S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 369–371 (2011) УДК 512.5

MSC 20D15

О ЧАСТИЧНОМ ОБОБЩЕНИИ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА МАКДОНАЛЬДА

Д.В. Лыткина

Abstract. It is proved that if in every finite subgroup of a 2-group G the identity $[x,y]^2 = 1$ holds, then this identity holds in G also. In particular, G is locally finite, its derived subgroup is of exponent 4, and the second derived subgroup belongs to the center of G.

Keywords: p-группа, коммутант.

И. Д. Макдональд [1] показал, что группа G, в которой выполнено тождество $[x,y]^2 = 1$, является разрешимой, период её коммутанта равен 4, а второй коммутант G лежит в её центре.

Основным результатом настоящей заметки является

ТЕОРЕМА. *Пусть в каждой конечной подгруппе 2-группы G выполняется тождество $[x,y]^2 = 1$. Тогда это тождество выполняется и в группе G. В частности, G локально конечна, период её коммутанта равен 4, а второй коммутант лежит в центре G.*

Доказательство. Пусть G удовлетворяет условиям теоремы.

ЛЕММА 1.

(1) *Если $x, y \in G$ и $x^2 = y^2 = 1$, то $(xy)^4 = 1$.*

(2) *Если G порождена тремя инволюциями, то коммутант G — элементарная абелева группа и G — конечная группа периода 4.*

(3) *Если G порождена инволюцией и элементом порядка 4, то G конечна.*

Lytkina, D.V., Partial generalization of one of Macdonald's results.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 11-01-00456, президентской программы поддержки ведущих научных школ, проект НШ-3669.2010.1, и программы “Развитие научного потенциала высшей школы” Росиийского федерального агентства по образованию, грант 2.1.1.10726.

Поступила 9 сентября 2011 г., опубликована 20 декабря 2011 г.

Доказательство. Пункт (1) следует из условия в силу того, что две инволюции в группе порождают группу диэдра.

Пусть $G = \langle x, y, z\rangle$ и $x^2 = y^2 = z^2 = 1$. По пункту (1)

$$1 = (xy)^4 = (xz)^4 = (yz)^4 = ((xy)^2z)^4 = ((yz)^2x)^4 = ((zx)^2y)^4 = \\ = ((xy)^2(xz)^2)^4 = ((yz)^2(yx)^2)^4 = ((zx)^2(zy)^2)^4.$$

Вычисления в GAP [2] с помощью алгоритма перечисления смежных классов показывают, что $|G|$ не превосходит 2^{16}. В частности, G конечна, и следовательно $[xy, z]^2 = [xz, y]^2 = [yz, x]^2 = 1$. Дальнейшие вычисления в GAP после добавления этих равенств показывают, что $|G| \leqslant 2^8$, её коммутант C абелев и, следовательно, периода 2. Поскольку G/C периода два, то G периода 4. Пункт (2) доказан.

Пусть G порождена элементом x порядка 4 и инволюцией y. Тогда $H = \langle x^2, y, y^x\rangle$ инвариантна относительно x и поэтому является нормальной подгруппой в G индекса 1 или 2. По пункту (2) H конечна, поэтому G также конечна. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Если G порождена четырьмя инволюциями, то*

(1) *$G = ABCD$, где A, B, C, D — элементарные абелевы 2-подгруппы и D, CD, BCD нормальны в G;*
(2) *период G — делитель числа 8;*
(3) *если x — элемент порядка 8 из G, то x^2 — произведение двух инволюций.*

Доказательство. Пусть $G = \langle a, b, c, d\rangle$, где a, b, c, d — инволюции из G. По лемме 1(2), $H = \langle a, b, c\rangle$ — конечная группа периода 4. По лемме 1(3), $\langle d, h\rangle$ — конечная подгруппа для любого $h \in H$, и по условию $1 = [d, h]^2 = (d \cdot d^h)^2$, откуда $dd^h = d^hd$, $d^{h_1}d^{hh_1} = d^{hh_1}d^{h_1}$ для любого $h_1 \in H$, т. е. $D = \langle d^h \mid h \in H\rangle$ — элементарная абелева группа.

Аналогично доказывается, что $H = CK$, где $K = \langle a, b\rangle$, а $C = \langle c^k \mid k \in K\rangle$ — элементарная абелева нормальная подгруппа группы H. Это доказывает (1).

Поскольку H периода 4, то G как расширение элементарной абелевой группы D посредством группы периода 4 имеет период, делящий 8.

(3) По пункту (1) $x = yz$, где $y \in \langle a, b, c\rangle$, а $z \in D$. Поэтому $y^4 = 1$, а $z^2 = 1$. Теперь $x^2 = yzyz = yzy^{-1} \cdot y^2zy^2 \cdot y^2$. Так как $yzy^{-1} \cdot y^2zy^2 \in D$, а y^2 — инволюция, то утверждение следует из (1).

ЛЕММА 3. *Для любых инволюций $x, y, z, t, u \in G$ выполняется равенство*

$$\Big[\big[[x, y], [z, t]\big], u\Big] = 1.$$

Доказательство. По лемме 2 подгруппа $H = \langle x, y, z, t\rangle$ — конечная группа периода 8. Если h — элемент из H, порядок которого отличен от 8, то $\langle u, h\rangle$ — конечная группа по лемме 1(3) и по условию $[u, h]^2 = (uu^h)^2 = 1$, откуда $uu^h = u^hu$. Пусть h — элемент порядка 8 из H. По лемме 2(3) $h^2 = ab$, где a, b — инволюции, поэтому $K = \langle h^2, u, u^h\rangle \leq \langle a, b, u, u^h\rangle$ и по лемме 2 K — конечная подгруппа. Так как K инвариантна относительно h, то $\langle h, u\rangle = K\langle h\rangle$ конечна и, как и выше, $uu^h = u^hu$. Поэтому, как и в доказательстве леммы 2,

$D = \langle u^h \mid h \in H \rangle$ — конечная группа и $\langle x, y, z, t, u \rangle = DH$ также конечна. По [1, теор. 4], $\Big[\big[[x,y],[z,t]\big],u\Big] = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 4. *Группа G локально конечна.*

Доказательство. Пусть I — подгруппа, порождённая всеми инволюциями группы G, Z — её центр. По лемме 3 для любых инволюций $a, b, c, d \in I$ элемент $\big[[a,b],[c,d]\big]$ содержится в Z, т. е. $[a,b][c,d] = [c,d][a,b]$ по модулю Z. Многократное применение известных равенств

$$[xy, z] = [x, z]^y [y, z] \text{ и } [x, yz] = [x, z][x, y]^z$$

показывает, что $[x_1 x_2 \dots x_r, y_1 y_2 \dots y_s]$, где $x_1, \dots, x_r$, $y_1, \dots, y_s$ — инволюции, по модулю Z равно произведению коммутаторов вида $[z, t]$, где z и t — инволюции. Поэтому коммутант I коммутативен по модулю Z и, в частности, I — локально конечная группа. Если теперь F/I — конечная подгруппа из G/I, то F также локально конечна, и поэтому $F = F_0 I$, где F_0 — конечная подгруппа. По условию коммутаторы элементов из F_0 лежат в I и поэтому F/I коммутативна. По теореме из [3] G/I коммутативна, и следовательно G локально конечна. Лемма доказана.

Таким образом, в G выполняется тождество $[x,y]^2 = 1$. Теперь утверждение теоремы вытекает из [1, теор. 4] и леммы 4.

Список литературы

[1] I. D. Macdonald, *On certain varieties of groups* // Math. Z., **76**:2 (1961), 270–282. MR0130301
[2] *GAP: Groups, algorithms and programming* // http://www.gap-system.org.
[3] D. V. Lytkina, *On 2-groups, all of whose finite subgroups are of nilpotency class 2* // Sib. Electron. Math. Reports, **8** (2011), 1–3. MR2771619

Дарья Викторовна Лыткина
Сибирский государственный университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86,
630102, Новосибирск, Россия
E-mail address: daria.lytkin@gmail.com