S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 317–332 (2011) УДК 517.9

MSC 35Q35, 35N05

О НЕКОТОРЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИКОЙ

М.В.НЕЩАДИМ, А.П.ЧУПАХИН

Abstract. We consider the system of differential equations describing motions of continuum media for which all thermodynamics functions are invariant along trajectories of particles.It is proved that for two dimensional case this system are partially linearized by special Lagrange coordinates.We find and investigate some classes of exact solutions and derive scheme of reduction this system to involution.

Keywords: equations of heat moving gas, over determined systems, reduction to involution, singular solutions.

1. Введение. Рассмотрим уравнения движения сплошной среды со специальной термодинамикой: все термодинамические функции сохраняются вдоль траекторий частиц среды. При некоторых дополнительных предположениях этому условию удовлетворяют, например, температура и соленость в морской воде [1]. Такая модель возникает также в газовой динамике при предположении о постоянстве плотности (тепловые движения газа [2, 3]). Пусть $\overrightarrow{u} = (u, v, w)$ — скорость среды, h — термодинамическая функция, например, давление для тепловых движений; $\overrightarrow{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты и t — время.

Система уравнений, описывающая такую среду, имеет вид

$$\frac{d\overrightarrow{u}}{dt} + \nabla_x h = 0, \;\; \nabla_x \cdot \overrightarrow{u} = 0, \;\; \frac{dh}{dt} = 0. \qquad (1.1)$$

Neshchadim M.V., Chupakhin A.P., About some solutions of the equation moving continuous medium with spacial thermodynamics.

Работа поддержана Интеграционным грантом СО РАН (проект №65 – 2009), грантом Министерства образования (проекты 3Н-24.10 и 2.1.1/3543).

Поступила 7 сентября 2011 г., опубликована 17 октября 2011 г.

В (1.1) $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \overrightarrow{u} \cdot \nabla_x$ — полная производная, индекс x при градиенте указывает переменные по которым действует этот оператор.

Система (1.1) содержит пять уравнений для четырех неизвестных функций $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x})$, $h = h(t, \overrightarrow{x})$ и является переопределенной. Несмотря на ее простой и даже изящный вид, она до сих пор не приведена в инволюцию, для нее не получены условия совместности. Уравнения (1.1) были предметом исследования многих ученых, но их результаты не опубликованы. Это объясняется, видимо, тем, что не решена основная задача исследования системы (1.1) — приведение ее в инволюцию. Имеющиеся результаты, обсуждающиеся в кругу заинтересованных лиц, показывают, что условия совместности имеют достаточно высокий порядок. Имеются также результаты по отысканию отдельных классов точных решений, но они также носят "фольклорный"характер.

В представленной работе авторы предлагают исследовать систему (1.1) в лагранжевых координатах. Произвол в выборе этих переменных позволяет, в двумерном случае, "почти"линеаризовать получающуюся систему, но даже в этом, предельно упрощенном случае, не удается решить в полном объеме задачу о приведении ее в инволюцию. Рассмотрен случай функциональной зависимости координат относительно лагранжевых переменных, что упрощает нелинейное уравнение системы. Уравнения проинтегрированы в частных случаях, описывающих "точки разветвления"алгоритма приведения в инволюцию. Неожиданно в задаче появляется уравнение, описывающее поперечные колебания упругого стержня. Однако, оставшаяся в задаче нелинейность не позволяет в полной мере воспользоваться техникой преобразований Фурье для построения общего решения системы.

2. Система уравнений в лагранжевых координатах. В механике сплошной среды лагранжевы координаты $\overrightarrow{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$ вводятся как значения координат частицы в начальный момент времени [4]

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{\xi} \text{ при } t = 0. \tag{2.1}$$

Тогда закон движения частиц определяется решением уравнений

$$\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} = \overrightarrow{u}(t, \overrightarrow{x}) \tag{2.2}$$

с начальным условием (2.1) и имеет вид

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{\xi}, t). \tag{2.3}$$

Таким образом, искомыми функциями становятся координаты частиц, независимыми переменными — их начальные положения и время. Вектор скорости можно получить из (2.3) по формуле (2.2). Важную роль при использовании лагранжевых координат играет матрица Якоби

$$M = \frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{\xi}} = \begin{pmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

отображения $\overrightarrow{\xi} \mapsto \overrightarrow{x}(\overrightarrow{\xi}, t)$. Матрица M удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \overrightarrow{u}}{\partial \overrightarrow{x}} \cdot M. \tag{2.5}$$

Из (2.5) и теоремы Лиувилля следует равенство для $|M| = \det M$:

$$\nabla_x \overrightarrow{u} = |M|^{-1}|M|_t. \tag{2.6}$$

Имеет место следующая формула пересчета градиента к лагранжевым переменным

$$\nabla_\xi f = \nabla_x f M, \tag{2.7}$$

где под градиентом понимается вектор строка.

Перепишем систему (1.1) в лагранжевых переменных, используя формулы (2.1) – (2.7):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{x}}{\partial t^2} + (\nabla_\xi h)\, M^{-1} = 0, \\ \\ |M|_t = 0, \ \ h_t = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

В системе (2.8) матрицу M^{-1} нужно записать как матрицу для функции $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}(\overrightarrow{\xi})$, а именно

$$M^{-1} = \frac{\partial \overrightarrow{\xi}}{\partial \overrightarrow{x}} = \left(\frac{\partial \overrightarrow{x}}{\partial \overrightarrow{\xi}}\right)^{-1} = \frac{1}{|M|}\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

где M_{ij} — алгебраическое дополнение элемента с номером (i, j) в матрице (2.4), например: $M_{11} = y_\eta z_\xi - y_\xi z_\eta$, $M_{21} = x_\eta z_\xi - x_\xi z_\eta$ и так далее.

Два последних уравнения системы (2.8) интегрируются, из них следует, что определитель $|M|$ и термодинамическая функция h зависят лишь от лагранжевых координат

$$|M| = |M|\left(\overrightarrow{\xi}\right), \ \ h = h\left(\overrightarrow{\xi}\right). \tag{2.10}$$

В этом состоит выгода применения лагранжевых координат, впрочем, довольно очевидная. Уравнения импульсов усложняются: они имеют второй порядок и являются сильно нелинейными. Запишем их покомпонентно:

$$\begin{aligned} &x_{tt} + \frac{1}{|M|}\left(h_\xi M_{11} - h_\eta M_{12} + h_\zeta M_{13}\right) = 0, \\ &y_{tt} + \frac{1}{|M|}\left(-h_\xi M_{21} + h_\eta M_{22} - h_\zeta M_{23}\right) = 0, \\ &z_{tt} + \frac{1}{|M|}\left(h_\xi M_{31} - h_\eta M_{32} + h_\zeta M_{33}\right) = 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Система (2.11) и уравнения (2.10) эквивалентны исходной системе (2.8), которая в свою очередь эквивалентна системе (1.1) в области невырожденности и гладкости отображения $\overrightarrow{\xi} \mapsto \overrightarrow{x}$.

Лагранжевы координаты определены неоднозначно. Произвольная гладкая функция от них также сохраняется вдоль траектории, а значит может служить новой лагранжевой координатой. Непосредственно проверяется

Лемма 1. Уравнения (2.8) инвариантны относительно произвольной гладкой замены лагранжевых координат $\overrightarrow{\xi} \mapsto \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\alpha}\left(\overrightarrow{\xi}\right)$, $\left|\partial \overrightarrow{\alpha} / \partial \overrightarrow{\xi}\right| \neq 0$.

Этой инвариантностью обладают и уравнения (2.10), (2.11).

3. Двумерный случай. Рассмотрим систему (2.8) для двумерных движений сплошной среды. В этом случае $\overrightarrow{x} = (x, y)$, $\overrightarrow{\xi} = (\xi, \eta)$,

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|} \begin{pmatrix} y_\eta & -x_\xi \\ -y_\xi & x_\xi \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

где $|M| = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$. Уравнения (2.10), (2.11) упрощаются и принимают вид

$$\begin{cases} x_{tt} + \dfrac{1}{|M|}\left(h_\xi y_\eta - h_\eta y_\xi\right) = 0, \\ y_{tt} + \dfrac{1}{|M|}\left(-h_\xi x_\eta + h_\eta x_\xi\right) = 0, \\ |M| = |M|\left(\xi, \eta\right), \quad h = h\left(\xi, \eta\right). \end{cases} \tag{3.2}$$

Лемма 2. Выбором лагранжевых координат система (3.2) приводится к следующей

$$x_{tt} - y_\xi = 0, \quad y_{tt} + x_\xi = 0, \quad x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1 \tag{3.3}$$

и условию $h = \eta$.

Доказательство. На первом этапе выберем лагранжевы координаты так, чтобы $|M| = 1$ в новых координатах. Поскольку при замене $(\xi, \eta) \mapsto (\alpha, \beta)$ имеем $\left|\partial\overrightarrow{x}/\partial\overrightarrow{\xi}\right| = |\partial\overrightarrow{x}/\partial\overrightarrow{\alpha}| \cdot \left|\partial\overrightarrow{\alpha}/\partial\overrightarrow{\xi}\right|$, то выберем (α, β) так, чтобы

$$\left|\frac{\partial\overrightarrow{\alpha}}{\partial\overrightarrow{\xi}}\right| = |M|\left(\xi(\alpha, \beta), \eta(\alpha, \beta)\right).$$

Тогда получим, что $|\partial\overrightarrow{x}/\partial\overrightarrow{\alpha}| = 1$. Сохраним обозначение ξ и η для новых лагранжевых координат. После такого преобразования система (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} x_{tt} + h_\xi y_\eta - h_\eta y_\xi = 0, \\ y_{tt} - h_\xi x_\eta + h_\eta x_\xi = 0, \\ x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = 1, \quad h = h\left(\xi, \eta\right). \end{cases} \tag{3.4}$$

Заметим, что во многих работах по гидродинамике идеальной жидкости, использующих лагранжевы координаты, такая нормировка делается сразу.

Непосредственно проверяется, что система (3.4) инвариантна относительно таких преобразований лагранжевых координат $(\xi, \eta) \mapsto (\alpha, \beta)$, для которых $\left|\partial\overrightarrow{\alpha}/\partial\overrightarrow{\xi}\right| = 1$. Это диффеоморфизмы, сохраняющие площадь. На втором этапе выберем в качестве одной из лагранжевых координат функцию h так, что $h = \eta$. Вторая координата должна быть функционально независимой с ней. После этого (3.4) преобразуется в систему (3.3). Лемма доказана.

Замечание 1. Выбором лагранжевых координат два уравнения системы (3.2) привелись к линейным; в (3.3) лишь одно уравнение является нелинейным.

Замечание 2. Первые два уравнения системы (3.3) приводятся к уравнению вида

$$u_{tttt} + u_{\xi\xi} = 0 \tag{3.5}$$

для координат x и y. Уравнение (3.5) возникает в теории упругости [5] и описывает поперечные колебания упругого стержня. Однако пространственная координата и время при этом меняются ролями! В теории упругости уравнение для отклонения стержня u имеет вид

$$u_{\xi\xi\xi\xi} + u_{tt} = 0, \tag{3.6}$$

где ξ — пространственная координата, t — время. Можно представить решение уравнения (3.5) или (3.6) через преобразование Фурье [6], но наличие третьего нелинейного уравнения в системе (3.3) не позволяет получать ее решения таким путем.

Замечание 3. Лагранжевы переменные ξ и η входят в систему (3.3) несимметричным образом, поскольку их равноправие нарушается выбором $h = \eta$. Два первых уравнения системы (3.3) содержат η как параметр, зависимость от которого определяется третьим уравнением.

Далее в системе (3.3) перейдем к новым обозначениям

$$u_{tt} = v_x, \;\; v_{tt} = -u_x, \;\; u_x v_y - u_y v_x = 1, \tag{3.7}$$

где $u = u(t,x,y)$, $v = v(t,x,y)$.

Используя теорию переопределенных систем дифференциальных уравнений [7, 8] можно получить оценку на произвол решения системы (3.7). Справедлива

Теорема 1. Система (3.7) имеет произвол решения не более 4-х функций одного аргумента.

Доказательство. Разрешим систему (3.7) следующим образом

$$u_{tt} = v_x, \;\; u_y = \frac{u_x v_y - 1}{v_x}, \tag{3.8}$$

$$v_{tt} = -u_x. \tag{3.9}$$

Отметим, что произвол решения системы (3.8) не более двух функций переменной x, а произвол решения (3.9) — не более двух функций переменных x, y.

Составим условие совместности $(u_{tt})_y = (u_y)_{tt}$ для системы (3.8). Производя дифференцирование и исключая производные v_{tt}, u_y, u_{tt} в силу (3.8), (3.9) получим соотношение

$$\begin{gathered} v_{xy} v_x \left(v_x^2 + v_y^2\right) = v_x \left(v_{xx} v_y v_x + 2u_{tx} v_{ty} v_x - u_{xx}\right) + \\ + v_{xx}\left(u_x^2 v_y - u_x\right) - 2v_{tx}\left(u_{tx} v_y v_x + v_{ty} v_y u_x - v_{tx} u_x v_y + v_{tx}\right). \end{gathered} \tag{3.10}$$

Сопоставим переменным t, x, y, u, v следующие целочисленные вектора

$$\begin{gathered} t \longmapsto (1,0,0,0), \;\; x \longmapsto (1,0,0,1), \;\; y \longmapsto (1,1,1,0), \\ u \longmapsto (1,2,0,0), \;\; v \longmapsto (1,1,0,0). \end{gathered} \tag{3.11}$$

Тогда производным v_{xy}, v_{xx}, v_{ty}, v_{tx}, u_{xx}, u_{tx}, входящим в (3.10), соответствуют вектора

$$\begin{gathered} v_{xy} \longmapsto (3,2,1,1), \;\; v_{ty} \longmapsto (3,2,1,0), \;\; v_{xx} \longmapsto (3,1,0,2), \\ v_{tx} \longmapsto (3,1,0,1), \;\; u_{tx} \longmapsto (3,2,0,1), \;\; u_{xx} \longmapsto (3,2,0,2). \end{gathered}$$

В соответствии со стандартным лексикографическим порядком производная v_{xy} будет старшей. Следовательно соотношение (3.10) надо разрешить относительно производной v_{xy} и добавить к системе (3.8), (3.9) соотношение

$$\begin{aligned} v_{xy} = \tfrac{1}{v_x\left(v_x^2+v_y^2\right)} \big[& v_x\left(v_{xx}v_yv_x + 2u_{tx}v_{ty}v_x - u_{xx}\right) + v_{xx}\left(u_x^2v_y - u_x\right) - \\ & -2v_{tx}\left(u_{tx}v_yv_x + v_{ty}v_yu_x - v_{tx}u_xv_y + v_{tx}\right)\big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Система (3.9), (3.12) ортономна и произвол ее ее решения не более 4-х функций одного аргумента.

Далее составим условие совместности $(v_{xy})_{tt} = (v_{tt})_{xy}$, преобразуем его в силу системы (3.8), (3.9), (3.12) и разрешим относительно производной u_{xxx}. (Непосредственные вычисления показывают, что коэффициент при u_{xxx} ненулевой, поэтому такое разрешение возможно.) Получим соотношение

$$u_{xxx} = F, \tag{3.13}$$

где правая часть F зависит только от производных v_x, v_y, u_x, v_{xx}, v_{tx}, v_{ty}, u_{xx}, u_{tx}, v_{txx}, v_{xxx}, u_{txx}. Нетрудно убедится, что производная u_{xxx} строго больше каждой из этих производных. Поэтому система (3.8), (3.9), (3.12), (3.13) ортономная. Ее подсистема (3.8), (3.13) имеет только константный произвол. Следовательно, система (3.8), (3.9), (3.12), (3.13), а, соответственно, и система (3.7) имеет произвол не более 4-х функций одного аргумента.

Теорема доказана.

Система (3.7) допускает нетривиальную группу. Более точно, справедлива

Лемма 3. Система уравнений (3.7) допускает группу преобразований Ли с базисом

$$\begin{aligned} &X_1 = \varphi(y)\partial_x,\ X_2 = \partial_y,\ X_3 = t\partial_u,\ X_4 = t\partial_v,\ X_5 = \partial_u,\ X_6 = \partial_v,\ X_7 = \partial_t, \\ &X_8 = -v\partial_u + u\partial_v,\ X_9 = t\partial_t + 2x\partial_x - 2y\partial_y,\ X_{10} = u\partial_u + v\partial_v + 2y\partial_y. \end{aligned}$$

для произвольной функции $\varphi(y)$.

Известно, что если система не в инволюции, то нельзя утверждать о полноте получаемой группы Ли, так как в процессе приведения в инволюцию могут появиться дополнительные соотношения на производные, что может привести к расширению допустимой группы Ли.

Некоторые точные решения системы (3.7).

Решения приводятся по модулю действия группы.

3.1. Полиномиальные решения по переменной t степени не больше 2 имеют вид

$$u = -y - px + \frac{1}{2}t^2,\ \ v = x + \frac{1}{2p}t^2,$$

где p — константа.

Замечание 4. Полиномиальные решения по переменной t степени не больше 4 имеют степень не больше 2.

Замечание 5. В силу равенств

$$\partial_t^{\,4k}w = (-1)^k\partial_x^{\,2k}w, \text{ где } w = u, v,\ k \in \mathbb{N}$$

решение u, v полиномиальное по переменной t будет также полиномиальным по переменной x.

3.2. Градиентные решения системы (3.7), т.е. решения с дополнительным условием

$$u_y = v_x$$

являются полиномиальными по переменной t степени не больше 2.

3.3. Если решение системы (3.7) может быть представлено в виде

$$u = p(y)\varphi(\xi),\ \ u = q(y)\psi(\xi)$$

для некоторых функций p, q, φ, ψ одного аргумента и функции $\xi = \xi(t, x)$, то

$$u = 2\varepsilon\sqrt{y}\cos\left(t - \varepsilon x\right),\ \ v = 2\sqrt{y}\sin\left(t - \varepsilon x\right),$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

Замечание 6. Система (3.7) не имеет решений вида

$$u = p(t)\varphi(x, y),\ \ u = q(t)\psi(x, y).$$

3.4. Решения системы (3.7) с дополнительным условием

$$u_t v_x - u_x v_t = 0$$

имеют следующее представление

$$u = p(y)\cos\left(-\frac{x + tq(y)}{q^2(y)}\right),\ \ v = p(y)\sin\left(-\frac{x + tq(y)}{q^2(y)}\right),$$

где $q(y)$ — произвольная функция и $p^2(y) = 2\int q^2(y)dy$.

Замечание 7. Наличие преобразования $X_1 = \varphi(y)\partial_x$ для системы (3.7) с произвольной функцией $\varphi(y)$ позволяет увеличивать произвол построенных решений. Так последнее построенное решение можно преобразовать в решение

$$u = p(y)\cos\left(-\frac{x + \varphi(y) + tq(y)}{q^2(y)}\right),\ \ v = p(y)\sin\left(-\frac{x + \varphi(y) + tq(y)}{q^2(y)}\right),$$

которое имеет уже произвол в две функции одного аргумента.

4. Простые волны. Наряду с рассмотренной выше системой (3.3) можно рассматривать решения с вырожденным определителем $\left|\partial\overrightarrow{x}/\partial\overrightarrow{\xi}\right| = 0$. Это своеобразные "простые волны"в которых координаты x и y функционально зависимы относительно переменных ξ и η.

В оставшейся части работы исследуется на совместность система

$$u_{tt} - v_x = 0,\ \ v_{tt} + u_x = 0,\ \ u_x v_y - u_y v_x = 0. \tag{4.1}$$

Ее анализ представляет и самостоятельный интерес.

Приведем несколько общих утверждений, позволяющих конструировать новые решения системы (4.1) из известных (формулы производства решений).

Лемма 4. Система уравнений (4.1) допускает группу преобразований Ли с базисом

$$\begin{array}{l} X_1 = \partial_t,\ X_2 = \partial_u,\ X_3 = \partial_v,\ X_4 = t\partial_u,\ X_5 = t\partial_v,\ X_6 = t\partial_t + 2x\partial_x, \\ X_7 = \eta(y)\partial_x,\ X_8 = \zeta(y)\partial_y,\ X_9 = t^2\partial_t + 4tx\partial_x + tu\partial_u + tv\partial_v, \\ X_{10} = u\partial_u + v\partial_v,\ X_{11} = v\partial_u - u\partial_v, \end{array} \tag{4.2}$$

где операторы X_7, X_8 содержат произвольные функции $\eta(y)$, $\zeta(y)$ переменной y.

В частности, если $u = \varphi(t, x)$, $v = \psi(t, x)$ — некоторое решение системы $u_{tt} = v_x$, $v_{tt} = -u_x$ то для любой функции $f(y)$ функции $u = \varphi(t, x + f(y))$, $v = \psi(t, x + f(y))$ являются решением системы (4.1).

Лемма 5. Пусть

1) функция $B = B(z)$ является решением уравнения

$$B^{'''} - 4B^{''}B^{'}\text{tg}B - B^{'^3}\left(1 - \text{tg}^2 B\right) = 0 \tag{4.3}$$

(штрих — производная по переменной z);

2) функция $\varphi(z)$ определена равенством $\varphi^{'} = \text{tg}B$;

3) Функция $u(t, x, y)$ является решением системы

$$u_x = B^{'}(u), \;\; u_{tt} = u_t^2 B^{'}(u)\text{tg}B \tag{4.4}$$

(совместной в силу (4.3)).

Тогда пара функций $(u, v = \varphi(u))$ является решением системы (4.1).

Доказательство. Соотношение $u_x v_y - u_y v_x = 0$ равносильно тому, что есть функциональная зависимость $v = \varphi(u, t)$. Поэтому для $v = \varphi(u)$ оно тем более выполнено. Оставшиеся два соотношения системы (4.1) при условии $v = \varphi(u)$ примут вид

$$u_x = A(u)u_t^2, \quad u_{tt} = A(u)\varphi^{'}u_t^2,$$

где $A(z) = -\dfrac{\varphi^{''}(z)}{1 + \varphi^{'^2}(z)}$. Условие совместности $(u_{tt})_x = (u_x)_{tt}$ при $u_t \neq 0$ примет вид:

$$A^{''} + 4AA^{'}\varphi^{'} + A^2\varphi^{''} + 2A^3\varphi^{'^2} = 0. \tag{4.5}$$

Так как $A(z) = -\left(\text{arctg}\varphi^{'}(z)\right)^{'}$, то $\varphi^{'}(z) = \text{tg}B(z)$, $B^{'}(z) = -A(z)$. Поэтому соотношение (4.5) может быть переписано как

$$-B^{'''} + 4B^{''}B^{'}\text{tg}B + B^{'^3}\frac{1}{\cos^2 B} - 2B^{'^3}\text{tg}^2 B = 0,$$

что равносильно (4.3).

Предложение доказано.

Начальные данные для системы (4.4) можно взять в виде

$$u|_{t=x=0} = u_0(y), \;\; u_t|_{t=x=0} = u_1(y).$$

Замечание 8. Так как система $u_{tt} = v_x$, $v_{tt} = -u_x$ может быть переписана в виде одного уравнения Шредингера $i\psi_x + \psi_{tt} = 0$, где $\psi = u + iv$, то формула $\psi = u + i\varphi(u)$, где $\varphi^{'}(z) = \text{tg}B(z)$, $B(z)$ — решение (4.3), $u(t, x)$ — решение (4.4), дает некоторый класс решение уравнения Шредингера. Отметим, что изменение ролей переменных t, x встречается в физике оптоволокна.

5. Схема приведения системы (4.1) в инволюцию. Используем алгоритмы вывода уравнений совместности и приведения в инволюцию переопределенных систем излагаемые в [7, 8].

Фиксируем порядок на переменных $t > y > x$ и разрешим систему (4.1) относительно производных функции u

$$u_{tt} = v_x, \;\; u_x = -v_{tt}, \;\; u_y = -\frac{v_y}{v_x} v_{tt}. \tag{5.1}$$

Составляем условия совместности для системы (5.1).

Соотношение $(u_{tt})_x = (u_x)_{tt}$ равносильно уравнению

$$v_{tttt} = -v_{xx}. \tag{5.2}$$

Соотношение $(u_{tt})_y = (u_y)_{tt}$ в силу (5.2) равносильно уравнению

$$v_{ttt} = \frac{1}{2v_x} \cdot \frac{{v_x}^2 v_{tt} v_{tty} - v_x v_y v_{tt} v_{ttx} + 2 v_y v_{tt} {v_{tx}}^2 - 2 v_x v_{tx} v_{ty} v_{tt} + {v_x}^3 v_{yx} - {v_x}^2 v_y v_{xx}}{v_{tx} v_y - v_{ty} v_x} \tag{5.3}$$

Соотношение $(u_x)_y = (u_y)_x$ в силу (5.3) равносильно уравнению

$$v_{tty} = v_{ttx} \frac{v_y}{v_x} + v_{tt} \frac{v_{yx} v_x - v_{xx} v_y}{{v_x}^2}. \tag{5.4}$$

Заменим производную v_{tty} в (5.3) в силу (5.4):

$$v_{ttt} = \frac{{v_{tt}}^2 + {v_x}^2}{2v_x} \cdot \frac{v_{yx} v_x - v_{xx} v_y}{v_{tx} v_y - v_{ty} v_x} + \frac{v_{tt} v_{tx}}{v_x}, \tag{5.5}$$

Итак, получается система соотношений (5.2), (5.4), (5.5) на функцию v.

Составляем условие совместности $v_{tttt} = (v_{ttt})_t$. Это соотношение содержит производные v_{ttt}, v_{tty}, которые мы заменяем в силу (5.4), (5.5). Далее разрешаем полученное соотношение относительно производной v_{ttx}.

Соглашение. Далее будем выписывать только зависимость правой части от производных.

Итак, мы имеем новое соотношение

$$v_{ttx} = F_{201} \left(v_{tyx}, v_{txx}, v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x \right)$$

Подставляя, его в правые части (5.4), (5.5), получаем следующую систему

$$v_{ttt} = F_{300} \left(R_0 \right), \;\; v_{tty} = F_{210} \left(R_1 \right), \;\; v_{ttx} = F_{201} \left(R_1 \right). \tag{5.6}$$

где $R_0 = \{v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x\}$, $R_1 = \{v_{tyx}, v_{txx}, v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x\}$.

Составляем равенство $(v_{ttt})_y = (v_{tty})_t$. Заменяем в нем производные $(v_{tty})_x$, $(v_{ttx})_x$ в силу (5.6). Больше производных четвертого порядка в этом соотношении нет. Далее заменяем производные v_{ttt}, v_{tty}, v_{ttx} и разрешаем это соотношение относительно v_{tyy}:

$$v_{tyy} = F_{120} \left(v_{tyx}, v_{txx}, v_{yyx}, v_{xxx}, v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x \right). \tag{5.7}$$

Присоединяем его к системе (5.6)

Составляем равенство $(v_{ttt})_x = (v_{ttx})_t$. Заменяем в нем производные $(v_{tty})_x$, $(v_{ttx})_x$ в силу (5.6). Больше производных четвертого порядка в этом соотношении нет. Далее заменяем производные v_{ttt}, v_{tty}, v_{ttx}, v_{tyy} в силу (5.6), (5.7) и разрешаем это соотношение относительно v_{tyx}:

$$v_{tyx} = F_{111} \left(v_{txx}, v_{yyx}, v_{xxx}, v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x \right). \tag{5.8}$$

Заменяем производную v_{tyx} в (5.6), (5.7) в силу (5.8). Получаем систему

$$\begin{aligned} &v_{ttt} = F_{300} \left(R_0 \right), \, v_{tty} = F_{210} \left(R_2 \right), \, v_{ttx} = F_{201} \left(R_2 \right), \\ &v_{tyy} = F_{120} \left(R_2 \right), \, v_{tyx} = F_{111} \left(R_2 \right), \end{aligned} \tag{5.9}$$

где $R_2 = \{v_{txx}, v_{yyx}, v_{yxx}, v_{xxx}, v_{tt}, v_{ty}, v_{tx}, v_{yx}, v_{xx}, v_y, v_x\}$.

Составляем равенство $(v_{tty})_x = (v_{ttx})_y$. Заменяем в нем производные $(v_{tyx})_x$, v_{ttt}, v_{tty}, v_{ttx}, v_{tyy}, v_{tyx} в силу (5.9) и разрешаем это соотношение относительно v_{txxx}:

$$v_{txxx} = F_{103}\left(R_3\right). \tag{5.10}$$

где $R_3 = \{v_{yyyx}, v_{yyxx}, v_{yxxx}, v_{xxxx}\} \bigcup R_2$.

Составляем равенство $(v_{tty})_y = (v_{tyy})_t$. Заменяем в нем производные $(v_{ttx})_x$, $(v_{tyx})_x$, v_{txxx}, v_{ttt}, v_{tty}, v_{ttx}, v_{tyy}, v_{tyx} в силу (5.9), (5.10) и разрешаем это соотношение относительно v_{yyxx} (так как производная v_{yyyx} отсутствует):

$$v_{yyxx} = F_{031}\left(R_4\right). \tag{5.11}$$

$R_4 = \{v_{yxxx}, v_{xxxx}\} \bigcup R_2$. Явное выражение производной v_{yyxx} получить не удается, так как выражение для нее содержит больше символов чем может выдать MAPLE. Но можно найти коэффициент при этой производной, и он, вообще говоря, не равен нулю.

Используя алгоритмы теории совместности [7, 8], нетрудно показать, что справедлива

Теорема 2. В случае общего положения произвол решения системы (5.9) – (5.11) (а следовательно, и системы (4.1)) имеет не более чем пять функций одного аргумента.

Отметим, что при получении уравнений (5.9)–(5.11) неявно предполагалось, что коэффициенты при соответствующих производных не нулевые. Поэтому надо рассмотреть случаи, когда они обращаются в нуль.

Приведем вид коэффициентов R_{ijk} при производных v_{ijk}:

$$\begin{aligned}
&R_{201} = -\frac{v_{tt}}{v_x}, \quad R_{120} = \frac{({v_x}^2 + {v_{tt}}^2)(v_x v_{yx} - v_y v_{xx})}{2(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)^2},\\
&R_{111} = \frac{({v_x}^2 + {v_{tt}}^2)}{2{v_{tt}}^2(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)^2}\cdot\\
&\qquad\left[3({v_{tt}}^2 - {v_x}^2)(v_x v_{yx} - v_y v_{xx}) + 4v_{tt}v_{tx}(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)\right],\\
&R_{103} = \frac{8v_{tt}({v_x}^2 + {v_{tt}}^2)(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)^3}{v_x\left(3({v_{tt}}^2 - {v_x}^2)(v_x v_{yx} - v_y v_{xx}) + 4v_{tt}v_{tx}(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)\right)^2},\\
&R_{022} = -\frac{U_{022}}{D_{022}},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
U_{022} &= (11{v_x}^2 - 9{v_{tt}}^2)(v_{ty}v_x - v_{tx}v_y)^2(v_x v_{yx} - v_y v_{xx}) +\\
&\quad + v_{tt}\left(4(v_x v_{yx} - v_y v_{xx})^2 v_y {v_x}^2 + 12v_{tx}(v_{ty}v_x - v_{tx}v_y)^3\right),\\
D_{022} &= (v_x v_{yx} - v_y v_{xx})^2\left(3({v_{tt}}^2 - {v_x}^2)(v_x v_{yx} - v_y v_{xx}) + 4v_{tt}v_{tx}(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x)\right).
\end{aligned}$$

6. Особые решения.

6.1. Система уравнений (4.1) с дополнительным условием $v_{tt} = 0$ распадается в объединение двух систем:

$$\{u_{tt} = v_x,\ u_x = 0,\ u_y = 0,\ v_{tt} = 0\} \ \text{ и } \ \{u_{tt} = 0,\ u_x = 0,\ v_{tt} = 0,\ v_x = 0\}$$

общие решения которых, соответственно, имеют вид

$$u = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \;\; v = 2a_2 x + f(y) + t(6a_3 x + g(y)),$$

где a_0, a_1, a_2, a_3 — произвольные константы, $f(y)$, $g(y)$ — произвольные функции переменной y и

$$u = f_0(y) + t f_1(y), \;\; v = g_0(y) + t g_1(y),$$

где $f_0(y)$, $f_1(y)$, $g_0(y)$, $g_1(y)$ — произвольные функции переменной y.

6.2. Система уравнений (4.1) с дополнительными условиями $v_x = 0$, $v_{tt} \neq 0$ равносильна системе:

$$u_{tt} = 0, \;\; v_{tt} = -u_x, \;\; v_y = 0, \;\; v_x = 0$$

общее решение которой имеет вид

$$u = -2b_2 x + f(y) + t(-6b_3 x + g(y)), \;\; v = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3,$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 — произвольные константы, $f(y)$, $g(y)$ — произвольные функции переменной y.

6.3. Рассмотрим систему (4.1) с дополнительным соотношением $v_{tx} v_y - v_{ty} v_x = 0$, которое равносильно соотношению $v_y = \lambda v_x$ для некоторой функции $\lambda = \lambda(x, y)$. Так как для произвольной функции $\lambda(x, y)$ найдется функция $\xi = \xi(x, y)$ такая, что $\xi_y = \lambda \xi_x$, то

$$v_y \xi_x - \xi_y v_x = 0.$$

Значит имеется функциональная зависимость

$$v = V(\xi, t). \tag{6.1}$$

Из соотношения $u_{tx} v_y - u_y v_x = 0$ получаем

$$u = U(\xi, t). \tag{6.2}$$

Подставим (6.1), (6.2) в (4.1)

$$U_{tt} = \xi_x V_\xi, \;\; V_{tt} = -\xi_x U_\xi. \tag{6.3}$$

Если функции ξ_x и ξ функционально независимы, то из соотношений (6.1) – (6.3) получим, что $U_\xi = V_\xi = 0$, то есть U, V — функции только от переменной t. Поэтому рассмотрим

$$\xi_x = \varphi(\xi). \tag{6.4}$$

И тогда (6.3) — система типа Коши-Ковалевской

$$U_{tt} = \varphi(\xi) V_\xi, \;\; V_{tt} = -\varphi(\xi) U_\xi. \tag{6.5}$$

относительно функций U, V.

Оценим произвол в определении функций U, V. Для определения решения системы (6.5) надо задать четыре функции одного аргумента. Так как функция φ произвольная, то решение $\xi = \xi(x, y)$ уравнения (6.4) определяется двумя функциями одного аргумента.

Замечание 9. Систему (6.5) заменой переменных можно свести к системе

$$U_{tt} = V_\eta, \;\; V_{tt} = -U_\eta.$$

6.4. Рассмотрим систему (4.1) с дополнительным соотношением $v_{yx}v_x - v_{xx}v_y = 0$. Система (5.2), (5.4), (5.5) при этом предположении примет вид

$$v_{tttt} = -v_{xx}, \; v_{ttt} = \frac{v_{tt}v_{tx}}{v_x}, \; v_{tty} = \frac{v_y v_{ttx}}{v_x}. \tag{6.6}$$

(Считаем, что $v_x \neq 0$ и $v_{tt} \neq 0$).

Второе соотношение (6.6) переписывается в виде $\left(\dfrac{v_{tt}}{v_x}\right)_x = 0$. Следовательно,

$$v_{tt} = \lambda v_x \tag{6.7}$$

для некоторой функции $\lambda = \lambda(x, y)$. Оставшиеся два соотношения (6.6) примут вид

$$\lambda \left(\lambda v_x\right)_x + v_{xx} = 0, \; v_x \left(\lambda v_x\right)_y = v_y \left(\lambda v_x\right)_x. \tag{6.8}$$

Первое соотношение (6.8) переписывается в виде $\left(v_x\sqrt{1+\lambda^2}\right)_x = 0$. Следовательно, $v_x = \dfrac{\mu}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ для некоторой функции $\mu = \mu(t, y)$. Далее удобно положить

$$\lambda = \mathrm{tg}\varphi, \; \varphi = \varphi(x, y).$$

Тогда

$$v_x = \mu \cos\varphi. \tag{6.9}$$

Соотношение (6.7) переписывается в виде

$$v_{tt} = \mu \sin\varphi. \tag{6.10}$$

Второе соотношение (6.8) переписывается в виде $v_y\varphi_x = \mu_y \sin\varphi + \mu\varphi_y \cos\varphi$. Так как $v_x \neq 0$, то и $\varphi_x \neq 0$. Следовательно,

$$v_y = \frac{1}{\varphi_x}\left(\mu_y \sin\varphi + \mu\varphi_y \cos\varphi\right). \tag{6.11}$$

Составим условия совместности для системы (6.9)–(6.11). Соотношение $(v_{tt})_x = (v_x)_{tt}$ равносильно соотношению $\mu_{tt} = \mu\varphi_x$. Учитывая зависимость $\varphi = \varphi(x, y)$, $\mu = \mu(t, y)$, получаем

$$\mu_{tt} = \mu\xi, \; \varphi = x\xi + \eta, \tag{6.12}$$

где $\xi = \xi(y)$, $\eta = \eta(y)$.

Составим соотношение $(v_{tt})_y = (v_y)_{tt}$:

$$\mu_y \sin\varphi + \mu\varphi_y \cos\varphi = \frac{1}{\varphi_x}\left(\mu_{tty} \sin\varphi + \mu_{tt}\varphi_y \cos\varphi\right).$$

Учитывая (6.12), получаем $\xi_y = 0$, т.е. ξ —постоянная.

Соотношение $(v_y)_x = (v_x)_y$ выполняется тождественно.

Итак, (6.9)–(6.11) переписывается в виде

$$v_x = \mu\cos(x\xi+\eta), \; v_{tt} = \mu\sin(x\xi+\eta), \; v_y = \frac{1}{\xi}\left(\mu_y \sin(x\xi+\eta) + \mu\eta_y \cos(x\xi+\eta)\right), \tag{6.13}$$

где

$$\mu = \begin{cases} C_1(y)\exp(t\sqrt{\xi}) + C_2(y)\exp(-t\sqrt{\xi}), & \text{если } \xi > 0, \\ C_1(y)\cos(t\sqrt{-\xi}) + C_2(y)\sin(t\sqrt{-\xi}), & \text{если } \xi < 0. \end{cases}$$

Система (6.13) находится в инволюции и ее общее решение дается формулой $v = \dfrac{\mu}{\xi}\sin(x\xi + \eta) + a_0 + a_1 t$, где a_0, a_1 — некоторые константы.

Остается учесть соотношение $v_{yx}v_x - v_{xx}v_y = 0$. Подставляя сюда (6.13), получаем $\mu_y = 0$.

Функция u находится из системы

$$\begin{aligned} u_{tt} &= v_x = \mu\cos(x\xi + \eta), \\ u_x &= -v_{tt} = -\mu\sin(x\xi + \eta), \\ u_y &= -\frac{v_y}{v_x}v_{tt} = -\frac{\mu}{\xi}\eta_y\sin(x\xi + \eta), \end{aligned}$$

по формуле $u = \dfrac{\mu}{\xi}\cos(x\xi + \eta) + b_0 + b_1 t$, где b_0, b_1 — некоторые константы.

Итак,

$$v = \frac{\mu(t)}{\xi}\sin(x\xi + \eta(y)) + a_0 + a_1 t, \quad u = \frac{\mu(t)}{\xi}\cos(x\xi + \eta(y)) + b_0 + b_1 t,$$

где b_0, b_1, a_0, a_1, ξ — некоторые константы, $\xi \neq 0$, функция $\eta(y)$ произвольная, функция $\mu(t)$ определяется формулой

$$\mu = \begin{cases} C_1\exp(t\sqrt{\xi}) + C_2\exp(-t\sqrt{\xi}), & \text{если } \xi > 0, \\ C_1\cos(t\sqrt{-\xi}) + C_2\sin(t\sqrt{-\xi}), & \text{если } \xi < 0, \end{cases}$$

где C_1, C_2 — некоторые константы.

6.5. Рассмотрим систему (4.1) с дополнительными соотношениями

$$3({v_{tt}}^2 - {v_x}^2)(v_x v_{yx} - v_y v_{xx}) + 4v_{tt}v_{tx}(v_{tx}v_y - v_{ty}v_x) = 0, \tag{6.14}$$

$$v_{yx}v_x - v_{xx}v_y \neq 0, \quad v_{tx}v_y - v_{ty}v_x \neq 0, \quad v_x \neq 0, \quad v_{tt} \neq 0.$$

Соотношение (6.14) представим в виде

$$\frac{v_{yx}v_x - v_{xx}v_y}{v_{tx}v_y - v_{ty}v_x} = \frac{4v_{tt}v_{tx}}{3({v_x}^2 - {v_{tt}}^2)}. \tag{6.15}$$

Из (5.5) и (6.15) получаем

$$v_{ttt} = \frac{{v_{tt}}^2 + {v_x}^2}{2v_x}\cdot\frac{4v_{tt}v_{tx}}{3({v_x}^2 - {v_{tt}}^2)} + \frac{v_{tt}v_{tx}}{v_x}, \quad \frac{v_{ttt}}{v_{tt}} = \frac{v_{tx}}{v_x}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{{v_x}^2 + {v_{tt}}^2}{{v_x}^2 - {v_{tt}}^2}\right),$$

$$\frac{v_{ttt}}{v_{tt}} = \frac{v_{tx}}{v_x}\frac{5{v_x}^2 - {v_{tt}}^2}{3({v_x}^2 - {v_{tt}}^2)}. \tag{6.16}$$

Отметим, что (6.16) содержит только производные по переменным t и x. Положим

$$v_{tt} = pv_x, \tag{6.17}$$

где $p = p(t, x, y)$. Тогда (6.16) примет вид

$$v_{ttt} = v_{tx}f(p), \tag{6.18}$$

где $f(p) = \dfrac{p^3 - 5p}{3(p^2 - 1)}$.

К уравнениям (6.17), (6.18) добавим (5.2) и рассмотрим вопрос о приведении этой системы в инволюцию.

Составим соотношение $v_{ttt} = (v_{tt})_t$:

$$v_{tx}f(p) = p_t v_x + p v_{tx}, \ \ \frac{v_{tx}}{v_x} = \frac{p_t}{f(p)-p}, \ \ v_x = \xi(x,y)\exp\left(\int \frac{dp}{f(p)-p}\right),$$

$$v_x = \xi(x,y)h(p), \tag{6.19}$$

где $\xi = \xi(x,y)$ — некоторая функция переменных x, y, $h(p) = \left(\dfrac{p}{1+p^2}\right)^{3/2}$. Отсюда

$$v_{tx} = \xi h'(p) p_t.$$

Поэтому (6.17) принимает вид

$$v_{ttt} = \xi h'(p) f(p) p_t.$$

Итак, имеем систему соотношений

$$v_x = h(p)\xi, \ \ v_x = ph(p)\xi, \ \ v_{ttt} = h'(p)f(p)p_t\xi, \ \ v_{tttt} = -v_{xx}.$$

Отметим, что функции f, h связаны равенством $(ph)' = fh'$ и соотношение $v_{ttt} = (v_{tt})_t$ уже выполняется тождественно.

Составим соотношения $(v_x)_{tt} = (v_{tt})_x$, $(v_{ttt})_t = -(v_x)_x$:

$$\xi\left(p_{tt}h' + {p_t}^2 h''\right) = \xi_x ph + \xi p_x (ph)', \ \ \xi\left(p_{tt} fh' + {p_t}^2 (fh')'\right) = -\xi_x h - \xi p_x h'$$

и разрешим их относительно p_{tt}, p_t^2:

$$p_{tt} = \frac{1}{\xi h'(ph)'}\left[(ph)''(\xi ph)_x + h''(\xi h)_x\right], \ \ p_t^2 = -\frac{1}{\xi h'(ph)'}\left[(ph)'(\xi ph)_x + h'(\xi h)_x\right]. \tag{6.20}$$

Исследование на совместность системы (6.20) приводит к соотношению на функцию p и производные функции $\xi(x,y)$ из которого функция p определяется как функция от производных функции $\xi(x,y)$. Следовательно, p — функция переменных x, y и не зависит от переменной t.

Подставим (6.17) в (5.2)

$$(pv_x)_{tt} = -v_{xx}, \ \ pv_{ttx} = -v_{xx}, \ \ p(pv_x)_x = -v_{xx},$$

$$(p^2+1)v_{xx} + pp_x v_x = 0, \ \ \frac{v_{xx}}{v_x} = -\frac{1}{2}\left(\ln(p^2+1)\right)_x,$$

итак,

$$v_x = \frac{\mu(t,y)}{\sqrt{p^2+1}}, \tag{6.21}$$

для некоторой функции $\mu = \mu(t,y)$.

Рассмотрим соотношение (6.18)

$$(pv_x)_t = f(p)v_{tx}, \ \ (p - f(p))v_{tx} = 0.$$

Если $p = f(p) = \dfrac{p^3-5p}{3(p^2-1)}$, то $p^2+1 = 0$, что невозможно.

Значит $v_{tx} = 0$, и из (6.21) получаем $\mu = \mu(y)$, т. е.

$$v_x = \frac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Учитывая, что $v_{tt} = pv_x$, получаем

$$v = \frac{p\mu(y)}{2\sqrt{p^2+1}}t^2 + b(x,y)t + a(x,y).$$

Поскольку $v_x = \dfrac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}}$, то получаем $p_x = b_x = 0$, $a_x = \dfrac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}}$. Следовательно,

$$v = \frac{p\mu(y)}{2\sqrt{p^2+1}}t^2 + b(y)t + x\frac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}} + a_0(y),$$

где $p = p(y)$. Обозначим $q = \dfrac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}}$, тогда

$$v = \frac{1}{2}p(y)q(y)t^2 + b(y)t + xq(y) + a_0(y).$$

Подставим v в (6.14)

$$3(p^2-1)q^3q' = 0.$$

Так как $p^2 \neq 1$ (при $p^2 = 1$ из (6.16) получим $v_x = 0$), то $q = \text{const}$.

Подстановка v в (5.3) приводит к тождеству. А подстановка v в (5.4) приводит к тому, что $p = \text{const}$.

Итак, при $v_x = \dfrac{\mu(y)}{\sqrt{p^2+1}}$ получаем, что

$$v = \frac{1}{2}pt^2 + b(y)t + xq + a(y),$$

где p, $q = \text{const}$, $b(y)$, $a(y)$ — произвольные функции переменной y.

Из системы

$$u_{tt} = q, \;\; u_x = -p, \;\; u_y = -2\frac{p}{q}(b't + a')$$

найдем функцию $u(t, x, y)$:

$$u = \frac{1}{2}qt^2 - 2\frac{p}{q}(b(y)t + \beta) - 2p\left(x + \frac{a(y)}{q} + \alpha\right),$$

где α, $\beta = \text{const}$.

Учитывая групповые свойства системы (4.1) (преобразованием $x \mapsto x + g(y)$ зануляем $a(y)$) окончательно получаем, что

$$v = pt^2 + b(y)t + xq, \;\; u = \frac{1}{2}qt^2 - 2\frac{p}{q}(b(y)t + \beta) - 2p\,(x + \alpha)\,,$$

где α, β, p, $q = \text{const}$, $b(y)$ — произвольная функция переменной y.

Список литературы

[1] Х. Дийкстра, *Нелинейная физическая океанография*, М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2007 г., 680 с.

[2] Л.В. Овсянников, *О "простых" решениях уравнений динамики политропного газа*, ПМТФ, **40**:2 (1999), 5–12. MR1711909

[3] Л.В. Овсянников, *Некоторые итоги выполнения программы ПОДМОДЕЛИ для уравнений газовой динамики*, ПММ, **63**:3 (1999), 362–372. MR1716827

[4] Л.В. Овсянников, *Лекции по газовой динамике*, М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", Ин-т компьютерных исследований, 2003 г., 336 с.

[5] А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 2004 г., 798 с.

[6] И. Снеддон, *Преобразования Фурье*, М. ИЛ, 1955 г., 668 с.

[7] С.П. Фиников, *Метод внешних форм Картана*, М.–Л.: ГИИТЛ, 1948., 432 с. MR0034502

[8] Ж. Поммаре, *Системы уравнений с частными производными и псевдогруппы Ли*, М.: Мир, 1983 г., 398 с. MR0731697

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru

Александр Павлович Чупахин
Институт гидродинамики СО РАН им. М.А.Лаврентьева,
пр. Лаврентьева 15,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: chupakhin@hydro.nsc.ru