S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 4–18 (2011) УДК 519.17
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ (245,64,18,16)

А. К. ГУТНОВА

Abstract. It was proved that a strongly regular graph in which neighborhoods of vertices are pseudogeometric graphs for $GQ(3,5)$ has the parameters (245,64,18,16). In this paper we found the possible orders and the structures of subgraphs of the fixed points of automorphisms of a strongly regular graph with parameters (245,64,18,16).

Keywords: automorphisms, strongly regular graph.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Если a, b — вершины графа Γ, то через $d(a,b)$ обозначается расстояние между a и b, а через $\Gamma_i(a)$ — подграф графа Γ, индуцированный множеством вершин, которые находятся в Γ на расстоянии i от вершины a. Подграф $\Gamma(a) = \Gamma_1(a)$ называется окрестностью вершины a и обозначается через $[a]$, если граф Γ фиксирован. Через $a^\perp$ обозначается подграф, являющийся шаром радиуса 1 с центром a.

Граф Γ называется *регулярным графом степени* k, если $[a]$ содержит точно k вершин для любой вершины a из Γ. Граф Γ называется *реберно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ), если Γ содержит v вершин, является регулярным степени k, и каждое ребро Γ лежит в λ треугольниках. Граф Γ называется *вполне регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ), если Γ реберно регулярен и подграф $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин в случае $d(a,b) = 2$. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.* Число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначим через $\lambda(a,b)$ (через $\mu(a,b)$), если $d(a,b) = 1$ (если $d(a,b) = 2$), а соответствующий подграф назовем (μ-) λ-подграфом.

Gutnova, A.K., On automorphisms of a strongly regular graph (245,64,18,16).

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00019).

Поступила 12 ноября 2010 г., опубликована 15 января 2011 г.

Через $K_{m_1,...,m_n}$ обозначим полный n-дольный граф, с долями порядков $m_1, ..., m_n$. Если $m_1 = ... = m_n = m$, то соответствующий граф обозначается через $K_{n\times m}$. Если $m \geq 2$, то граф $K_{1,m}$ называется *m-лапой. Треугольным графом* $T(m)$ называется граф с множеством неупорядоченных пар из X в качестве вершин, $|X| = m$ и пары $\{a, b\}, \{c, d\}$ смежны тогда и только тогда, когда они имеют единственный общий элемент. Граф на множестве вершин $X \times Y$ называется *$m\times n$-решеткой*, если $|X| = m$, $|Y| = n$ и вершины (x_1, y_1), (x_2, y_2) смежны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$ или $y_1 = y_2$. Для подграфа Δ через $|\Delta|$ обозначим число его вершин а через $X_i(\Delta)$ обозначим множество вершин из $\Gamma - \Delta$, смежных точно с i вершинами из Δ.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u, w)$ (через $c_i(u, w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ (пересечении $\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Заметим, что в реберно регулярном графе с параметрами (v, k, λ) значение $b_1(u, w)$ не зависит от выбора ребра $\{u, w\}$ и равно $k - \lambda - 1$.

В [1] классифицированы связные вполне регулярные локально псевдо $GQ(3, 5)$-графы. Если диаметр графа равен 2, то граф имеет параметры $(245, 64, 18, 16)$. В данной работе найдены возможные автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(245, 64, 18, 16)$ и определены подграфы их неподвижных точек. Для автоморфизма g через $\alpha_i(g)$ обозначим число пар вершин (u, u^g) таких, что $d(u, u^g) = i$.

Теорема 1. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф с параметрами* $(245, 64, 18, 16)$, *g — элемент простого порядка p из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ *и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда верно одно из утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и $p = 5$ и $\alpha_1(g)$ делится на* 70 *или $p = 7$ и $\alpha_1(g)$ делится на* 98;

(2) Ω *является n-кликой, и либо*

(*i*) $n = 5$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 42r + 12$ *или* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 70s - 30$, *либо*

(*ii*) $n = 8$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 42r - 6$, *либо*

(*iii*) $n = 10$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 70s + 10$;

(*iv*) $n = 11$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 42r + 18$;

(3) Ω *является m-кокликой, $p = 2$, m нечетно,* $5 \leq m \leq 21$ *и* $\alpha_1(g) - 8m$ *делится на* 14;

(4) Ω *содержит геодезический* 2*-путь и либо*

(*i*) $p = 7$, $|\Omega| = 7r$, $5 \leq r \leq 11$ *и* $\alpha_1(g)/14 + 3r$ *делится на* 7, *либо*

(*ii*) $p = 5$, $|\Omega| = 5s$, $4 \leq s \leq 15$ *и* $\alpha_1(g)/5 + s$ *делится на* 14;

(*iii*) $p = 3$, $|\Omega| = 3t + 2$, $\alpha_1(g) = 6w$ *и* $3t + 2 + w$ *делится на* 7;

(*iv*) $p = 2$, $|\Omega| = 2l + 1$, $2 \leq l \leq 38$, $\alpha_1(g) = 2w$ *и число* $(6l + 3 + w)/7$ *нечетно.*

2. Предварительные результаты

В этом параграфе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть* Γ *является сильно регулярным графом с параметрами* (v, k, λ, μ) *и неглавными собственными значениями* r, s, $s < 0$. *Если* Δ *— индуцированный регулярный подграф из* Γ *степени* d *на* w *вершинах, то*

$$s \leq d - \frac{w(k-d)}{v-w} \leq r,$$

причем одно из равенств достигается тогда и только тогда, когда каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ *смежна точно с* $w(k-d)/(v-w)$ *вершинами из* Δ.

Доказательство. Это утверждение хорошо известно (см., например, §2 из [2]).

Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(245, 64, 18, 16)$ и неглавными собственными значениями $8, -6$ кратностей $100, 144$. Если Δ — индуцированный регулярный подграф из Γ степени d на w вершинах, то

$$-6 \le d - \frac{w(64-d)}{245-w} \le 8.$$

Ввиду границ Хофмана порядок коклики в Γ не больше 21, а порядок клики L не больше 11.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— сильно регулярный граф, имеющий параметры* (v, k, λ, μ). *Тогда либо* $k = 2\mu$, $\lambda = \mu - 1$ *(так называемый половинный случай), либо неглавные собственные значения* $n - m$, $-m$ *графа* Γ *— целые числа, где* $n^2 = (\lambda-\mu)^2 + 4(k-\mu)$, $n - \lambda + \mu = 2m$ *и кратность* $n - m$ *равна* $\dfrac{k(m-1)(k+m)}{\mu n}$. *Далее, если* m *— целое число, большее* 1, *то* $m - 1$ *делит* $k - \lambda - 1$ *и*

$$\mu = \lambda + 2 + (m-1) - \frac{k-\lambda-1}{m-1}, \ n = m - 1 + \frac{k-\lambda-1}{m-1.}$$

Доказательство. Это лемма 3.1 из [3].

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами сильно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом графу Γ отвечает симметричная схема отношений $(X, \{R_0, ..., R_2\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X, R_1 — отношение смежности в Γ, R_2 — отношение смежности в дополнительном графе $\bar{\Gamma}$. Если P и Q — первая и вторая матрицы собственных значений схемы, то

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & r & s \\ v-k-1 & -r-1 & -s-1 \end{pmatrix},$$

$PQ = QP = vI$. Здесь v — число вершин, k, r, s — собственные значения графа Γ кратностей $1, f, v-f-1$ соответственно (указанные кратности образуют первый столбец матрицы Q).

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных $\psi(G)$- инвариантных подпространств $W_0 \oplus W_1 \oplus W_2$ матрицы смежности графа Γ. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда для любого $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{2} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть равенства для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 3. *Пусть Γ является сильно регулярным графом, g — элемент порядка p группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ и χ — характер проекции мономиального представления группы G на подпространство размерности m собственных векторов матрицы смежности графа, отвечающих неглавному собственному значению. Тогда $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого l, не кратного p и $m - \chi(g)$ делится на p.*

Доказательство. Эта лемма 2 из [5].

Лемма 4. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(245, 64, 18, 16)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Γ содержит подграф $K_{m,n}$, то $mn \le 36$;*

(2) *значение характера, полученного при проектировании мономиального представления на подпространство размерности 144, на элементе $g \in \mathrm{Aut}(\Gamma)$ равно $\chi_2(g) = (8\alpha_0(g) - \alpha_1(g))/14 + 4$ и если $|g| = p$ — простое число, то $144 - \chi_2(g)$ делится на p.*

Доказательство. Если Γ содержит подграф $K_{m,n}$, то этот подграф имеет собственное значение $-\sqrt{mn}$, поэтому $mn \le 36$.

Рассмотрим сильно регулярный граф Γ с параметрами $(245, 64, 18, 16)$. Тогда Γ имеет неглавные собственные значения $n - m = 8, -m = -6$ кратностей $100, 144$,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 64 & 8 & -6 \\ 180 & -9 & 5 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 100 & 25/2 & -5 \\ 144 & -27/2 & 4 \end{pmatrix}$$

и значение характера, полученного при проектировании на подпространство размерности 100 равно $\chi_1(g) = (20\alpha_0(g) + 5\alpha_1(g)/2 - \alpha_2(g))/49$. Подставляя в эту формулу значение $\alpha_2(g) = 245 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g) = (6\alpha_0(g) + \alpha_1(g))/14 - 5$.

По лемме 3 число $100 - \chi_1(g)$ делится на p.

Лемма 5. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v, k, λ, μ), Δ— индуцированный подграф с N вершинами, M ребрами и степенями вершин $d_1, \ldots, d_N$. Тогда*
$(v - N) - (kN - 2M) + (\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = x_0 + \sum_{i=3}^{N} \binom{i-1}{2} x_i$,
где $x_i = x_i(\Delta)$.

Доказательство. Подсчитав число вершин в $\Gamma - \Delta$, число ребер между Δ и $\Gamma - \Delta$, и число троек вида $(a, \{b, c\})$, где $a \in \Gamma - \Delta, b, c \in \Delta \cap [a]$, получим равенства:

$v - N = \sum x_i$,

$kN - 2M = \sum ix_i$ и

$\lambda M + \mu(\binom{N}{2} - M) - \sum_{i=1}^{N} \binom{d_i}{2}) = \sum \binom{i}{2} x_i$.

Вычитая второе равенство из суммы первого и третьего, получим требуемое. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(245, 64, 18, 16)$, U — трехвершинный подграф из Γ, Y_i — множество вершин из*

$\Gamma - U$, смежных точно с i вершинами из U, $y_i = |Y_i|$. Тогда выполняются следующие утверждения:

(1) $y_0 + y_3 = 98$, *если U является кокликой;*

(2) $y_0 + y_3 = 107$, *если U является кликой;*

(3) $y_0 + y_3 = 105$, *если U является 2-путем;*

(4) $y_0 + y_3 = 102$, *если U является объединением изолированной вершины и ребра.*

Доказательство. Для двух несмежных вершин u, w граф Γ содержит 16 вершин из $[u]\cap[w]$, по 48 вершин из $[u]-[w]$, $[w]-[u]$ и 131 вершину из $\Gamma_2(u)\cap\Gamma_2(w)$. Для смежных вершин u, w граф Γ содержит 18 вершин из $[u]\cap[w]$, по 45 вершин из $[u] - w^\perp$, $[w] - u^\perp$ и 135 вершин из $\Gamma_2(u) \cap \Gamma_2(w)$.

Если U является 3-кокликой, то Γ содержит $3(16 - y_3)$ вершин из Y_2, $3(32 + y_3)$ вершин из Y_1 и $98 - y_3$ вершин из Y_0, поэтому $y_0 + y_3 = 98$. Аналогично доказывается, что $y_0 + y_3 = 107$, если U является кликой.

Если U является геодезическим 2-путем $u_1u_2u_3$, то Y_2 содержит $15 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_3]$, и по $18 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_2] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $26 + y_3$ вершин из $[u_2]$ и по $30 + y_3$ вершин из $[u_1]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $105 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 105$.

Если U является объединением изолированной вершины u_1 и ребра $\{u_2, u_3\}$, то Y_2 содержит $18 - y_3$ вершин из $[u_2] \cap [u_3]$ и по $16 - y_3$ вершин из $[u_1] \cap [u_2]$, $[u_1] \cap [u_3]$, Y_1 содержит $32 + y_3$ вершин из $[u_1]$ и по $29 + y_3$ вершин из $[u_2]$, $[u_3]$, Y_0 содержит $102 - y_3$ вершин, поэтому $y_0 + y_3 = 102$.

Лемма 7. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами (v, k, λ, μ) и собственными значениями $k, r, -m$. Если g — автоморфизм Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$, то $|\Omega| \le v\max\{\lambda, \mu\}/(k - r)$.*

Доказательство. Это теорема 3.2 из [6].

3. Автоморфизмы графа с параметрами $(245, 64, 18, 16)$

В этом параграфе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(245, 64, 18, 16)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. По лемме 7 имеем $|\Omega| \le 245 \cdot 18/56 = 35 \cdot 9/4$, поэтому $|\Omega| \le 78$.

Лемма 8. *Если Ω — пустой граф, то выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) $p = 5, \alpha_1(g) \in \{0, 70, 140, 210\}$;

(2) $p = 7, \alpha_1(g) \in \{0, 98, 196\}$.

Доказательство. Так как $245 = 5 \cdot 49$, то $p \in \{5, 7\}$.

Пусть $p = 5$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что $\alpha_1(g)$ делится на 70.

Пусть $p = 7$. Из леммы 3 следует, что $\chi_1(g) = \alpha_1(g)/14 - 5$ и $100 - \chi_1(g)$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g)$ делится на 98. Лемма доказана.

В леммах 9–15 предполагается, что $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$ содержит вершину a. Положим $X_i = X_i(\Omega)$ и $x_i = |X_i|$.

Лемма 9. *Пусть Ω является n-кликой. Тогда выполняется одно из утверждений:*

(1) $n = 5$ *и либо* $p = 3$, $\alpha_1(g) = 42r + 12$, *либо* $p = 5$, $\alpha_1(g) = 70s - 30$;
(2) $n = 8$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 42r - 6$;
(3) $n = 10$, $p = 5$ *и* $\alpha_1(g) = 70s + 10$;
(4) $n = 11$, $p = 3$ *и* $\alpha_1(g) = 42r + 18$.

Доказательство. Пусть Ω является n-кликой, $n \le 11$. Подсчитав число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$, а также число треугольников с основанием в Ω и вершиной в $\Gamma - \Omega$, получим равенства $\sum x_i = 245 - n$, $\sum ix_i = n(65 - n)$, $\sum \binom{i}{2} x_i = \binom{n}{2}(20 - n)$.

Пусть $n = 1$. Тогда p делит 64 и 180, поэтому $p = 2$. Пусть $u \in [a]$. Тогда подграф $[u] \cap [u^g]$ является g-допустимым, содержит четное число вершин и единственную неподвижную точку, противоречие.

Пусть $n \ge 2$. Тогда p делит $20 - n$ и $k - \lambda - 1 = 45$, поэтому либо $p = 5$ и $n \in \{5, 10\}$, либо $p = 3$ и $n \in \{2, 5, 8, 11\}$.

Пусть $n = 2$. Из целочисленности $\chi_1(g)$ следует, что $\alpha_1(g) - 2$ делится на 14. Далее, $x_0 = 135, x_1 = 90, x_2 = 18$. Противоречие с тем, что $x_1 = 0$.

Пусть $n = 5$. Тогда $p \in \{3, 5\}$ и $\chi_1(g) = (30 + \alpha_1(g))/14 - 5$. В случае $p = 3$ имеем $\alpha_1(g) = 3w$ и $w - 4$ делится на 14, поэтому $\alpha_1(g) = 42r + 12$. В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 5w$ и $w + 6$ делится на 14, поэтому $\alpha_1(g) = 70s - 30$.

Пусть $n = 8, p = 3$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что 14 делит $3w + 6$ и $\alpha_1(g) = 42r - 6$.

Пусть $n = 10$. Тогда $p = 5$ и $\chi_1(g) = (60 + \alpha_1(g))/14 - 5$. Далее, $\alpha_1(g) = 5w$ и $w - 2$ делится на 14, поэтому $\alpha_1(g) = 70s + 10$.

Пусть $n = 11, p = 3$. Из целочисленности $\chi_2(g)$ следует, что 14 делит $3w - 18$ и $\alpha_1(g) = 42r + 18$.

Лемма 10. *Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Тогда $p = 2$, m нечетно, $5 \le m \le 21$ и $\alpha_1(g) - 8m$ делится на 14.*

Доказательство. Уравнения для x_i получим как и в лемме 9: $\sum x_i = 245 - m$, $\sum ix_i = 64m$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 16\binom{m}{2}$. В случае $m = 3$ имеем $\sum x_i = 242$, $\sum ix_i = 192$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 48$, поэтому $x_0 = 98 - x_3$, $x_2 = 48 - 3x_3$, $x_1 = 242 - (98 - x_3) - (48 - 3x_3) - x_3 = 96 + 3x_3$.

Для различных вершин $a, b \in \Omega$ элемент g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$ и на $\Gamma_2(a) \cap \Gamma_2(b) - \Omega$, поэтому p делит 16 и $131 - (m - 2)$. Поэтому $p = 2$, m нечетно и числа x_i четны. Поэтому $m \ne 3$. В случае $m = 5$ имеем $x_0 + x_2 + x_4 = 240$, $\sum ix_i = 320$, $\sum \binom{i}{2} x_i = 160$, поэтому $x_0 = 80 - 3x_4$, $x_2 = 160 - 6x_4$ и $x_4 = 0$.

Из леммы 3 следует, что $\chi_1(g) = (6m + \alpha_1(g))/14 - 5$ и число $(6m + \alpha_1(g))/14$ нечетно, поэтому $\alpha_1(g) - 8m$ делится на 14.

Ввиду границы Хофмана для коклик имеем $m \le 21$ и в случае $m = 21$ любая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 6 вершинами из Ω.

Лемма 11. *Если Ω является объединением m ($m \ge 2$) изолированных клик, то Ω — коклика.*

Доказательство. Пусть Ω является объединением m ($m \ge 2$) изолированных клик порядков $n_1, ..., n_m$, $n_1 \ge 2$. Если a, c — смежные вершины из Ω, то g

действует полурегулярно на $[a] \cap [c]$ и на $[a] - c^{\perp}$, поэтому p делит $18 - (n_i - 2)$ и 45. Если же a, b — несмежные вершины из Ω, то g действует полурегулярно на $[a] \cap [b]$ и p делит 16, противоречие.

Лемма 12. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $a \in \Omega$ и $[a]$ не содержится в Ω, то $p \leq 3$;*

(2) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18, 16)$ и $p \leq 13$;*

(3) *Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18, 16-p)$ или $(v', k', 18-p, 16)$.*

Доказательство. Пусть $a \in \Omega$ и $[a] \subset \Omega$. Тогда для $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $\Omega \cap [u]$ содержит 16 вершин из $[a]$. Допустим, что $|\Omega| = 65$. Если для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кокликой, то $\alpha_1(g) = 0$ и $\chi_2(g) = 8 \cdot 65/14 + 4$, противоречие. Если некоторая орбита $u^{\langle g \rangle}$ содержит геодезический 2-путь, то μ-подграф концов этого пути содержит не менее 17 вершин, противоречие. Значит, каждая орбита $u^{\langle g \rangle}$ длины p является кликой или кокликой и $p \leq 3$.

Пусть $|\Omega| > 65$. Допустим, что для некоторой вершины $b \in \Omega - a^{\perp}$ имеем $[b] \subset \Omega$. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma - \Omega$ получим $[u] \cap \Omega = [a] \cap [b]$. В этом случае $|\Gamma - \Omega| \leq 18$, противоречие. Значит, каждая вершина b из $\Omega - a^{\perp}$ смежна с вершиной u из $\Gamma - \Omega$. Тогда подграф $u^{\langle g \rangle}$ является кликой, $[u] \cap [u^g]$ содержит b, 16 вершин из $[a]$ и $p - 3$ вершин из $u^{\langle g \rangle}$. Поэтому $p \leq 3$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 16)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' - 60$ и 16 делит $k'(k' - 19)$. Поэтому $k' \in \{32, 35, 48, 51\}$ и так как $k' - 15$ — квадрат, то Ω имеет параметры $(154, 51, 18, 16)$, собственные значения $7, -5$, причем кратность 7 равна $4 \cdot 51 \cdot 56/(16 \cdot 12)$, противоречие.

Допустим, что $p \geq 17$. Тогда $\lambda_{\Omega} \in \{1, 18\}$ и $\mu_{\Omega} = 16$. Поэтому либо Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 16)$, либо $p = 17$ и $|\Omega(a) \cap [b]| = 1$ для некоторых смежных вершин $a, b \in \Omega$. Заметим, что $|\Gamma - \Omega| = 17t$, $9 \leq t \leq 13$. Пусть $a \in \Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(a)$, смежных точно с $17i - 6$ вершинами из $\Omega - a^{\perp}$, $m_i = |M_i|$.

В случае $t = 13$ имеем $|\Omega| = 24$, противоречие с тем, что степень вершины в Ω не меньше 30. В случае $t = 12$ имеем $|\Omega| = 41$, поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (41,30,18,16), противоречие. В случае $t = 11$ имеем $|\Omega| = 58$, поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (52,30,18,16), противоречие. В случае $t = 10$ имеем $|\Omega| = 75$ и степени вершин в Ω равны 30 или 47. Если степень a в Ω равна 47, то $m_1 + m_2 = 47$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $11m_1 + 28m_2 = 27 \cdot 16$, противоречие.

В случае $t = 9$ имеем $|\Omega| = 92$ и степень вершины в Ω равна 30 или 47. Если степень a в Ω равна 47, то $m_1 + m_2 = 47$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega - a^{\perp}$ равно $11m_1 + 28m_2 = 44 \cdot 16$. Отсюда $m_2 = 11$. Пусть $u \in [a] - \Omega$. Тогда M_1 состоит из смежных с u вершин, имеющих степень 30 в Ω, противоречие с тем, что $|[u] \cap \Omega| \geq 37$. Значит, Ω — регулярный подграф из Γ степени 30 на 92 вершинах. По лемме 1 имеем противоречие с тем, что $-6 \leq 30 - 92 \cdot 34/153 \leq 8$. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18, 16 - p)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 + 8p - 60$ и $16 - p$ делит $k'(k' - 19)$.

Так как $18 > 16 - p$, то Ω — не полный многодольный граф. В случае $p = 13$ число $4k' + 213$ — квадрат и 3 делит $k'(k' - 19)$, поэтому $k' = 57$, Ω имеет собственные значения $18, -3$, противоречие с тем, что $18 > 8$.

В случае $p = 11$ число $4k' + 149$ — квадрат и 5 делит $k'(k' - 19)$, поэтому $k' = 35$, Ω имеет собственные значения $15, -2$, противоречие с тем, что $15 > 8$.

В случае $p = 7$ число $4k' + 45$ — квадрат и 9 делит $k'(k' - 19)$, поэтому $k' = 45$, Ω имеет собственные значения $12, -3$, противоречие с тем, что $12 > 8$.

В случае $p = 5$ число $4k' + 5$ — квадрат и 11 делит $k'(k' - 19)$, поэтому либо $k' = 55$, Ω имеет собственные значения $11, -4$, противоречие с тем, что $11 > 8$, либо $k' = 41$, Ω имеет собственные значения $10, -3$, противоречие с тем, что $10 > 8$.

В случае $p = 3$ число $4k' - 17$ — квадрат и 13 делит $k'(k' - 19)$, противоречие.

В случае $p = 2$ число $4k' - 40$ — квадрат и 14 делит $k'(k' - 19)$, противоречие.

Пусть Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(v', k', 18 - p, 16)$. Тогда $n^2 = (\lambda - \mu)^2 + 4(k' - \mu) = 4k' + p^2 - 4p - 60$ и 16 делит $k'(k' - 19 + p)$.

Допустим сначала, что Ω — полный многодольный граф $K_{a\times b}$. Тогда $(a - 1)b = 16$ и $(a - 2)b = 18 - p$, поэтому $b = p - 2$ делит 16, противоречие.

В случае $p = 13$ имеем $n^2 = 4k' + 57$, 16 делит $k'(k' - 6)$, противоречие.

В случае $p = 11$ имеем $n^2 = 4k' + 17$, 16 делит $k'(k' - 8)$, поэтому $k' = 52$, Ω имеет собственные значения $3, -12$, противоречие с тем, что $-12 < -6$.

В случае $p = 7$ имеем $n^2 = 4k' - 39$, 16 делит $k'(k' - 12)$, поэтому либо $n = 11, k' = 40$, либо $n = 13, k' = 52$. В первом случае Ω имеет собственные значения $3, -8$, противоречие с тем, что $-8 < -6$. Во втором случае Ω имеет собственные значения $4, -9$, противоречие с тем, что $-9 < -6$.

В случае $p = 5$ имеем $n^2 = 4k' - 55$, 16 делит $k'(k' - 14)$, поэтому $n = 13, k' = 56$, Ω имеет собственные значения $5, -8$, противоречие с тем, что $-8 < -6$.

В случае $p = 3$ имеем $n^2 = 4k' - 63$, 16 делит $k'(k' - 16)$, поэтому либо $n = 7, k' = 28$, либо $n = 9, k' = 36$. В первом случае Ω имеет параметры $(50, 28, 15, 16)$. Во втором случае Ω имеет параметры $(82, 36, 15, 16)$. В обоих случаях по лемме 1, примененной к подграфу Ω, имеем противоречие с тем, что

$$-6 \le d - \frac{w(64 - d)}{245 - w} \le 8.$$

В случае $p = 2$ имеем $n^2 = 4k' - 64$, 16 делит $k'(k' - 17)$, поэтому $n = 8, k' = 32$ и Ω имеет собственные значения $4, -4$. Итак, Ω имеет параметры $(63, 32, 16, 16)$. Но по лемме 1, примененной к подграфу Ω степени $d = 32$ на $w = 63$ вершинах, имеем противоречие с тем, что

$$-6 \le 32 - \frac{63 \cdot 32}{182} \le 8.$$

Итак, Ω не является сильно регулярным графом с параметрами $(v', k', 18 - p, 16)$. Лемма доказана.

Лемма 13. *Число p не равно* 13.

Доказательство. Пусть $p = 13$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 5 или 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a, b \in \Omega$ подграф $\Omega(a) \cap [b]$ содержит 3 или 16 вершин. Степень вершины в Ω сравнима с -1 по модулю 13.

Далее $|\Gamma - \Omega| = 13t, 13 \le t \le 17$. Пусть $a \in \Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(a)$ смежных точно с $6 + 13i$ вершинами из $\Omega - a^\perp$, $m_i = |M_i|$.

При $t > 16$ имеем $|\Omega| \leq 24$, поэтому $t = 17$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (24,12,5,3), противоречие.

Пусть $t = 16$. Тогда $|\Omega| = 37$ и степени вершин в Ω равны 12 или 25. По лемме 3 имеем $\chi_1(g) = (152 + \alpha_1(g))/14$, поэтому $\alpha_1(g) = 156$. Если a — вершина из Ω степени 12, то $m_0 + m_1 = 12$, $6m_0 + 19m_1 = 24 \cdot 3$, $m_0 = 12$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (37,12,5,3), противоречие с тем, что $(5-3)^2 + 4 \cdot 9 = 40$ не является квадратом.

Пусть $t = 15$. Тогда $|\Omega| = 50$ и степени вершин в Ω равны 12, 25 или 38. Если a — вершина из Ω степени 38, то $m_0 = 38$, $6 \cdot 38 = 3n + 16(11-n)$, противоречие. Если a — вершина из Ω степени 12, то $m_0 + m_1 = 12$, $6m_0 + 19m_1 = 37 \cdot 3$, поэтому $m_1 = 3$ и $m_0 = 9$. Значит, каждая вершина степени 12 в Ω смежна точно с 3 вершинами степени 25 в Ω.

Если a, b — две вершины из Ω степени 25, то либо a, b смежны и $a^\perp \cup b^\perp$ содержит $2 + 18 + 12$ или $2 + 5 + 38$ вершин из Ω, либо a, b не смежны и $a^\perp \cup b^\perp$ содержит $2 + 16 + 18$ или $2 + 3 + 44$ вершин из Ω. Пусть $c \in \Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$ и $\Omega(c)$ содержит β вершин из $[a] \cap [b]$. В случае $|\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)| = 1$ число $6 - \beta$ сравнимо с -1 по модулю 13, поэтому $\beta = 7$, противоречие. В случае $|\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)| = 5$ подграф $\Omega(c)$ содержит $\beta + 6$ (или $\beta - 7$) вершин из $\Omega - (a^\perp \cup b^\perp)$, противоречие. Теперь $m_0 + m_1 = 25$, $6m_0 + 19m_1 = 3n + 16(24 - n)$, поэтому $m_1 + n = 18$, число вершин степени 12 в Ω равно $m_0 + n = 43 - 2m_1$ и число ребер между вершинами степени 12 в Ω и вершинами степени 25 в Ω равно $3(m_0 + n)$, но не меньше $7(50 - m_0 - n)$, поэтому $m_0 + n \geq 35$ и $m_1 \leq 4$. Теперь $3(m_0 + n) \geq 21(50 - m_0 - n)$, поэтому $m_0 + n \geq 350/8$, противоречие.

Пусть $t = 14$. Тогда $|\Omega| = 63$, по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = (308 + \alpha_1(g))/14$, поэтому $\alpha_1(g) \in \{0, 182\}$. В последнем случае каждая $\langle g \rangle$-орбита на $\Gamma - \Omega$ является 13-кликой, противоречие. Значит, $\alpha_1(g) = 0$ и каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна не более чем с 16 вершинами из Ω. Далее, степени вершин в Ω равны 12, 25, 38 или 51. Если a — вершина из Ω степени 51, то $m_0 = 51$, $6 \cdot 51 = 3n + 16(11 - n)$, противоречие. Если a — вершина из Ω степени 12, то каждая вершина из $\Omega - \{a\}$ смежна с некоторой $\langle g \rangle$-орбитой на $[a] - \Omega$, поэтому число ребер между Ω и $[a] - \Omega$, деленное на 13, равно 66. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[a] - \Omega$ смежна более чем с 16 вершинами из Ω. Итак, степени вершин в Ω равны 25 или 38.

Если a — вершина из Ω степени 38, то $m_0 + m_1 = 38$, $6m_0 + 19m_1 = 3n + 16(24 - n)$, поэтому $m_1 + n = 12$. В случае $n \geq 2$ подграф $\Omega - a^\perp$ содержит две вершины e_1, e_2, смежные точно с 3 вершинами из $\Omega(a)$, противоречие с тем, что $\Omega(e_1) \cap [e_2]$ содержит не менее 20 вершин из $\Omega - a^\perp$. Значит, $n \leq 1$ и $m_1 \geq 11$. Теперь число ребер между M_1 и $\Gamma - \Omega$, деленное на 11, не меньше $11 \cdot 2$, а число $\langle g \rangle$-орбит на $\Gamma - \Omega$ равно 14. Поэтому некоторая вершина u из $\Gamma - \Omega$ смежна с двумя вершинами b, c из M_1, противоречие с тем, что $[b] \cap [c]$ содержит 13 вершин из $u^{\langle g \rangle}$ и не менее 14 вершин из $\Omega - a^\perp$.

Пусть $t = 13$. Тогда $|\Omega| = 76$, по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = (386 + \alpha_1(g))/14$, поэтому $\alpha_1(g) = 130$. Далее, степени вершин в Ω равны 12, 25, 38 или 51. Если a— вершина из Ω степени 12, то каждая вершина из $\Omega - \{a\}$ смежна с некоторой $\langle g \rangle$-орбитой на $[a] - \Omega$, поэтому число ребер между Ω и $[a] - \Omega$, деленное на 13, равно 79. Противоречие с тем, что некоторая вершина из $[a] - \Omega$ смежна более чем с 18 вершинами из Ω. Если a — вершина из Ω степени 51, то $m_0 + m_1 = 51$, $6m_0 + 19m_1 = 3n + 16(24 - n)$ и $m_1 + n = 6$. Для $u \in [a] - \Omega$ подграф $[a] \cap [u]$

содержит не более 6 вершин из M_1 и не менее 12 вершин из $u^{\langle g\rangle}$, поэтому $u^{\langle g\rangle}$ является 13-кликой, противоречие. Итак, степени вершин в Ω равны 25 или 38.

Если $u^{\langle g\rangle}$ является 13-кокликой, то для любого $i \in \{1,...,6\}$ найдутся еще две орбиты, в которых элемент не смежен со своим образом под действием g^i. Поэтому имеется двенадцать $\langle g\rangle$-орбит, являющихся графами, дополнительными к 13-угольнику. Далее, число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 13, не больше $16+12\cdot 7$, но не меньше $76\cdot 2$, противоречие. Значит, на $\Gamma-\Omega$ нет кокликовых $\langle g\rangle$-орбит. Пусть x — число вершин степени 25 в Ω. Тогда число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 13, равно $3x+2(76-x)$, но не больше $13\cdot 15$, поэтому $x\le 42$.

Если a — вершина из Ω степени 38, то $m_0+m_1+m_2=38$, $6m_0+19m_1+32m_2=3n+16(37-n)$, поэтому $m_1+2m_2+n=28$. Допустим, что Ω содержит такие две вершины a,b, что $|\Omega-(a^\perp\cup b^\perp)|=1$. Тогда a,b — несмежные вершины из Ω степени 38 и $|\Omega(a)\cap[b]|=3$. Пусть $c\in\Omega-(a^\perp\cup b^\perp)$ и $\Omega(c)$ содержит β вершин из $[a]\cap[b]$. Так как $6-\beta$ сравнимо с -1 по модулю 13, то $\beta=7$, противоречие. Если $m_2>0$, $b\in M_2$, то любая несмежная с b вершина c из $\Omega-a^\perp$ имеет степень 25 в Ω и смежна с 16 вершинами из $\Omega(a)$. Противоречие с тем, что $[b]\cap[c]$ содержит от 0 до 5 вершин из $\Omega(a)$ и от 5 до 9 вершин из $\Omega-a^\perp$. Значит, $m_2=0$. Таким образом, любые две вершины степени 38 в Ω не имеют общих соседей в $\Gamma-\Omega$ и число вершин степени 38 в Ω не больше 6. Поэтому число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 13, не меньше $3\cdot 70+2\cdot 6$, но не больше $13\cdot 16$, противоречие.

Лемма 14. *Число p не равно* 11.

Доказательство. Пусть $p=11$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 7 или 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ содержит 5 или 16 вершин. Степень вершины в Ω сравнима с -2 по модулю 11. Если степень вершины a в Ω равна 9, то $\Omega(a)$ — регулярный граф степени 7 на 9 вершинах, противоречие.

Далее $|\Gamma-\Omega|=11t, 16\le t$. Пусть $a\in\Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(a)$ смежных точно с $1+11i$ вершинами из из $\Omega-a^\perp$, $m_i=|M_i|$.

При $t>19$ имеем $|\Omega|\le 25$, поэтому $t=20$ и Ω — регулярный граф степени 20 на 25 вершинах, противоречие.

Пусть $t=19$. Тогда $|\Omega|=36$ и степени вершин в Ω равны 20 или 31. Если a — вершина из Ω степени 31, $b\in\Omega-a^\perp$, то $|\Omega(a)\cap[b]|\ge 17$, противоречие. Поэтому Ω — сильно регулярный граф с параметрами (36,20,7,16), противоречие с тем, что $(7-16)^2+4\cdot 4=97$ не является квадратом.

Пусть $t=18$. Тогда $|\Omega|=47$ и степени вершин в Ω равны 20 или 31. Если a — вершина из Ω степени 31, то $m_0+m_1=31$, $m_0+12m_1=16\cdot 15$, поэтому $m_1=19$ и множество вершин степени 31 в Ω образует l-клику. Если M_1 содержит по крайней мере 4 вершины степени 20 в Ω, то некоторая вершина из $[a]-\Omega$ смежна с двумя вершинами b,c из M_1 степени 20 в Ω, противоречие с тем, что $[b]\cap[c]$ содержит 11 вершин из $[a]-\Omega$ и не менее 9 вершин из $\Omega-a^\perp$. Значит, $l\ge 17$, противоречие.

Итак, Ω — регулярный граф степени 20, $m_0+m_1=20$, $m_0+12m_1=5n+16(26-n)$, поэтому $m_1+n=36$ и $n\ge 16$. Если некоторая вершина из $[a]-\Omega$ смежна с пятью вершинами $e_1,...,e_5$ из $\Omega-a^\perp$, то $\{e_1,...,e_5\}$ является кликой и $\Omega(e_i)\cap[e_j]$ содержит точно 4 вершины из $\Omega'=\Omega-(a^\perp\cup\{e_1,...,e_5\})$. Теперь

$[e_3]$ и $[e_4]$ содержат по 4 вершины из $\Omega'(e_1)-[e_2]$, $\Omega'(e_2)-[e_1]$ и 3 вершины из $\Omega'-([e_1]\cup[e_2])$, противоречие с тем, что $|\Omega'(e_3)\cap[e_4]|\geq 5$. Значит, $n=16, m_1=20$, противоречие с тем, что Ω — реберно регулярный граф с параметрами (47,20,7).

Пусть $u\in\Gamma-\Omega$, N_i — множество $\langle g\rangle$-орбит длины 13, отличных от $u^{\langle g\rangle}$ и пересекающих $[u]$ точно по i вершинам, $n_i=|N_i|$. Покажем, что u смежна не более чем с 13 вершинами из Ω.

Допустим, что u смежна с 16 вершинами из Ω. Тогда степень u в Γ не больше $16+17$. Допустим, что u смежна с 15 вершинами из Ω. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то либо $n_3=1, n_2=2$, либо $n_2=5$. В любом случае степень u в Γ не больше $15+2\cdot 5+11$. Если $u^{\langle g\rangle}$ является 11-угольником, то N_2 содержит не более трех орбит, вершины которых смежны с ребрами из $u^{\langle g\rangle}$, и не более трех орбит, вершины которых смежны с парами вершин, находящимися на расстоянии по крайней мере 3 в $u^{\langle g\rangle}$, поэтому степень u в Γ не больше $2+15+2\cdot 6+10$. Если же степень графа $u^{\langle g\rangle}$ больше 2, то $u^{\langle g\rangle}$ содержит две несмежные вершины, имеющие не менее двух общих соседей в $u^{\langle g\rangle}$, противоречие.

Допустим, что u смежна с 14 вершинами из Ω. Если $u^{\langle g\rangle}$ — коклика, то либо $n_5=1$, либо $n_4=n_3=n_2=1$, либо $n_3=3, n_2=1$, либо $n_3=2, n_2=4$, либо $n_3=1, n_2=7$, либо $n_2=10$. В любом случае степень u в Γ не больше $14+2\cdot 10+6$. Если $u^{\langle g\rangle}$ является 11-угольником, то N_2 содержит не более четырех орбит, вершины которых смежны с ребрами из $u^{\langle g\rangle}$, не более шести орбит, вершины которых смежны с парами вершин, находящимися на расстоянии по крайней мере 3 в $u^{\langle g\rangle}$, не более одной орбиты, вершины которой смежны с парами вершин, находящимися на расстоянии 2 в $u^{\langle g\rangle}$, поэтому степень u в Γ не больше $2+14+2\cdot 11+5$. Если степень графа $u^{\langle g\rangle}$ больше 4, то $u^{\langle g\rangle}$ содержит две несмежные вершины, имеющие не менее трех общих соседей в $u^{\langle g\rangle}$, противоречие. Значит, степень графа $u^{\langle g\rangle}$ равна 4. Если u смежна с u^g, u^{g^2}, то число $|u^{\langle g\rangle}\cap[u]\cap[u^{g^i}]|$ равно 2 в случаях $i=1,3$, равно 1 в случаях $i=2,4$, равно 0 в случае $i=5$. Поэтому N_2 содержит не более пяти орбит, вершины которых смежны с ребрами из $u^{\langle g\rangle}$, не более двух орбит, вершины которых смежны с парами вершин, находящимися на расстоянии по крайней мере 3 в $u^{\langle g\rangle}$, не более одной орбиты, вершины которой смежны с парами вершин, находящимися на расстоянии 2 в $u^{\langle g\rangle}$, поэтому степень u в Γ не больше $4+14+2\cdot 8+8$. Аналогичное противоречие получается в случаях, когда u смежна с u^g, u^{g^j}, $j\in\{3,4,5\}$.

Пусть $t=17$. Тогда $|\Omega|=58$, по лемме 3 имеем $\chi_1(g)=(348+\alpha_1(g))/14$, поэтому $\alpha_1(g)=44$. Пусть $u\in\Gamma-\Omega$. Если $u^{\langle g\rangle}$ является кокликой, и u смежна с 16 вершинами из Ω, то u смежна не более чем с одной вершиной в каждой $\langle g\rangle$-орбите длины 11 и степень u в Γ не больше 32, противоречие. Если $u^{\langle g\rangle}$ является кликой, то u смежна не более чем с 7 вершинами из Ω. Если $u^{\langle g\rangle}$ содержит геодезический 2-путь, то u смежна не более чем с 14 вершинами из Ω. Далее, степени вершин в Ω равны 20, 31 или 42.

Если a — вершина из Ω степени 31, то $m_0+m_1+m_2=31$, $m_0+12m_1+23m_2=5n+16(26-n)$, поэтому $m_1+2m_2+n=35$. В случае $m_2\geq 2$ подграф M_2 содержит две вершины b_1,b_2, противоречие с тем, что $\Omega(b_1)\cap[b_2]$ содержит не менее 20 вершин из $\Omega-a^{\perp}$. Пусть $m_2=1$, $b\in M_2$ и $[b]$ содержит вершину u из $[a]-\Omega$. Тогда u смежна точно с 2 вершинами степени 31 в Ω, а любая вершина из $[a]-(\Omega\cup u^{\langle g\rangle})$ смежна точно с 1 вершиной степени 31 в Ω. Далее, $[a]-[b]$

и $[b]-[a]$ содержат по две $\langle g\rangle$-орбиты длины 11, вершины которых смежны точно с 1 вершиной степени 31 в Ω. Теперь число $\langle g\rangle$-орбит длины 11, вершины которых смежны точно с 2 вершинами степени 31 в Ω, не больше 3, и число вершин степени 31 в Ω не больше 6.

Если a — вершина из Ω степени 42, $[a]-\Omega=u^{\langle g\rangle}\cup w^{\langle g\rangle}$, то $m_0+m_1=42$, $m_0+12m_1=16\cdot 15$, поэтому $m_1=18$. Если M_1 содержит по крайней мере 3 вершины степени 20 в Ω, то некоторая вершина из $[a]-\Omega$ смежна с двумя вершинами b,c из M_1 степени 20 в Ω, противоречие с тем, что $[b]\cap[c]$ содержит 11 вершин из $[a]-\Omega$ и не менее 9 вершин из $\Omega-a^{\perp}$. Значит, M_1 содержит не менее 16 вершин степени 31 в Ω, противоречие.

Теперь число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 11, не меньше $6\cdot 3+52\cdot 4=226$, но не больше $17\cdot 13=221$, противоречие.

Пусть $t=16$. Тогда $|\Omega|=69$ и число ребер между Ω и $\Gamma-\Omega$, деленное на 11, не больше $16\cdot 13=208$.

Если a — вершина из Ω степени 42, то $m_0+m_1+m_2=42$, $m_0+12m_1+23m_2=5n+16(26-n)$, поэтому $m_1+2m_2+n=34$. Ясно, что $m_2\le 1$ и Ω содержит не более двух вершин степени 42. Так как $69\cdot 3=207$, то Ω содержит не более трех вершин степени 20, поэтому $m_0+n\le 3$ и $m_1\ge 38$, противоречие. Значит, Ω не содержит вершин степени 42 и содержит единственную вершину степени 20. Теперь каждая вершина из $\Gamma-\Omega$ смежна точно с 13 вершинами из Ω и $\Gamma-\Omega$— регулярный граф степени 51 на 176 вершинах. Противоречие с леммой 1.

Лемма 15. *Если $p=7$, то $|\Omega|=7r$, $5\le r\le 11$ и $\alpha_1(g)/14+3r$ делится на 7.*

Доказательство. Пусть $p=7$. Тогда любое ребро графа Ω лежит в 4, 11 или 18 треугольниках из Ω, а для несмежных вершин $a,b\in\Omega$ подграф $\Omega(a)\cap[b]$ содержит 2, 9 или 16 вершин. Далее, $|\Omega|$ делится на 7, степень вершины в Ω сравнима с 1 по модулю 7 и $|\Gamma-\Omega|=7t, 24\le t$. Пусть $a\in\Omega$, M_i — множество вершин из $\Omega(a)$ смежных точно с $3+7i$ вершинами из $\Omega-a^{\perp}$, $m_i=|M_i|$, N_i— множество вершин из $\Omega-a^{\perp}$, смежных точно с $2+7i$ вершинами из $\Omega(a)$, $n_i=|N_i|$.

При $t>32$ имеем $|\Omega|\le 14$, поэтому $t=33$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами (14,8,4,2), противоречие. Пусть $t=32$. Тогда $|\Omega|=21$ и степени вершин в Ω равны 8 или 15. Если Ω содержит вершину a степени 15, $b\in\Omega-a^{\perp}$, то степень b в Ω не больше $4+|\Omega(a)\cap[b]|$, противоречие. Поэтому Ω— сильно регулярный граф с параметрами (21,8,4,2), противоречие с тем, что $(4-2)^2+4\cdot 6=28$ не является квадратом.

Пусть $t=31$. Тогда $|\Omega|=28$ и степени вершин в Ω равны 8 или 15. По лемме 3 имеем $\chi_1(g)=\alpha_1(g)/14+7$, $100-\chi_1(g)$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g)\in\{28,126\}$. Если a — вершина из Ω степени 15, то $m_0+m_1=15$ и $3m_0+10m_1=2n+9(12-n)$, поэтому $m_1+n=9$. Пусть $b\in M_1$, $\{e,e'\}=\Omega-([a]\cup[b])$, $[e]$ содержит β вершин из $\Omega(a)\cap[b]$, $c\in\Omega(a)\cap[b]$ и $[c]$ содержит γ вершин из $\Omega-([a]\cup[b])$. Тогда $[e]$ содержит $\beta-3$ вершин из $\Omega-([a]\cup[b])$ и $\beta\in\{3,4\}$ и $[e]$ содержит по $9-\beta$ вершин из $\Omega(a)-b^{\perp}$ и из $\Omega(b)-a^{\perp}$. В случае $\beta=4$ вершины e,e' смежны и $\Omega(e)\cap[e']$ содержит $\Omega(a)\cap[b]$. В этом случае $\gamma=2$, $\Omega(a)\cap[b]$ — четырехугольник и $[c]$ содержит либо по одной вершине из $\Omega(a)-b^{\perp}$, $\Omega(b)-a^{\perp}$, либо 8 вершин в одном из этих подграфов и одну в другом. Для двух несмежных $c,c'\in\Omega(a)\cap$

$[b]$ подграф $\Omega(c)\cap[c']$ содержит e,e', 4 вершины из $a^\perp\cap b^\perp$ и 3 вершины из $(\Omega(a)-b^\perp)\cup(\Omega(b)-a^\perp)$, противоречие.

В случае $\beta=3$ вершины e,e' не смежны и $\Omega(e)\cap[e']$ содержит не менее двух вершин в каждом из подграфов $\Omega(a)\cap[b]$, $\Omega(a)-b^\perp$, $\Omega(b)-a^\perp$. Пусть $\Omega(e)\cap[e']$ содержит 3 вершины c_1,c_2,c_3 из $\Omega(a)\cap[b]$. Тогда $\{c_1,c_2,c_3\}$ является кликой и $\Omega(c_1)\cap[c_2]$ содержит a,b,e,e',c_3, поэтому степень c_i в Ω равна 15 и $[c_i]$ содержит 8 вершин в одном из подграфов $\Omega(a)-b^\perp$, $\Omega(b)-a^\perp$ и 1 вершину в другом. Теперь можно считать, что $[c_1]$, $[c_2]$ содержат 8 вершин из $\Omega(a)-b^\perp$ и $|\Omega(c_1)\cap[c_2]|\ge 12$, противоречие. Значит, $\Omega(e)\cap[e']$ содержит точно 2 вершины c,c' из $\Omega(a)\cap[b]$. Пусть $[c]$ содержит δ вершин из $\Omega(e)\cap[e']$. Тогда $\Omega(c)$ содержит $4-\delta$ или $11-\delta$ вершин из $[e]-[e']$, $[e']-[e]$ и $\delta+5$ или $\delta-2$ вершин из $\Omega-(e^\perp\cup(e')^\perp)$. Если степень c в Ω равна 15, то либо $\Omega(c)$ содержит по $11-\delta$ вершин из $[e]-[e']$, $[e']-[e]$ и $\delta-9$ вершин из $\Omega-(e^\perp\cup(e')^\perp)$, либо $4-\delta$ в одном из подграфов $[e]-[e']$, $[e']-[e]$, $11-\delta$ в другом и $\delta-2$ вершин из $\Omega-(e^\perp\cup(e')^\perp)$. В первом случае имеем противоречие с тем, что $[c]$ содержит вершины a,b из $\Omega-(e^\perp\cup(e')^\perp)$ и $\delta\ge 11$. Во втором случае $\delta=7$, снова противоречие. Значит, степени вершин c,c' в Ω равны 8, $\Omega(c)$ содержит по $4-\delta$ вершин из $[e]-[e']$, $[e']-[e]$ и $\delta-2$ вершин из $\Omega-(e^\perp\cup(e')^\perp)$. Поэтому $\delta=4$, противоречие с тем, что $\Omega(c)$ содержит вершину из $[a]\cap[b]$, попадающую в $(([e]-[e'])\cup([e']-[e])$.

Итак, $m_1=0$ и $n=9$. Поэтому $\Omega_2(a)$ содержит 9 вершин степени 8 в Ω и 3 вершины степени 15. Пусть $\Omega(a)$ содержит ν вершин степени 15 в Ω. Тогда Ω содержит $4+\nu$ вершин степени 15 и $11-\nu$ вершин степени 8.

Если a — вершина из Ω степени 8, то $m_0+m_1=8$ и $3m_0+10m_1=2\cdot 19$, поэтому $m_1=2$ и число ребер между множеством вершин степени 15 в Ω и множеством вершин степени 8 в Ω равно $(4+\nu)(15-\nu)=2(11-\nu)$, противоречие.

Итак, $|\Omega|=7r$, $5\le r\le 11$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g)=\alpha_1(g)/14+3r-5$, $100-\chi_1(g)$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g)/14+3r$ делится на 7. Лемма доказана.

4. Автоморфизмы малых порядков

В этом параграфе Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(245,64,18,16)$, g — автоморфизм простого порядка p графа Γ, $p\le 5$ и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ содержит геодезический 2-путь.

Лемма 16. *Если $p=5$, то $|\Omega|=5s$, $4\le s\le 15$ и $\alpha_1(g)/5+s$ делится на 14.*

Доказательство. Пусть $p=5$. Тогда $|\Omega|=5t$, $2\le t\le 15$ и степень вершины в графе Ω сравнима с 4 по модулю 5. Далее, любое ребро графа Ω лежит в $5i+3$ треугольниках, а для любых двух несмежных вершин a,b из Ω число $|\Omega(a)\cap[b]|$ сравнимо с 1 по модулю 5.

Заметим, что $\alpha_1(g)=10w$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g)=(30t+10w)/14-5$, поэтому $3t+w$ делится на 7.

Если $\Omega\subset a^\perp$ для некоторой вершины a, то степень вершины в графе $\Delta=\Omega(a)$ сравнима с 3 по модулю 5, любое ребро графа Δ лежит в $5i+2$ треугольниках из Δ, а для любых двух несмежных вершин b,c из Δ число $|\Delta(b)\cap[c]|$ делится на 5. Если Ω содержит вершину a степени 4, то $\Omega(a)$ — клика, и каждая вершина из $\Omega-a^\perp$ смежна с единственной вершиной из $\Omega(a)$.

Пусть $|\Omega|=10$. Если $\Omega\subset a^\perp$ для некоторой вершины a, то степени вершин в графе $\Delta=\Omega(a)$ равны 3 или 8, поэтому Ω содержит либо 2 вершины степени 9 и вершины степени 4 в Ω индуцируют восьмиугольник или два четырехугольника, либо 4 вершины степени 9 и вершины степени 4 в Ω индуцируют коклику. В любом случае Ω содержит такие две несмежные вершины b, c, что $\Omega(b) \cap [c]$ содержит 3 или 4 вершины, противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(10, 4, 3, 1)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 15$. Тогда степени вершин в графе Ω равны 4, 9 или 14. Если Ω содержит вершину a степени 4, то либо $|\Omega(b) - a^{\perp}| = 10$ для некоторой вершины b из $\Omega(a)$, либо $|\Omega(b) - a^{\perp}| = |\Omega(b') - a^{\perp}| = 5$ для двух вершин b, b' из $\Omega(a)$. В первом случае любая связная компонента графа $\Omega(b) - a^{\perp}$ реберно регулярна с $k' = 3$, $\lambda' = 2$, противоречие с тем, что $|\Omega(b) - a^{\perp}| = 10$. Во втором случае каждая вершина из $\Omega(b) - a^{\perp}$ смежна с любой вершиной из $\Omega(b') - a^{\perp}$, противоречие с тем, что для $c \in \Omega(b) - a^{\perp}$, $c' \in \Omega(b') - a^{\perp}$ имеем $|\Omega(c) \cap [c']| = 8$.

Значит Ω не содержит вершин степени 4 и содержит вершину a степени 14. В этом случае степени вершин в $\Omega(a)$ равны 8 или 13. Поэтому Ω содержит либо 7 вершин степени 14 и вершины степени 9 в Ω индуцируют восьмиугольник или два четырехугольника, либо 5 вершин степени 14 и вершины степени 9 в Ω индуцируют реберно регулярный граф с $k' = 4$, $\lambda' = 3$ на 10 вершинах, либо 3 вершины степени 14 и вершины степени 9 в Ω индуцируют реберно регулярный граф с $k' = 6$, $\lambda' = 3$ на 12 вершинах, либо вершины степени 9 в Ω индуцируют реберно регулярный граф с $k' = 8$, $\lambda' = 3$ на 14 вершинах. В любом случае имеем противоречие.

Итак, $|\Omega| = 5s$, $4 \le s \le 15$, $\alpha_1(g) = 5w$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = 5(6s + w)/14 - 5$, поэтому $\alpha_1(g)/5 + 6s$ делится на 14.

Лемма 17. *Если $p = 3$, то $|\Omega| = 3t + 2$, $\alpha_1(g) = 6w$ и $3t + 2 + w$ делится на 7.*

Доказательство. Пусть $p = 3$. Тогда степень вершины в графе Ω сравнима с 1 по модулю 3. Далее, любое ребро графа Ω лежит в $3i$ треугольниках, а для любых двух несмежных вершин a, b из Ω число $|\Omega(a) \cap [b]|$ сравнимо с 1 по модулю 3.

Если $\Omega \subset a^{\perp}$ для некоторой вершины a, то степень вершины в графе $\Delta = \Omega(a)$ делится на 3, любое ребро графа Δ лежит в $3i - 1$ треугольниках из Δ, а для любых двух несмежных вершин b, c из Δ число $|\Delta(b) \cap [c]|$ делится на 3. Если Ω содержит вершину a степени 4, то $\Omega(a)$ — клика или коклика и каждая вершина из $\Omega - a^{\perp}$ смежна с единственной вершиной из $\Omega(a)$ или со всеми вершинами из $\Omega(a)$. Если Ω содержит вершину a степени 1, $b \in \Omega(a)$, то $\Delta \subset b^{\perp}$.

Пусть $|\Omega| = 5$. Тогда $\Omega(a)$ является 4-кокликой для некоторой вершины a. Пусть $|\Omega| = 8$. Тогда степени вершин в графе Ω равны 1, 4 или 7. Если Ω содержит вершину a степени 1, $b \in \Omega(a)$, то $\Delta = \Omega(b) - \{a\}$ — регулярный граф степени 3 на 6 вершинах, поэтому Δ является 3-призмой или графом $K_{3,3}$. В любом случае имеем противоречие. Значит, Ω содержит либо 4 вершины степени 7 и вершины степени 4 в Ω индуцируют коклику, либо 2 вершины степени 7 и вершины степени 4 в Ω индуцируют шестиугольник или два треугольника, либо 8 вершин степени 4. Отсюда $\Omega = K_{4,4}$ или сумма 4-клики и 4-коклики.

Итак, $|\Omega| = 3t + 2$, $2 \le t \le 25$. Заметим, что $\alpha_1(g) = 6w$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = 6(3t + 2 + w)/14 - 5$, поэтому $3t + 2 + w$ делится на 7.

Лемма 18. *Если $p = 2$, то $|\Omega| = 2l + 1$, $2 \le l \le 38$, $\alpha_1(g) = 2w$ и число $(6l + 3 + w)/7$ нечетно.*

Доказательство. Пусть $p = 2$. Тогда степень вершины в графе Ω четна. Далее, любое ребро графа Ω лежит в $2i$ треугольниках, а для любых двух несмежных вершин a, b из Ω число $|\Omega(a) \cap [b]|$ также четно.

Если Ω содержит вершину a степени 2, $\{b, b'\} = \Omega(a)$ и связная компонента графа $\Omega - a^\perp$ либо содержится в $\Omega(b) \cap [b']$, либо не пересекает $[b] \cup [b']$.

Пусть $|\Omega| = 5$. Тогда Ω является объединением изолированной вершины и четырехугольника. Пусть $|\Omega| = 7$. Тогда степени вершин в графе Ω равны 0, 2, 4 или 6. Если Ω содержит вершину a степени 6, то $\Delta = \Omega(a)$ — регулярный граф степени 3 на 6 вершинах, поэтому Δ является 3-призмой или графом $K_{3,3}$. В любом случае имеем противоречие. Если Ω содержит вершину a степени 2, $\{b, b'\} = \Omega(a)$, то $\Omega(b) \cap [b']$ содержит 2 или 4 вершины и Ω является либо объединением изолированной вершины и $K_{2,4}$-подграфа, либо объединением изолированных вершин, треугольников и четырехугольников.

Итак, $|\Omega| = 2l + 1$, $2 \le l \le 38$. Заметим, что $\alpha_1(g) = 2w$ и по лемме 3 имеем $\chi_1(g) = (6(2l + 1) + 2w)/14 - 5$, поэтому число $(6l + 3 + w)/7$ нечетно. Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

Автор выражает признательность за ценные рекомендации своему научному руководителю чл.-корр. РАН А.А. Махневу.

Список литературы

[1] Гутнова А.К., Махнев А.А., *Графы, в которых окрестности вершин — псевдогеометрические графы для $GQ(3,5)$*. Теория групп и ее приложения. Труды восьмой Международной школы-конференции по теории групп. Нальчик 2010, 70–76.

[2] Brouwer A.E., Haemers W.H., *The Gewirtz graph: an exercize in the theory of graph spectra.* Europ. J. Comb. *14* (1993), 397–407.

[3] Махнев А.А., *О расширениях частичных геометрий, содержащих малые μ-подграфы.* Дискр. анализ и исслед. операций, **3**: 3 (1996), 71–83.

[4] Cameron P., *Permutation Groups.* London Math. Soc. Student Texts 45, Cambridge Univ. Press, 1999.

[5] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$. Доклады академии наук, **432**: 5 (2010), 512–515.

[6] Behbahani M., Lam C., *Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms.* Discrete Math., **311** (2011), 132–144.

Алина Казбековна Гутнова
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16,
620000, Екатеринбург, Россия
E-mail address: gutnovaalina@gmail.com