обладающая равномерной точностью порядка $O(h)$. Для разрешения разностной схемы, представляющей собой систему нелинейных уравнений, применялись методы Ньютона и Пикара. Показано, что число итераций на исходной сетке существенно уменьшается при использовании двухсеточного метода. В частности, если $h = H^2$, то на исходной сетке с шагом h требуется лишь одна итерация метода Ньютона, остальные итерации делаются на грубой сетке с шагом H. В [25] исследован двухсеточный метод для нелинейного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных, без конвективных членов. В этой работе используется линеаризация Ньютона в случае равномерно сходящейся разностной схемы на сетках Н.С. Бахвалова [1] и Г.И. Шишкина [2]. Применяется полиномиальная интерполяция сеточного решения, которая в данном случае является равномерно точной.

В данной работе используется подход [22], [23] применительно к решению линейной эллиптической сингулярно возмущенной задачи (1.1). Введем сетку Ω_H, такую же по структуре, как сетка Ω_h, только с намного меньшим количеством узлов $n,\ n \ll N$. Предварительно, с использованием итерационного метода (2.3), решаем задачу (1.1) на сетке Ω_H. Итерации на сетке Ω_H продолжаем, пока не выполнится условие

$$||u^{(m_H)} - u^H||_H \le \Delta_H, \tag{2.6}$$

m_H – необходимое количество итераций.

Далее необходимо найденное сеточное решение $u^{(m_H)}$ проинтерполировать в узлы исходной сетки Ω_h. Пусть $I(v^H, x, y)$ – формула сплайн-интерполяции сеточной функции v^H и справедлива оценка погрешности этой формулы:

$$|I([u]_{\Omega_H}, x, y) - u(x, y)| \leq C_2 \Delta_{int,H}, \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \tag{2.7}$$

где $u(x, y)$ – решение задачи (1.1), причем $\Delta_{int,H} \leq \Delta_H$.

Формула $I(v^H, x, y)$ должна быть устойчивой к возмущению интерполируемой сеточной функции v^H :

$$||I(v^H, x, y) - I(\tilde{v}^H, x, y)|| \leq C_3 ||v^H - \tilde{v}^H||_H. \tag{2.8}$$

Итак, определившись с формулой сплайн-интерполяции, мы можем проинтерполировать найденное сеточное решение $u^{(m_H)}$ в узлы исходной сетки Ω_h, пусть

$$u_H^I = [I(u^{(m_H)}, x, y)]_{\Omega_h}.$$

Покажем, что для некоторой постоянной C_4

$$||u_H^I - u^h||_h \leq C_4 \Delta_H. \tag{2.9}$$

С учетом неравенств (2.2), (2.6)-(2.8), получим:

$$||u_H^I - u^h||_h \leq ||I(u^{(m_H)}, x, y) - I(u^H, x, y)|| + ||I(u^H, x, y) - I([u]_{\Omega_H}, x, y)|| +$$
$$+ ||I([u]_{\Omega_H}, x, y) - u(x, y)|| + ||[u]_{\Omega_h} - u^h||_h \leq C_3 \Delta_H + C_3 C_1 \Delta_H +$$
$$+ C_2 \Delta_{int,H} + C_1 \Delta_h \leq C_4 \Delta_H.$$

Итак, с помощью решения задачи (1.1) на вспомогательной сетке Ω_H получено приближение к решению схемы (2.1) с точностью $O(\Delta_H)$. Используя это приближение как начальную итерацию в методе (2.3), мы уменьшим количество итераций на исходной сетке Ω_h. Посчитаем необходимое количество арифметических действий двухсеточного метода:

$$N_{Hh} \approx d\, n^2 \log_{q_H} \frac{\Delta_H}{\delta_H} + I_H + d\, N^2 \log_{q_h} \frac{\Delta_h}{\Delta_H}, \tag{2.10}$$

где I_H – число арифметических действий, необходимых для интерполяции. Сравнивая (2.5), (2.10), оценим выигрыш в числе арифметических действий при применении двухсеточного метода:

$$N_h - N_{Hh} \geq d(N^2 - n^2) \log_{q_H} \left(\frac{\Delta_H}{\delta_H} \right) - I_H. \tag{2.11}$$

3. Сплайн-интерполяция функций с погранслойными составляющими

Как говорилось выше, точность сплайн-интерполяционной формулы, используемой в двухсеточном методе, должна быть не ниже точности используемой разностной схемы. Вопросы сплайн-интерполяции исследовались в ряде работ, например, в [26]. Представляет интерес построение формул сплайн-интерполяции для функций с большими градиентами.

Покажем, что уже в случае функции одной переменной с погранслойной составляющей формула кусочно-линейной интерполяции $u_L(x)$ может привести к существенным погрешностям. Для этого на сеточном интервале $[0, h]$ рассмотрим функцию $u(x) = \exp(-\varepsilon^{-1} x)$, тогда при $\varepsilon = h$:

$$u_L(h/2) - u(h/2) = \frac{u(0) + u(h)}{2} - u(h/2) = \frac{1 + e^{-1}}{2} - e^{-0.5} \approx 0.0774.$$

В данном случае погрешность интерполяции не уменьшается с уменьшением h. Таким образом, актуален вопрос построения формул сплайн-интерполяции для функций с погранслойными составляющими.

В [24] исследуется вопрос сплайн-интерполяции функции, являющейся решением сингулярно-возмущенной задачи и содержащей экспоненциальную погранслойную составляющую. Предложено на сеточном интервале строить интерполяцию, точную на погранслойной составляющей. Доказано, что построенная формула интерполяции обладает точностью порядка $O(h)$, равномерно по параметру ε при старшей производной. В [27] построенная в [24] формула обобщена на случай, когда погранслойная составляющая является функцией общего вида. Доказано, что если погранслойная составляющая монотонна на сеточных интервалах, то точность формулы интерполяции порядка $O(h)$, равномерно по погранслойной составляющей и ее производным. В [28] для функции одной переменной с погранслойной составляющей общего вида построены формулы сплайн-интерполяции точности $O(h^2)$, независимо от роста интерполируемой функции в пограничном слое. В [29] построена и обоснована формула сплайн-интерполяции для функции двух переменных с одной погранслойной составляющей, соответствующей экспоненциальному пограничному слою в решении эллиптического уравнения с малым параметром при одной из старших производных.

В данном разделе построим формулы сплайн-интерполяции первого и второго порядка точности для функции двух переменных с двумя погранслойными составляющими. Представление интерполируемой функции, в частности, будет соответствовать представлению (1.3) решения эллиптической задачи (1.1), поэтому построенные интерполяции могут использоваться в двухсеточном методе. В то же время, построенные формулы сплайн-интерполяции имеют самостоятельный интерес.

Формула первого порядка точности. Пусть для достаточно гладкой функции $u(x,y)$ справедливо представление:

$$u(x,y)=p(x,y)+d_1(x,y)\Phi(x)+d_2(x,y)\Theta(y)+d_3(x,y)\Phi(x)\Theta(y). \tag{3.1}$$

Предполагаем, что для некоторой постоянной C_4

$$||p'_x||,\ ||p'_y||,\ ||(d_j)'_x||,\ ||(d_j)'_y||\le C_4,\quad j=1,2,3, \tag{3.2}$$

$\Phi(x),\Theta(y)$ – погранслойные составляющие, имеющие области больших градиентов. В частности, согласно (1.3), решение задачи (1.1) имеет представление (3.1), при этом функции $\Phi(x),\Theta(y)$ соответствуют (1.5).

Пусть $K_{i,j}$– произвольная ячейка сетки, $K_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$. Введем интерполяционную формулу для данной ячейки:

$$I_N([u]_{\Omega_h},x,y)=\Big(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j}\Big)\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\times\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}$$

$$+\Big(u_{i,j+1}-u_{i,j}\Big)\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+\Big(u_{i+1,j}-u_{i,j}\Big)\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}+u_{i,j}, \tag{3.3}$$

где

$$(x,y)\in K_{i,j},\ u_{i,j}=u(x_i,y_j),\ \Theta_j=\Theta(y_j),\ \Phi_i=\Phi(x_i).$$

Интерполяционная формула (3.3) точна на погранслойных составляющих $\Phi(x)$, $\Theta(y)$ и на их произведении $\Phi(x)\Theta(y)$. Заметим, что формула (3.3) представима в виде:

$$I_N([u]_{\Omega_h},x,y)=u_{i,j}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi(x)}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\times\frac{\Theta_{j+1}-\Theta(y)}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+u_{i,j+1}\frac{\Phi_{i+1}-\Phi(x)}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\times\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+$$

$$+u_{i+1,j}\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\times\frac{\Theta_{j+1}-\Theta(y)}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}+u_{i+1,j+1}\frac{\Phi(x)-\Phi_i}{\Phi_{i+1}-\Phi_i}\times\frac{\Theta(y)-\Theta_j}{\Theta_{j+1}-\Theta_j}. \qquad (3.4)$$

Учитывая представление (3.4), несложно убедиться в справедливости леммы.

Лемма 1. *Пусть непрерывные функции $\Phi(x),\Theta(y)$ монотонны на каждом сеточном интервале. Тогда формула (3.3) определена корректно и устойчива к возмущениям $u(x,y)$:*

$$||I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)-I_N([\tilde u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)||\le 4||[u]_{\overline{\Omega}_h}-[\tilde u]_{\overline{\Omega}_h}||_h. \qquad (3.5)$$

Лемма 2. *Пусть функция $u(x,y)$ имеет представление (3.1) и ограничения (3.2) имеют место. Пусть функции $\Phi(x),\Theta(y)$ непрерывны и монотонны на каждом сеточном интервале. Тогда найдется постоянная C_5, такая, что*

$$||I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)-u(x,y)||\le C_5h,\quad h=\max_{i,j}\{x_{i+1}-x_i,\ y_{j+1}-y_j\}. \qquad (3.6)$$

Доказательство. Пусть для некоторых i,j $(x,y)\in K_{i,j}$. Введем

$$\tilde u(x,y)=p(x_i,y_j)+d_1(x_i,y_j)\Phi(x)+d_2(x_i,y_j)\Theta(y)+d_3(x_i,y_j)\Phi(x)\Theta(y).$$

Зададим погрешность интерполяции:

$$R(u,x,y)=I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)-u(x,y).$$

Учитывая, что интерполяция (3.3) точна на константе, на функциях $\Phi(x),\Theta(y)$ и их произведении, получим: $R(\tilde u,x,y)=0$. Следовательно,

$$R(u,x,y)=R(u-\tilde u,x,y)+R(\tilde u,x,y)=R(u-\tilde u,x,y).$$

Учитывая условия (3.2) и представление (3.4), получим:

$$|R(u-\tilde u,x,y)|\le 4C_4\Big[1+\|\Phi\|+\|\Theta\|+\|\Phi\Theta\|\Big]\,h,$$

что доказывает лемму.

В соответствии с этой леммой формула (3.3) – первого порядка точности, равномерно по градиентам погранслойных составляющих.

Из (3.3) при задании $\Phi(x)=x,\ \Theta(y)=y$ следует формула полиномиальной интерполяции:

$$I_P([u]_{\Omega_h},x,y)=\Big(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j}+u_{i,j}\Big)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\times\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}$$

$$+\Big(u_{i,j+1}-u_{i,j}\Big)\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+\Big(u_{i+1,j}-u_{i,j}\Big)\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}+u_{i,j}. \qquad (3.7)$$

Учитывая, что в случае функции одной переменной для формулы линейной интерполяции на интервале длины h справедлива оценка погрешности [26]:

$$||u_L(x)-u(x)||\le\frac{h^2}{8}||u''(x)||,$$

и то, что интерполяцию (3.7) можно представить как последовательное применение линейных интерполяций по x и y, получим:

$$||I_P([u]_{\Omega_h},x,y)-u(x,y)||_{K_{i,j}}\le\frac{h^2}{4}\Big[\|u_{xx}\|_{K_{i,j}}+\|u_{yy}\|_{K_{i,j}}\Big]. \qquad (3.8)$$

Если $u(x,y)$ является решением задачи (1.1) при наложенных ограничениях (1.2), то для некоторой постоянной C_6 справедливы [2], [5] оценки производных:

$$|u_{xx}(x,y)| \le C_6\Big[\varepsilon^{-2}e^{\alpha\varepsilon^{-1}x}+1\Big], \quad |u_{yy}(x,y)| \le C_6\Big[\varepsilon^{-2}e^{\beta\varepsilon^{-1}y}+1\Big]. \tag{3.9}$$

Следовательно, формула полиномиальной интерполяции (3.7) в ячейке $K_{i,j}$ для функции $u(x,y)$ будет точности $O(h^2)$, равномерно по ε, если производные в (3.8) равномерно ограничены. В соответствии с (3.9), эти производные в ячейке $K_{i,j}$ ограничены, если

$$x_i \ge -2\alpha^{-1}\varepsilon\ln\varepsilon, \ y_j \ge -2\beta^{-1}\varepsilon\ln\varepsilon, \ \varepsilon < 1. \tag{3.10}$$

Итак, для интерполяции функции $u(x,y)$, являющейся решением задачи (1.1), в ячейке $K_{i,j}$ можно применять формулу (3.7), если выполнены условия (3.10) и формулу (3.3) иначе. При этом оценка погрешности интерполяции будет равномерной по ε.

Покажем, что в ячейке $K_{i,j}$ формула (3.3) неполиномиальной интерполяции так же порядка точности $O(h^2)$, если функция $u(x,y)$ в этой ячейке не имеет больших градиентов. Действительно, учитывая оценку (3.8), получим:

$$\Big|I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)-u(x,y)\Big| \le \Big|I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)-I_P(u,x,y)\Big| + \Big|u(x,y)-I_P(u,x,y)\Big| \le$$
$$\le \frac{h^2}{4}\Big[\|u_{xx}\|_{K_{i,j}}+\|u_{yy}\|_{K_{i,j}}+\|I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)_{xx}\|_{K_{i,j}}+$$
$$+\|I_N([u]_{\overline{\Omega}_h},x,y)_{yy}\|_{K_{i,j}}\Big]. \tag{3.11}$$

Формула второго порядка точности. В случае функции одной переменной нами [28] построена сплайн-интерполяционная формула второго порядка точности, равномерной по градиентам погранслойной составляющей. Обобщим эту формулу на случай функции двух переменных. Пусть интерполируемая функция $u(x,y)$ содержит погранслойные составляющие по обеим переменным и представима в виде:

$$u(x,y) = p(x,y) + d_1(y)\Phi(x) + d_2(x)\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y). \tag{3.12}$$

Предполагаем, что функции $p(x,y), d_1(y), d_2(x)$ имеют равномерно ограниченные первые и вторые производные, известные непрерывные и ограниченные погранслойные составляющие $\Phi(x), \Theta(y)$ имеют области больших градиентов. Представление (1.3) для решения задачи (1.1) соответствует (3.12), при этом $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ задаются согласно (1.5).

Будем предполагать, что сетка Ω_h содержит одинаковые шаги h по x и y. Интерполянт строим для произвольной удвоенной ячейки сетки

$$K_{i,j}^{(2h)} = \{x_{i-1} \le x \le x_{i+1}, \quad y_{j-1} \le y \le y_{j+1}\}$$

с условием интерполяции в девяти узлах $\{x_{i,j}, x_{i\pm1,j\pm1}, x_{i,j\pm1}, x_{i\pm1,j}\}$.

Используя формулу одномерной интерполяции из [28], сначала осуществим интерполяцию по x при заданном y :

$$u_\Phi(x,y) = I_\Phi(u,x,y) = u(x_i,y) + \frac{u(x_i,y)-u(x_{i-1},y)}{h}(x-x_i)+$$
$$+\frac{u(x_{i+1},y)-2u(x_i,y)+u(x_{i-1},y)}{\Phi_{i+1}-2\Phi_i+\Phi_{i-1}}\Big[\Phi(x)-\Phi_i-\frac{\Phi_i-\Phi_{i-1}}{h}(x-x_i)\Big],$$
$$x \in [x_{i-1},x_{i+1}]. \tag{3.13}$$

Теперь осуществим аналогичную интерполяцию по y и получим интерполянт для всей ячейки $K_{i,j}^{(2h)}$:

$$I_{\Phi,\Theta}(u,x,y) = I_\Theta(u_\Phi,x,y) = u_\Phi(x,y_j) + \frac{u_\Phi(x,y_j) - u_\Phi(x,y_{j-1})}{h}(y-y_j)+$$

$$+\frac{u_\Phi(x,y_{j+1}) - 2u_\Phi(x,y_j) + u_\Phi(x,y_{j-1})}{\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1}}\Big[\Theta(y) - \Theta_j - \frac{\Theta_j - \Theta_{j-1}}{h}(y-y_j)\Big]. \quad (3.14)$$

Несложно проверить, что построенная интерполяция $I_{\Phi,\Theta}(u,x,y)$ является точной на функциях:

$$1,\ x,\ y,\ xy,\ \Phi(x),\ \Theta(y),\ \Phi(x)\Theta(y),\ x\Theta(y),\ y\Phi(x). \quad (3.15)$$

Лемма 3. *Пусть функция $u(x,y)$ имеет представление (3.12), погранслойные составляющие $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ сохраняют выпуклость или вогнутость на интервалах (x_{i-1},x_{i+1}) и (y_{j-1},y_{j+1}) соответственно. Тогда для некоторой постоянной C выполнится:*

$$|I_{\Phi,\Theta}(u,x,y) - u(x,y)| \le C\Big[\|p''_{xx}\|_{K_{i,j}^{(2h)}} + \max_{s_1}|d''_2(s_1)| + \|p''_{yy}\|_{K_{i,j}^{(2h)}} + \max_{s_2}|d''_1(s_2)|\Big]h^2,$$

$$(x,y),(s_1,s_2) \in K_{i,j}^{(2h)}. \quad (3.16)$$

Доказательство. В соответствии с [28] для некоторой постоянной C_1 на интервалах (x_{i-1},x_{i+1}) и (y_{j-1},y_{j+1}) справедливы оценки:

$$\Big|\frac{\Phi(x) - \Phi_i - (\Phi_i - \Phi_{i-1})(x-x_i)/h}{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}\Big|, \ \Big|\frac{\Theta(x) - \Theta_j - (\Theta_j - \Theta_{j-1})(y-y_j)/h}{\Theta_{j+1} - 2\Theta_j + \Theta_{j-1}}\Big| \le C_1. \quad (3.17)$$

Учитывая (3.17), можно показать, что интерполяционные формулы (3.13) и (3.14) устойчивы к возмущению функции $u(x,y)$, поэтому для некоторой постоянной C_2

$$|I_{\Phi,\Theta}(u-\tilde u,x,y)| \le C_2 \max_{(x_i,y_j)}|u(x_i,y_j) - \tilde u(x_i,y_j)|,\ (x_i,y_j),(x,y) \in K_{i,j}^{(2h)}. \quad (3.18)$$

Определим в ячейке $K_{i,j}^{(2h)}$

$$\tilde u(x,y) = p(x,y) + [d_1(y_j) + (y-y_j)d'_1(y_j)]\Phi(x)+$$
$$+[d_2(x_i) + (x-x_i)d'_2(x_i)]\Theta(y) + d_3\Phi(x)\Theta(y). \quad (3.19)$$

Вычитая (3.19) из (3.12), получим:

$$|u(x,y) - \tilde u(x,y)| \le \frac{1}{2}\Big[\max_{s_2}|d''_1(s_2)\Phi(x)| + \max_{s_1}|d''_2(s_1)\Theta(y)|\Big]h^2,$$

$$(x,y),(s_1,s_2) \in K_{i,j}^{(2h)}. \quad (3.20)$$

Оценку точности интерполянта (3.14) осуществим на основе неравенства:

$$|I_{\Phi,\Theta}(u,x,y) - u(x,y)| \le |I_{\Phi,\Theta}(u-\tilde u,x,y)| + |I_{\Phi,\Theta}(\tilde u,x,y) - \tilde u(x,y)|+$$
$$+|\tilde u(x,y) - u(x,y)|. \quad (3.21)$$

Учитывая (3.18), (3.20) и ограниченность функций $\Phi(x),\Theta(y)$, получим, что для некоторой постоянной C_3

$$|I_{\Phi,\Theta}(u-\tilde u,x,y)| \le C_3\Big[\max_{s_1}|d''_2(s_1)| + \max_{s_2}|d''_1(s_2)|\Big]h^2, (s_1,s_2) \in K_{i,j}^{(2h)}. \quad (3.22)$$

Остается оценить второй модуль в правой части неравенства (3.21). Мы учитываем представление (3.19) для функции $\tilde{u}(x,y)$ и то, что интерполяция (3.13)-(3.14) является точной на функциях (3.15). Тогда получим:

$$|I_{\Phi,\Theta}(\tilde{u},x,y)-\tilde{u}(x,y)|=|I_{\Phi,\Theta}(p,x,y)-p(x,y)|. \tag{3.23}$$

Формула (3.13) является интерполяцией по переменной x, поэтому в соответствии с [28] для некоторой постоянной C_4

$$|p_\Phi(x,y_j)-p(x,y_j)|\le C_4\max_s|p''_{xx}(s,y_j)|h^2, \quad x_{i-1}\le s\le x_{i+1}, \tag{3.24}$$

где $p_\Phi(x,y)=I_\Phi(p,x,y)$. Очевидно, что

$$|I_{\Phi,\Theta}(p,x,y)-p(x,y)|=|I_\Theta(p_\Phi,x,y)-p(x,y)|\le|I_\Theta(p_\Phi-p,x,y)|+$$
$$+|I_\Theta(p,x,y)-p(x,y)|. \tag{3.25}$$

Для оценки первого модуля в (3.25) учитываем, что интерполяция по y является устойчивой к возмущению функции $p(x,y)$, используем оценку (3.24) и получим, что для некоторой постоянной C_5

$$|I_\Theta(p_\Phi-p,x,y)|\le C_5\max_{s_1,s_2}|p''_{xx}(s_1,s_2)|h^2, \quad (s_1,s_2)\in K^{(2h)}_{i,j}. \tag{3.26}$$

Учитывая, что $I_\Theta(p,x,y)$ является интерполяцией по y для функции $p(x,y)$ и используя полученную в [28] оценку точности такой интерполяции, получим:

$$|I_\Theta(p,x,y)-p(x,y)|\le C_6\max_s|p''_{yy}(x,s)|h^2, \quad y_{j-1}\le s\le y_{j+1}. \tag{3.27}$$

Используя оценки (3.26),(3.27) в (3.25), для некоторой постоянной C_7 получим:

$$|I_{\Phi,\Theta}(p,x,y)-p(x,y)|\le C_7\Big[\|p''_{xx}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}+\|p''_{yy}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}\Big]h^2. \tag{3.28}$$

Итак, с учетом (3.23), из (3.28) следует оценка второго модуля в (3.21). Используя соотношения (3.20), (3.22), (3.23), (3.28) в (3.21), получим требуемую оценку (3.16). Лемма доказана.

Заметим, что если производные $p''_{xx}(x,y)$, $p''_{yy}(x,y)$ не являются равномерно ограниченными, оценка (3.16) может быть улучшена, в этой оценке можно $\|p''_{xx}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}$ заменить на

$$\max_{s_2}\frac{1}{h}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}|p''_{xx}(s_1,s_2)|\,ds_1.$$

Аналогично в оценке (3.16) можно заменить $\|p''_{yy}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}$.

Покажем, что интерполяционная формула (3.13)-(3.14) — третьего порядка точности в ячейке $K^{(2h)}_{i,j}$, если интерполируемая функция $u(x,y)$ в данной ячейке не имеет больших градиентов. Действительно, в соответствии с [28] при интерполяции по x справедлива оценка погрешности:

$$\Big|u_\Phi(x,y_j)-u(x,y_j)\Big|\le\frac{1}{9\sqrt{3}}\Big[\max_s|u_{xxx}(s,y_j)|+\max_s|(u_\Phi)_{xxx}(s,y_j)|\Big]h^3.$$

Аналогичная оценка справедлива при интерполяции по y. Учитывая неравенство:

$$|I_{\Phi,\Theta}(u,x,y)-u(x,y)|\le|I_\Theta(u_\Phi-u,x,y)|+|I_\Theta(u,x,y)-u(x,y)|$$

и устойчивость формул (3.13), (3.14) к возмущению интерполируемой функции, получим, что для некоторой постоянной C :

$$\Big|I_{\Phi,\Theta}(u,x,y)-u(x,y)\Big|\le C\Big[\|u_{xxx}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}+\|(u_\Phi)_{xxx}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}+$$

$$+\|u_{yyy}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}+\|(u_\Phi)_{yyy}\|_{K^{(2h)}_{i,j}}\Big]h^3,\quad (x,y)\in K^{(2h)}_{i,j}. \qquad (3.29).$$

4. Двухсеточный метод для задачи с пограничными слоями на равномерной сетке

Остановимся на вопросе численного решения задачи (1.1) на равномерной сетке. В соответствии с представлением (1.3) решение задачи (1.1) содержит экспоненциальные пограничные слои у границ $x=0,\ y=0$. В соответствии с леммами 1–3 построенные в предыдущем разделе формулы сплайн- интерполяции обладают точностью, равномерной по градиентам погранслойных составляющих, и могут использоваться в двухсеточном методе решения задачи (1.1). В случае равномерной сетки известно, что равномерной по малому параметру точностью обладает схема, обобщающая схему экспоненциальной подгонки из [6] на случай двух переменных. В [7] доказано, что такая схема является равномерно сходящейся, точности порядка $O(h^r),\ r<\ 1$. Исследуем двухсеточный метод на примере численной реализации данной схемы. Зададим равномерную сетку области $\bar\Omega$:

$$\bar\Omega_h=\{(x_i,y_j),\ i,j=0,1,\dots,N,\ x_i=ih,y_j=jh,Nh=1\},$$

пусть Γ_h - граница сеточной области. Выпишем разностную схему на сетке $\bar\Omega_h$:

$$L^h_{i,j}u^h=\varepsilon^h_{1,i}\frac{u^h_{i+1,j}-2u^h_{i,j}+u^h_{i-1,j}}{h^2}+\varepsilon^h_{2,j}\frac{u^h_{i,j+1}-2u^h_{i,j}+u^h_{i,j-1}}{h^2}+a_i\frac{u^h_{i+1,j}-u^h_{i-1,j}}{2h}+$$

$$+b_j\frac{u^h_{i,j+1}-u^h_{i,j-1}}{2h}-c(x_i,y_j)u^h_{i,j}=f(x_i,y_j),\ (x_i,y_j)\in\Omega_h,$$

$$u^h_{i,j}=g(x_i,y_j),\ (x_i,y_j)\in\Gamma_h, \qquad (4.1)$$

где $a_i=a(x_i),b_j=b(y_j)$,

$$\varepsilon^h_{1,i}=\frac{a_ih}{2}\mathrm{cth}\frac{a_ih}{2\varepsilon},\quad \varepsilon^h_{2,j}=\frac{b_jh}{2}\mathrm{cth}\frac{b_jh}{2\varepsilon},\ 0<i,j<N.$$

Справедливо следующее утверждение о точности схемы (4.1).

Теорема 1 (К.В. Емельянов [7]). *Пусть u^h – решение схемы (4.1). Тогда найдется C_0, такое, что*

$$\|u^h-[u]_{\Omega_h}\|_h\le C_0h^r$$

для некоторого $r<1$.

Схему (4.1) можно записать как пятиточечную:

$$A_{i,j}u^h_{i-1,j}+B_{i,j}u^h_{i,j-1}+C_{i,j}u^h_{i+1,j}+D_{i,j}u^h_{i,j+1}-E_{i,j}u^h_{i,j}=F_{i,j},\quad 1\le i,j<N,$$

$$u^h_{i,j}=g(x_i,y_j),\ (x_i,y_j)\in\Gamma_h. \qquad (4.2)$$

Матрица системы (4.2) является M-матрицей, поэтому ряд итерационных методов, например, Якоби, точечный и блочный методы Зейделя, переменных направлений, являются сходящимися [9], и для некоторой постоянной $q_h<1$ выполнится оценка сходимости (2.4), где q_h зависит от итерационного метода и шага сетки. В соответствии с теоремой 1 в оценке (2.2) $\Delta_h = h^r,\ \Delta_h > \ h$. Следовательно, в двухсеточном методе для интерполяции сеточного решения с грубой сетки $\bar\Omega_H$ на исходную сетку $\bar\Omega_h$ можно применить сплайн- интерполяционную формулу (3.3). В соответствии с оценкой (3.5) формула (3.3) устойчива к возмущению интерполируемой функции, что необходимо при обосновании двухсеточного метода в разделе 2.

На основании оценки (2.11) можно поставить оптимизационную задачу, как для заданного N подобрать n – количество узлов грубой сетки, чтобы выигрыш в количестве арифметических действий от применения двухсеточного метода был наибольшим. Не учитывая затраты на интерполяцию, из (2.11) получим:

$$N_h - N_{Hh} \approx d\,G(H) = d\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{H^2}\right)\log_{q_H}\frac{H^r}{\delta_H},$$

где $G(h) = 0,\ G(\delta^{1/r}) = 0,\ h \le H \le \delta^{1/r}$. Следовательно, для некоторого H^* функция $G(H)$ принимает максимальное значение, H^* является единственным решением нелинейного уравнения:

$$H^2 - h^2\Big(1 - 2\ln(H) + \frac{2}{r}\ln(\delta_H)\Big) = 0. \tag{4.3}$$

Итак, шаг H, полученный исходя из набольшей экономии в числе арифметических действий, является решением уравнения (4.3). Погрешность начального приближения δ_H неизвестна, при $H \ll \delta_H$ последним слагаемым в (4.3) можно пренебречь, и тогда уравнение на H принимает вид

$$H^2 = h^2(1 - \ln H^2). \tag{4.4}$$

Пусть $z = H^2$. Метод итераций $z_{k+1} = h^2(1 - \ln z_k)$ для решения уравнения (4.4) является сходящимся.

5. Двухсеточный метод на сетке Г.И. Шишкина

Наибольшее распространение при решении эллиптических задач с пограничными слоями получило построение разностных схем на сгущающихся в пограничных слоях сетках [1]-[5], [30]. Остановимся на подходе, когда для достижения равномерной сходимости разностной схемы используется сгущающаяся в пограничных слоях сетка Г.И. Шишкина [2]. Зададим в области $\bar\Omega$ кусочно-равномерную сетку:

$$\bar\Omega_h = \{(x_i, y_j),\ i,j = 0,1,\dots,N,\ h_i = x_i - x_{i-1},\ k_j = y_j - y_{j-1}\},$$

где

$$h_i = \frac{2\sigma_1}{N},\ 1 \le i \le \frac{N}{2};\ h_i = \frac{2(1-\sigma_1)}{N},\ \frac{N}{2} < i \le N,\ \sigma_1 = \frac{2\varepsilon}{\alpha}\ln N,$$
$$k_j = \frac{2\sigma_2}{N},\ 1 \le j \le \frac{N}{2};\ k_j = \frac{2(1-\sigma_2)}{N},\ \frac{N}{2} < j \le N,\ \sigma_2 = \frac{2\varepsilon}{\beta}\ln N. \tag{5.1}$$

На заданной сетке $\bar\Omega_h$ выпишем схему направленных разностей:

$$\frac{2\varepsilon}{h_i + h_{i+1}}\Big[\frac{u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{u^h_{i,j} - u^h_{i-1,j}}{h_i}\Big] + \frac{2\varepsilon}{k_j + k_{j+1}}\Big[\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k_{j+1}} - \frac{u^h_{i,j} - u^h_{i,j-1}}{k_j}\Big] +$$
$$+ a_i\frac{u^h_{i+1,j} - u^h_{i,j}}{h_{i+1}} + b_j\frac{u^h_{i,j+1} - u^h_{i,j}}{k_{j+1}} - c(x_i, y_j)u^h_{i,j} = f(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \Omega_h,$$
$$u^h_{i,j} = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_h. \tag{5.2}$$

В соответствии с [31]

$$\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u^h_{i,j}| \leq CN^{-1} \ln^2 N.$$

Позднее эта оценка была улучшена, в соответствии с [5]

$$\max_{i,j} |u(x_i, y_j) - u^h_{i,j}| \leq CN^{-1} \ln N. \tag{5.3}$$

Итак, схема (5.2) на сетке (5.1) обладает свойством равномерной сходимости. Схему (5.2) можно записать как пятиточечную вида (4.2). По аналогии со случаем равномерной сетки матрица этой схемы является М-матрицей и ряд итерационных методов для ее разрешения являются сходящимися [9].

Для того, чтобы итерационная погрешность не доминировала над погрешностью разностной схемы, итерации необходимо продолжать до выполнения условия:

$$\|u^{(m_h)} - u^h\|_h \leq \Delta_h, \ \Delta_h = \frac{\ln N}{N}.$$

В разделе 2 приведена оценка необходимого количества арифметических действий для реализации разностной схемы и показано, как число арифметических действий можно сократить с применением двухсеточного метода.

Остается остановиться на вопросе, какую сплайн-интерполяцию следует использовать в случае сетки (5.1).

Пусть $K_{i,j}$ – произвольная ячейка сетки Ω_h. Полиномиальную интерполяцию для этой ячейки можно задать следующим образом. Сначала на линии $y = y_j$ зададим интерполяцию по x :

$$\tilde{u}(x, y_j) = \frac{1}{h_{i+1}} \Big[(x_{i+1} - x)u_{i,j} + (x - x_i)u_{i+1,j}\Big] = Int_x(u, x, y_j). \tag{5.4}$$

Затем осуществим интерполяцию по y и получим:

$$Int_y(\tilde{u}, x, y) = \frac{1}{k_{j+1}} \Big[(y_{j+1} - y)\tilde{u}(x, y_j) + (y - y_j)\tilde{u}(x, y_{j+1})\Big]. \tag{5.5}$$

Интерполяционные формулы (5.4)-(5.5) можно записать в виде одной формулы (3.7). Оценим погрешность сплайн-интерполяции (3.7) на сетке (5.1), используя (5.4) и (5.5):

$$\Big|I_P([u]_{\Omega_h}, x, y) - u(x, y)\Big| \leq \Big|Int_y(\tilde{u} - u, x, y)\Big| + \Big|Int_y(u, x, y) - u(x, y)\Big|. \tag{5.6}$$

Для функции $u(x, y)$ справедливы оценки производных (3.9), поэтому в соответствии с [32] на сетке (5.1) справедливы оценки погрешности одномерных интерполяций:

$$\Big|Int_x(u, x, y) - u(x, y)\Big| \leq C_0 \frac{\ln^2 N}{N^2}, \quad \Big|Int_y(u, x, y) - u(x, y)\Big| \leq C_0 \frac{\ln^2 N}{N^2}, \tag{5.7}$$

где C_0 – некоторая постоянная. Учитывая (5.7), из (5.6) получим:

$$\Big|I_P([u]_{\Omega_h}, x, y) - u(x, y)\Big| \leq 2C_0 \frac{\ln^2 N}{N^2}. \tag{5.8}$$

Итак, для сплайн-интерполяционной формулы (3.7) на сетке (5.1) справедлива оценка равномерной точности (5.8). Очевидно, что интерполяционная формула (3.7) устойчива к возмущению интерполируемой функции, поэтому ее можно применять для интерполяции не только неизвестной сеточной функции $[u]_{\Omega_H}$, но и итерационного приближения к решению схемы (5.2) на сетке Ω_H. Итак, в двухсеточном методе для разрешения схемы (5.2) зададим $u_H^I = [I_P(u^{(m_H)}, x, y)]_{\Omega_h}$. Учитывая оценки (5.3), (5.8), для некоторой постоянной C_1 получим:

$$||u_H^I - u^h||_h \le C_1 \frac{\ln(n)}{n}.$$

Построено начальное приближение к решению схемы (5.2) с точностью $O(\ln(n)/n)$. Далее остается осуществить итерации на исходной сетке Ω_h для достижения точности $O(\ln(N)/N)$.

6. Численные эксперименты

Сначала численно исследуем точность формул сплайн-интерполяции для функции с погранслойными составляющими. Остановимся на примере:

$$u(x,y) = \left(1 - e^{-x/\varepsilon}\right)\left(1 - e^{-2y/\varepsilon}\right)(1-x)(1-y) + cos(\pi x/2)e^{-y},$$

$$\varepsilon > 0,\ x, y \in [0,1]. \tag{6.1}$$

В табл. 1 приведена погрешность

$$\Delta = \max_{\varepsilon} \max_{i,j} |u_{int}(x_i, y_j) - u(x_i, y_j)|$$

в зависимости от способа сплайн-интерполяции и шага h равномерной сетки, где

$$\varepsilon \in \{1, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots, 2^{-8}\}.$$

В таблицах $e \pm m$ обозначает $10^{\pm m}$. Результаты вычислений подтверждают, что формула полиномиальной сплайн-интерполяции (3.7) имеет погрешность порядка $O(1)$ при малых значениях ε, формула подгонки к погранслойной составляющей (3.3) – точности порядка $O(h)$, формула (3.13)-(3.14) – точности порядка $O(h^2)$, равномерно по параметру ε. Эксперименты подтверждают полученные оценки точности.

Теперь остановимся на двухсеточном методе решения задачи (1.1).

Равномерная сетка. Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x + 2u_y - u = \frac{-2y}{1+y} e^x,\ (x,y) \in (0,1)^2,$$

$$u(x,y) = xy, \quad (x,y) \in \Gamma. \tag{6.2}$$

Для нахождения решения схемы (4.1), записанной в виде (4.2), используем итерационный метод Зейделя:

$$A_{i,j}u_{i-1,j}^{m+1} + B_{i,j}u_{i,j-1}^{m+1} + C_{i,j}u_{i+1,j}^{m} + D_{i,j}u_{i,j+1}^{m} - E_{i,j}u_{i,j}^{m+1} = F_{i,j},\ \ 1 \le i,j \le N-1,$$

$$u_{i,j}^{m+1} = g(x_i, y_j),\ (x_i, y_j) \in \Gamma_h. \tag{6.3}$$

Начальную итерацию зададим в виде: $u_{i,j}^{(0)} = x_i y_j$.

Выполнение условия на завершение итераций проверяем на основе верного, в случае задачи (1.1) с ограничениями (1.2), соотношения:

$$\|u^{(m)} - u^h\|_h \le \alpha^{-1} \|L^h u^{(m)} - f^h\|_h.$$

Чтобы итерационная погрешность была меньше погрешности разностной схемы (4.1), итерации на сетке Ω_h продолжаем до выполнения условия:

$$\|L^h u^{(m)} - f^h\|_h \leq \frac{1}{10}\,\frac{h^2}{h+\varepsilon}.$$

Случай итераций на сетке Ω_H аналогичен, при этом h меняется на H.

В табл. 2 приведено количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке с шагом h, $h = 1/N$, и на вспомогательной сетке с шагом H, $H = 1/n$ (число итераций на грубой сетке указано в скобках), при различных N и n. Используется экспоненциальная интерполяция (3.3), $\varepsilon = 0.001$. В нижней строке таблицы приведено количество итераций односеточного метода.

В табл. 3 аналогичным образом приведено количество итераций в случае использования полиномиальной интерполяции (3.7), $\varepsilon = 0.001$.

Из таблиц 2-3 следует, что использование экспоненциальной интерполяции (3.3) приводит к существенному сокращению количества итераций на исходной сетке с шагом h, следовательно, и к выигрышу в количестве арифметических действий в сравнение с решением задачи на одной сетке. Полиномиальная интерполяция при малых значениях ε приводит к значительным погрешностям, поэтому не происходит существенного сокращения числа итераций на мелкой сетке при ее использовании в двухсеточном методе.

В табл. 4 приведены результаты сравнения односеточного и двухсеточного методов с заданием H на основе решения уравнения (4.4), с применением интерполяционной формулы (3.3). Как и в табл. 2, представлено число итераций на исходной сетке и в скобках - на грубой сетке с n_{opt} количеством узлов, $\varepsilon = 0.001$. Выигрыш в числе итераций очевиден.

Рассмотрим краевую задачу:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + u_x + 2u_y - u = f(x,y),\ (x,y) \in (0,1)^2,$$

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{6.4}$$

где функции $f(x,y), g(x,y)$ соответствуют следующему решению задачи (6.4):

$$u(x,y) = (1-\exp(-\varepsilon^{-1}x))(1-\exp(-2\varepsilon^{-1}y)) + \cos x \exp(y).$$

При применении двухсеточного метода мы имеем информацию о решении разностной схемы на двух сетках, это можно использовать для повышения точности схемы на основе метода Ричардсона [33]. Анализ метода Ричардсона для повышения точности разностных схем, применительно к задачам с пограничным слоем, осуществлялся, например, в [34]-[36]. Выделим главный член погрешности схемы (4.1) и проведем численный анализ полученного уточнения по методу Ричардсона. Учитывая, что при $\varepsilon \approx 1$ схема (4.1) обладает погрешностью порядка $O(h^2)$, а при малых значениях ε – порядка $O(h^r), r < 1$, выделим главный член погрешности схемы (4.1) в виде:

$$u(x_i, y_j) \approx C\frac{h^2}{h+\varepsilon} + u^h_{i,j}.$$

Используя еще аналогичное соотношение в случае шага $h/2$, получим:

$$C\frac{h^2}{h+\varepsilon} \approx \frac{2h+4\varepsilon}{h+3\varepsilon}\left(u^{h/2}_{i,j} - u^h_{i,j}\right),\ 1 \leq i,j < N.$$

Теперь получим сеточное решение с учетом главного члена погрешности:

$$\tilde{u}^h_{i,j} \approx \frac{2h+4\varepsilon}{h+3\varepsilon} u^{h/2}_{i,j} - \frac{h+\varepsilon}{h+3\varepsilon} u^h_{i,j}, \;\; i,j = 1,2,\ldots,N-1\,. \tag{6.5}$$

В случае задачи (6.4) для реализации разностной схемы используем итерационный метод Зейделя, с начальной итерацией $u^{(0)}_{i,j} = 0$ во внутренних узлах, в граничных узлах $u^{(m)}_{i,j} = g(x_i, y_j), \;\; m \geq 0$.

В табл. 5 приведены результаты сравнения количества итераций односеточного и двухсеточного методов Зейделя в случае применения схемы (4.1) к задаче (6.4) при различных значениях параметра ε и N. Для каждого значения ε приведено количество итераций односеточного метода Зейделя в зависимости от N и (ниже) количество итераций двухсеточного метода, как и в табл. 2. Число шагов сетки Ω_H задается как $n = N/2$. Выигрыш в количестве арифметических действий при применении двухсеточного метода становится существенным с увеличением ε или числа узлов. Для интерполяции сеточного решения в пограничных слоях использовалась неполиномиальная интерполяция (3.3), вне погранслоев – полиномиальная интерполяция (3.7).

В табл. 6 приведена погрешность $\Delta(\varepsilon, h) = \max\limits_{i,j} |u(x_i, y_j) - u^h_{i,j}|$ схемы (4.1) и (ниже) погрешность уточненного по методу Ричардсона решения (6.5) при заданных значениях ε и h. Из табл. 6 следует, что точность разностной схемы повышается при применении метода Ричардсона. Из экспериментов следует, что при использовании двухсеточного метода можно не только уменьшить количество арифметических действий, но и повысить точность разностной схемы.

Неравномерная сетка. Теперь исследуем двухсеточный метод для схемы (5.2) на сетке Г.И. Шишкина (5.1).

В табл. 7 приведена погрешность схемы (5.2), разрешаемой с применением двухсеточного метода. Заметим, что погрешность схем практически не зависела от того, как они реализовывались, односеточным или двухсеточным методом. В проведенных экспериментах схема (4.1) оказалась точнее схемы направленных разностей (5.2), особенно это заметно при малом количестве узлов. Мы использовали подход [36] для повышения точности схемы (5.2) на сетке Г.И. Шишкина на основе метода Ричардсона, где рассмотрено обыкновенное уравнение типа диффузия-конвекция. Применение такого подхода в случае эллиптической задачи (6.4) при малых значениях ε не привело к повышению точности разностной схемы.

В табл. 8 проводится сравнение количества итераций односеточного и двухсеточного методов Зейделя в случае применения схемы (5.2) к задаче (6.4). Как и в случае схемы на равномерной сетке, выигрыш в количестве арифметических действий существенно проявляется при увеличении ε или числа узлов.

Тестирование на других примерах давало аналогичные результаты.

Таблица 1. Погрешность Δ сплайн-интерполяционных формул

формула интерполяции	h				
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
полиномиальная (3.7)	$6.90e-1$	$7.19e-1$	$7.17e-1$	$5.98e-1$	$3.66e-1$
экспоненциальная (3.3)	$1.92e-1$	$1.00e-1$	$5.00e-2$	$2.20e-2$	$7.97e-3$
Экспоненциальная (3.13)-(3.14)	$8.08e-3$	$2.11e-3$	$5.35e-4$	$1.34e-4$	$3.07e-5$

Таблица 2. Число итераций односеточного и двухсеточного методов при $\varepsilon = 0.001$, задача (6.2), экспоненциальная интерполяция

n	N			
	2^5	2^6	2^7	2^8
2^2	15 (5)	31 (5)	63 (5)	127 (5)
2^3	11 (13)	23 (13)	47 (13)	95 (13)
2^4	11 (29)	23 (29)	47 (29)	95 (29)
2^5		19 (58)	43 (58)	95 (58)
2^6			33 (113)	69 (113)
2^7				55 (220)
	58	113	220	431

Таблица 3. Число итераций односеточного и двухсеточного методов при $\varepsilon = 0.001$, задача (6.2), полиномиальная интерполяция

n	N			
	2^5	2^6	2^7	2^8
2^2	58 (5)	113 (5)	219 (5)	430 (5)
2^3	57 (13)	112 (13)	219 (13)	430 (13)
2^4	55 (29)	111 (29)	218 (29)	429 (29)
2^5		108 (58)	216 (58)	427 (58)
2^6			212 (113)	423 (113)
2^7				417 (220)
	58	113	220	431

Таблица 4. Число итераций с выбором оптимального шага H

N	n_{opt}	Число итераций двухсеточного метода	число итераций односеточного метода
32	12	11 (21)	58
64	23	24 (42)	113
128	43	47 (78)	220
256	81	98 (142)	431

Таблица 5. Число итераций односеточного и двухсеточного методов в зависимости от ε и N, схема (4.1), задача (6.4).

ε	N				
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	65 24 (5)	287 86 (65)	1265 330 (387)	5553 1295 (1265)	24232 5137 (5553)
2^{-4}	17 13 (6)	49 34 (17)	164 101 (49)	620 342 (164)	2484 1250 (620)
2^{-6}	13 12 (5)	31 26 (13)	70 56 (31)	181 139 (70)	562 408 (181)
2^{-8}	13 12 (5)	29 26 (13)	61 53 (29)	127 104 (61)	261 218 (127)

Таблица 6. Максимальная погрешность схемы (4.1) без применения и с применением метода Ричардсона, задача (6.4).

ε	h				
	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}
1	1.2 e-3 1.5 e-4	3.2 e-4 2.5 e-5	7.9 e-5 3.5 e-6	2.0 e-5 4.5 e-7	4.9 e-6 5.7 e-8
2^{-4}	2.5 e-2 9.6 e-4	7.8 e-3 2.4 e-3	2.1 e-3 7.3 e-4	5.4 e-4 1.2 e-4	1.4 e-4 1.7 e-5
2^{-6}	3.5 e-2 5.6 e-3	1.8 e-2 2.8 e-3	7.1 e-3 5.2 e-4	2.2 e-3 7.8 e-4	5.8 e-4 2.2 e-4
2^{-8}	3.5 e-2 3.5 e-3	1.9 e-2 1.8 e-3	9.5 e-3 1.1 e-3	4.6 e-3 6.2 e-4	1.8 e-3 1.6 e-4

Таблица 7. Максимальная погрешность схемы (5.2)

ε	N				
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	4.6 e-3	3.0 e-3	1.6 e-3	8.4 e-4	4.3 e-4
2^{-4}	1.5 e-1	1.1 e-1	8.0 e-2	7.3 e-2	5.3 e-2
2^{-6}	1.7 e-1	1.2 e-1	8.2 e-2	5.1 e-2	3.0 e-2
2^{-8}	1.8 e-1	1.3 e-1	8.7 e-2	5.5 e-2	3.3 e-2

Таблица 8. Число итераций односеточного и двухсеточного методов в зависимости от ε и N, схема (5.2), задача (6.4).

ε	N				
	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7
1	40 11 (10)	169 29 (41)	729 89 (177)	3150 290(764)	13578 1030(3300)
2^{-4}	31 22 (10)	87 50 (31)	249 151 (87)	773 481 (249)	2640 1397 (773)
2^{-6}	38 31 (12)	108 65 (38)	299 159 (108)	864 485 (299)	2699 1650 (864)
2^{-8}	44 40 (14)	126 84 (44)	352 183 (126)	1012 489 (352)	3108 1463 (1012)

7. Заключение

В работе проведено исследование сплайн-интерполяционных формул для функций двух переменных с погранслойными составляющими. Такие функции, в частности, соответствуют решению эллиптической задачи с регулярными пограничными слоями. Построены и обоснованы сплайн-интерполяционные формулы первого и второго порядка точности, равномерной по градиентам погранслойных составляющих. Показано, что в случае сетки Г.И. Шишкина формула кусочно-линейной, по каждому направлению, интерполяции является равномерно точной. Исследована возможность применения построенных сплайн-интерполяционных формул в двухсеточном методе решения линейного эллиптического уравнения с регулярными пограничными слоями. В случае равномерной сетки численные эксперименты подтвердили преимущество использования построенной интерполяции, точной на погранслойных составляющих, в сравнение с полиномиальной сплайн-интерполяцией. Проведено численное сравнение точности схемы экспоненциальной подгонки на равномерной сетке и схемы направленных разностей на сгущающейся в погранслоях сетке.

Список литературы

[1] Н.С. Бахвалов, *К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики. **9**:4 (1969), 841–890. Zbl 0208.19103

[2] Г.И. Шишкин, *Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений*, УрО РАН, Екатеринбург, 1992.

[3] J.J.H. Miller, E. O'Riordan, G.I. Shishkin, *Fitted numerical methods for singular perturbation problems*, World Scientific, Singapore, 1996. MR1439750

[4] Ю.И. Шокин, В.Д. Лисейкин, Ю.В. Лиханова, *Разностные сетки и координатные преобразования для численного решения сингулярно возмущенных задач*, Наука, Новосибирск, 2007.

[5] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, *Numerical methods for singularly perturbed differential equations, convection-diffusion and flow problems*, Springer, Berlin, 2008. MR1477665

[6] А.М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной* // Матем. заметки, **6**:2 (1969), 237–248. MR0260195

[7] К.В. Емельянов, *Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старшей производной* // Краевые задачи для уравнений математической физики, УрО РАН, Екатеринбург, 1973, 30–42.

[8] А.А. Самарский, Е.С. Николаев, *Методы решения сеточных уравнений*, Наука, Москва, 1978. MR0527451

[9] В.П. Ильин, *Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений*, ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск, 2001.

[10] Р.П. Федоренко, *О скорости сходимости одного итерационного процесса* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики, **4**:3 (1964), 221–233. MR0182163

[11] Н.С. Бахвалов, *О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики, **6**:5 (1966), 861–883. Zbl 0154.41002

[12] A. Brandt, *Multi-level adaptive solutions to boundary value problems* // Math. Comput., **31** (1977), 333–390. MR0431719

[13] W. Hackbusch, *Multi-grid methods and applications*, Springer, Berlin, 1985. MR0814495

[14] В.В. Шайдуров, *Многосеточные методы конечных элементов*, Наука, Москва, 1989. MR1007306

[15] Р.П. Федоренко, *Введение в вычислительную физику*, МФТИ, Москва, 1994.

[16] W. Hackbusch, T. Probst, *Downwind Gauss-Seidel smoothing for convection dominated problems* // Numer. Linear Algebra Appl., **4** (1997), 85–102. MR1443597

[17] М.А. Ольшанский, *Анализ многосеточного метода для уравнений конвекции-диффузии с краевыми условиями Дирихле* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики, **44**:8 (2004), 1462–1491. MR2128230

[18] Л.А. Крукиер, Г.В. Муратова, *Решение стационарной задачи конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией многосеточным методом со специальными сглаживателями* // Матем. моделирование, **18**:5 (2006), 63-–72. MR2254988

[19] J. Xu, *A novel two-grid method for semilinear elliptic equation* // SIAM J. Sci. Comput., **15** (1994), 231–237. MR1257166

[20] O. Axelsson, W. Layton, *A two-level discretization of nonlinear boundary value problems* // SIAM J. Numer. Anal., **33** (1996), 2359–2374. MR1427468

[21] Xiaoxia Dai, Xiaoliang Cheng, *A two-grid method based on Newton iteration for the Navier-Stokes equations* // Journal of Comp. and Appl. Math., **220**:1-2 (2008), 566–573. Zbl 1142.76030

[22] L.G. Vulkov, A.I. Zadorin, *Two-grid interpolation algorithms for difference schemes of exponential type for semilinear diffusion convection-dominated equations* // American Institute of Physics, Conference proceedings, **1067** (2008), 284–292. MR2761962

[23] L.G. Vulkov, A.I. Zadorin, *Two-grid algorithms for an ordinary second order equation with exponential boundary layer in the solution* // International Journal of Numerical Analysis and Modeling, **7**:3 (2010), 580–592. MR2644292

[24] А.И. Задорин, *Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем* // Сибирский журнал вычисл. математики, **10**:3 (2007), 267–275.

[25] I.T. Angelova, L.G. Vulkov, *A two-grid method on layer-adapted meshes for a semilinear 2D reaction-diffusion problem* // Lect. Notes in Computer Science, Berlin, **5910** (2009), 703–710. Zbl pre05838148

[26] Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов , В.Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций*, Наука, Москва, 1980. MR0614595

[27] A.I. Zadorin, *Interpolation Method for a Function with a Singular Component* // Lect. Notes in Computer Science, Berlin, **5434** (2009), 612–619. Zbl pre05531903

[28] А.И. Задорин, Н.А. Задорин, *Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики, **50**:2 (2010), 221–233. MR2681147

[29] А.И. Задорин, *Метод интерполяции для функции двух переменных с погранслойной составляющей* // Вычислительные технологии, **13**:3 (2008), 45–53.

[30] G.I. Shishkin, L.P. Shishkina, *Difference methods for singular perturbation problems*, Chapman and HALL/CRC, Boca Raton, 2009. MR2454526

[31] Г.И. Шишкин, *Сеточная аппроксимация сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений*, Докторская диссертация, ИПМ им. Келдыша, Москва, 1990.

[32] А.И. Задорин, *Метод интерполяции на сгущающейся сетке для функции с погранслойной составляющей* // Журнал вычисл. матем. и мат. физики, **48**:9 (2008), 1673–1684. MR2500118

[33] Г.И. Марчук, В.В. Шайдуров, *Повышение точности решений разностных схем*, Наука, Москва, 1979. MR0549034

[34] Б.М. Багаев, Е.Д. Карепова, В.В. Шайдуров, *Сеточные методы решения задач с пограничным слоем*, Наука, Новосибирск, 2001. MR2029041

[35] Г.И. Шишкин, *Метод Ричардсона повышения точности сеточных решений сингулярно возмущенных эллиптических уравнений конвекции-диффузии* // Известия высших учебных заведений, математика, **2** (2006), 57–71.

[36] M.C. Natividad , M. Stynes, *Richardson extrapolation for a convection-diffusion problem using a Shishkin mesh* // Appl. Numer. Math., **45** (2003), 315–329. MR1967580

Александр Иванович Задорин
Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: zadorin@ofim.oscsbras.ru

Никита Александрович Задорин
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского,
пр. Мира 55а,
644077, Омск, Россия
E-mail address: nik-zadorin@yandex.ru