

# СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 8, стр. 341–364 (2011)

УДК 515.162.32

MSC 57M27, 57M50

## СЛОЖНОСТЬ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ: ТОЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ОЦЕНКИ

А.Ю. ВЕСНИН, С.В. МАТВЕЕВ, Е.А. ФОМИНЫХ

**ABSTRACT.** The paper is a survey of recent results on the complexity theory of 3-manifolds obtained by the authors and their colleagues. We describe existing tables of closed 3-manifolds and several infinite series of 3-manifolds with known complexities. We also give potentially exact estimates of complexity of Seifert and graph manifolds as well as for large families of hyperbolic manifolds.

**Keywords:** Matveev's complexity, 3-manifolds.

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	342
2. Табулирование многообразий	343
2.1. Замкнутые многообразия	343
2.2. Гиперболические многообразия с каспами	344
3. Потенциально точные верхние оценки сложности	345
3.1. Многообразия Зейферта	345
3.2. Граф-многообразия	347
3.3. Гиперболические многообразия	347
4. Бесконечные серии многообразий с известной сложностью	348
4.1. Линзовые пространства	348
4.2. Гиперболические многообразия с краем	348
4.3. Многообразия Паолуци – Циммермана	350

VESNIN A.YU., MATVEEV S.V., FOMINYKH, E.A., COMPLEXITY OF 3-DIMENSIONAL MANIFOLDS: EXACT VALUES AND ESTIMATES.

© 2011 Веснин А.Ю., Матвеев С.В., Фоминых Е.А.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 10-01-00642 (А.Ю. Веснин) и 11-01-00605 (С.В. Матвеев, Е.А. Фоминых), и Интеграционного проекта, выполняемого совместно Институтом математики СО РАН и Институтом математики и механики УрО РАН.

Поступила 14 ноября 2011 г., опубликована 15 ноября 2011 г.

5. Верхние и нижние оценки сложности бесконечных серий многообразий	351
5.1. Многообразия Лебелля	351
5.2. Многообразия Фибоначчи	353
5.3. Циклические накрытия сферы, разветвленные над 2-мостовыми узлами	355
5.4. Многообразия Данвуди	357
5.5. Циклические накрытия линзовых пространств, разветвленные над зацеплениями	360
Список литературы	361

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа представляет собой обзор недавних результатов по теории сложности трехмерных многообразий, полученных, в том числе, авторами, их коллегами и учениками.

Теория сложности трехмерных многообразий берет свое начало в работах С.В. Матвеева [9, 14, 43]. Сложность трехмерного многообразия представляет собой целочисленную характеристику, которая показывает, насколько сложно должно быть устроено его комбинаторное описание. Разумеется, таких характеристик можно предложить довольно много. Иногда используют род Хегора многообразия или число вершин в его графическом кодировании (кристаллизации, см. [23, 28]). С.В. Матвеев определил сложность компактного трехмерного многообразия как минимальное число истинных вершин его почти простого спайна. Для замкнутых неприводимых многообразий оно совпадает (за несколькими исключениями) с минимальным числом тетраэдров в сингулярной триангуляции многообразия. Такая сложность хорошо отражает сложность многообразий в неформальном смысле и неплохо согласуется с другими естественными характеристиками. Например, гипотеза о замкнутом ориентированном гиперболическом многообразии минимального объема, сформулированная на основе теории сложности в работе [14], оказалась справедливой [36].

Сложность трехмерного многообразия обладает рядом полезных свойств. Она аддитивна по отношению к операциям связной суммы и граничной связной суммы, легко оценивается сверху, а для наиболее интересного класса связанных неприводимых и гранично неприводимых (в том числе, замкнутых) трехмерных многообразий без существенных колец обладает следующим свойством конечности: для любого целого числа  $k \geq 0$  множество многообразий этого класса, сложность которых равна  $k$ , конечно.

Существенное развитие теория сложности трехмерных многообразий получила в последние годы. В этом обзоре мы представим наиболее важные результаты, полученные в этой тематике российскими и зарубежными учеными. Основные результаты российских ученых получены научными группами из Челябинска и Новосибирска в рамках интеграционных проектов УрО и СО РАН, выполнявшихся авторами и их коллегами в 2006 – 2011 гг.

## 2. ТАБУЛИРОВАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ

Пусть  $M$  — компактное связное трехмерное многообразие (3-многообразие) с краем. Напомним [12], что подполиэдр  $P \subset M$  называется *спайном* многообразия  $M$ , если многообразие  $M \setminus P$  гомеоморфно  $\partial M \times (0, 1]$ . Под спайном связного замкнутого 3-многообразия  $M$  мы понимаем спайн многообразия  $M \setminus \text{Int } B$ , где  $B$  — 3-шар в  $M$ . Под спайном несвязного 3-многообразия понимается объединение спайнов его компонент связности. Спайн  $P$  называется *почти простым*, если линк каждой его точки вкладывается в полный граф  $K_4$  с четырьмя вершинами. Точки, линки которых гомеоморфны графу  $K_4$ , называются истинными вершинами спайна  $P$ . Сложность  $c(M)$  многообразия  $M$  определяется как минимальное возможное число истинных вершин почти простого спайна многообразия.

**2.1. Замкнутые многообразия.** Напомним, что трехмерное многообразие называется *геометрическим*, если его внутренность допускает полную локально-однородную риманову метрику. Согласно результатам В. Торстона [53], существует 8 типов геометрий:  $E^3, S^3, S^2 \times R, H^2 \times R, \widetilde{SL}_2R, Nil, Sol$  и  $H^3$ .

Изложим результаты компьютерной классификации замкнутых неприводимых ориентируемых многообразий, проведенной С.В. Матвеевым и его коллегами (см. [10, 11, 12]).

**Теорема 2.1** ([12]). *Число замкнутых ориентируемых неприводимых трехмерных многообразий сложности  $\leq 12$  задается следующей таблицей:*

$Typ \setminus c$	$\leq 5$	6	7	8	9	10	11	12	Итого
$S^3$	61	61	117	214	414	798	1582	3118	6365
$E^3$	0	6	0	0	0	0	0	0	6
$Nil$	0	7	10	14	15	15	15	15	91
$H^2 \times R$	0	0	0	2	0	8	4	24	38
$\widetilde{SL}_2R$	0	0	39	162	513	1416	3696	9324	15150
$Sol$	0	0	5	9	23	39	83	149	308
$H^3$	0	0	0	0	4	25	120	<b>461</b>	<b>610</b>
<i>Составные</i>	0	0	4	35	185	777	2921	<b>10361</b>	<b>14283</b>
<i>Итого</i>	61	74	175	436	1154	3078	8421	<b>23452</b>	<b>36851</b>

**Замечание 2.1.** *Жирным шрифтом выделены исправления вычислительных ошибок, допущенных в [12].*

Из этой таблицы видно, что при возрастании сложности число многообразий растет довольно быстро — уже на уровне сложности  $\leq 7$  оно больше 300. Число замкнутых неориентируемых  $\mathbb{P}^2$ -неприводимых многообразий растет гораздо медленнее. Как показали Г. Амендола и Б. Мартелли в работе [19], на уровне сложности  $\leq 7$  их всего 8: пять имеют сложность 6 и три — сложность 7.

Список всех замкнутых ориентируемых неприводимых 3-многообразий до сложности 6 содержит 135 многообразий. Все они являются многообразиями Зейферта, причем многообразия сложности  $\leq 5$  являются эллиптическими. Все шесть плоских замкнутых ориентируемых 3-многообразий имеют сложность 6,

в число которых входят тор  $S^1 \times S^1 \times S^1$  и многообразие Уайтхеда, полученное из сферы  $S^3$  перестройкой Дена по зацеплению Уайтхеда с тривиально оснащенными компонентами. Эти два многообразия являются единственными замкнутыми ориентируемыми неприводимыми многообразиями сложности  $\leq 6$ , первая группа гомологий которых имеет ранг  $\geq 2$ . Там же расположены первые 7 Nil-многообразий.

Сложность любого входящего в таблицу линзового пространства может быть вычислена по формуле  $c(L_{p,q}) = S(p,q) - 3$ , где  $S(p,q)$  — сумма всех неполных частных в разложении числа  $p/q$  в непрерывную дробь. Скорее всего, эта формула справедлива для всех (а не только входящих в таблицу) линзовых пространств. В ряде частных случаев точность этой формулы была доказана в работе [34] (см. ниже).

Опишем структуру составных (то есть не являющихся многообразиями Зейферта) граф-многообразий сложности  $\leq 11$ . Есть всего три типа таких многообразий:

- I. Два склеенных между собой многообразия Зейферта с базой диск и двумя или тремя особыми слоями.
- II. Многообразие Зейферта  $(S^1 \times I, (\alpha, \beta))$  с базой кольцо и одним особым слоем, граничные торы которого заклеены многообразиями Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями.
- III. Многообразие Зейферта  $(S^1 \times I, (\alpha, \beta))$ , граничные торы которого склеены между собой.

Таким образом, графическая структура граф-многообразий до сложности 11 проста. Отвечающие им приведенные молекулы таковы: изолированная вершина, окружность с одной вершиной, отрезок и двухзвенная ломаная. На уровне сложности 12 появляются еще 4 типа молекул. Разумеется, 4 типа, встретившиеся на сложности  $\leq 11$ , сохраняются и на сложности 12, см. рис. 1.

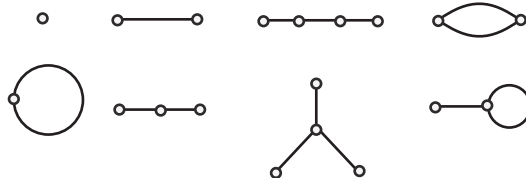


Рис. 1. Графическая структура многообразий сложности  $\leq 12$

**2.2. Гиперболические многообразия с каспами.** Каждое некомпактное гиперболическое 3-многообразие конечного объема может быть получено склейкой некоторого числа  $n$  идеальных гиперболических тетраэдров [27]. Сложность соответствующего компактного многообразия с краем (которую можно условно считать и сложностью исходного гиперболического многообразия) заведомо не превосходит  $n$ . Таким образом, возникает естественная задача перечисления гиперболических 3-многообразий малой сложности, получаемых склейкой небольшого количества идеальных тетраэдров.

В работе [14] описаны все гиперболические многообразия, сложности  $\leq 3$ . Этот перебор был выполнен вручную (с отбрасыванием заведомо негиперболических многообразий), а для доказательства гиперболичности использовался метод В. Торстона [53] построения полной гиперболической структуры компьютерным подбором параметров идеальных гиперболических тетраэдров. Результаты гораздо более обширного компьютерного эксперимента, включающего рассмотрение неориентируемых многообразий и выполненного с помощью программы SnapPea Дж. Вика, были описаны в работе П. Каллахана, М. Хильдебранда и Дж. Вика [22]. Приведем те, которые относятся к ориентируемым многообразиям.

**Теорема 2.2** ([22]). *Число некомпактных ориентируемых гиперболических трехмерных многообразий, полученных склейкой  $\leq 7$  идеальных тетраэдров, задается следующей таблицей:*

касны \ тетраэдры	1	2	3	4	5	6	7	Итого
1	0	2	9	52	223	913	3388	4587
2	0	0	0	4	11	48	162	225
3	0	0	0	0	0	1	2	3
Итого	0	2	9	56	234	962	3552	4815

Из других результатов по классификации гиперболических многообразий малой сложности необходимо упомянуть интересные работы М. Фужи [33] и Р. Фриджеро, Б. Мартелли, К. Петронио [32], посвященные классификации ориентируемых гиперболических многообразий с вполне геодезическими краями, которые можно получить склеиванием  $\leq 4$  идеальных тетраэдров. Результаты таковы: существует 8 различных многообразий сложности 2, 151 — сложности 3 и 5033 — сложности 4.

### 3. ПОТЕНЦИАЛЬНО ТОЧНЫЕ ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ

Как видно из таблиц, приведенных в теоремах 2.1 и 2.2, точные значения сложности известны для большого числа систематически перечисленных многообразий, которые мы будем называть табличными. Это позволяет ставить задачи о нахождении потенциально точных верхних оценок сложности для выделенных классов многообразий, то есть верхних оценок, которые достигаются для всех табличных многообразий рассматриваемого класса. Ниже будут приведены несколько примеров таких оценок.

Как отмечалось выше, сложность любого табличного линзового пространства  $L(p, q)$  задается формулой  $c(L(p, q)) = S(p, q) - 3$ . Следующая теорема была доказана С.В. Матвеевым с помощью индуктивного построения спайнов линзовых пространств.

**Теорема 3.1** ([9]). *Пусть  $M$  является линзовым пространством  $L_{p,q}$ . Тогда  $c(M) \leq S(p, q) - 3$ .*

**3.1. Многообразия Зейферта.** Самые простые примеры трехмерных многообразий — это прямые или косые произведения поверхностей на окружность. Многообразия Зейферта получаются с помощью небольшой модификации этой конструкции. Каждое ориентируемое многообразие Зейферта (для простоты

мы ограничимся только такими) имеет вид  $M = (F, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$ , где  $F$  — компактная связная поверхность, называемая *базой*,  $n$  — число особых слоев, а пары  $(\alpha_i, \beta_i)$  взаимно простых целых чисел — неприведенные параметры особых слоев ( $\alpha_i \geq 1$ ). Неприведенность параметров означает, что мы не приводим  $\beta_i$  по модулю  $\alpha_i$ . Многообразие  $M$  получается из ориентируемого прямого или косоуго произведения ориентируемой или, соответственно, неориентируемой поверхности  $F$  на окружность следующим образом. Если  $\partial F \neq \emptyset$  или  $n > 0$ , то нужно вырезать из этого произведения  $n$  послойных полных торов и вклеить их назад по гомеоморфизмам, переводящим меридианы в кривые  $\mu_i^{\alpha_i} \lambda_i^{\beta_i}$ . Здесь через  $\mu_i$  и  $\lambda_i$  обозначены меридиан (край сечения) и параллель (слой), составляющие каноническую систему координат на краевом торе  $T_i$ , появившемся после вырезания соответствующего послойного полного тора.

Случай, когда поверхность  $F$  замкнута и  $n = 0$ , сводится к предыдущему, если вместо отсутствующих особых слоев взять один неособый слой типа  $(1, 0)$ , а дальше действовать как выше.

Легко показать, что многообразие  $(F, (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$  не меняется при следующих операциях над слоями и их параметрами:

- $C_1$ : перенумерация особых слоев;
- $C_2$ : удаление или вставка неособого слоя типа  $(1, 0)$ ;
- $C_3$ : смена знаков у всех параметров  $\beta_i$  (эта операция отвечает смене ориентации многообразия);
- $C_4$ : замена двух пар параметров  $(\alpha_i, \beta_i), (\alpha_j, \beta_j), i \neq j$ , на пары  $(\alpha_i, \beta_i + \alpha_j), (\alpha_j, \beta_j - \alpha_j)$ ;
- $C_5$ : замена пары параметров  $(\alpha_i, \beta_i)$  на пару  $(\alpha_i, \beta_i + \alpha_i)$  или пару  $(\alpha_i, \beta_i - \alpha_i)$  при условии, что край многообразия не пуст. Каноническая система координат  $\mu, \lambda$  на одном из краевых торов заменяется при этом на систему  $\mu\lambda^{\pm 1}, \lambda$ .

Операции  $C_1 - C_5$  называются *торговлей параметрами*. Они не меняют многообразия Зейферта в том смысле, что новое многообразие послойно гомеоморфно исходному. За счет торговли параметрами любое многообразие Зейферта можно представить в *каноническом* виде  $(F, (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n), (1, t))$ , где  $p_i > q_i > 0$  для  $1 \leq i \leq n$  и  $t \geq -n/2$ . Каноническое представление единственно, за исключением случая  $t = -n/2$ , когда многообразия

$$(F, (p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n), (1, -n/2)) \text{ и } (F, (p_1, p_1 - q_1), \dots, (p_n, p_n - q_n), (1, -n/2))$$

гомеоморфны.

Следуя [42], будем говорить, что многообразие Зейферта является *истинным*, если оно отлично от  $S^3, RP^3$ , линзового пространства, пространства расщепления над окружностью со слоем тор. Следующий результат был установлен Б. Мартелли и К. Петронио.

**Теорема 3.2** ([42]). *Пусть  $M$  — истинное многообразие Зейферта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

- (1) если  $M = (S^2, (2, 1), (3, 1), (m, 1), (1, -1))$ , где  $m \geq 5$ , то  $c(M) \leq m$ ;
- (2) если  $M = (S^2, (2, 1), (n, 1), (m, 1), (1, -1))$  не принадлежит указанному выше типу, то  $c(M) \leq n + m - 2$ ;
- (3) если  $M = (S^2, (2, 1), (3, 1), (p, q), (1, -1))$ , где  $p/q > 5$ , не принадлежит указанным выше типам, то  $c(M) \leq S(p, q) + 1$ ;

(4) если  $M = (F, (p_1, q_1), \dots, (p_k, q_k), (1, t))$  не принадлежит указанным выше типам, то

$$c(M) \leq \max\{0, t - 1 + \chi(F)\} + 6(1 - \chi(F)) + \sum_{i=1}^k (S(p_i, q_i) + 1).$$

**3.2. Граф-многообразия.** Будем говорить, что замкнутое многообразие принадлежит классу  $\Lambda$  тогда и только тогда, когда JSJ-разбиение этого многообразия состоит из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями каждое. Пусть  $G$  — множество всех целочисленных матриц порядка 2 с определителем  $-1$ . Многообразия класса  $\Lambda$  удобно задавать *мечеными молекулами* вида  $(M_1, M_2, A)$ , где  $M_1 = (D^2, (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2))$ ,  $M_2 = (D^2, (\alpha_3, \beta_3), (\alpha_4, \beta_4))$ ,  $A \in G$ , а  $(\alpha_i, \beta_i)$  — пары взаимно простых целых чисел.

Многообразия  $M_1$  и  $M_2$  называются *атомами* и склеиваются между собой по гомеоморфизму  $\varphi : \partial M_1 \rightarrow \partial M_2$ , задаваемому матрицей  $A$ . Известно, что граф-многообразие не изменится, если к атомам меченой молекулы применить операции торговли параметрами  $C_1 - C_5$ , а также следующие две операции, вытекающие из  $C_5$ :

$C_6$ : замена матрицы  $A$  и пары параметров  $(\alpha_i, \beta_i)$  слоя атома  $M_1$  на матрицу  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^\varepsilon$  и пару  $(\alpha_i, \beta_i + \varepsilon\alpha_i)$ , где  $\varepsilon = \pm 1$ ;

$C_7$ : замена матрицы  $A$  и пары параметров  $(\alpha_i, \beta_i)$  слоя атома  $M_2$  на матрицу  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^\varepsilon \cdot A$  и пару  $(\alpha_i, \beta_i + \varepsilon\alpha_i)$ , где  $\varepsilon = \pm 1$ .

Несложно показать, что операций  $C_1 - C_4$ ,  $C_6$  и  $C_7$  достаточно для преобразования произвольной меченой молекулы  $(M_1, M_2, A)$  многообразия класса  $\Lambda$  в молекулу, атомы которой имеют вид

$$M_1 = (D^2, (p_1, q_1), (p_2, q_2), (1, -1)), \quad M_2 = (D^2, (p_3, q_3), (p_4, q_4), (1, -1))$$

и параметры  $(p_i, q_i)$  особых слоев удовлетворяют условию  $p_i > q_i > 0$  для  $1 \leq i \leq 4$ . Такую молекулу будем называть *приведенной*. Каждой матрице  $A \in G$  сопоставим число  $\xi(A) = S(|a| + |b|, |c| + |d|)$ . Следующая верхняя оценка сложности многообразий класса  $\Lambda$  была получена Е.А. Фоминых и М.В. Овчинниковым.

**Теорема 3.3** ([18, 29]). Пусть  $(M_1, M_2, A)$  — приведенная меченная молекула многообразия  $M \in \Lambda$ . Тогда

$$c(M) \leq \max\{\xi(A) - 2, 0\} - 2 + \sum_{i=1}^4 S(p_i, q_i).$$

**3.3. Гиперболические многообразия.** Обозначим через  $4_1(p/q)$  замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие, полученное  $p/q$ -хирургией по узлу восьмерка  $4_1$ . Пусть  $p \geq 0$ ,  $q \geq 1$  — взаимно простые целые числа,  $[p/q]$  — целая часть числа  $p/q$ , и  $\text{res}(p, q)$  — остаток от деления  $p$  на  $q$ . Определим число  $\omega(p/q)$  по правилу  $\omega(p/q) = a(p/q) + \max\{[p/q] - 3, 0\} + S(\text{res}(p, q), q)$ , где

$$a(p/q) = \begin{cases} 6, & \text{если } p/q = 4; \\ 7, & \text{если } p/q \in \mathbb{Z} \text{ и } p/q \neq 4; \\ 8, & \text{если } p/q \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Следующая верхняя оценка, установленная Е.А. Фоминых, является потенциально точной.

**Теорема 3.4** ([17]). *Для любых взаимно простых целых чисел  $p \geq 0$  и  $q \geq 1$  справедливо неравенство  $c(4_1(p/q)) \leq \omega(p/q)$ . Более того, если  $\omega(p/q) \leq 12$ , то  $c(4_1(p/q)) = \omega(p/q)$ .*

#### 4. БЕСКОНЕЧНЫЕ СЕРИИ МНОГООБРАЗИЙ С ИЗВЕСТНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

**4.1. Линзовые пространства.** Многообразия, указанные в нижеследующей теореме, установленной В. Джейко, Х. Рубинштайном и С. Гилманом в [34, 35], составляют первые бесконечные серии замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий, сложность которых известна. Напомним, что  $L(p, q)$  обозначает линзовое пространство, а  $S^3/Q_{4n}$  — фактор-пространство сферы по линейному действию обобщенной группы кватернионов.

**Теорема 4.1** ([34, 35]). *Справедливы следующие утверждения:*

- (1)  $c(L(2n, 1)) = 2n - 3$ , где  $n \geq 2$ ;
- (2)  $c(L((s+2)(t+1)+1, t+1)) = s+t$ , где  $t > s > 1$ ,  $t$  четно,  $s$  нечетно;
- (3)  $c(L((s+1)(t+2)+1, t+2)) = s+t$ , где  $t > s > 1$ ,  $t$  нечетно,  $s$  четно;
- (4)  $c(L(4n, 2n-1)) = n$ , где  $n \geq 2$ ;
- (5)  $c(S^3/Q_{4n}) = n$ , где  $n \geq 2$ .

Идея доказательства основана на том, что каждый нетривиальный элемент группы  $H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  задает однозначно определенную поверхность в любом специальном спайне многообразия  $M$ . Эта поверхность составлена из 2-клеток спайна и поэтому позволяет оценить снизу его сложность. Во всех перечисленных в теореме случаях оказалось, что такая нижняя оценка совпадает с известной верхней.

**4.2. Гиперболические многообразия с краем.** Теперь мы опишем несколько серий гиперболических 3-многообразий с краем, то есть компактных многообразий, внутренности которых обладают полными гиперболическими структурами конечного объема. Первая нетривиальная серия многообразий с известными сложностями была построена С. Анисовым в [20]. Он заметил, что если внутренность компактного гиперболического 3-многообразия  $M$  с краем можно разбить на  $n$  правильных идеальных гиперболических тетраэдров, то  $c(M) = n$ . Ключевую роль при этом играет тот факт, что правильный идеальный тетраэдр имеет наибольший объем среди всех гиперболических тетраэдров.

Обозначим через  $Q_2$  дополнительное пространство узла восьмерка  $4_1$  в  $S^3$ , получающееся вырезанием из сферы  $S^3$  трубчатой окрестности узла. Известно, что его внутренность  $\text{Int}Q_2$  можно получить склеиванием двух правильных идеальных гиперболических тетраэдров [53]. Тогда внутренность  $n$ -кратного покрывающего пространства  $Q_2^{(n)}$  многообразия  $Q_2$  можно получить склеиванием  $2n$  правильных идеальных гиперболических тетраэдров. Поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.2** ([20]). *Для каждого  $n \in \mathbb{N}$  имеет место равенство  $c(Q_2^{(n)}) = 2n$ .*

Отметим, что есть еще одно многообразие,  $Q_1$ , получающееся склеиванием двух правильных идеальных тетраэдров. Оно было найдено независимо Дж. Виксом (его диссертация и статья [22]) и С.В. Матвеевым, А.Т. Фоменко [14]. Для него верен аналогичный результат: если многообразие  $Q_1^{(n)}$  является  $n$ -кратным накрытием многообразия  $Q_1$ , то  $c(Q_1^{(n)}) = 2n$ .



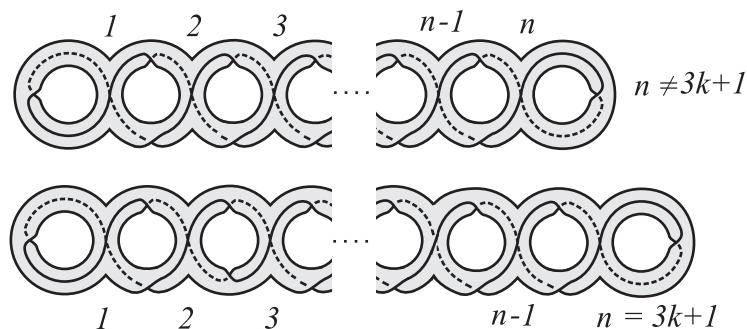


Рис. 2. Спайны с одной 2-компонентой

Опираясь на вышеизложенную идею можно построить новую серию многообразий с известными сложностями. Рассмотрим многообразие  $M_{5223}$  с одним каспом из списка [22], получаемое склейкой пяти идеальных тетраэдров. Применяв процесс "дегидрации" к его обезвоженному описанию  $fapaadcceeebfobfw$ , мы восстановим склейку идеальных тетраэдров:

$$\begin{array}{ll}
 t_0(1,2,3) - t_1(1,2,3), & t_1(3,1,0) - t_2(0,2,1), \\
 t_0(0,2,3) - t_2(0,2,3), & t_1(2,1,0) - t_2(1,0,3), \\
 t_0(0,1,3) - t_3(0,1,3), & t_2(3,2,1) - t_4(0,1,3), \\
 t_0(0,1,2) - t_4(0,1,2), & t_3(3,2,1) - t_4(0,3,2), \\
 t_1(3,2,0) - t_3(0,1,2), & t_3(3,2,0) - t_4(3,2,1).
 \end{array}$$

Объясним применяемые здесь обозначения. Вершины каждого из пяти тетраэдров  $t_0, \dots, t_4$  пронумеруем в произвольном порядке числами  $0, 1, 2, 3$ . Тогда запись  $t_i(k,l,m) - t_j(p,q,r)$  означает, что грань  $(k,l,m)$  тетраэдра  $t_i$  склеивается с гранью  $(p,q,r)$  тетраэдра  $t_j$  в порядке следования вершин.

Указанный в [22] объем многообразия  $M_{5223}$  совпадает (в пределах точности вычислений) с пятикратным объемом правильного идеального тетраэдра, что наводит на мысль, что тетраэдры нужно взять правильными. Проверка это подтвердила. Прямое вычисление по Торстону показало, что если тетраэдры взять правильными, то голономии обходов ребер и обходов меридиана и параллели граничного тора равны  $1_{2\pi}$ . Поэтому справедлива следующая теорема.

**Теорема 4.3.** Пусть  $M$  — такое компактное гиперболическое многообразие с краем, что  $\text{Int}M = M_{5223}$ , а  $M^{(n)}$  —  $n$ -кратное накрывающее пространство многообразия  $M$ . Тогда  $c(M^{(n)}) = 5n$ .

Другая бесконечная серия многообразий с известными сложностями была построена Р. Фриджеро, Б. Мартелли и К. Петронио в [30, 31]. Будем говорить, что компактное ориентируемое трехмерное многообразие  $M$  лежит в классе  $\mathcal{M}_{g,s}$ , если оно имеет специальный спайн, число 2-компонент которого равно  $s+1$ , а край  $\partial M$  является объединением связной ориентируемой поверхности рода  $g \geq 2$  и  $s \geq 0$  торов.

**Теорема 4.4** ([30, 31]). Пусть  $M \in \mathcal{M}_{g,s}$ . Тогда многообразие  $M$  является гиперболическим и  $c(M) = g + s$ .

Гиперболичность многообразия  $M \in \mathcal{M}_{g,s}$  проверяется стандартным способом. Доказательство равенства  $c(M) = g + s$  основано на простом наблюдении,

что для любого связного компактного многообразия  $M$  и для любого его специального спайна  $P$  справедливо соотношение: число 2-компонент в  $P$  не меньше числа компонент края  $\partial M$ . Основная трудность заключалась в доказательстве непустоты классов  $\mathcal{M}_{g,s}$ . Специальные спайны многообразий, лежащих в классах  $\mathcal{M}_{g,0}$ , показаны на рис. 2 (здесь  $g = n$ ).

**4.3. Многообразия Паолуци – Циммермана.** Опишем бесконечное двухпараметрическое семейство гиперболических многообразий с краем, построенных Л. Паолуци и Б. Циммерманом в [50]. Для каждого  $n \geq 3$  рассмотрим  $n$ -угольную бипирамиду  $\mathcal{B}_n$ , являющуюся объединением пирамид  $NL_0L_1 \dots L_{n-1}$  и  $SL_0L_1 \dots L_{n-1}$ , пересекающихся лишь по общему  $n$ -угольному основанию  $L_0L_1 \dots L_{n-1}$ . Выберем такое целое  $k$ , что  $0 \leq k < n$  и  $(n, 2 - k) = 1$ . Для каждого  $i = 0, \dots, n - 1$  рассмотрим преобразование  $y_i$ , отождествляющее грань  $L_iL_{i+1}N$  с гранью  $SL_{i+k}L_{i+k+1}$  (индексы берутся по модулю  $n$  и вершины склеиваются в том порядке, в котором они написаны).

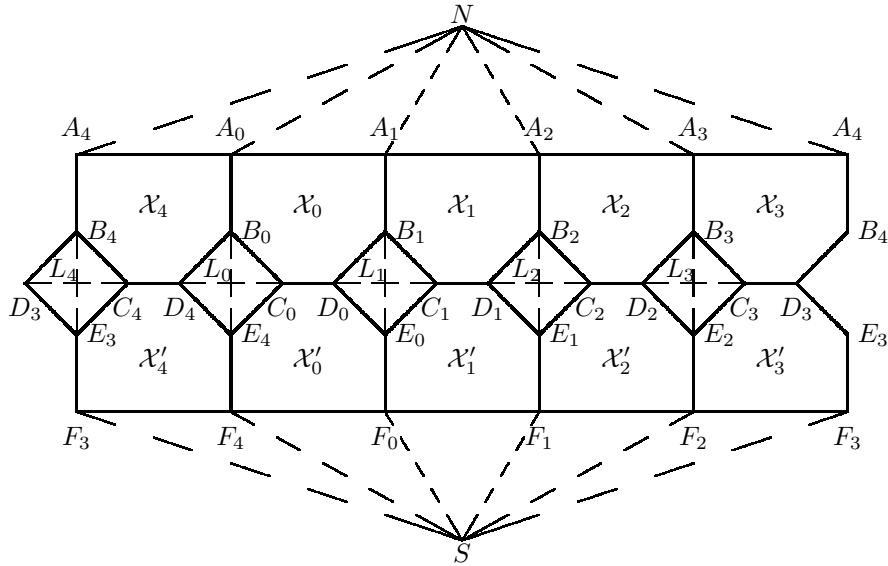


Рис. 3. Усеченная бипирамида  $\mathcal{A}_5$ .

Отождествления  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$  задают отношения эквивалентности на множествах граней, ребер и вершин бипирамиды. Нетрудно проверить, что все грани разбиваются на пары эквивалентных граней, все ребра составляют один класс эквивалентности (это гарантируется приведенными выше условиями на  $k$ ) и все вершины также образуют один класс эквивалентности. Обозначим соответствующее факторпространство через  $M_{n,k}^*$ . Оно является ориентируемым псевдомногообразием с одной особой точкой, что следует из вычисления эйлеровой характеристики:  $\chi(M_{n,k}^*) = n - 1 \neq 0$ . Вырезав из  $M_{n,k}^*$  коническую окрестность особой точки, получим компактное многообразие  $M_{n,k}$  с одной компонентой края. Оно получается из усеченной бипирамиды  $\mathcal{A}_n$ , вершинами которой являются точки  $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i, i = 0, \dots, n - 1$  (см. рис. 3 для  $n = 5$ , где правая и левая стороны предполагаются отождествленными). Парные отождествления  $\{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$  граней бипирамиды  $\mathcal{B}_n$  индуцируют

попарные отождествления  $\{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}$  граней усеченной бипирамиды  $\mathcal{A}_n$ , где  $x_i$  отождествляет грани

$$\mathcal{X}_i = C_i D_i B_{i+1} A_{i+1} A_i B_i \quad \text{и} \quad \mathcal{X}'_{k+i} = F_{k+i-1} E_{k+i-1} C_{k+i} D_{k+i} E_{k+i} F_{k+i}$$

в соответствии с указанным порядком точек, где все индексы берутся по модулю  $n$ . При этом, грани

$$A_0 A_1 \dots A_{n-1}, \quad F_0 F_1 \dots F_{n-1}, \quad \text{и} \quad B_i C_i E_i D_{i-1}, \quad i = 0, \dots, n-1,$$

склеиваются в край  $\partial M_{n,k}$  многообразия  $M_{n,k}$ . Нетрудно проверить, что  $\partial M_{n,k}$  — замкнутая ориентируемая поверхность рода  $n-1$ .

Как показано в [50], при  $n \geq 3$  многообразия  $M_{n,k}$  являются гиперболическими и  $M_{n,k} = \mathbb{H}^3 / G_{n,k}$ , где  $G_{n,k}$  — группа с  $n$  порождающими и одним определяющим соотношением:

$$G_{n,k} = \langle x_0, \dots, x_{n-1} \mid \prod_{i=0}^{n-1} x_{i(2-k)} x_{i(2-k)+1}^{-1} x_{(i+1)(2-k)-1}^{-1} = 1 \rangle.$$

Согласно [50], многообразия  $M_{n,k}$  и  $M_{n',k'}$  гомеоморфны (или, что эквивалентно в силу их гиперболичности, изометричны) тогда и только тогда, когда  $n = n'$  и  $k \equiv k'$  по модулю  $n$ .

В работе [6] А.Ю. Веснин и Е.А. Фоминых нашли точные значения сложности многообразий Паолоцци – Циммермана.

**Теорема 4.5** ([6]). *При  $n \geq 4$  имеет место равенство  $c(M_{n,k}) = n$ .*

Каждое многообразие  $M_{n,k}$ ,  $n \geq 4$ , имеет одну компоненту края, его сложность  $c(M_{n,k})$  равна  $n$  и его эйлерова характеристика  $\chi(M_{n,k})$  равна  $2-n$ . Ранее известные примеры многообразий с одной компонентой края и сложности  $n$ , изучавшиеся в [30, 31], имели эйлерову характеристику  $1-n$ .

Многообразие  $M_{3,1}$  было впервые построено в [53]. Как показано в [41],  $M_{3,1}$  является одним из компактных гиперболических 3-многообразий с геодезическим краем, имеющих минимальный объем,  $\text{vol}(M_{3,1}) \approx 6,451998$ .

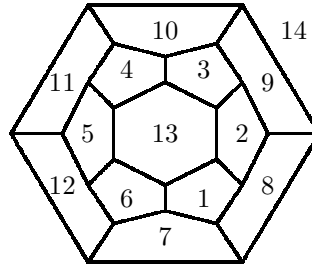
**Предложение 4.1** ([6]). *Имеет место равенство  $c(M_{3,1}) = 2$ .*

Доказательства теоремы 4.5 и предложения 4.1 основаны на свойствах  $\varepsilon$ -инварианта трехмерных многообразий (см. [12, параграф 8.1.3]).

## 5. ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ БЕСКОНЕЧНЫХ СЕРИЙ МНОГООБРАЗИЙ

**5.1. Многообразия Лебелля.** Рассмотрим бесконечное семейство замкнутых ориентируемых трехмерных гиперболических многообразий, называемых многообразиями Лебелля. Конструкция этих многообразий была предложена А.Ю. Весниным в работе [1]. Здесь и в дальнейшем через  $\mathbb{H}^3$  мы обозначаем трехмерное гиперболическое пространство, а через  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  — полную группу сохраняющих ориентацию изометрий  $\mathbb{H}^3$ .

Для каждого  $n \geq 5$  обозначим через  $R(n)$  ограниченный прямоугольный многогранник в  $\mathbb{H}^3$ , имеющий  $(2n+2)$  грани: две из них, рассматриваемые как верхнее и нижнее основания, являются правильными  $n$ -угольниками, а боковая поверхность многогранника состоит из  $2n$  пятиугольников. Многогранник  $R(5)$  является прямоугольным додекаэдром. Четырнадцатигранник  $R(6)$  приведен на рис. 4.

Рис. 4. Многогранник  $R(6)$ .

Для  $n \geq 5$  занумеруем грани  $R(n)$  следующим образом:

- верхнее и нижнее основания имеют номера  $2n + 1$  и  $2n + 2$ , соответственно;
- пятиугольники, смежные верхней грани, циклически занумерованы числами  $1, \dots, n$ ;
- пятиугольники, смежные нижней грани, циклически занумерованы числами  $n + 1, \dots, 2n$ , причем пятиугольник  $n + 1$  смежен с пятиугольниками  $1$  и  $n$ .

Обозначим через  $g_i \in \text{Isom}(\mathbb{H}^3)$  отражение в плоскости, содержащей  $i$ -ую грань многогранника  $R(n)$ . Группа  $G(n)$ , порожденная отражениями в гранях  $R(n)$ , имеет следующее представление:

$$\langle g_1, \dots, g_{2n+2} \mid \begin{aligned} g_i^2 &= 1, & i &= 1, \dots, 2n+2; \\ g_{2n+1}g_i &= g_i g_{2n+1}, & g_{2n+2}g_{n+i} &= g_{n+i}g_{2n+2}, & i &= 1, \dots, n; \\ g_i g_{i+1} &= g_{i+1}g_i, & i &= 1, \dots, 2n-1; & g_1 g_n &= g_n g_1; \\ g_i g_{n+i} &= g_{n+i}g_i, & i &= 1, \dots, n; & g_{n+1} g_{2n} &= g_{2n} g_{n+1}; \\ g_i g_{n+1+i} &= g_{n+1+i}g_i, & i &= 1, \dots, n-1. \end{aligned} \rangle$$

Многогранник  $R(n)$  является фундаментальным для группы  $G(n)$ . По построению,  $G(n)$  является дискретной подгруппой группы изометрий  $\mathbb{H}^3$ , следовательно, подгруппа  $K < G(n)$  действует на  $\mathbb{H}^3$  свободно тогда и только тогда, когда она не содержит элементов конечного порядка. Для каждой вершины  $v$  многогранника  $R(n)$  ее стабилизатор  $\text{Stab}_{G(n)}(v)$  изоморфен абелевой группе  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 = (\mathbb{Z}_2)^3$  порядка 8.

Определим класс многообразий Лебелля уровня  $n$  следующим образом:

$$\mathcal{L}(n) = \left\{ \mathbb{H}^3 / \text{Ker}(\varphi) : \begin{aligned} \varphi : G(n) &\rightarrow (\mathbb{Z}_2)^3 \text{ является эпиморфизмом,} \\ \text{Ker}(\varphi) &< \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3), \text{ Ker}(\varphi) \text{ не имеет кручения} \end{aligned} \right\}.$$

Описанный в [1] метод построения многообразий Лебелля состоит в следующем. Рассмотрим в  $(\mathbb{Z}_2)^3$  векторы  $\alpha = (1, 0, 0)$ ,  $\beta = (0, 1, 0)$ ,  $\gamma = (0, 0, 1)$  и  $\delta = (1, 1, 1)$ . Пусть  $\varphi : G(n) \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^3$  — такой эпиморфизм, что

- (a): каждый порождающий  $g_i$  группы  $G(n)$  отображается в один из элементов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ;
- (b): если  $g_i, g_j, g_k$  — отражения в гранях многогранника  $R(n)$ , инцидентные одной вершине, то их образы  $\varphi(g_i), \varphi(g_j), \varphi(g_k)$  попарно различны.

Существование эпиморфизма, удовлетворяющего этим условиям следует из положительного решения проблемы раскраски плоской карты в четыре цвета, и в случае многогранников  $R(n)$  раскраски их граней в четыре цвета легко предъявить явно.

Из результатов [1] следует, что если эпиморфизм  $\varphi$  удовлетворяет условиям (а) и (b), то его ядро  $\text{Ker}(\varphi)$  не содержит элементов конечного порядка и состоит только из сохраняющих ориентацию изометрий. Следовательно, факторпространство  $\mathbb{H}^3/\text{Ker}(\varphi)$  является многообразием Лебелля уровня  $n$ .

Каждый элемент множества  $\mathcal{L}(n)$  является замкнутым ориентируемым трехмерным гиперболическим многообразием, объем которого в 8 раз больше, чем объем многогранника  $R(n)$ .

Двухсторонние оценки сложности этих многообразий были получены в работах [4, 44] А.Ю. Весниным, С.В. Матвеевым и К. Петролио.

**Теорема 5.1** ([44]). Пусть  $\mathcal{L}(n)$ ,  $n \geq 5$ , — множество многообразий Лебелля уровня  $n$ . Тогда для любого многообразия  $M \in \mathcal{L}(n)$  имеют место следующие оценки его сложности  $c(M)$ :

$$10n \leq c(M) \leq 47n - 92,$$

где нижняя оценка имеет место для достаточно больших  $n$ . а верхняя — для всех  $n \geq 5$ .

Верхняя оценка сложности следует из явного описания фундаментального многогранника для многообразий класса  $\mathcal{L}(n)$ . Нижняя оценка вытекает из следующей точной формулы для объемов многообразий, полученной А.Ю. Весниным.

**Предложение 5.1** ([2]). Пусть  $M \in \mathcal{L}(n)$ , где  $n \geq 5$ . Тогда

$$\text{vol } M = 4n \left( 2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_n\right) \right),$$

где  $\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right)$ , а  $\Lambda(x)$  — функция Лобачевского:

$$\Lambda(x) = - \int_0^x \log |2 \sin(t)| dt.$$

**5.2. Многообразия Фибоначчи.** Рассмотрим бесконечную серию замкнутых ориентируемых трехмерных гиперболических многообразий, фундаментальными группами которых являются группы Фибоначчи. Группы Фибоначчи  $F(2, n)$  определяются для каждого  $n \geq 3$  следующим образом:

$$F(2, n) = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : x_i x_{i+1} x_{i+2}^{-1}, i = 1, \dots, n \rangle$$

где индексы берутся по модулю  $n$ . Как показали в [38] Х. Хеллинг, А. Ким и Й. Меннике, для каждого  $n \geq 4$  группа  $F(2, 2n)$  изоморфна дискретной компактной подгруппе группы  $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  сохраняющих ориентацию изометрий гиперболического пространства. Напомним конструкцию фундаментального многогранника для  $F(2, 2n)$ .

Зафиксируем  $n \geq 4$  и рассмотрим  $n$ -угольную антипризму  $A(n)$ , полная поверхность которой состоит из двух  $n$ -угольников и  $2n$  треугольников. Обозначим через  $Y(n)$  многогранник, полученный присоединению к каждому из

оснований  $A(n)$  по  $n$ -угольной пирамиде. В частности,  $Y(5)$  является икосаэдром. В общем случае,  $Y(n)$  имеет  $2n + 2$  вершин,  $6n$  ребер, и  $4n$  треугольных граней.

Обозначим вершины многогранника  $Y(n)$  через  $Q, R, P_1, \dots, P_{2n}$ , а его грани — через  $F_1, \dots, F_n$ , and  $F_1^*, \dots, F_n^*$ , как показано на рис 5 для  $n = 4$ . Определим

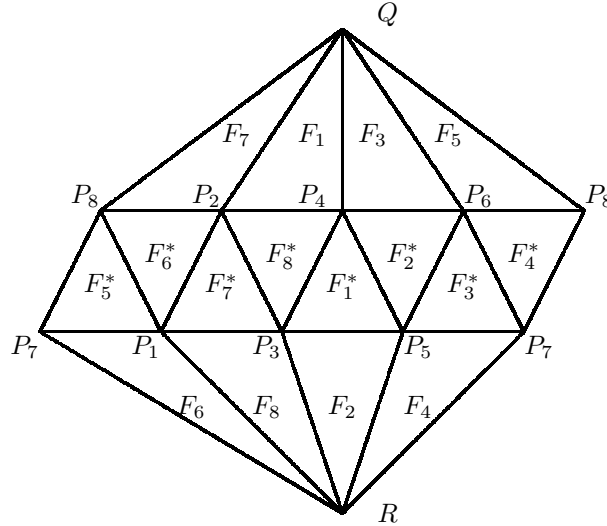


Рис. 5. Многогранник  $Y_4$ .

попарные отождествления граней  $Y(n)$  при которых грань  $F_i$  склеивается с гранью  $F_i^*$  посредством симплициального гомеоморфизма  $s_i : F_i \rightarrow F_i^*$ . А именно, для нечетного  $i$  положим  $s_i : QP_{i+1}P_{i+3} \rightarrow P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$ , а для четного  $i$  положим  $s_i : RP_{i+1}P_{i+3} \rightarrow P_{i+2}P_{i+3}P_{i+4}$  где все индексы берутся по модулю  $2n$ . Как показано в [38], многогранник  $Y(n)$  реализуется как ограниченный многогранник в гиперболическом пространстве таким образом, что факторпространством по указанному попарному отождествлению граней является замкнутое гиперболическое многообразие  $\mathcal{F}(n) = \mathbb{H}^3/F(2, 2n)$ . Многообразию  $\mathcal{F}(n)$  называется *многообразием Фибоначчи*. Как известно [39], каждое многообразие  $\mathcal{F}(n)$  является  $n$ -листным циклическим накрытием трехмерной сферы, разветвленным над узлом восьмерка  $4_1$ .

А.Ю. Веснин, С.В. Матвеев и К. Петронио в [44] получили следующие двухсторонние оценки для сложности многообразий Фибоначчи.

**Теорема 5.2** ([44]). Пусть  $\mathcal{F}(n) = \mathbb{H}^3/F(2, 2n)$ ,  $n \geq 4$ , — замкнутое гиперболическое ориентируемое многообразие Фибоначчи. Тогда его сложность  $c(\mathcal{F}(n))$  удовлетворяет следующим неравенствам:

$$2n \leq c(\mathcal{F}(n)) \leq 3n,$$

где нижняя оценка имеет место для достаточно больших  $n$ , а верхняя — для всех  $n \geq 4$ .

Верхняя оценка сложности следует из явного описания фундаментальных многогранников для многообразий Фибоначчи — многогранников  $Y(n)$ . Нижняя оценка вытекает из следующей точной формулы для объемов гиперболических многообразий  $\mathcal{F}(n)$ , полученной А.Ю. Весниным и А.Д. Медных.

**Предложение 5.2** ([5]). Для  $n \geq 4$  имеет место формула объема

$$\text{vol}(\mathcal{F}(n)) = 2n(\Lambda(a_n + \pi/n) + \Lambda(a_n - \pi/n)),$$

где  $a_n = (1/2) \cdot \arccos(\cos(2\pi/n) - 1/2)$ .

**5.3. Циклические накрытия сферы, разветвленные над 2-мостовыми узлами.** Рассмотрим семейство трехмерных многообразий, которые циклически накрывают  $S^3$ , разветвленно над двухмостовыми узлами. Основные факты о двухмостовых узлах и их разветвленных циклических накрытиях изложены, например, в [21, 40, 47]. Для целых положительных  $\alpha, \beta$  таких, что  $\alpha \geq 2$ ,  $0 < \beta < \alpha$ ,  $(\alpha, \beta) = 1$ . обозначим через  $K(\alpha, \beta)$  двухмостовой  $\alpha/\beta$ -узел (в случае нечетного  $\alpha$ ) или двухмостовое  $\alpha/\beta$ -зацепление (в случае четного  $\alpha$ ) в  $S^3$ .  $K(\alpha, \beta)$  однозначно определяется параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Напомним, что неориентированные двухмостовые зацепления  $K(\alpha', \beta')$  и  $K(\alpha, \beta)$  эквивалентны тогда и только тогда, когда  $\alpha' = \alpha$  и  $\beta' \equiv \pm\beta^{\pm 1}$  (по модулю  $\alpha$ ) (см. [21, р. 185]). Двухмостовой узел (или зацепление)  $K(\alpha, \beta)$  является торическим в случаях  $\beta = 1$  и  $\beta = \alpha - 1$ , и гиперболическим в остальных случаях.

Если  $K(\alpha, \beta)$  является узлом ( $\alpha$  нечетно) и  $n \geq 2$  — целое, то корректно определено  $n$ -листное циклическое накрытие  $S^3$  разветвленное вдоль  $K(\alpha, \beta)$ , которое является замкнутым ориентируемым трехмерным многообразием; мы будем обозначать его через  $\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)$ . Оно может быть определено как метрическое пополнение факторпространства универсального накрытия пространства  $S^3 \setminus K(\alpha, \beta)$  относительно действия ядра гомоморфизма  $\pi_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta)) \rightarrow \mathbb{Z}_n$  которое индуцируется на абелизатор  $\pi_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta)) \rightarrow H_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta))$  и переводит меридиан узла  $K(p, q)$ , порождающий  $H_1(S^3 \setminus K(\alpha, \beta))$ , в порождающий элемент [1] группы  $\mathbb{Z}_n$ .

Если  $K(\alpha, \beta)$  является зацеплением ( $p$  четно) и фиксирован порождающий  $[m]$  (возможно, совпадающий с порождающим [1] группы  $\mathbb{Z}_n$ , то аналогичная конструкция определяет *меридианно-циклическое* разветвленное накрытие  $\mathcal{C}_{n,m}(\alpha, \beta)$  сферы  $S^3$ , разветвленное вдоль  $K(\alpha, \beta)$ . А именно, потребуем, чтобы меридианы двух компонент зацепления  $K(\alpha, \beta)$  отображались в элементы [1] и  $[m]$ , соответственно. Отметим, что в [54] меридианно-циклические накрытия называются строго циклическими. Поскольку в двухкомпонентном зацеплении  $K(\alpha, \beta)$  компоненты переставляются местами при помощи симметрии зацепления, мы не конкретизируем какой именно из меридианов переходит в элемент [1], а какой — в элемент  $[m]$ .

Поскольку приводимые ниже оценки сложности многообразий  $\mathcal{C}_{n,m}(\alpha, \beta)$  зависят только от  $n$ , мы упростим обозначения и под  $\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)$  далее будем понимать произвольное меридианно-циклическое  $n$ -листное накрытие  $S^3$  разветвленное вдоль  $K(\alpha, \beta)$ . Это позволит нам единообразно сформулировать утверждения как для узлов, так и для зацеплений. Напомним, что  $\mathcal{C}_2(\alpha, \beta)$  является линзовым пространством  $L(\alpha, \beta)$ .

Ниже мы будем использовать свойства непрерывных дробей. Непрерывная дробь имеет следующий вид:

$$[a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k] = a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}}.$$

Зафиксируем  $\alpha$  и  $\beta$ , удовлетворяющие приведенным выше условиям. Напомним [40, р. 25], что существует единственное минимальное разложение положительного числа  $\alpha/\beta$  в непрерывную дробь с положительными элементами, а именно, в дробь вида  $\alpha/\beta = [a_1, \dots, a_k]$ , где  $a_1, \dots, a_{k-1} > 0$  и  $a_k > 1$ . В самом деле, если  $a_k = 1$ , то  $[a_1, \dots, a_{k-1}, 1] = [a_1, \dots, a_{k-1} + 1]$ . Положим  $\ell(\alpha, \beta)$  равным  $k$  при  $a_1 > 1$ , и положим равным  $k - 1$  при  $a_1 = 1$ .

Введение величины  $\ell(\alpha, \beta)$  объясняется тем, что  $\ell(\alpha, \beta)$  является минимумом длин положительных непрерывных дробей, представляющих рациональные числа  $\alpha'/\beta'$  такие, что  $K(\alpha', \beta')$  эквивалентен  $K(\alpha, \beta)$ . Отметим, что  $\ell(\alpha/\beta) = 1$  тогда и только тогда, когда  $K(\alpha, \beta)$  является торическим узлом или зацеплением.

В [51] А.Ю. Веснин и К. Петронио получили следующие оценки сложности для разветвленных циклических накрытий двухмостовых узлов и зацеплений.

**Теорема 5.3** ([51]). Пусть  $K(\alpha, \beta)$  — двухмостовый узел (или двухмостовое зацепление),  $\{\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)\}_{n=2}^\infty$  — последовательность меридианно-циклических  $n$ -листных разветвленных накрытий  $S^3$ , разветвленных вдоль  $K(\alpha, \beta)$ . Тогда для всех  $n$  имеет место неравенство

$$c(\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)) \leq n(\alpha - 1).$$

Если  $K(\alpha, \beta)$  является гиперболическим, то следующее неравенство имеет место для  $n \geq 7$  с константой  $\kappa = 4$ :

$$n \cdot \left(1 - \frac{\kappa\pi^2}{n^2}\right)^{3/2} \cdot \max\{2, 2\ell(\alpha, \beta) - 2.6667\dots\} < c(\mathcal{C}_n(\alpha, \beta));$$

более того, если  $K(\alpha, \beta)$  отлично от  $K(5, 2)$  и  $K(7, 3)$ , то последнее неравенство имеет место для  $n \geq 6$  с константой  $\kappa = 2\sqrt{2}$ .

Верхние оценки для сложности многообразий  $\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)$  получены с использованием информации о комбинаторной структуре их фундаментальных многогранников. Напомним, что фундаментальный многогранник для  $n$ -листного разветвленного циклического накрытия двухмостового узла или зацепления был построен Ж. Минкусом в [46] (см. также [47]).

Для конкретных двухмостовых узлов могут быть получены более точные оценки сложности их разветвленных циклических накрытий. А именно, для начального списка двухмостовых гиперболических узлов  $K(5, 2) = 4_1$ ,  $K(7, 3) = 5_2$  и  $K(9, 4) = 6_1$  получаем:

**Следствие 5.1** ([51]). Следующие двусторонние оценки сложности имеют место при  $n \geq 7$ :

$$\left(1 - \frac{4\pi^2}{n^2}\right)^{3/2} \cdot 2n < c(\mathcal{C}_n(5, 2)) \leq 3n;$$

$$\left(1 - \frac{4\pi^2}{n^2}\right)^{3/2} \cdot 2.77664\dots \cdot n < c(\mathcal{C}_n(7, 3)) \leq 4n;$$

и при  $n \geq 6$ :

$$\left(1 - \frac{2\sqrt{2}\pi^2}{n^2}\right)^{3/2} \cdot 3.11739\dots \cdot n < c(\mathcal{C}_n(9, 4)) \leq 5n.$$



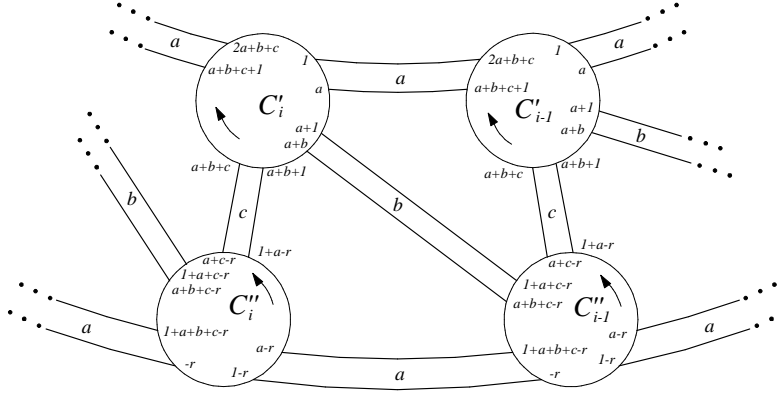


Рис. 6. Диаграммы  $D(a, b, c, n, r, s)$ .

Отметим, что многообразия  $\mathcal{C}_n(5, 2)$ , являющиеся разветвленными циклическими накрытиями узла восьмерка, это в точности обсуждавшиеся выше многообразия Фибоначчи  $\mathcal{F}(n)$ .

**5.4. Многообразия Данвуди.** Напомним конструкцию бесконечного семейства многообразий, которая была предложена М. Данвуди в [26]. По построению, эти многообразия имеют циклическую симметрию.

*Диаграммой Данвуди*  $D(a, b, c, n, r, s)$  называется трехвалентный плоский граф, зависящий от шести целых параметров  $a, b, c, n, r, s$  таких, что  $n > 0$ ,  $a, b, c \geq 0$  и  $d = 2a + b + c > 0$ , которых определен следующим образом (см. рисунок 6).

Диаграмма содержит  $n$  внутренних окружностей  $C'_1, \dots, C'_n$  и  $n$  внешних окружностей  $C''_1, \dots, C''_n$ , каждая из которых имеет  $d$  вершин. Окружность  $C'_i$  (соотв.  $C''_i$ ) соединена с окружностью  $C'_{i+1}$  (соотв.  $C''_{i+1}$ )  $a$  параллельными дугами, с окружностью  $C''_i$   $c$  параллельными дугами и с окружностью  $C''_{i-1}$  —  $b$  параллельными дугами, для каждого  $i = 1, \dots, n$  (все индексы берутся по модулю  $n$ ). Обозначим через  $\mathcal{A}$  множество ребер, и через  $\mathcal{B}$  — множество окружностей. отождествляя окружности  $C'_i$  и  $C''_{i+s}$  таким образом, чтобы при этом попарно отождествлялись вершины, имеющие одинаковые метки (см. расположение меток на рисунке 6), мы получим диаграмму Хегора  $H(a, b, c, n, r, s) = (\Sigma_n, \mathcal{C}', \mathcal{C}'')$ , где  $\mathcal{C}'$  — собственная приведенная система кривых, возникающая из  $\mathcal{B}$  (и потому состоящая из  $n$  кривых), и  $\mathcal{C}''$  — система кривых, возникающая из  $\mathcal{E}$ , содержащая  $t > 0$  кривых. Можно считать, что параметры  $r$  и  $s$  рассматриваются по модулю  $d$  и модулю  $n$ , соответственно. Диаграмму  $H(a, b, c, r, n, s)$  назовем *замкнутой диаграммой Данвуди*. Отметим, что диаграммы  $H(a, b, c, n, r, s)$  и  $H(a, c, b, n, d-r, n-s-1)$  изоморфны, и следовательно, они представляют одно и то же многообразие.

Обобщенное многообразие Данвуди  $M(a, b, c, n, r, s)$  становится многообразием Данвуди, если  $H(a, b, c, n, r, s)$  является диаграммой Хегора в классическом смысле.

Как показали Л. Грасселли и М. Мулаццани [37], класс многообразий Данвуди совпадает с классом строго-циклических разветвленных накрытий  $(1, 1)$ -узлов. Следовательно, этот класс содержит все разветвленные циклические

накрытия двухмостовых узлов. Разветвленные циклические накрытия двухмостовых зацеплений принадлежат классу обобщенных многообразий Данвуди (это следует из полиэдрального описания обобщенных многообразий Данвуди).

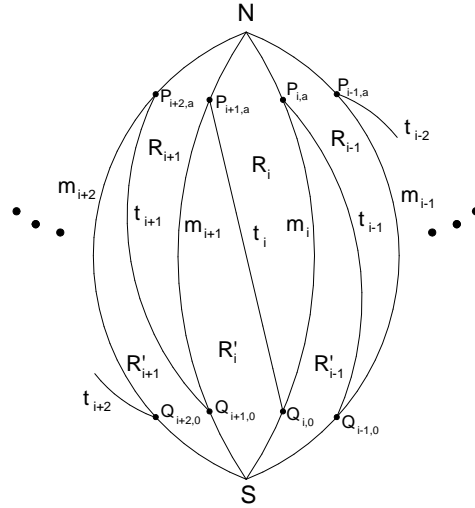


Рис. 7. Полиэдральное описание обобщенных многообразий Данвуди.

А.Ю. Веснин, А. Катабрига и М. Мулаццани получили следующие верхние оценки для сложности многообразий Данвуди.

**Теорема 5.4** ([24]). Пусть  $M = M(a, b, c, n, r, s)$  — многообразие Данвуди. Тогда имеют место следующие оценки сложности этого многообразия:

(i) Если  $abc > 0$ , то

$$c(M) \leq \begin{cases} n(2a + b + c) - \max(2n, 6), & \text{если } r \neq -b, -b \pm 1, \\ n(2a + b + c) - \max(2n, 5), & \text{если } r = -b \pm 1. \end{cases}$$

(ii) Если  $abc = 0$  и  $\min(a, b + c) = 0$ , то

$$c(M) \leq \begin{cases} n(2a + b + c - 4), & \text{если } r \neq -b, -b \pm 1, \\ n(2a + b + c - 3), & \text{если } r = -b \pm 1. \end{cases}$$

(iii) Если  $abc = 0$  и  $\min(a, b + c) > 0$ , то

$$c(M) \leq \begin{cases} n(2a + b + c - 2), & \text{если } n > 3, \\ n(2a + c) - \max(2n, 8 - 2k_0), & \text{если } n = 2, 3, b = 0 \text{ and } s = 0, \\ n(2a + b) - \max(2n, 8 - k_0 - k_1), & \text{если } n = 2, c = 0 \text{ and } s = 0, \\ n(2a + b) - \max(2n, 8 - k_0), & \text{если } n = 3, c = 0 \text{ and } s = 0, \\ n(2a + b) - \max(2n, 8 - k_1), & \text{если } n = 3, c = 0 \text{ and } s = 1, \end{cases}$$

$$\text{где } k_i = \begin{cases} 2, & \text{если } r = (-1)^i b, \\ 1, & \text{если } r = (-1)^i b \pm 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остальные случаи сводятся к указанным в силу того, что имеют место гомеоморфизмы  $M(a, b, c, n, r, s) \cong M(a, c, b, n, d - r, n - s - 1)$ .

Как установлено в [37, Theorem 8], циклическое  $n$ -листное накрытие сферы  $\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)$ , разветвленное над двухмостовым узлом  $K(\alpha, \beta)$  является многообразием Данвуди  $M((\alpha - 1)/2, 0, 1, n, \beta/2, s)$  для некоторого  $s = s(\alpha, \beta)$  (здесь мы считаем, что  $\beta$  четно, поскольку узлы  $K(\alpha, \beta)$  и  $K(\alpha, \alpha - \beta)$  эквивалентны). Поскольку  $b = 0$ , мы можем применить неравенство из случая (iii) предыдущей теоремы для получения верхней оценки сложности.

**Следствие 5.2** ([24]). *Пусть  $\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)$  — циклическое  $n$ -листное накрытие сферы, разветвленное над двухмостовым узлом  $K(\alpha, \beta)$ . Тогда при  $n > 2$  имеет место следующее неравенство:*

$$c(\mathcal{C}_n(\alpha, \beta)) \leq n(\alpha - 2).$$

Этот результат улучшает приведенную в предыдущем параграфе верхнюю оценку для случая узлов из работы [51], где она была получена для гиперболического случая (т.е.  $\beta \neq 1, \alpha - 1$ ) через фундаментальный многогранник. Напомним, что нижняя оценка сложности была получена в [51] через оценку гиперболического объема. Приведем нижнюю оценку для негиперболического случая, используя результат С.В. Матвеева и Е.Л. Первой из [13].

**Предложение 5.3** ([24]). *Пусть  $n > 2$ . Тогда*

$$c(\mathcal{C}_n(\alpha, 1)) = c(\mathcal{C}_n(\alpha, \alpha - 1)) \geq \begin{cases} 2 \log_5(\frac{\alpha}{d}) + d - 2, & \text{если } n \text{ четно,} \\ 2(d - 1) \log_5 2 - 1, & \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где  $d = \gcd(\alpha, n)$ .

Поскольку циклические накрытия сферы, разветвленные над торическими узлами, также являются многообразиями Данвуди, имеет место следующее

**Следствие 5.3** ([24]). *Пусть  $T_n(k, h)$  — циклическое  $n$ -листное накрытие сферы, разветвленное над торическим узлом типа  $(k, h)$ . Тогда имеют место неравенства:*

- (1)  $c(T_n(k, h)) \leq n(2qk - 2q - 1)$  если  $h = qk + 1$  для  $q > 0$  и  $k > 1$ ;
- (2)  $c(T_n(k, h)) \leq n(2qk - 2q - 3)$  если  $h = qk - 1$  для  $q, k > 1$ ;
- (3)  $c(T_n(k, h)) \leq n(2q_1(s - 1)(qq_1 + 1) + 2qq_1 - 1)$  если  $k = sq_1 + 1$  и  $h = qk + s$  для  $q, q_1 > 0$  и  $s > 1$ .

Как показано в [7], если  $p > q > 0$  и  $\gcd(p, q) = 1$ ,  $n > 0$ ,  $\ell > 0$ , то многообразие Зейферта

$$S_n(p, q, \ell) = \{Oo, 0 \mid -1; \underbrace{(p, q), \dots, (p, q)}_{n\text{-times}}, (\ell, \ell - 1)\}$$

являются многообразиями Данвуди со следующими параметрами:

$$S_n(p, q, \ell) = M(q, q(n\ell - 2), p - 2q, n, p - q, 0)$$

если  $p \geq 2q$  и

$$S_n(p, q, \ell) = M(p - q, 2q - p, q(n\ell - 2), n, p - q, 1)$$

в остальных случаях. Отметим, что многообразия  $S_n(p, q, \ell)$  являются обобщениями многообразий, изучавшихся в [49, 52].

**Следствие 5.4** ([24]). Пусть  $n > 1$  и, кроме того,  $\ell > 1$ , если  $n = 2$ . Имеют место следующие неравенства:

$$c(S_n(p, q, \ell)) \leq n(p + q(n\ell - 2) - 2).$$

и

$$c(S_n(p, q, \ell)) \geq 2(n - 1) \log_5 p + 2 \log_5((n - 1)\ell q - p) - 1.$$

**5.5. Циклические накрытия линзовых пространств, разветвленные над зацеплениями.** Выше мы обсуждали оценки сложности трехмерных многообразий, разветвленно циклически накрывающих трехмерную сферу или линзовое пространство, разветленно над узлом. Бесконечные серии трехмерных многообразий, разветленно циклически накрывающих линзовые пространства, с ветвлением вдоль двухкомпонентного зацепления, были построены и изучались А.Ю. Весниным, Т.А. Козловской и П. Кристофори в [3] и [25]. Верхние оценки сложности многообразий из указанных работ получены Т. Козловской в [8]. Прежде чем привести полученные оценки, напомним конструкцию многообразий.

Рассмотрим симплициальный комплекс  $\mathcal{P}_n(p)$ , где  $n \geq 1$ ,  $p \geq 3$ , изображенный на рис. 8. Комплекс имеет  $6n + 2$  грани,  $(7 + p)n$  ребер и  $(p + 1)n$  вершин. На каждом ребре  $S_i Q_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , добавлены вспомогательные точки  $T_i^1, T_i^2, \dots, T_i^s$  (нумерация идет от  $S_i$  к  $Q_i$ ), где  $s = p - 3$ .

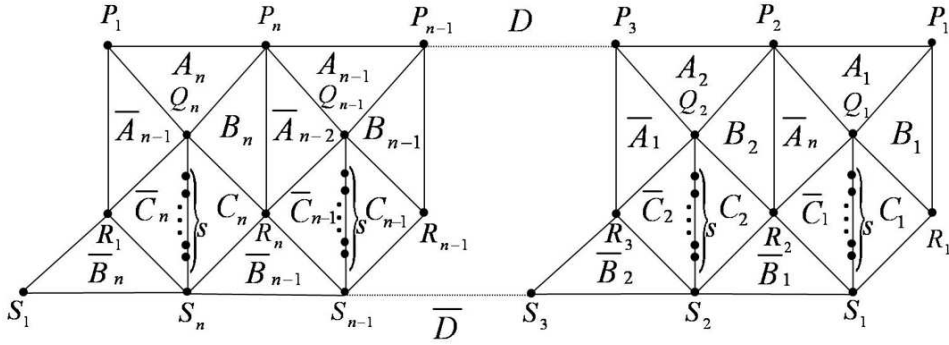


Рис. 8. Построение многообразия  $M_n(p, q)$

Обозначим через  $\varphi_n(p, q)$  попарное отождествление граней  $\mathcal{P}_n(p)$  согласно следующему правилу:

- $a_i : \mathbf{A}_i \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_i$   $[P_i P_{i+1} Q_i \rightarrow R_{i+2} P_{i+2} Q_{i+1}]$ ,
- $b_i : \mathbf{B}_i \rightarrow \bar{\mathbf{B}}_i$   $[R_i P_i Q_i \rightarrow S_i S_{i+1} R_{i+1}]$ ,
- $c_i : \mathbf{C}_i \rightarrow \bar{\mathbf{C}}_i$   $[Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^s Q_i R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^{s-1}]$ , если  $q = 1$ ;  
 $[Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^{s-1} T_i^s Q_i R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^{s-2}]$ , если  $q = 2$ ;
- .....
- $[Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow T_i^1 \dots T_i^s Q_i R_{i+1} S_i]$ , если  $q = p - 3$ ;
- $[Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow S_i T_i^1 \dots T_i^s Q_i R_{i+1}]$ , если  $q = p - 2$ ;
- $[Q_i R_i S_i T_i^1 \dots T_i^s \rightarrow R_{i+1} S_i T_i^1 \dots T_i^s Q_i]$ , если  $q = p - 1$ ;
- $d : \mathbf{D} \rightarrow \bar{\mathbf{D}}$   $[P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n \rightarrow S_3 S_4 \dots S_1 S_2]$ ,

где  $i = 1, \dots, n$ , все индексы берутся по модулю  $n$  и грани отождествляются в соответствии с указанным порядком вершин.

Как показано в [3], факторпространство  $M_n(p, q) = \mathcal{P}_n(p)/\varphi_n(p, q)$ , где  $n \geq 2$ ,  $p \geq 3$ ,  $0 < q < p$ ,  $(p, q) = 1$ , является ориентируемым трехмерным многообразием. Введенные обозначения для факторпространств обусловлены следующим их свойством, также установленным в [3]: многообразию  $M_n(p, q)$  является  $n$ -листным циклическим накрытием линзового пространства  $L(p, q)$ , разветвленным над некоторым 2-компонентным зацеплением.

**Теорема 5.5** ([8]). *Для сложности многообразий  $M_n(p, 1)$  ( $n \geq 2, p \geq 3$ ) имеет место следующая оценка:  $c(M_n(p, 1)) \leq 10(n - 1) + n(p - 3)$ .*

Доказательство теоремы использует явный вид диаграммы Хегора, приведенный на рис. 9), и оценку числа точек пересечения меридианов. В частности,  $10n + n(p - 3)$  — общее число точек пересечения меридианов, а 10 — число вершин на границе дисков  $A_1, B_1, C_1, \bar{C}_1, \bar{A}_n$  в области  $(A_1 B_1 C_1 \bar{C}_1 \bar{A}_n)$ .

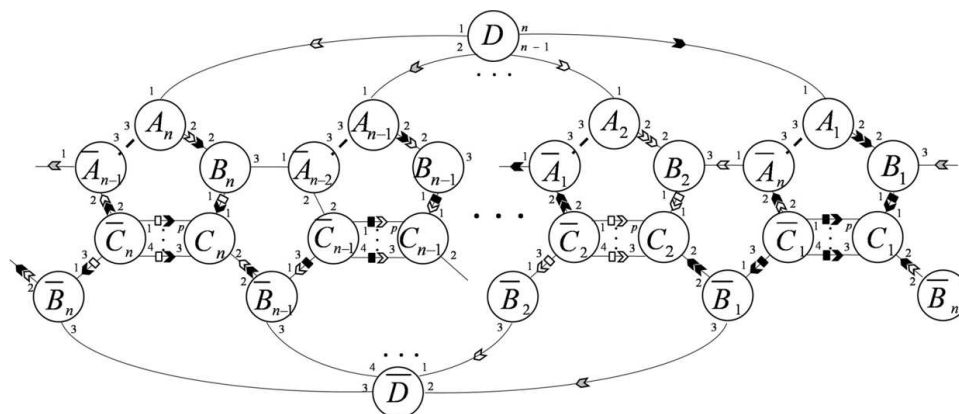


Рис. 9. Диаграмма Хегора многообразия  $M_n(p, 1)$

Приведенные в [8] результаты вычисления сложностей многообразий  $M_n(3, 1)$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) и  $M_3(5, q)$  ( $q = 1, 2, 3, 4$ ) с помощью программы «Распознаватель многообразий» дали следующие верхние оценки:

$M$	$M_2(3, 1)$	$M_3(3, 1)$	$M_4(3, 1)$	$M_5(3, 1)$
$c(M)$	$\leq 6$	$\leq 15$	$\leq 22$	$\leq 29$
$M$	$M_3(5, 1)$	$M_3(5, 2)$	$M_3(5, 3)$	$M_3(5, 4)$
$c(M)$	$\leq 21$	$\leq 18$	$\leq 18$	$\leq 21$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] А.Ю. Веснин, *Трехмерные гиперболические многообразия типа Лебелля*, Сиб. матем. журн., **28**:5 (1987), 50–53. MR0924975
- [2] А.Ю. Веснин, *Объемы трехмерных гиперболических многообразий Лебелля*, Матем. заметки, **64**:1 (1998), 13–24. MR1694014
- [3] А.Ю. Веснин, Т.А. Козловская, *Разветвленные циклические накрытия линзовых пространств*, Сиб. матем. журн., **52**:3 (2011), 542–554. Zbl pre05963609
- [4] А.Ю. Веснин, С.В. Матвеев, К. Петронио, *Двусторонние оценки сложности многообразий Лебелля*, Докл. Акад. наук, **416**:3 (2007), 295–297. MR2458865
- [5] А.Ю. Веснин, А.Д. Медных, *Гиперболические объемы многообразий Фибоначчи*, Сиб. матем. журн., **36**:2 (1995), 266–277. MR1340395

- [6] А.Ю. Веснин, Е.А. Фоминых, *Точные значения сложности многообразий Паолоцци – Циммермана*, Докл. Акад. наук, **439**:6 (2011), 727–729.
- [7] Л. Грасселли, М. Мулаццани, *Многообразия Зейферта и (1, 1)-узлы*, Сиб. матем. журн., **50**:1 (2009), 28–39. MR2502871
- [8] Т.А. Козловская, *Обобщение многообразия Эверита. Диаграммы Хегора. Сложность*, Вестник КемГУ, **3**:2 (2011), 54–59.
- [9] С.В. Матвеев, *Сложность трехмерных многообразий и их перечисление в порядке возрастания сложности*, Докл. Акад. наук СССР, **301**:2 (1988), 280–283. MR0967821
- [10] С.В. Матвеев, *Распознавание и табулирование трехмерных многообразий*, Докл. Акад. наук, **400**:1 (2005), 26–28. MR2159594
- [11] С.В. Матвеев, *Табулирование трехмерных многообразий*, Успехи матем. наук, **60**:4 (2005), 97–122. MR2190925
- [12] С.В. Матвеев, *Алгоритмическая топология и классификация трехмерных многообразий*, М. МЦНМО, 2007, 456 с. MR2341532
- [13] С.В. Матвеев, Е.Л. Первова, *Нижние оценки сложности трехмерных многообразий*, Докл. Акад. наук, **378**:2 (2001), 151–152. MR1863880
- [14] С.В. Матвеев, А.Т. Фоменко, *Изоэнергетические поверхности интегрируемых гамильтоновых систем, перечисление трехмерных многообразий в порядке возрастания их сложности и вычисление объемов замкнутых гиперболических многообразий*, Успехи матем. наук, **43**:1 (1988), 5–22. MR0937017
- [15] Д.О. Николаев, *Классификация многообразий сложности 0*, Вестник Челябинского государственного университета, Математика. Механика. Информатика, **6** (2008), 101–107.
- [16] Е.А. Фоминых, *Верхние оценки сложности для бесконечной серии граф-многообразий*, Сиб. электрон. матем. изв., **5** (2008), 215–228. MR2586633
- [17] Е.А. Фоминых, *Хирургии Дена на узле восьмерка: верхняя оценка сложности*, Сиб. матем. журн., **52**:3 (2011), 680–689. Zbl pre05963620
- [18] Е.А. Фоминых, *Верхние оценки сложности многообразий, склеенных из двух многообразий Зейферта с базой диск и двумя особыми слоями*, Вестник КемГУ, **3**:2 (2011), 83–88.
- [19] G. Amendola, B. Martelli, *Non-orientable 3-manifolds of complexity up to 7*, Topology Appl., **150** (2005), 179–195. MR2133677
- [20] S. Anisov, *Exact values of complexity for an infinite number of 3-manifolds*, Moscow Math. J., **5**:2 (2005), 305–310. MR2200753
- [21] G. Burde, H. Zieschang: *Knots*, Studies in Math. Vol. **5**, de Gruyter, Berlin-New York, 1985. MR0808776
- [22] P. Callahan, M. Hildebrand, J. Weeks, *A census of cusped hyperbolic 3-manifolds*, Math. Comp., **68** (1999), 321–332. MR1620219
- [23] M.R. Casali, *Computing Matveev’s complexity of non-orientable 3-manifolds via crystallization theory*, Topology Appl., **144** (2004), 201–209. MR2097136
- [24] A. Cattabriga, M. Mulazzani, A. Vesnin, *Complexity, Heegaard diagrams and generalized Dunwoody manifolds*, J. Korean Math. Soc., **47**:3 (2010), 585–599. MR2662439
- [25] P. Cristofori, T. Kozlovskaya, A. Vesnin, *Cyclic generalizations of two hyperbolic icosahedral manifolds*, preprint, arXiv:1110.3134.
- [26] M.J. Dunwoody, *Cyclic presentations and 3-manifolds*, In: Proc. Inter. Conf., Groups-Korea '94, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1995) 47–55. MR1476948
- [27] D. Epstein, R. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Diff. Geom. **27** (1988), 67–80. MR0918457
- [28] M. Ferri, C. Gagliardi, L. Grasselli, *A graph-theoretical representation of PL-manifolds — a survey on crystallizations*, Aeq. Math., **31** (1986), 121–141. MR0867510
- [29] E. Fominykh, M. Ovchinnikov, *On the complexity of graph-manifolds*, Сиб. электрон. матем. изв., **2** (2005), 190–191. MR2177992
- [30] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Complexity and Heegaard genus of an infinite class of compact 3-manifolds*, Pacific J. Math., **210**:2 (2003), 283–297. MR1988535
- [31] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Dehn filling of cusped hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary*, J. Diff. Geom., **64**:3 (2003), 425–455. MR2032111
- [32] R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, *Small hyperbolic 3-manifolds with geodesic boundary*, Exp. Math., **13**:2 (2004), 171–184. MR2068891

- [33] M. Fujii, *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra*, Tokyo J. Math., **13** (1990), 353–373. MR1088237
- [34] W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann, *Minimal triangulations for an infinite family of lens spaces*, J. Topology, **2**:1 (2009), 157–180. MR2499441
- [35] W. Jaco, H. Rubinstein, S. Tillmann, *Coverings and minimal triangulations of 3-manifolds*, Algebr. Geom. Topol., **11**:3 (2011), 1257–1265. MR2801418
- [36] D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Minimum volume cusped hyperbolic three-manifolds*, J. Amer. Math. Soc., **22**:4 (2009), 1157–1215. MR2525782
- [37] L. Grasselli, M. Mulazzani, *Genus one 1-bridge knots and Dunwoody manifolds*, Forum Math., **13** (2001), 379–397. MR1831091
- [38] H. Helling, A.C. Kim, J.L. Menzies, *A geometric study of Fibonacci groups*, J. Lie Theory, **8** (1999), 1–23.
- [39] H.M. Hilden, M.T. Lozano, J.M. Montesinos-Amilibia, *The arithmeticity of the figure eight knot orbifolds*, Topology'90, Columbus, 1990. Berlin: de Gruyter, 1992. 169–183.
- [40] A. Kawachi, *A Survey of Knot Theory*, Birkhäuser, Basel, 1996. MR141749
- [41] S. Kojima, Y. Miyamoto, *The smallest hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, J. Diff. Geom., **34**:1 (1991), 175–192. MR1114459
- [42] B. Martelli, C. Petronio, *Complexity of geometric 3-manifolds*, Geom. Dedicata, **108** (2004), 15–69. MR2112664
- [43] S. Matveev, *Complexity theory of three-dimensional manifolds*, Acta Appl. Math., **19** (1990), 101–130. MR1074221
- [44] S. Matveev, C. Petronio, A. Vesnin, *Two-sided asymptotic bounds for the complexity of some closed hyperbolic three-manifolds*, J. Aus. Math. Soc., **86**:2 (2009), 205–219. MR2507595
- [45] A. Mednykh, A. Vesnin, *Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds*, J. Knot Theory Ram., **7**:3 (1998), 381–392. MR1625364
- [46] J. Minkus, *The branched cyclic coverings of 2-bridge knots and links*, Mem. Amer. Math. Soc., **35** (1982), no. 255. MR0643587
- [47] M. Mulazzani, A. Vesnin, *The many faces of cyclic branched coverings of 2-bridge knots and links*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, Supplemento al Vol. **40** (2001), 177–215. MR1881097
- [48] M. Mulazzani, A. Vesnin, *Generalized Takahashi manifolds*, Osaka Math. J., **39**:3 (2002), 705–721. MR1932289
- [49] L. Neuwirth, *An algorithm for the construction of 3-manifolds from 2-complexes*, Proc. Camb. Phil. Soc., **64** (1968), 603–613. MR0226642
- [50] L. Paoluzzi, B. Zimmermann, *On a class of hyperbolic 3-manifolds and groups with one defining relation*, Geom. Dedicata, **60** (1996), 113–123. MR1384422
- [51] C. Petronio, A. Vesnin, *Two-sided asymptotic bounds for the complexity of cyclic branched coverings of two-bridge links*, Osaka Math. J., **46**:4 (2009), 1077–1095. MR2604922
- [52] B. Ruini, F. Spaggiari, A. Vesnin, *On spines of Seifert fibered manifolds*, Aeq. Math., **65** (2003), 40–60. MR2012400
- [53] W. Thurston, *Three dimensional geometry and topology*, Princeton Math. Ser. 35, Princeton University Press, 1997. MR1435975
- [54] B. Zimmermann, *Determining knots and links by cyclic branched coverings*, Geom. Dedicata, **66** (1997), 149–157. MR1458787

Андрей Юрьевич Веснин  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. академика Коптюга 4,  
630090, Новосибирск, Россия  
E-mail address: vesnin@math.nsc.ru

Сергей Владимирович Матвеев,  
Челябинский государственный университет,  
ул. Братьев Кашириных 129,  
454001, Челябинск, Россия  
Институт математики и механики УРО РАН,  
ул. С. Ковалевской 16,  
620219, Екатеринбург, Россия  
E-mail address: matveev@csu.ru

ЕВГЕНИЙ АНАТОЛЬЕВИЧ ФОМИНЫХ  
ЧЕЛЯВИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ,  
ул. БРАТЬЕВ КАШИРИНЫХ 129,  
454001, ЧЕЛЯВИНСК, РОССИЯ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УРО РАН,  
ул. С. КОВАЛЕВСКОЙ 16,  
620219, ЕКАТЕРИНБУРГ, РОССИЯ  
*E-mail address: fominykh@csu.ru*