S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 273–283 (2011) УДК 519.62

MSC 65L05

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДОВ ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

О.Б. АРУШАНЯН, Н.И. ВОЛЧЕНСКОВА, С.Ф. ЗАЛЕТКИН

Abstract. Canonical systems of second-order ordinary differential equations are considered. The solution of such a system and its derivatives are expanded in shifted series in Chebyshev polynomials of the first kind. Algorithms to determine initial approximations for the expansion coefficients are described. The resulting approximations are used in the method of approximate analytical integration of ordinary differential equations on the basis of Chebyshev series.

Keywords: ordinary differential equations, numerical methods.

1. Введение

Рассматривается задача Коши для канонической системы M обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \quad x_0 \le x \le x_0 + X, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0. \tag{1}$$

В [1] описан приближенный аналитический метод решения этой задачи, заключающийся в представлении решения и его производной в виде частичной суммы ряда по смещенным многочленам Чебышева первого рода. Разложение решения в ряд строится либо на всем интервале интегрирования, либо задается разбиение интервала на частичные сегменты и на каждом отдельном сегменте строится свое представление в виде частичной суммы. В [1] приведены формулы, связывающие между собой коэффициенты разложения решения, его производной и коэффициенты разложения правой части системы (1), взятой

Arushanyan, O.B., Volchenskova, N.I., Zaletkin, S.F., On calculation of Chebyshev series coefficients for the solutions to ordinary differential equations.

Работа поддержана РФФИ (грант 10–01–00297-а).

Поступила 26 апреля 2011 г., опубликована 14 сентября 2011 г.

на решении задачи. Для нахождения коэффициентов ряда разложения правой части по смещенным многочленам Чебышева на основе квадратурных формул Маркова [2–4] построены уравнения и описан итерационный процесс их решения [1].

Настоящая статья посвящена вопросу, относящемуся к определению начального приближения коэффициентов Чебышева разложения правой части системы (1) для данного итерационного процесса. Ниже мы рассмотрим два способа определения начального приближения. Будем предполагать, что правая часть дифференциального уравнения имеет нужное число непрерывных частных производных, обеспечивающих справедливость приводимых оценок и обоснованность применяемых преобразований.

2. Первый способ определения начального приближения

Опишем этот способ для частичного сегмента $[x_0, x_0+h]$, $0 < h \le X$, на котором приближенное решение ищется в виде конечной суммы ряда. Рассмотрим каноническую систему (1).

Пусть $\tilde{J}_k$ — k-я частичная сумма смещенного ряда Чебышева правой части системы (1) на сегменте $[x_0, x_0+h]$, U и U' — частичные суммы смещенных рядов Чебышева для решения задачи (1) и его производной на том же сегменте, a_i^* — значения коэффициентов смещенного ряда Чебышева и $T_i^*(\alpha)$ — смещенные многочлены Чебышева первого рода. Положим

$$\frac{1}{2}\, a_0^*\,[\tilde{J}_k] = \frac{1}{2}\, a_0^*\,\big[f(x_0, y_0, y_0')\big] = f(x_0, y_0, y_0')$$

и определим приближенные значения первых двух коэффициентов Чебышева для производной:

$$a_1^*[U'] = \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{J}_k], \quad \frac{1}{2}\, a_0^*[U'] = y_0' + \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{J}_k]$$

и приближенные значения первых трех коэффициентов Чебышева для решения:

$$a_2^*[U] = \frac{h^2}{32}\, a_0^*[\tilde{J}_k], \quad a_1^*[U] = \frac{h}{2}\Big(y_0' + \frac{h}{4}\, a_0^*[\tilde{J}_k]\Big), \quad \frac{1}{2}\, a_0^*[U] = y_0 + \frac{h}{2}\, y_0' + \frac{3h^2}{32}\, a_0^*[\tilde{J}_k].$$

В [1] для вычисления коэффициентов Чебышева была использована квадратурная формула Маркова с одним наперед заданным узлом. Здесь мы приведем изложение на примере формулы Маркова с двумя наперед заданными узлами [2–4]. Далее вычисляем в узлах квадратурной формулы

$$x_j^0 = x_0 + \alpha_j h, \quad \alpha_0 = 0, \quad \alpha_j = \frac{1}{2}\Big(1 + \cos\frac{j\pi}{k+1}\Big), \quad j = 1, \ldots, k, \quad \alpha_{k+1} = 1,$$

значения приближенного решения и его производной:

$$\begin{aligned} U(x_j^0) &= \frac{1}{2}\, a_0^*[U] T_0^*(\alpha_j) + a_1^*[U] T_1^*(\alpha_j) + a_2^*[U] T_2^*(\alpha_j) = \\ &= \frac{1}{2}\, a_0^*[U] + a_1^*[U] \cos\frac{j\pi}{k+1} + a_2^*[U] \cos\frac{2j\pi}{k+1}\,, \end{aligned}$$

$$U'(x_j^0) = \frac{1}{2}\, a_0^*[U'] T_0^*(\alpha_j) + a_1^*[U'] T_1^*(\alpha_j) = \frac{1}{2}\, a_0^*[U'] + a_1^*[U'] \cos\frac{j\pi}{k+1}\,,$$

а затем и правую часть системы (1) в узлах x_j^0:

$$\tilde{\Phi}(\alpha_0) = f(x_0, y_0, y_0'), \quad \tilde{\Phi}(\alpha_j) = f\big(x_j^0, U(x_j^0), U'(x_j^0)\big), \quad j = 1, \ldots, k+1.$$

В качестве нулевого приближения для $a_i^*[\tilde J_k]$, $i = 0, 1, \ldots, k$, возьмем значения, определяемые по квадратурной формуле Маркова с двумя наперед заданными узлами $\alpha_0 = 0$, $\alpha_{k+1} = 1$ и k нефиксированными узлами α_j, $j = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned} a_i^{*(0)}[\tilde J_k] &= \frac{2}{k+1}\sum_{j=0}^{k+1}{}'' \tilde\Phi(\alpha_j) T_i^*(\alpha_j) = \\ &= \frac{(-1)^i}{k+1}\,\tilde\Phi(0) + \frac{1}{k+1}\,\tilde\Phi(1) + \frac{2}{k+1}\sum_{j=1}^{k}\cos\frac{ij\pi}{k+1}\,\tilde\Phi(\alpha_j). \end{aligned}$$

Здесь символ $\sum''$ определен формулой $\displaystyle\sum_{j=l}^{m}{}'' a_j = \frac{1}{2}\,a_l + a_{l+1} + \ldots + a_{m-1} + \frac{1}{2}\,a_m$, $m > l$. Эти значения имеют погрешность $O(h^2)$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов выполняется с помощью итерационного процесса так, как это описано в [1]. Для погрешности полученных в результате итерационного процесса приближенных значений $a_i^*[\tilde J_k]$ коэффициентов Чебышева справедлива асимптотическая оценка

$$a_i^*[\Phi] - a_i^*[\tilde J_k] = O(h^{k+2}), \quad h \to 0, \tag{2}$$

где

$$\Phi(\alpha) = F(x_0 + \alpha h) = f\bigl(x_0 + \alpha h, y(x_0 + \alpha h), y'(x_0 + \alpha h)\bigr), \quad 0 \le \alpha \le 1. \tag{3}$$

В рассматриваемом способе исходными данными являются значения решения и его производной на левом конце промежутка интегрирования, поэтому приведенный алгоритм может быть применен на любом частичном сегменте $[x_n, x_n + h]$.

3. Второй способ определения начального приближения

Описанный ниже способ опирается на экстраполяцию коэффициентов Чебышева с предыдущего сегмента на следующий. Покажем, как коэффициенты Чебышева разложения функции (3) могут быть использованы для получения коэффициентов Чебышева разложения функции

$$\Phi_1(\alpha) = F(x_1 + \alpha h^*) = f\bigl(x_1 + \alpha h^*, y(x_1 + \alpha h^*), y'(x_1 + \alpha h^*)\bigr), \quad 0 \le \alpha \le 1,$$

где $x_1 = x_0 + h$, h^* — длина следующего частичного сегмента $[x_1, x_1 + h^*]$.

Обратимся к частичной сумме смещенного ряда Чебышева функции $\Phi(\alpha)$ с приближенными коэффициентами. Пусть $\alpha = \dfrac{1}{2}(t+1)$ и $\bar\Phi(t) = \Phi\bigl(\alpha(t)\bigr)$, тогда $a_i^*\bigl[\Phi(\alpha)\bigr] = a_i\bigl[\bar\Phi(t)\bigr]$, где a_i — коэффициенты ряда по несмещенным многочленам Чебышева. С учетом (2) имеем

$$\tilde S_k(\alpha, \Phi) = \tilde J_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i^*[\tilde J_k] T_i^*(\alpha) = \sum_{i=0}^{k}{}' a_i[\bar\Phi(t)] T_i(t) + O(h^{k+2}). \tag{4}$$

Используя выражение коэффициента Чебышева разложения функции через производную этой функции [5]

$$a_i\bigl[\bar\Phi(t)\bigr] = \frac{1}{2^{i-1}}\,\frac{\bar\Phi^{(i)}(\zeta_i)}{i!}\,, \quad \zeta_i \in [-1, 1]\,,$$

и упорядочивая сумму по степеням переменной t, получим

$$
\begin{aligned}
\tilde{S}_k(t,\bar{\Phi}) &= \sum_{i=0}^{k}{}' \frac{1}{2^{i-1}} \frac{\bar{\Phi}^{(i)}(\zeta_i)}{i!} T_i(t) + O(h^{k+2}) = \\
&= \sum_{i=0}^{k}{}' \frac{1}{2^{i-1}} \left[\frac{1}{i!} \Big(\frac{h}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1}) \right] T_i(t) + O(h^{k+2}) = \\
&= \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!} \Big(\frac{h}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{1/2}) + O(h^{i+1}) \Big) t^i + O(h^{k+2}),
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $x_{1/2} = x_0 + h/2$. Аналогично можно представить частичную сумму ряда Чебышева функции $\Phi_1(\alpha)$:

$$
\tilde{S}_k(t,\bar{\Phi}_1) = \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!} \Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O({h^*}^{i+1}) \Big) t^i + O({h^*}^{k+2}),
\tag{6}
$$

где $x_{3/2} = x_1 + h^*/2$.

Для дальнейшего определим следующие матрицы: P — верхняя треугольная матрица Паскаля с элементами $p_{ij} = C_{j-1}^{i-1}$, $1 \le i \le k+1$, $1 \le j \le k+1$, $i \le j$; T и I — диагональные матрицы $(k+1)$-го порядка: $T = \big\{1, 1+\xi, (1+\xi)^2, \ldots, (1+\xi)^k\big\}$ и $I = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^k\}$, где $\xi = h^*/h$ и $\omega = \xi/(1+\xi)$.

Введем векторы длины $k+1$:

$$
Z(x_{1/2}) = \left(F(x_{1/2}), \frac{h}{2} F'(x_{1/2}), \frac{1}{2}\Big(\frac{h}{2}\Big)^2 F''(x_{1/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{1/2}) \right)^T,
$$

$$
Z(x_{3/2}) = \left(F(x_{3/2}), \frac{h^*}{2} F'(x_{3/2}), \frac{1}{2}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^2 F''(x_{3/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{3/2}) \right)^T.
$$

Последовательно применяя линейные преобразования, задаваемые матрицами T, P и I, к вектору $Z(x_{1/2})$, приходим к соотношениям

$$
TZ(x_{1/2}) = \left(F(x_{1/2}), \frac{h+h^*}{2} F'(x_{1/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h+h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{1/2}) \right)^T,
$$

$$
\begin{aligned}
PTZ(x_{1/2}) &= \left(F(x_{3/2}), \frac{h+h^*}{2} F'(x_{3/2}), \ldots, \frac{1}{k!}\Big(\frac{h+h^*}{2}\Big)^k F^{(k)}(x_{3/2}) \right)^T + \\
&+ O(h^{k+1}), \quad IPTZ(x_{1/2}) = Z(x_{3/2}) + O(h^{k+1}).
\end{aligned}
$$

Точные компоненты вектора $Z(x_{1/2})$ нам не известны, но приближения к ним могут быть получены из (5). Применяя указанные выше преобразования к вектору, составленному из этих приближений, мы получим компоненты вектора $Z(x_{3/2})$ с погрешностями $O(h^*), O({h^*}^2), \ldots, O({h^*}^{k+1})$, а именно получим величины

$$
d_i = \frac{1}{i!}\Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O({h^*}^{i+1}).
$$

Далее составим полином переменной t с коэффициентами, равными числам d_i, и выполним с ним те преобразования, которые были использованы при выводе формул (4)–(6), но осуществим их в обратном порядке:

$$\sum_{i=0}^{k} d_i t^i = \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!} \Big(\frac{h^*}{2}\Big)^i F^{(i)}(x_{3/2}) + O(h^{*^{i+1}}) \Big) t^i =$$
$$= \sum_{i=0}^{k} \Big(\frac{1}{i!} \bar\Phi_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}}) \Big) t^i = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(\frac{1}{2^{i-1}} \frac{1}{i!} \bar\Phi_1^{(i)}(0) + O(h^{*^{i+1}}) \Big) T_i(t) =$$
$$= {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(a_i \big[\bar\Phi_1(t)\big] + O(h^{*^{i+1}}) \Big) T_i(t) = {\sum_{i=0}^{k}}' \Big(a_i^* \big[\Phi_1(\alpha)\big] + O(h^{*^{i+1}}) \Big) T_i^*(\alpha).$$

Таким образом, мы имеем в итоге коэффициенты Чебышева функции $\Phi_1(\alpha)$ с погрешностями $O(h^*), O(h^{*^2}), \dots, O(h^{*^{k+1}})$, которые и принимаем за нулевое приближение для неизвестных $a_i^*[\tilde J_k]$ на сегменте $[x_1, x_1{+}h^*]$. Дальнейшее уточнение значений коэффициентов $a_i^*[\tilde J_k]$ выполняется с помощью итерационного процесса так, как это описано в [1].

В случае решения задачи Коши для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений описанные здесь способы определения начального приближения коэффициентов Чебышева разложения правой части применяются аналогичным образом.

4. Примеры

1) Интегрируется обыкновенное дифференциальное уравнение [6]

$$y'' = -2x \ln x \, y' + \Big(\ln x + 2 - \frac{1}{4x^2} \Big) y, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1. \qquad (7)$$

Точное решение $y(x) = \sqrt{x}\,\ln x$ представляет собой произведение иррациональной и логарифмической функций. Задача решалась методом рядов Чебышева на интервале $[1, X_F]$, при этом задавалось разбиение интервала на несколько частичных сегментов длиной h и на каждом сегменте решение представлялось в виде $(k{+}2)$-й частичной суммы ряда Чебышева, а производная — в виде $(k+1)$-й частичной суммы ряда. Вычисления проводились с 16 значащими цифрами. Значения X_F, h и k, способ выбора начального приближения для коэффициентов Чебышева правой части дифференциального уравнения, а также количество верных десятичных знаков в приближенных значениях решения $y(X_F)$ и производной $y'(X_F)$, вычисленных в конце интервала, приведены в табл. 1 и 2. В них содержатся результаты счета, отражающие разные условия окончания итерационного процесса вычисления коэффициентов разложения решения в ряд по многочленам Чебышева. В табл. 1 даны результаты, полученные за *фиксированное число* итераций, в то время как результаты из табл. 2 относятся к случаю *исправления до сходимости.*

Из табл. 1 наглядно видно, что применение второго способа определения начального приближения коэффициентов, основанного на экстраполировании уже известных на предыдущем частичном сегменте коэффициентов, может существенно повысить точность нахождения коэффициентов разложения решения и производной, а также точность вычисления самого решения и его производной на данном сегменте.

В табл. 2 также даны для сравнения результаты, полученные классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка, методом Штермера пятого порядка типа предиктор-корректор и неявным трехстадийным методом Рунге–Кутта шестого порядка с постоянным шагом h [2–4, 7, 8]. Прочерк в таблице означает, что при указанном в ней значении h вычисленные значения приближенного решения задачи или его производной не имеют ни одной верной цифры.

Таблица 1

№	X_F	h	Количество верных десятичных знаков для $y(X_F)$ и $y'(X_F)$ в методе рядов Чебышева				
				Способ выбора начального приближения			
			k	Первый способ: из начального условия		Второй способ: экстраполирование	
1	4.6	0.2	10	10	9	15	15
2	4.6	0.4	10	6	5	13	13
3	4.6	0.4	30	14	14	14	14
4	5.0	0.2	10	9	8	14	15
5	5.0	0.2	20	14	15	14	15
6	6.0	0.2	10	8	7	14	14
7	6.0	0.2	20	14	13	14	15
8	7.0	0.2	10	7	6	13	11
9	7.0	0.2	20	12	11	14	14
10	8.2	0.2	10	7	6	14	12
11	8.2	0.2	20	10	9	14	15
12	8.2	0.4	30	8	6	10	8
13	9.2	0.2	10	12	11	14	13
14	10.2	0.2	10	9	8	14	13
15	11.2	0.2	10	8	6	13	12

Таблица 2

№	X_F	h	Количество верных десятичных знаков для $y(X_F)$ и $y'(X_F)$										
			Метод рядов Чебышева					Метод Рунге–Кутта		Метод Штермера		Неявный метод Рунге–Кутта	
			k	Способ выбора начального приближения									
				Первый способ		Второй способ							
1	4.6	0.2	10	15	15	15	15	6	3	3	4	7	7
2	4.6	0.4	10	13	14	13	14	0	-	1	1	5	6
3	5.0	0.2	10	14	15	14	15	4	2	3	3	7	7
4	6.0	0.2	10	14	15	14	14	1	-	2	1	7	7
5	7.0	0.2	10	14	14	14	14	-	-	2	1	7	7
6	8.2	0.2	10	14	14	14	14	-	-	2	1	6	7
7	8.2	0.2	20	14	14	14	14	-	-	2	1	6	7
8	8.2	0.4	30	14	12	12	11	-	-	1	1	5	6
9	9.2	0.2	10	14	13	14	14	-	-	1	-	6	7
10	10.2	0.2	10	14	13	14	13	-	-	-	-	6	7
11	10.2	0.2	20	14	13	15	13	-	-	-	-	6	7
12	10.2	0.4	30	10	8	11	9	-	-	-	-	5	6
13	11.2	0.2	10	13	11	13	12	-	-	-	-	6	7

Из данных таблиц также следует, что использование второго способа может существенно сократить число итераций в итерационной процедуре вычисления коэффициентов без потери точности приближенного решения и его производной.

В табл. 3 приведены с удвоенной точностью коэффициенты Чебышева разложения решения $y(x)$ на сегменте [8.0, 8.2] в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышева, соответствующего $k = 10$:

$$y(8 + 0.2\alpha) \approx \sum_{i=0}^{12}{}' a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

Эти коэффициенты получены с использованием описанных выше способов определения начального приближения. Видно, что последовательность коэффициентов достаточно регулярно стремится к нулю и ряд Чебышева на данном сегменте быстро сходится.

Таблица 3

Номер коэффициента	Коэффициенты Фурье–Чебышева	
	Первый способ	Второй способ
0	.1190698555378372D+02	.1190698555378372D+02
1	.7188708172846302D-01	.7188708172846245D-01
2	-.5671475832035367D-04	-.5671475832035879D-04
3	.1192617786972679D-06	.1192617785607158D-06
4	-.3309834558439887D-09	-.3309834491550877D-09
5	.1031623929359342D-11	.1031608533055132D-11
6	-.3340428400014504D-14	-.3341591069907502D-14
7	.1228363199872606D-16	.1021457106531065D-16
8	.4658316010971079D-18	-.7461408718749043D-19
9	.3142207845942422D-18	-.1892470421621735D-19
10	.8733590146687441D-19	-.3061940577464143D-19
11	.3488450328632666D-19	.8574995793775100D-20
12	.1992988714493247D-19	.6922200296238253D-20

При интегрировании уравнения (7) на интервале $[1, X_F]$, $X_F = 8.2$, классическим методом Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность решения в точке X_F равнялась 0.129×10^{-11}, при этом было выполнено 10 508 вычислений правой части уравнения (7). Для метода Штермера с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность решения в точке $X_F = 8.2$ равнялась 0.142×10^{-13} при количестве вычислений правой части 14 452. Заметим, что фактически достигнутая точность и число вычислений правой части дифференциального уравнения при интегрировании методом Штермера зависят от допустимого наибольшего значения шага интегрирования HMAX; так, при HMAX=0.01 фактически достигнутая точность решения в точке $X_F = 8.2$ равнялась 0.267×10^{-11}, а количество вычислений правой части – 2025. Приведенные перед этим данные для метода Штермера получены при HMAX=0.001 . При интегрировании уравнения (7) методом рядов Чебышева с разбиением промежутка интегрирования $[1, X_F]$, $X_F = 8.2$, на 36 частичных сегментов длиной $h = 0.2$ и представлением решения на каждом таком сегменте $(k + 2)$-й, а производной — $(k + 1)$-й частичной суммой ряда Чебышева (при $k = 10$) полученное приближенное решение $y(X_F)$ имеет 15 верных цифр и абсолютную погрешность 0.355×10^{-14}, при этом было выполнено 5806 вычислений правой части.

Для неявного трехстадийного метода Рунге–Кутта шестого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность решения $y(X_F)$ в точке $X_F = 8.2$ равнялась 0.222×10^{-13} при количестве вычислений матрицы преобразованной линейной однородной системы двух дифференциальных уравнений первого порядка, равном 1767.

Следует заметить, что для данного примера на каждом шаге интегрирования соответствующая система алгебраических уравнений неявного метода Рунге–Кутта является линейной и решалась прямым, а не итерационным методом.

2) Интегрируется система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y_1' = 2\pi y_2, \quad y_2' = -2\pi y_1, \quad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = -1, \quad 0 \le x \le 1. \qquad (8)$$

Решение системы имеет вид $y_1(x) = -\sin 2\pi x$, $y_2(x) = -\cos 2\pi x$. На интервале [0, 1] укладывается ровно одна волна синусоиды. Задача (8) решалась методом рядов Чебышева. На данном интервале решение приближалось $(k+1)$-й частичной суммой смещенного ряда Чебышева при $k = 30$ и $k = 40$. Система (8) также интегрировалась с разбиением интервала [0, 1] на два равных частичных сегмента длиной $h = 0.5$ и на каждом из них решение представлялось в виде $(k+1)$-й частичной суммы смещенного ряда Чебышева при $k = 25$. Вычисления проводились с 16 значащими цифрами. Результаты интегрирования представлены в табл. 4. В ней также отражены результаты, полученные с постоянным шагом h классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка, методом Адамса пятого порядка типа предиктор-корректор и неявным трехстадийным методом Рунге–Кутта шестого порядка. Как и в предыдущем примере, прочерк в таблице означает, что при указанном в ней значении h вычисленные значения приближенного решения не имеют ни одной верной цифры.

Таблица 4

№	X_F	h	Количество верных десятичных знаков для $y_1(X_F)$ и $y_2(X_F)$					
			Метод рядов Чебышева			Метод Рунге–Кутта	Метод Адамса	Неявный метод Рунге–Кутта
			k	Способ выбора начального приближения				
				Первый способ	Второй способ			
1	1.0	1.0	30	13 14	нет	- -	- -	0 0
2	1.0	1.0	40	14 14	нет	- -	- -	0 0
3	1.0	0.5	25	16 15	15 15	0 -	- -	1 3

Данный пример примечателен тем, что первая компонента решения $y_1(x)$ раскладывается на интервале [0, 1] в ряд по смещенным многочленам Чебышева с нечетными номерами, а на промежутках [0, 0.5] и [0.5, 1] — по смещенным многочленам с четными номерами. Вторая же компонента решения $y_2(x)$ раскладывается на интервале [0, 1] в ряд по смещенным многочленам Чебышева с четными номерами, а на промежутках [0, 0.5] и [0.5, 1] — по смещенным многочленам с нечетными номерами. В табл. 5 приведены с удвоенной точностью коэффициенты Чебышева разложения решения $y(x) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y] T_i^*(x)$ на [0, 1] при $k = 40$, а в табл. 6 — абсолютные погрешности этих коэффициентов. Погрешности коэффициентов определялись, исходя из известных рядов Чебышева тригонометрических функций [5]:

$$\sin q(2x-1) = 2\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i J_{2i+1}(q) T_{2i+1}^*(x),$$

$$\cos q(2x-1) = 2\sum_{i=0}^{\infty}{}' (-1)^i J_{2i}(q) T_{2i}^*(x).$$

Здесь $J_m(q)$ — функция Бесселя первого рода порядка m. При $q = \pi$ функции $\sin q(2x-1)$, $\cos q(2x-1)$ совпадают с решением $y_1(x)$, $y_2(x)$ системы (8). Из табл. 5 видно, что последовательности ненулевых коэффициентов для $y_1(x)$, $y_2(x)$ достаточно регулярно стремятся к нулю и ряды Чебышева на данном отрезке быстро сходятся.

Мы специально приводим в работе табл. 5 и 6, чтобы еще раз наглядно проиллюстрировать действительную способность рассматриваемого аналитического метода правильно воспроизводить ряды Чебышева для решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таблица 5

Номер коэффициента	Коэффициенты Фурье–Чебышева	
	Первая компонента	Вторая компонента
0	.2173066414312697D-14	-.6084843552881863D+00
1	.5692306863595076D+00	.9540199434374163D-15
2	.1678509287399328D-14	-.9708678652630176D+00
3	-.6669166724059781D+00	.4301365801392338D-15
4	.2079398122873527D-15	.3028491552626995D+00
5	.1042823687342369D+00	-.2268259199782202D-16
6	.1828405319943133D-16	-.2909193396501112D-01
7	-.6840633536991566D-02	-.1502120555191568D-16
8	.2738881034946780D-17	.1392243991176225D-02
9	.2500068849503850D-03	.6511778114124809D-17
10	.2692887145910872D-17	-.4018994451075783D-04
11	-.5850248308638028D-05	.3067607760537571D-17
12	.3453070981640031D-18	.7782767011819355D-06
13	.9534772750453280D-07	-.7862690602538962D-18
14	-.3653858125041550D-17	-.1082653034017899D-07
15	-.1145638446620381D-08	.4099702820020690D-17
16	.3309357724922551D-17	.1135109166162262D-09
17	.1057427316409359D-10	-.2014481930982761D-17
18	-.2056784225477275D-17	-.9295267798824458D-12
19	-.7735361338070427D-13	-.1390921610089204D-17
20	.4267860208035518D-17	.6107637710207610D-14
21	.4595626463908951D-15	-.1506666495430787D-17
22	-.2938742309001193D-17	-.3287845811338952D-16
23	.4710976287511743D-18	-.3860152800451067D-18
...	....	....
41	.8544703097179966D-19	-.9870683236888835D-18

Что касается разложения первой компоненты решения $y_1(x)$ на промежутке [0, 0.5], то вычисленные методом рядов коэффициенты $a_1^*[y_1]$ и $a_3^*[y_1]$ разложения $y(x) = y(0.5\alpha) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$, $k = 25$, имеют абсолютные величины 0.914×10^{-16} и 0.362×10^{-16}, а модули остальных коэффициентов с нечетными номерами $a_{2i+1}^*[y_1]$, $i = 2, \ldots, [k/2]$, меньше, чем 0.5×10^{-17}. На сегменте [0.5, 1] коэффициенты $a_1^*[y_1]$, $a_3^*[y_1]$ разложения $y(x) = y(0.5 + 0.5\alpha) \approx \sum_{i=0}^{k+1}{}' a_i^*[y]T_i^*(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$, $k = 25$, имеют абсолютные величины 0.740×10^{-16}, 0.464×10^{-16}, а модули остальных коэффициентов с нечетными номерами $a_{2i+1}^*[y_1]$ меньше, чем 0.610×10^{-17}.

Таблица 6

Номер коэффициента	Абсолютная погрешность коэффициентов	
	Первая компонента	Вторая компонента
0	-.2173066414312697D-14	-.1221245327087672D-14
1	-.2109423746787797D-14	-.9540199434374163D-15
2	-.1678509287399328D-14	-.4440892098500626D-15
3	-.8881784197001252D-15	-.4301365801392338D-15
4	-.2079398122873527D-15	-.1665334536937735D-15
5	-.1387778780781446D-16	.2268259199782202D-16
6	-.1828405319943133D-16	.6938893903907228D-17
7	-.8673617379884035D-17	.1502120555191568D-16
8	-.2738881034946780D-17	.5854691731421724D-17
9	.1029992063861229D-17	-.6511778114124809D-17
10	-.2692887145910872D-17	.2913793338554793D-17
11	-.1110460193850388D-17	-.3067607760537571D-17
12	-.3453070981640031D-18	-.4055170234979963D-18
13	-.1538873576703852D-17	.7862690602538962D-18
14	.3653858125041550D-17	-.1679285831323503D-17
15	.4910919184348734D-17	-.4099702820020690D-17
16	-.3309357724922551D-17	.1174924498636965D-17
17	-.5465544747955471D-18	.2014481930982761D-17
18	.2056784225477275D-17	-.2883385428797120D-17
19	.9034266612722871D-18	.1390921610089204D-17
20	-.4267860208035518D-17	.3726478127151526D-17
21	.3296822740033861D-19	.1506666495430787D-17
22	.2938742309001193D-17	-.9812030004503000D-19
23	-.2733403556948582D-17	.3860152800451067D-18
...	....	....
41	-.8544703097179966D-19	.9870683236888835D-18

Вычисленные методом рядов коэффициенты разложения второй компоненты решения $y_2(x)$ на промежутке $[0,\,0.5]$ имеют такие же по порядку абсолютные величины, что и для $y_1(x)$, а именно: коэффициенты $a_0^*[y_2]$, $a_2^*[y_2]$ и $a_4^*[y_2]$ имеют абсолютные величины 0.123×10^{-16}, 0.114×10^{-15} и 0.317×10^{-16}, а модули остальных коэффициентов с четными номерами $a_{2i}^*[y_2]$, $i=3,\,\dots,[k/2]$, меньше, чем 0.306×10^{-17}. На сегменте $[0.5,\,1]$ коэффициенты $a_0^*[y_2]$, $a_2^*[y_2]$ и $a_4^*[y_2]$ имеют абсолютные величины 0.524×10^{-16}, 0.129×10^{-15} и 0.223×10^{-16}, а модули остальных коэффициентов разложения с четными номерами меньше, чем 0.871×10^{-17}.

При интегрировании системы (8) классическим методом Рунге–Кутта четвертого порядка с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность для $y_1(X_F)$ и $y_2(X_F)$ в точке $X_F=1.0$ равнялась 0.693×10^{-12} и 0.488×10^{-14}, при этом было выполнено 20 516 вычислений правой части системы (8). Для метода Адамса пятого порядка типа предиктор-корректор с автоматическим выбором шага интегрирования максимальная фактически достигнутая точность для $y_1(X_F)$, $y_2(X_F)$ в точке $X_F=1.0$ равнялась 0.120×10^{-12} и 0.812×10^{-12} при количестве вычислений правой части системы (8), равном 3063. Для неявного трехстадийного метода типа Рунге–Кутта шестого порядка точности наивысшая фактически достигнутая точность для $y_1(X_F)$ и $y_2(X_F)$ в конце интервала интегрирования равнялась 0.369×10^{-13} и 0.222×10^{-15} при количестве вычислений правой части системы, равном 1464. При интегрировании системы (8) методом рядов Чебышева была достигнута точность 0.228×10^{-16} и 0.444×10^{-15}, при этом было выполнено 1402 вычисления правой части.

Из приведенных результатов можно сделать следующий вывод. Представление решения обыкновенного дифференциального уравнения в виде частичной суммы ряда Чебышева позволяет вычислять приближение к решению с такой высокой точностью, которая на практике может оказаться недостижимой для одношаговых методов типа Рунге–Кутта и многошаговых методов Адамса и Штермера для той же разрядной сетки, поскольку эта точность требует для указанных методов столь малых размеров шага интегрирования, что эти шаги выходят за границу их *реальной области асимптотики* [8].

Список литературы

[1] О.Б. Арушанян, Н.И. Волченскова, С.Ф. Залеткин, *Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева* // Сибирские электронные математические известия, **7** (2010), 122–131. MR2674267

[2] К.И. Бабенко, *Основы численного анализа*, Наука, Москва, 1986. MR0889669

[3] И.П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*, Изд-во С.-Петербург. ун-та, СПб., 1998.

[4] В.П. Ильин, Ю.И. Кузнецов, *Алгебраические основы численного анализа*, Наука, Новосибирск, 1986.

[5] С. Пашковский, *Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева*, Наука, Москва, 1983. MR0717037

[6] В.Ф. Зайцев, А.Д. Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Физматлит, Москва, 2001.

[7] Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*, БИНОМ, Москва, 2007.

[8] О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин, *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на Фортране*, Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1990. MR1084590

Олег Багратович Арушанян
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: arush@srcc.msu.ru

Надежда Ивановна Волченскова
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: nad1946@srcc.msu.ru

Сергей Федорович Залеткин
Научно-исследовательский вычислительный центр МГУ,
Ленинские горы,
119991, Москва, Россия
E-mail address: iraz@srcc.msu.ru