S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 296–309 (2011) УДК 519.712.3
MSC 68W25

АЛГОРИТМ С ОЦЕНКОЙ 7/5 ДЛЯ ЗАДАЧИ О ДВУХ КОММИВОЯЖЕРАХ НА МИНИМУМ С РАЗЛИЧНЫМИ ВЕСОВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А.Н. ГЛЕБОВ, А.В. ГОРДЕЕВА, Д.Ж. ЗАМБАЛАЕВА

Abstract. We present a cubic time algorithm with approximation ratio 7/5 (plus some additive constant) for the 2-Peripatetic Salesman Problem on minimum with different weight functions valued 1 and 2 (abbreviated to as 2-PSP(1,2)-min-2w). Our result improves the other known algorithm for this problem which has approximation ratio 11/7.

Keywords: Traveling Salesman Problem, 2-Peripatetic Salesman Problem, polynomial algorithm, guaranteed approximation ratio.

1. Введение

Задача коммивояжера (TSP) является одной из наиболее известных и активно изучаемых задач дискретной оптимизации.

В последнее время в работах некоторых авторов рассматривается такое естественное обобщение задачи коммивояжера как задача об m коммивояжерах (m-PSP), состоящая в поиске m реберно непересекающихся гамильтоновых циклов минимального или максимального суммарного веса в полном взвешенном графе. При этом наибольшее внимание уделяется задаче о двух коммивояжерах (2-PSP). Эта задача рассматривается как для произвольной или метрической весовой функции, так и в более специальном случае весов ребер 1 и 2 (задача 2-PSP(1,2)). Все указанные варианты задачи (как на минимум так и на

Glebov, A.N., Gordeeva, A.V., Zambalaeva D.Z., 7/5-approximation algorithm for 2-PSP on minimum with different weight functions.

Работа поддержана РФФИ (гранты 09-01-00244 и 10-07-00195), а также ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (гос. контракты № 02.740.11.0429 и 14.740.11.0868).

Поступила 29 августа 2011 г., опубликована 11 октября 2011 г.

максимум) NP-трудны, что вытекает из NP-полноты задачи определения существования двух реберно непересекающихся гамильтоновых циклов в неориентированном графе [7]-[9].

В настоящей статье рассматривается задача о двух коммивояжерах на минимум в полном графе с весами ребер 1 и 2. Отметим, что для задачи одного коммивояжера на минимум в случае произвольной весовой функции нет полиномиальных алгоритмов с гарантированными оценками точности. Для метрической TSP-min известен алгоритм Кристофидеса [6] и Сердюкова [4] с оценкой $\frac{3}{2}$. В случае весов ребер 1 и 2 Пападимитриу и Яннакакисом в 1993 г. был получен алгоритм с оценкой точности $\frac{7}{6}$ [10]. Для этой же задачи Берман и Карпински в 2006 г. предложили алгоритм, для которого анонсировали оценку точности $\frac{8}{7}$ [5], но данный результат не был строго обоснован.

Уже для задачи о двух коммивояжерах с весами ребер 1 и 2 (2-PSP(1,2)-min) Глазков, Гимади и Глебов в 2007 г. получили алгоритм с оценкой точности $\frac{6}{5}$ в случае, когда весовые функции для обоих циклов одинаковы [3]. В случае двух различных весовых функций (задача 2-PSP(1,2)-min-2w) в [11] был предложен алгоритм с оценкой $\frac{11}{7}$.

Целью настоящей работы является усиление результата из [11], а именно, построение для задачи 2-PSP(1,2)-min-2w приближенного алгоритма с оценкой точности $\frac{7}{5}$ (без учета аддитивной константы) и оценкой временно́й сложности $O(n^3)$. В основу алгоритма положена идея метода из [5], заключающаяся в построении и последовательном "улучшении" двух реберно непересекающихся частичных туров (наборов цепей и циклов, покрывающих все вершины графа) из ребер единичного веса, и последующем замыкании этих туров в непересекающиеся гамильтоновы циклы. Под "улучшением" туров понимается такое их локальное преобразование, при котором уменьшается либо общее число цепей и циклов, составляющих туры, либо число одновершинных цепей (синглов). Для того, чтобы гарантировать возможность улучшающего преобразования в случае, если нужное качество решения еще не достигнуто, применяется введенная в [5] техника так называемых зарядов вершин, т. е. чисел, определяемых для каждой вершины графа на основе туров оптимального решения, и последующего перераспределения этих зарядов между вершинами графа с сохранением их суммы.

Дополнительные трудности при разработке и анализе алгоритма (по сравнению со случаем двух одинаковых весовых функций) связаны с тем, что в рассматриваемом случае невозможна свободная переброска ребер из одного тура в другой. Из-за этого оказались неприменимыми многие методы, ранее использовавшиеся в задаче о двух коммивояжерах с весами ребер 1 и 2 (см. [1]-[3]). Значительный объем работы также связан с рассмотрением большого числа случаев, соответствующих различным типам вершин графа. Тип вершины определяется тем, является ли она в туре концевой или внутренней вершиной цепи, вершиной цикла или синглом (независимо для каждого тура).

Статья состоит из введения (раздел 1), пяти разделов и списка литературы. В разделе 2 вводятся необходимые определения и обозначения. В разделе 3 дается общее описание алгоритма а также вспомогательных процедур и их обоснование. В разделе 4 формулируется основная теорема об оценке точности решения, полученного алгоритмом, и о его временно́й сложности, а также описывается техника перераспределения зарядов между вершинами графа.

Раздел 5 посвящен доказательству основной леммы о перераспределении зарядов, включающее разбор случаев, соответствующих различным типам вершин графа. Наконец, в разделе 6 обосновывается оценка временно́й сложности алгоритма.

2. Основные определения и обозначения

Рассмотрим полный неориентированный n-вершинный граф $G = (V, E)$ и две весовые функции ребер $w_1 : E \to \{1, 2\}$, $w_2 : E \to \{1, 2\}$. *Допустимым решением* задачи 2-PSP(1,2)-min-2w называется любая пара реберно непересекающихся гамильтноных циклов H_1, H_2 в G. *Весом* решения H_1, H_2 называется число $w_1(H_1)+w_2(H_2)$, где $w_i(H_i) = \sum_{e \in H_i} w_i(e)$, $i = 1, 2$. Допустимое решение H_1^*, H_2^* называется *оптимальным*, если оно имеет минимальный вес, который обозначим через OPT.

Туром называется набор вершинно нересекающихся цепей и циклов, покрывающих все вершины графа. *Рангом* $k(A)$ тура A назовем число составляющих его объектов (цепей и циклов). *Производным туром* для тура A назовем набор цепей, полученный из A размыканием всех его циклов, т.е. удалением ребра из каждого цикла. Под *длиной* цепи (цикла) P в графе G будем понимать число ребер в P. Одновершинная цепь (длины 0) называется *синглом*, а цепь положительной длины — *нетривиальной*. Цепь называется *длинной*, если ее длина не меньше 3, и *короткой* в противном случае.

Обозначим через $d_A(v)$ степень вершины v в туре A, т. е. число ребер в A, инцидентных v. Ясно, что условие $d_A(v) = 0$ равносильно тому, что v является синглом в A. Вершину v назовем S-, PT-, PZ- или Z-*вершиной* тура A, если v — сингл, конец нетривиальной цепи, внутренняя вершина цепи или вершина цикла в A, соответственно. Под PZ^l-вершиной понимается PZ-вершина длинной цепи, а под PZ^s — середина цепи длины 2. Вершина называется *терминальной* или T-*вершиной* для A, если она является PT-, S- или Z-вершиной в A.

Определим $E_i = \{e \in E \mid w_i(e) = 1\}$ — множество E_i-*ребер* графа G, $i = 1, 2$. Говорим, что E_i-ребро *терминальное*, если оно инцидентно терминальной вершине тура A_i. Идея алгоритма заключается в построении в G пары реберно-непересекающихся туров A_1, A_2 с множествами ребер $A_1 \subseteq E_1$ и $A_2 \subseteq E_2$, и последовательном "улучшении качества" этих туров. Чтобы описать тип вершины относительно тура A_i обозначим через S_i, PT_i, PZ_i, PZ_i^l, PZ_i^s, Z_i и T_i множества всех S-, PT-, PZ-, PZ^l-, PZ^s-, Z- и T-вершин тура A_i, соответственно. Под X-*вершиной* (Y-*ребром*) будем понимать вершину (ребро), принадлежащую множеству $X \subseteq V$ ($Y \subseteq E$). Для описания типа вершины относительно пары туров A_1, A_2 будем использовать термин (X_1, X_2)-*вершина*, где X_1 и X_2 — типы данной вершины относительно туров A_1 и A_2 соответственно. Например, (S, PZ)-вершина — это вершина, принадлежащая множествам S_1 и PZ_2.

Пусть H_1^*, H_2^* — пара реберно непересекающихся гамильтоновых циклов, являющаяся оптимальным решением задачи 2-PSP(1,2)-min-2w с весовыми функциями w_1 и w_2. Обозначим через B_i тур в G, образованный всеми E_i-ребрами цикла H_i^*, $i = 1, 2$. Ясно, что при $B_i = H_i^*$ тур B_i является гамильтоновым циклом в G, в противном случае B_i представляет собой набор вершинно непересекающихся цепей.

Положим $A_i^p = A_i \setminus (B_1 \cup B_2)$, $B_i^p = B_i \setminus (A_1 \cup A_2)$, $B^p = B_1^p \cup B_2^p$, $E_i^p = E_i \setminus (A_1 \cup A_2)$, $i = 1, 2$. Будем называть ребра из A_i^p, B_i^p и E_i^p *чистыми* ребрами в A_i, B_i и E_i, соответственно. Обозначим через E_i'' — множество всех таких E_i-ребер xy (с учетом ориентации), что $y \in S_i$ и xy принадлежит циклу в туре A_{3-i}, $i = 1, 2$.

3. Описание алгоритма $A_{7/5}$

Допустимым преобразованием туров A_1, A_2 *в окрестности вершины* $v \in V$ назовем замену пары туров A_1, A_2 на пару $(A_1 \cup X_1) \setminus Y_1$, $(A_2 \cup X_2) \setminus Y_2$, где $X_1 \subset E_1$, $X_2 \subset E_2$, $Y_1 \subset A_1$, $Y_2 \subset A_2$, $|X_i| \le 2$, $|Y_i| \le 2$, $i = 1, 2$. При этом каждое ребро в $X_1 \cup X_2$ инцидентно v, и $X_1 \cup X_2$ содержит не более одного ребра из $E_1^p \cup E_2^p$, а каждое ребро в Y_i либо принадлежит X_{3-i}, либо смежно с некоторым ребром из X_i, $i = 1, 2$.

Допустимое преобразование назовем *улучшающим*, если оно уменьшает значение выражения

$$q = 9(k_1 + k_2) + 3(s_1 + s_2) - (\gamma_1 + \gamma_2),$$

называемого *качеством* туров A_1, A_2, где *параметрами качества* тура A_i (в порядке убывания их *старшинства*) являются: k_i — ранг A_i, s_i — число синглов, γ_i — число циклов в A_i, $i = 1, 2$.

Приведем описание алгоритма, составляющего основной результат статьи.

Алгоритм $A_{7/5}$:

0) При $n \le 11$ полным перебором найти в G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, являющуюся оптимальным решением задачи 2-PSP(1,2)-min-2w. Иначе перейти на шаг 1.

1) Начать с $A_1 = A_2 = \emptyset$ (оба тура состоят только из синглов).

2) Пока улучшающее преобразование возможно, найти и применить его к A_1, A_2. Если нет улучшающих преобразований, перейти на шаг 3.

3) Построить для A_1 и A_2 производные туры A_1', A_2', состоящие из k_1, k_2 цепей соответственно, где, без потери общности, $k_1 \le k_2$. Если $k_2 < 5$, то удалением произвольных ребер преобразовать A_1', A_2' в туры, состоящие из пяти цепей каждый. Перейти на шаг 4.

4) Дополнить тур A_1' до гамильтонова цикла H_1, реберно непересекающегося с A_2', с помощью одной из описанных ниже процедур $P_{T\to H}$, при $k_1 \ge 5$, или $P'_{T\to H}$, при $k_1 < 5$ (при выполнении $P'_{T\to H}$ одно ребро может удаляться из A_1' или перемещаться из A_2' в H_1, а при выполнении $P_{T\to H}$ такого не происходит). Далее дополнить A_2' до гамильтонова цикла H_2, реберно непересекающегося с H_1, процедурой $P_{T\to H}$.

На выход алгоритма подается пара гамильтоновых циклов H_1, H_2, полученная на шаге 0 (при $n \le 11$) или на шаге 4 (при $n \ge 12$).

Опишем процедуру $P_{T\to H}$, применяемую на шаге 4 алгоритма (она основана на аналогичных процедурах из [1] и [3]). Пусть в полном графе G порядка $n \ge 12$ заданы тур T, содержащий не менее пяти цепей, и тур или гамильтонов цикл T', реберно непересекающийся с T (предполагается, что данные туры состоят только из цепей).

Процедура $P_{T\to H}$**.**

1) Если тур T содержит не более двух нетривиальных цепей, то добавлением подходящих ребер между синглами из T получить тур, реберно непересекающийся с T', и содержащий не менее трех нетривиальных цепей.

2) Пока в T имеется сингл s, выбрать в T нетривиальные цепи $(u_1, \dots, u_k)$, $(v_1, \dots, v_l)$ и $(w_1, \dots, w_m)$. Добавить к T то из ребер su_1, sv_1, sw_1, которое не принадлежит T'. После выполнения шага 2 в T нет синглов.

3) Пока в T имеется более трех цепей, выбрать две произвольные цепи $(u_1, \dots, u_k)$ и $(v_1, \dots, v_l)$. Добавить к T то из ребер u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1, u_kv_l, которого нет в T'.

4) К началу шага 4 тур T состоит ровно из трех цепей положительной длины: $(u_1, \dots, u_k)$, $(v_1, \dots, v_l)$ и $(w_1, \dots, w_m)$. Из всех возможных вариантов соединения этих цепей в гамильтонов цикл H выбрать тот, который не использует ребер из T'.

Лемма 1. *Пусть G — полный граф порядка $n \geq 12$, в котором заданы тур T, содержащий не менее пяти цепей, и тур или гамильтонов цикл T', реберно непересекающийся с T. Тогда процедура $P_{T \to H}$ за время $O(n)$ строит в G гамильтонов цикл $H \supseteq T$ такой, что $H \cap T' = \emptyset$.*

Доказательство. Ясно, что если на шаге 1 в T имеется хотя бы три сингла, то какие-то два из них можно соединить ребром, не принадлежащим T', ввиду отсутствия циклов длины 3 в T'. Поэтому для обоснования корректности шага 1 достаточно рассмотреть случай, когда тур T состоит из одной нетривиальной цепи и четырех синглов: $s_1, \dots, s_4$. Заметим, что хотя бы одна пара ребер $\{s_1s_2, s_3s_4\}$, $\{s_1s_3, s_2s_4\}$, $\{s_1s_4, s_2s_3\}$ не пересекается с T' в силу отсутствия в T' вершин степени 3 и 3-циклов. Добавление указанной пары ребер к T завершает шаг 1.

На шаге 2 при вершине s имеются три ребра: su_1, sv_1 и sw_1, поэтому хотя бы одно из них не принадлежит T'. На шаге 3 ребра u_1v_1, u_1v_l, u_kv_1 и u_kv_l образуют 4-цикл, и хотя бы одно из них не принадлежит T'. Рассмотрим шаг 4. Обозначим через H' гамильтонов цикл в G такой, что $H' = T'$, если T' является гамильтоновым циклом, или H' получен из тура T' добавлением ребер, соединяющих концы цепей из T' в произвольном порядке (в последнем случае H' может иметь общие ребра с T). Для обоснования корректности шага 4 достаточно показать, что цепи тура T, оставшиеся к началу шага 4, можно соединить в гамильтонов цикл ребрами, не принадлежащими H'. Возможность такого достроения была доказана в [1] рассмотрением возможных случаев расположения концов цепей тура T на цикле H'.

Очевидно, что время работы процедуры $P_{T \to H}$ линейно по n. Лемма 1 доказана.

Далее опишем процедуру $P'_{T \to H}$. Пусть в полном графе G порядка $n \geq 12$ заданы реберно непересекающиеся туры T и T', состоящие только из цепей.

Процедура $P'_{T \to H}$.

1) Пока в G есть ребро $e \notin T'$, соединяющее концы различных цепей тура T, добавить e к T. Иначе перейти на шаг 2.

2) Если T состоит из единственной цепи $P = x \dots y$, положить $H := P \cup \{xy\}$. При этом если ребро xy входит в T', удалить его из T'. Если же T состоит из

сингла s и нетривиальной цепи $Q = a \dots b$, где $sa, sb \in T'$, то выбрать в Q такое ребро cd, что $\{c, d\} \cap \{a, b\} = \emptyset$, и положить $H := T \cup \{ab, sc, sd\} \setminus \{cd\}$.

Лемма 2. *Пусть G — полный граф порядка $n \geq 12$, в котором заданы реберно непересекающиеся туры T и T'. Процедура $P'_{T \to H}$ за время $O(n)$ преобразует тур T в гамильтонов цикл H, включающий все кроме, возможно, одного ребра тура T, а из тура T' удаляет не более одного ребра. При этом если $H \not\supset T$, то тур T' не меняется. В любом случае после окончания работы процедуры $P'_{T \to H}$ имеем $H \cap T' = \emptyset$.*

Доказательство. Для обоснования корректности процедуры $P'_{T \to H}$ заметим, что после выполнения шага 1 возможны только ситуации, описанные на шаге 2. Действительно, если в T есть хотя бы три цепи или есть две нетривиальные цепи, то аналогично доказательству леммы 3.1 устанавливается, что к T можно добавить ребро на шаге 1. Если же T состоит из сингла s и цепи $Q = a \dots b$, то из невозможности добавления ребра на шаге 1 следует, что $sa, sb \in T'$. В этом случае возможность выбора ребра cd на шаге 2 обеспечивается условием $n \geq 12$. Ясно, что добавленные к T ребра sc, sd, ab не принадлежат T' ввиду условия $sa, sb \in T'$ и отсутствия 3-цикла (s, a, b) в T'. Время работы процедуры $P'_{T \to H}$ линейно по n. Лемма 2 доказана.

В дальнейшем, если к туру A_i добавляется E_i-ребро $e \in A_{3-i}$, то это ребро удаляется из A_{3-i}, $i \in \{1, 2\}$. Опишем два стандартных улучшающих преобразования туров A_1, A_2, выполняемых на шаге 2 алгоритма $A_{7/5}$.

П0. *Если ребро $e = xy \in E_i^p \cup E_i''$ соединяет две T_i-вершины x, y, не принадлежащие одному и тому же циклу, то присоединяем e к A_i. Если, скажем, x принадлежит циклу C из A_i, то удаляем одно из ребер C, инцидентных x, из A_i.*

П1. *Если $e = xy$ — $E_i^p \cup E_i''$-ребро, такое что $y \in S_i$, а x — PZ_i-вершина длинной цепи P из A_i, то присоединяем e к A_i и удаляем ребро $xz \in P$ из A_i, где z — PZ_i-вершина цепи P.*

В дальнейшем, если совершается преобразование, аналогичное П0 или П1, т. е. к туру A_i добавляется E_i-ребро, инцидентное Z_i- или PZ_i-вершине x, после чего степень x в A_i становится равной 3, то по умолчанию удаляется ребро из цикла или цепи в A_i, содержащей x (аналогично тому, как это делается при преобразованиях П0 и П1).

Преобразование П0 является улучшающим, так как оно либо уменьшает k_i на 1 (если x и y принадлежат разным объектам в A_i), либо увеличивает γ_i на 1 (если x и y — концы одной цепи). Ясно, что П1 уменьшает s_i, не меняя k_i. Во всех случаях значение q уменьшается.

Пусть $a \in \{k_1, k_2, s_1, s_2, \gamma_1, \gamma_2\}$ — некоторый параметр качества. Через УП(a) обозначим любое улучшающее преобразование, уменьшающее a, если $a \in \{k_1, k_2, s_1, s_2\}$, и увеличивающее a, если $a \in \{\gamma_1, \gamma_2\}$.

4. Оценка точности полученного решения и временная сложность алгоритма $A_{7/5}$

Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Алгоритм $A_{7/5}$ за время $O(n^3)$ находит в полном n-вершинном графе G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2, для веса которых выполняется неравенство $w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq \frac{7}{5}OPT + 1$.*

Доказательство. Из описания алгоритма $A_{4/3}$, процедур $P_{T\to H}$, $P'_{T\to H}$ и лемм 1, 2 следует, что алгоритм находит в G пару реберно непересекающихся гамильтоновых циклов H_1, H_2. Докажем оценку точности. При $n \leq 11$ на шаге 0 находится точное решение задачи 2-PSP(1,2)-min-2w. Пусть $n \geq 12$. Обозначим ранги построенных на шаге 2 туров A_1, A_2 через k_1, k_2, соответственно, $k_1 \leq k_2$. Тогда на шаге 3 производный тур A'_i состоит из k_i цепей, образованных E_i-ребрами графа G, $i = 1, 2$.

Если $k_2 < 5$, то на шаге 4 каждый тур A'_1, A'_2 состоит из пяти цепей и дополняется до гамильтонова цикла процедурой $P_{T\to H}$. Из леммы 1 следует, что построенный на шаге 4 цикл H_i содержит все ребра тура A'_i, а значит, в H_i имеется не более пяти ребер веса 2, $i = 1, 2$. С учетом неравенств $n \geq 12$ и $OPT \geq 2n$, получаем оценку

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq 2n + 10 \leq 1 + \frac{7}{5} \cdot 2n \leq 1 + \frac{7}{5} \cdot OPT.$$

Пусть $k_2 \geq 5$. Теперь тур A'_1 дополняется до H_1 одной из процедур $P_{T\to H}$ или $P'_{T\to H}$, а тур A'_2 дополняется до H_2 процедурой $P_{T\to H}$. Из лемм 1, 2 следует, что какой-то из построенных циклов H_i содержит все ребра тура A'_i, в то время как второй цикл H_{3-i} содержит все ребра A'_{3-i} кроме, возможно, одного. Это означает, что всего в циклах H_1, H_2 имеется не более $k_1 + k_2 + 1$ ребер веса 2, т. е. для веса полученного решения выполняются неравенство

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq 2n + k_1 + k_2 + 1. \tag{1}$$

С другой стороны, поскольку тур B_i состоит из всех E_i-ребер цикла H_i^*, $i = 1, 2$, то для циклов оптимального решения выполнены равенства

$$w_i(H_i^*) = 2n - |B_i| = 2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_i}(v), \quad i = 1, 2. \tag{2}$$

Искомая оценка точности полученного решения записывается в виде:

$$w_1(H_1) + w_2(H_2) \leq \frac{7}{5}[(w_1(H_1^*) + w_2(H_2^*)] + 1. \tag{3}$$

С учетом (1), (2), для выполнения (3) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$5(2n + k_1 + k_2) \leq 7[(2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_1}(v)) + (2n - \frac{1}{2}\sum_{v\in V} d_{B_2}(v))],$$

что равносильно неравенству

$$5(k_1 + k_2) \leq (9n - \frac{7}{2}\sum_{v\in V} d_{B_1}(v)) + (9n - \frac{7}{2}\sum_{v\in V} d_{B_2}(v)) =$$

$$= \sum_{v\in V}[(9 - \frac{7}{2}d_{B_1}(v)) + (9 - \frac{7}{2}d_{B_2}(v))]. \tag{4}$$

Для каждой вершины v графа G определим число $\mu^0(v) = \mu_1^0(v) + \mu_2^0(v)$, называемое ее *начальным зарядом*, где $\mu_i^0(v) = 9 - \frac{7}{2}d_{B_i}(v)$ — *начальный заряд*

v относительно тура B_i, $i = 1, 2$. Искомое неравенство (4) переписывается в виде

$$5(k_1 + k_2) \leq \sum_{v \in V} \mu^0(v). \tag{5}$$

Учитывая, что в правой части неравенства (5) стоит сумма начальных зарядов всех вершин графа, а в его левой части — упятеренное число всех объектов в A_1 и A_2, для достижения искомой оценки точности достаточно перераспределить заряды между вершинами G (не меняя их общей суммы) так, чтобы для *конечного заряда* $\mu(v)$ любой вершины v выполнялось неравенство $\mu(v) \geq \mu_1(v) + \mu_2(v)$, где $\mu_i : V \to R$ $(i = 1, 2)$ — некоторая функция, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{v \in P} \mu_i(v) \geq 5 \tag{6}$$

для каждого объекта P тура A_i, $i = 1, 2$.

Определим функцию μ_i следующим образом.

$$\mu_i(v) = \begin{cases} 5, \text{ если } v \in S_i, \\ 5/2, \text{ если } v \in PT_i, \\ 0, \text{ если } v \in PZ_i, \\ 2, \text{ если } v \in Z_i \end{cases}$$

Легко заметить, что определенные таким образом функции μ_i, удовлетворяют (6).

Пусть $x \in V(G)$. Если в туре A_i вершина x принадлежит нетривиальной цепи, то будем обозначать ее через P_i, а если циклу, то его будем обозначать через C_i, $i = 1, 2$.

Определим следующие *правила перераспределения зарядов* между вершинами G.

R1. Если $xy \in B_i$, где $x \in PZ_i$, $y \in PT_i$, и $P_{3-i} \neq \ldots xy$, то x отдает y заряд 1.

R2. Пусть $xy \in B_i$, где $x \in PZ_i$, $y \in S_i$, и $P_{3-i} \neq \ldots xy$. Тогда x отдает y заряд 1, если P_i — длинная цепь, и $\frac{3}{2}$ — иначе.

R3. Пусть $xy \in A_i \setminus B_i$, где $x \in PT_i$, $y \in PZ_i$, и если $xy \in B_{3-i}$, то $x \notin S_{3-i}$, $y \in T_{3-i}$. Тогда x отдает y заряд 1, если $xy \in B_{3-i}$, $x \in PT_{3-i} \cup Z_{3-i}$, $y \in S_{3-i}$, и $\frac{1}{2}$ — иначе.

Обозначим через $\mu(v)$ конечный заряд вершины v после применения правил R1 – R3 для $i = 1, 2$.

Заметим, что процедура перераспределения зарядов по правилам R1–R3 не является частью алгоритма $A_{7/5}$, так как при его работе неизвестно, какие единичные ребра графа входят в оптимальные туры B_1, B_2, а какие — нет. Описанное перераспределение следует рассматривать лишь как элемент анализа алгоритма, а именно, как часть доказательства утверждения об оценке точности полученного решения.

Для обоснования оценки точности алгоритма $A_{7/5}$ остается доказать следующую лемму.

Лемма 3. *Если существует вершина v такая, что $\mu(v) < \mu_1(v) + \mu_2(v)$, то на шаге 2 алгоритма $A_{7/5}$ применимо некоторое улучшающее преобразование туров A_1, A_2.*

5. Доказательство леммы 3

Нам потребуется следующее свойство перераспределения зарядов в G.

Утверждение 1. *Пусть $v \in S_i \cup PT_i$, vz — B_i^p-ребро. Тогда v получает от z заряд 1 по R1, если $v \in PT_i$, и заряд 3/2 по R2, если $v \in S_i$.*

▶ Если z — терминальная вершина тура A_i, то применимо П0. Следовательно, $z \in PZ_i$. В таком случае z отдает заряд v по R1 или R2. Более того, если $v \in S_i$, и z принадлежит длинной цепи в A_i, то применимо П1. Таким образом, если $v \in S_i$, то она получает от z заряд 3/2 по R2. ◀

Рассмотрим произвольную вершину $v \in V$. Обозначим B_1-ребра, инцидентные v, через $vz_1, \dots, vz_\lambda$, а B_2-ребра при v через $vt_1, \dots, vt_\mu$ ($\lambda, \mu \in \{0, 1, 2\}$).

Для доказательства леммы 3 достаточно рассмотреть следующие 10 случаев, соответствующих различным типам вершин графа G.

Случай 1. v — (S, S)-вершина, и $\mu(v) < 5 + 5 = 10$.

Заметим, что v не отдает заряда ни по одному из правил R1 – R3. Таким образом, $\mu(v) \geq \mu^0(v)$. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leq 2$, то $\mu(v) \geq \mu^0(v) \geq 2 + 9 = 2 \times \frac{11}{2} = 11 > 10$. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) = 3$, то $\mu^0(v) = 2 + \frac{11}{2} = 7\frac{1}{2}$, и v получает $3 \times \frac{3}{2}$ по инцидентным B^p-ребрам по утверждению 1. Следовательно, $\mu(v) \geq 7\frac{1}{2} + 3 \times \frac{3}{2} > 10$. Наконец, если $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, то $\mu(v) \geq 2 + 2 + 4 \times \frac{3}{2} = 10$ согласно утверждению 1.

Случай 2. v — (S, PT)-вершина, и $\mu(v) < 5 + \frac{5}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Пусть $P_2 = vx\dots$. Вершина v дает x не более $\frac{1}{2}$ по R3. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leq 2$, то $\mu(v) \geq 11 - \frac{1}{2} > 7\frac{1}{2}$. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) = 3$, то v инцидентна не менее двум B^p-ребрам, а значит, получает не менее 2×1 по утверждению 1, и $\mu(v) \geq 7\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 \times 1 > 7\frac{1}{2}$.

Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$. Тогда v инцидентна не менее трем B^p-ребрам. Если имеются четыре таких ребра, то $\mu(v) \geq 4 - \frac{1}{2} + 4 \times 1 = 7\frac{1}{2}$ по утверждению 1. В противном случае v инцидентна трем B^p-ребрам, по крайне мере одно из которых — B_1^p-ребро, так что всего v получает не менее $\frac{3}{2} + 2 \times 1 = 3\frac{1}{2}$. Более того, v не отдает x заряд по R3, так как $vx \in B_1 \cup B_2$ и $v \in S_1$. Таким образом, $\mu(v) \geq 4 + 3\frac{1}{2} = 7\frac{1}{2}$.

Случай 3. v — (S, PZ)-вершина, и $\mu(v) < 5 + 0 = 5$.

Теперь v отдает не более $2 \times \frac{3}{2} = 3$ по R1 и/или R2. Пусть $P_2 = \dots xvy \dots$. Для начала докажем несколько структурных свойств B_i-ребер при v.

Утверждение 2. *Если $vx \in B_1$, то $x \notin S_1$. Более того, если $x \in PZ_2$, то $x \in PZ_1$.*

▶ Если утверждение ложно, то добавление vx к A_1 уменьшает $s_1 + s_2$ и не меняет $k_1 + k_2$. ◀

Утверждение 3. *Пусть $vx \in B_1$, где x — либо $(PT \cup Z, PT)$-вершина, либо (PZ^l, PZ)-вершина. Если v инцидентна B_2^p-ребру vt, где $t \in S_2 \cup PT_2$, то $P_2 = \dots xvy \dots t$.*

▶ Если утверждение ложно, то добавление vx к A_1, vt к A_2 уменьшает k_1 или s_1. ◀

Утверждение 4. *Вершина v получает не менее 1 по каждому B_1-ребру vz по R2 или R3.*

▶ Следствие правил R3, R2 и утверждений 1, 2. ◀

При $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \le 2$ имеем $\mu(v) \ge 11 - 3 > 5$. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) = 3$, то v инцидентна хотя бы одному B_1-ребру, по которому получает не менее 1 согласно утверждению 4. Таким образом, $\mu(v) \ge 7\frac{1}{2} - 3 + 1 > 5$.

Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$. Если v отдает заряд не более 1, то $\mu(v) \ge 4 - 1 + 2 \times 1 = 5$ согласно утверждению 4. Пусть v отдает $\frac{3}{2}$ по B_2^p-ребру vt_1, где $t_1 \in S_2$. Тогда $P_2 = xvy$, иначе применимо П1. Из утверждений 1–3 следует, что v дважды получает заряд по R2 и хотя бы раз $\frac{1}{2}$ по R3. Докажем, что v получает $2 \times \frac{3}{2}$ по R2. В противном случае, без потери общности, $z_1 \in \{x, y\}$ — PZ_1^l-вершина. Добавим vz_1 к A_1, vt_1 — к A_2, уменьшая s_1 (s_2 при этом не меняется). Пусть v отдает $2 \times \frac{3}{2}$, иначе $\mu(v) \ge 4 - \frac{3}{2} - 1 + 2 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 5$. Тогда $vt_2 \in B_2^p$, где $t_2 \in S_2$. Следовательно, v получает $2 \times \frac{1}{2}$ по R3, и $\mu(v) \ge 4 - 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 5$.

Осталось рассмотреть случай, когда v дважды отдает 1. Докажем, что v получает $2 \times \frac{3}{2}$, т.е. $\mu(v) \ge 4 - 2 \times 1 + 2 \times \frac{3}{2} = 5$. Пусть v получает не более 1 от z_1 по R2. Тогда из утверждений 1–3 и правила R2 следует, что, без ограничения общности, $z_1 = x$ — (PZ^l, PT)-вершина. Тогда v получает от z_1 заряд $\frac{1}{2} + 1$ по R3 и R2.

Случай 4. v — (S, Z)-вершина, и $\mu(v) < 5 + 2 = 7$.

Вершина v не отдает заряд. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \le 3$, то $\mu(v) \ge \mu^0(v) \ge 7\frac{1}{2} > 7$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$. Если v получает $2 \times \frac{3}{2}$, то $\mu(v) = 4 + 2 \times \frac{3}{2} = 7$. Иначе, скажем, z_1 отдает v не более 1 по R2, тогда $z_1 \in T_1 \cup PZ_1^l$, и применимо П0 или П1.

Случай 5. v — (PT, PT)-вершина, и $\mu(v) < 2 \times \frac{5}{2} = 5$.

В этом случае v отдает не более 2×1 по R3. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \le 3$, то $\mu(v) \ge 7\frac{1}{2} - 2 > 5$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, $P_1 = vx\ldots$, $P_2 = vy\ldots$. Заметим, что v инцидентна по крайней мере двум B^p-ребрам, по которым получает не менее 2×1 согласно утверждению 1. Если v отдает не более 1 или получает 3×1, то $\mu(v) \ge 4 - 1 + 2 = 4 - 2 \times 1 + 3 = 5$. Иначе, без потери общности, $vx \in B_2$, $vy \in B_1$, x — (PZ, S)-вершина, y — (T, PZ)-вершина. Добавление vx к A_2 и vy к A_1 уменьшает $s_1 + s_2$, при этом $k_1 + k_2$ остается неизменным.

Случай 6. v — (PT, PZ)-вершина, и $\mu(v) < \frac{5}{2} + 0 = \frac{5}{2}$.

Вершина v отдает не более $2 \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ по R1–R3. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \le 3$, то $\mu(v) \ge 7\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} > \frac{5}{2}$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, $P_1 = vw\ldots$, $P_2 = \ldots xvy\ldots$.

Подслучай 6.1. P_2 — длинная цепь.

В этом случае v отдает не более 2×1 по R1, R2 и $\frac{1}{2}$ по R3. Если v отдает 1 не более чем одной вершине из t_1, t_2 по R1, R2, или v получает 1 по R1, то $\mu(v) \ge 4 - 2 \times 1 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{2}$. Следовательно, v не получает заряда по R1 и отдает 1 каждой из t_1, t_2 по R1, R2. Это означает, что $t_1, t_2 \in S_2 \cup PT_2$.

Так как v не получает заряд по R1, то вершины z_1, z_2 являются терминальными в A_1 и принадлежат множеству $\{x, y, w\}$, иначе применимо П0. Без потери общности предположим, что $z_1 = x$, $t_1 \notin \{y, w\}$, так что $vt_1 \in B_2^p$. Тогда $t_1 \in PT_2$, иначе применимо П1.

Утверждение 5. *Если имеется ребро $vt \in B_2^p$, где $t \in PT_2$, то либо $P_1 = vw\ldots x$, либо $P_2 = \ldots xvy\ldots t$.*

► В противном случае, добавляя vx к A_1, vt к A_2, мы уменьшим k_1. ◄

Подслучай 6.1.1. $z_2 = y$.

Учитывая симметрию между x, y, можем считать, что $P_1 \neq vw\dots x$. Из утверждения 5 следует, что $P_2 = \dots xvy\dots t_1$, $P_1 = vw\dots y$. В этом случае, добавляя vy к A_1, vt_1 — к A_2, увеличиваем γ_1.

Подслучай 6.1.2. $z_2 = w$.

Тогда $P_1 = vw \neq vw\dots x$. По утверждению 5 имеем $P_2 = \dots xvy\dots t_1$. Так как $y \in PZ_2$, то $vt_2 \in B_2^p$ и $P_2 \neq \dots xvy\dots t_2$, что противоречит утверждению 5.

Подслучай 6.2. $P_2 = xvy$ — цепь длины 2.

Если v дает не более 1 каждой из t_1, t_2, то применимы те же аргументы, что и в случае 6.1. Предположим, что v отдает $\frac{3}{2}$ вершине t_1 по R2, в частности, $t_1 \in S_2$ (возможно, $t_1 = w$).

Утверждение 6. *Пусть $vt \in B_2^p$, где $t \in S_2 \cup PT_2$, $vz \in A_2 \cap B_1$, т.е. $z \in \{x, y\}$. Тогда либо $z \in PZ_1$, и v получает 1 от z по R1, либо $t \in PT_2$, и $P_1 = vw\dots z$.*
► Допустим, $z \in T_1$. Добавим vz к A_1, vt — к A_2. При этом если $P_1 \neq vw\dots z$, то уменьшится k_1, если же $P_1 = vw\dots z$, $t \in S_2$, то увеличится γ_1, а более старшие параметры качества не изменятся. В каждом из случаев имеем улучшающее преобразование. ◄

Прежде всего рассмотрим случай, когда v не отдает заряд t_2 по R1, R2. В этом случае v дает $\frac{1}{2}$ вершине w по R3, иначе $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$. Тем самым, $w \in PZ_1$, и $vw \notin B_1$. Если П0 не применимо, и v не получает заряд по R1 и R3, то без потери общности $z_1 = x \in S_1$, $z_2 = y \in S_1$. Из утверждения 6 следует, что $t_1 = w$ —(PZ, S)-вершина. Добавим vx, vy к A_1, а vw к A_2. Это улучшающее преобразование, так как k_1 уменьшается на 1, k_2 увеличивается на 1, s_1 уменьшается на 2, s_2 увеличивается на 1, т. е. $s_1 + s_2$ уменьшается на 1, а $k_1 + k_2$ не изменяется. Следовательно, v получает заряд по R1 и R3, и $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Предположим, что v дает заряд и t_1, и t_2 по R1 и/или R2. Также v может давать $\frac{1}{2}$ вершине w по R3. Если v получает 2×1 от z_1 и z_2 по R1, то $\mu(v) \geq 4 - 2 \times \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 2 \times 1 = \frac{5}{2}$. Поэтому предположим, что $z_1 \in T_1$. Заметим, что $z_1 \in \{x, y, w\}$, иначе применимо П0.

Подслучай 6.2.1. $z_1 = w$.

Тогда $P_1 = vw$. Более того $vt_1 \in B_2^p$, $t_1 \in S_2$. Из утверждений 1, 6 следует, что вершина v получает 1 от z_2 по R1. Если $t_2 \in \{x, y\}$, то v отдает t_2 заряд 1 по R1, и $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - 1 + 1 = \frac{5}{2}$. Иначе хотя бы одно из vx, vy — A_2^p-ребро, по которому v получает $\frac{1}{2}$ по R3., т. е. $\mu(v) \geq 4 - 2 \times \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Подслучай 6.2.2. $z_1 = x$. (случай $z_1 = y$ симметричен). Из утверждения 6 следует, что $t_1 = w$, $t_2 \in PT_2$. Докажем, что v получает 1 от z_2 по R1. Если $vz_2 \in B_1^p$, то v получает 1 от z_2 по R1 по утверждению 1. Иначе $z_2 = y$, $vt_2 \in B_2^p$, и так как z_1, z_2 не могут быть одновременно концами P_1, v получает 1 от z_2 по утверждению 6. Следовательно, если v не отдает заряд по R3, то $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - 1 + 1 = \frac{5}{2}$, иначе w — (PZ, S)-вершина. Если $z_1 \in S_1$, то добавление vz_1 к A_1, vw — к A_2 уменьшает s_1 на 1, другие параметры качества не меняются. Если же $z_1 \in PT_1 \cup Z_1$, то v получает $\frac{1}{2}$ от z_1 по R3, тем самым $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} - 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$.

Случай 7. v — (PT, Z)-вершина, и $\mu(v) < \frac{5}{2} + 2 = 4\frac{1}{2}$.

Заметим, что v отдает не более 1 по R3. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leq 3$, то $\mu(v) \geq 7\frac{1}{2} - 1 > 4\frac{1}{2}$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, $P_1 = vw\dots$, $C_1 = \dots xvy\dots$. Без потери общности, $P_1 \neq vw \dots z_1$. Тогда v получает 1 от z_1 по R1, иначе добавление vz_1 к A_1 уменьшает k_1 на 1. Если v отдает не более $\frac{1}{2}$, то $\mu(v) \geq 4 - \frac{1}{2} + 1 = 4\frac{1}{2}$. Допустим, v отдает 1 по R3. Тогда $vw \in B_2$, w — (PZ, S)-вершина. Если v не получает заряд от z_2, и неприменимо П0, то согласно утверждению 1 вершина $z_2 \in \{x, y\}$ — терминальная в A_1, и $P_1 = vw \dots z_2$. В этом случае выполнимо УП(k_2): добавим vw к A_2, vz_2 к A_1. Следовательно, v получает от z_1, z_2 по 1, и $\mu(v) \geq 4 - 1 + 2 \times 1 > 4\frac{1}{2}$.

Случай 8. v — (PZ, PZ)-вершина, и $\mu(v) < 0$.

Вершина v отдает не более $4 \times \frac{3}{2} = 6$ по правилам R1 и R2. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leq 3$, то $\mu(v) \geq 7\frac{1}{2} - 6 > 0$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, $P_1 = \dots x_1 v y_1 \dots$, $P_2 = \dots x_2 v y_2 \dots$.

Если v отдает не более 1 по каждому инцидентному B_i-ребру, то $\mu(v) \geq 4 - 4 \times 1 = 0$. Следовательно, $P_1 = x_1 v y_1$. Тогда v не отдает заряд по $A_1 \cap B_2$-ребрам по правилам R1, R2. По каждому инцидентному A_1^p-ребру v получает $\frac{1}{2}$ по R3.

Допустим, P_2 — длинная цепь. Тогда каждой из t_1, t_2 вершина v отдает не более 1, а каждой из z_1, z_2 — не более $\frac{3}{2}$. В наихудшем случае имеем $\mu(v) = 4 - 2 \times 1 - 2 \times \frac{3}{2} = -1$, т. е. у v имеет место дефицит заряда в -1. Достаточно показать, что v дважды компенсирует (экономит) по $\frac{1}{2}$ по отношению к этому теоретическому минимуму, что и происходит, поскольку v инцидентна двум A_1-ребрам, по каждому из которых либо получает $\frac{1}{2}$ по R3 (если это A_1^p-ребро), либо отдает не более 1 или 0 соответственно в случаях, если ребро принадлежит B_1 или B_2.

Пусть $P_2 = x_2 v y_2$. Теперь v не передает заряд и по $A_2 \cap B_1$-ребрам. В наихудшем случае имеем $\mu(v) = 4 - 4 \times \frac{3}{2} = -2$, т. е. дефицит равен -2. Аналогично предыдущему случаю, на каждом инцидентном ребре из $A_1 \cup A_2$ вершина v экономит не менее $\frac{1}{2}$, откуда $\mu(v) \geq -2 + 4 \times \frac{1}{2} = 0$.

Случай 9. v — (PZ, Z)-вершина, и $\mu(v) < 0 + 2 = 2$.

В этом случае v отдает не более $2 \times \frac{3}{2} = 3$ по R1, R2. Если $d_{B_1}(v) + d_{B_2}(v) \leq 3$, то $\mu(v) \geq 7\frac{1}{2} - 3 > 2$. Пусть $d_{B_1}(v) = d_{B_2}(v) = 2$, $P_1 = \dots x_1 v y_1 \dots$, $C_2 = \dots x_2 v y_2 \dots$. Если v отдает не более 2×1, то $\mu(v) \geq 4 - 2 \times 1 = 2$. Допустим, v дает $\frac{3}{2}$ вершине z_1, т. е. $z_1 \in S_1$, $P_1 = x_1 v y_1$. Докажем, что по каждому инцидентному $A_1 \setminus B_1$-ребру v получает $\frac{1}{2}$ по R3. В противном случае, скажем, $vx_1 \in B_2$, $x_1 \in S_2$, и выполнимо УП(k_2): добавим vx_1 к A_2, vz_1 к A_1. Следовательно, v получает $\frac{1}{2}$ по R3 хотя бы раз. Если v инцидентна $A_1 \cap B_1$-ребру, то по нему она отдает 1 по R1, и $\mu(v) \geq 4 - \frac{3}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 2$. Иначе v получает $2 \times \frac{1}{2}$ по R3, и $\mu(v) \geq 4 - 2 \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 2$.

Случай 10. v — (Z, Z)-вершина.

Так как v не отдает и не получает заряд по правилам R1–R3, то $\mu(v) \geq \mu^0(v) \geq 4 = 2 + 2$, что и требуется.

Лемма 3 доказана.

6. Обоснование временно́й сложности алгоритма $A_{7/5}$

Для завершения доказательства теоремы 1 остается показать, что трудоемкость алгоритма $A_{7/5}$ не превосходит $O(n^3)$. Поскольку значение параметра q заключено в пределах от 1 до $24n$, алгоритм выполняет не более $O(n)$ улучшающих преобразований. Поиск каждого преобразования осуществляется путем перебора всех вершин $v \in V$ и поиска и выполнения преобразования в окрестности вершины v. Перебор вершин осуществляется за время $O(n)$, а время отыскания улучшающего преобразования в окрестности выбранной вершины v определяется временем перебора всех $(E_1^p \cup E_2^p)$-ребер при v с целью нахождения (не более одного) ребра, добавление которого к A_1 или A_2, приводит к улучшающему преобразованию. Перебор $(E_1^p \cup E_2^p)$-ребер при v производится за время $O(n)$, при этом остальные добавляемые ребра принадлежат $A_1 \cup A_2$, и потому находятся за время $O(1)$, а множество удаляемых ребер однозначно определяется по множеству добавляемых, и тоже находится за время $O(1)$. Время выполнения найденного улучшающего преобразования также линейно. Таким образом, на поиск и выполнение одного улучшающего преобразования расходуется время $O(n \cdot n) = O(n^2)$, а общая трудоемкость шагов 0–2 алгоритма не превосходит $O(n \cdot n^2) = O(n^3)$. Из лемм 1 и 2 следует, что шаги 3 и 4 выполняются за линейное время. Отсюда получаем искомую оценку временно́й сложности алгоритма. Теорема 1 доказана.

References

[1] А.А. Агеев, А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади, *Полиномиальный алгоритм с оценкой точности* 3/4 *для отыскания двух непересекающихся гамильтоновых циклов максимального веса*, Дискрет. анализ и исслед. операций, **13**:2, Сер. 1. (2006), 11–20. MR2289335

[2] А.Е. Бабурин, Э.Х. Гимади, Н.М. Коркишко, *Приближенные алгоритмы для нахождения двух реберно непересекающихся гамильтоновых цикла минимального веса*, Дискрет. анализ и исслед. операций, **11**:1, Сер. 2. (2004), 11–25. MR2084543

[3] Э.Х. Гимади, Ю.В. Глазков, А.Н. Глебов, *Приближенные алгоритмы решения задачи о двух коммивояжерах в полном графе с весами ребер 1 и 2*, Дискрет. анализ и исслед. операций, **14**:2, Сер. 2. (2007), 41–61. MR2542311

[4] А.И. Сердюков, *О некоторых экстремальных обходах в графах*, Управляемые системы. Сб. науч. тр., Вып. 17 (1978), 76–79. MR0544163

[5] P. Berman, M. Karpinski, 8/7-*approximation algorithm for (1,2)-TSP*, Proc. of the 17th annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms, SODA 2006 (Miami, January 22-26, 2006). New York: ACM Press (2006), 641–648. MR2368860

[6] N. Christofides, *Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem*, Technical report CS-93-19: Carnegie Mellon University (1976).

[7] J.B. J.M. De Kort, *Lower bounds for symmetric K-peripatetic salesman problems*, Optimization, **22**:1 (1991), 113–122. MR1092647

[8] J.B. J.M. De Kort, *Bounds for the symmetric* 2-*peripatetic salesman problem*, Optimization, **23**:4 (1992), 357–367. MR1238434

[9] J.B. J.M. De Kort, *A branch and bound algorithm for symmetric* 2-*peripatetic salesman problems*, European J. Oper. Res., **70**:2 (1993), 229–243. Zbl 0799.90114

[10] C.H. Papadimitriou, M. Yannakakis, *The travelling salesman problem with distances One and Two*, Math. Oper. Res., **18**:1 (1993), 1–11. MR1250103

[11] A.E. Baburin, F. Della Croce, E.K. Gimadi, Y.V. Glazkov, V.Th. Paschos, *Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2*, Discrete Applied Mathematics, **157**:9 (2009), 1988–1992. MR2522465

Алексей Николаевич Глебов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: angle@math.nsc.ru

Анастасия Васильевна Гордеева
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anast.gordeeva@gmail.com

Долгор Жамьяновна Замбалаева
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: dolgor@ngs.ru