S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 8, стр. 68–71 (2011) УДК 517.5, 517.9
Краткие сообщения MSC 34C25

МЕРОМОРФНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ ИЗОХРОННЫХ СИСТЕМ НЬЮТОНА

В. В. ИВАНОВ

Abstract. Criteria are indicated for isochronicity of a potential Newton system with one degree of freedom. Isochronous systems with whole and meromorphic potentials are completely described.

Keywords: potential energy, amplitude and frequency of oscillations, Abel's integral transform, isochronous oscillations, zeroes and poles of analytic functions, meromorphic involutions

Предметом нашего исследования будут колебания в консервативной системе Ньютона, описываемой дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = f(x). \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ означает функцию вещественной переменной x, определенную и непрерывную в некоторой окрестности нуля. Мы считаем, что $f(0) = 0$, а при $x \neq 0$ знаки x и $f(x)$ противоположны. Таким образом, потенциальная энергия

$$U(x) = -\int_0^x f(\xi)\, d\xi \tag{2}$$

системы (1), убывая при $x < 0$ и возрастая при $x > 0$, в точке $x = 0$ имеет строгий минимум. Иными словами, нуль служит точкой покоя нашей системы, а все движения, которые начинаются недалеко от нее с небольшой начальной скоростью, периодичны. Если периоды этих колебаний одинаковы, систему (1) мы будем называть *изохронной*. Классическими примерами изохронных систем служат гармонические осцилляторы $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где $\omega > 0$.

Ivanov, V. V., Meromorphic potentials of isochronous Newton systems.

Работа поддержана интеграционным проектом № 107, утвержденным СО РАН.

Представлена В. М. Гордиенко 15 марта 2011 г., опубликована 16 марта 2011 г.

Теорема 1. *Колебания в консервативной системе Ньютона изохронны в том и только том случае, когда графики потенциальной энергии системы и гармонического осциллятора такой же частоты на каждом, не слишком высоком, энергетическом уровне имют равную ширину.*

Если движение $x = x(t)$ подчиняется уравнению (1), его полная энергия

$$E = U(x) + \frac{\dot{x}^2}{2} \tag{3}$$

остается постоянной. Если величина E не слишком большая, а движение идет через положение равновесия, оно периодично. Хорошо известно [1], что его амплитуда $A(E)$ и период $T(E)$ как функции энергии связаны между собой интегральным преобразованием Абеля, а точнее — замечательной формулой, в которой, конечно же, содержится и наша теорема:

$$A(E) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int\limits_0^E \frac{T(u)}{\sqrt{E-u}}\, du. \tag{4}$$

Если график потенциальной энергии системы симметричен, он в состоянии удовлетворить нашему критерию лишь в том случае, когда он сам — парабола. Это значит, что среди симметричных систем изохронны только гармонические осцилляторы! Скорее всего, это известно очень давно, как, вероятно, и наша теорема. Например, Аппель в своем знаменитом курсе механики [2] изучает движения, которые называет *таутохронными.* Как он доказывает, существует одна сила, зависящая только от положения точки и вызывающая таутохронное ее движение вдоль прямой — это притяжение, пропорциональное расстоянию до точки равновесия. Заметим, что для симметричной системы изохронность ее колебаний означает таутохронность их «половинок».

Теперь мы применим наш геометрический критерий к изучению строения изохронных аналитических систем. Пусть силовая функция $f(x)$ в некоторой окрестности нуля разлагается в ряд по степеням переменной x. Тогда то же самое относится и к потенциальной функции $U(x)$. Если мы хотим при этом, чтобы колебания системы оказались изохронными, мы обязаны считать, что ряд $U(x)$ начинается с квадратичной функции ax^2, где $a > 0$. Это следует из теоремы 1. Для простоты полагая $a = 1$, мы можем изменить период колебаний, но не нарушим их изохронности. Далее нам естественно вместо x писать z, поскольку мы намерены выйти в комплексную область.

Итак, рассмотрим функцию $U(z)$, определенную для всех достаточно малых значений комплексной переменной z и представимую степенным рядом:

$$U(z) = z^2 + a_1 z^3 + \ldots = z^2(1 + a_1 z + \ldots) \tag{5}$$

Разумеется, коэффициенты ряда мы считаем вещественными. Нам нужен один «квадратный корень» из этого ряда, который мы определим как сумму

$$F(z) = z\,(1 + a_1 z + \ldots)^{1/2}, \tag{6}$$

понимая здесь дробную степень как биномиальный ряд Ньютона относительно суммы $a_1 z + \ldots$, имеющей смысл и малой для малых z. Функция $w = F(z)$ вблизи точки $z = 0$, где и $w = 0$, имеет обратную $z = G(w)$. Интересно, что в терминах обратной функции условие изохронности аналитической системы допускает не только исчерпывающее, но и предельно ясное описание, дающее возможность легко строить конкретные примеры изохронных систем. Наконец, полагая $\Phi(z) = z - 2F(z)$, мы получим замечательную функцию, благодаря которой наш критерий изохронности обретает наиболее изящную форму.

Теорема 2. *Потенциал $U(z)$ порождает изохронную систему Ньютона тогда и только тогда, когда*

$$F(z - 2F(z)) = -F(z) \tag{7}$$

для всех достаточно малых значений переменной z. Это условие означает, что функция $G(w) - w$ четная. Иначе говоря, функция $G(w)$ должна быть представима степенным рядом

$$G(w) = w + \sum_{k=1}^{\infty} b_k w^{2k}, \tag{8}$$

чьи коэффициенты b_k в нашей ситуации непременно вещественны. То же самое условие «гармонической ширины» в терминах функции $\Phi(z)$ означает, что эта функция должна быть инволютивным преобразованием:

$$\Phi(\Phi(z)) = z. \tag{9}$$

Действительно, если число z невелико и положительно, то $E := U(z) > 0$ и $F(z) = \sqrt{E}$. Около нуля есть еще точка z', для которой $F(z') = -\sqrt{E}$, а тогда $U(z') = E$. Изохронность системы означает, что разность $z - z'$ равна той ширине, которую на уровне E имеет соответствующая ей парабола. Эта ширина равна $2\sqrt{E} = 2F(z)$, так что $z' = z - 2F(z)$. Разумеется, то же самое выражает формула (7). Для завершения доказательства первого утверждения теоремы нам остается сказать слова про аналитическое продолжение равенств. Что касается второй части теоремы, то нужно лишь равенство (7) переписать в виде $F(z - 2w) = -w$, где $w = F(z)$. Тогда $G(-w) = z - 2w = G(w) - 2w$, или $G(-w) - (-w) = G(w) - w$. Эквивалентность равенств (7) и (9) очевидна.

Теперь мы изучим два особенно интересных класса аналитических систем. Если сказать определенно, речь пойдет о целых и мероморфных потенциалах. Этому был посвящен мой давний доклад, тезисы которого сохранились в [3].

Теорема 3. *Мероморфная функция $U(z)$ служит потенциалом изохронной системы Ньютона тогда и только тогда, когда функция $\Phi(z)$ имеет вид*

$$\Phi(z) = -\frac{z}{1 + cz}, \tag{10}$$

где c может быть любым вещественым числом.

Пожалуй, нам не стоит по столь элементарному поводу упоминать такие красивые вещи, как ветвления, монодромия и римановы поверхности. Надо лишь совершить «непрерывную» прогулку по комплексной плоскости, проходя мимо нулей и полюсов мероморфного потенциала. Пусть z_t будет точкой, в которой мы оказались в момент t, где $0 \le t \le 1$. В каждый такой момент число $U(z_t)$ отлично от нуля, а значит, имеет два различных корня. Пусть F_t будет одним из них. Мы выберем его так, чтобы он непрерывно зависел от t, а при $t = 0$ имел заданное значение F_0. Ясно, что это возможно и что указанными условиями семейство F_t определено однозначно. Начальную точку z_0 мы возьмем недалеко от нуля и положим $F_0 = F(z_0)$.

Далее мы считаем потенциал изохронным. Нетрудно понять, что в таком случае точка $z_t - 2F_t$, как и z_t, не проходит через нули и полюсы потенциала и $U(z_t - 2F_t) = U(z_t)$ для всех t. Это следует из формулы (7), выражающей условие изохронности, и нехитрых соображений, связанных с аналитическим продолжением равенств. Посмотрим теперь, что будет, если $z_1 = z_0$. Тогда $F_1 = \pm F_0$. С другой стороны, $U(z_1 - 2F_1) = U(z_1)$, или $U(z_0 - 2F_1) = U(z_0)$. Но $F_0 = z_0 + o(z_0)$. Если $F_1 = -F_0$, то получится, что $z_0 - 2F_1 = 3z_0 + o(z_0)$. Таким образом $U(z_0 - 2F_1)$ и $U(z_0)$ отличаются примерно в девять раз! Это значит, что на самом деле $F_1 = F_0$. Отсюда вытекают интересные выводы.

Наше путешествие, начало которого можно потихоньку перенести в сколь угодно далекую точку, показало нам, что нули потенциала $U(z)$ имеют четные кратности, а полюсы — четные порядки. Но лучше сказать, что аналитическое продолжение $F(z)$ представляет собой мероморфную функцию. Такова будет и наша функция $\Phi(z)$, сохраняющая при расширении инволютивное свойство. Но инволюция взаимно однозначна. Поэтому полюс у нее один, а порядок его равен единице. Вблизи полюса любая функция принимает *все* достаточно большие значения, а для инволюции это означает ограниченность ее на бесконечности. Если полюсом служит точка z_*, то получается, что *целая* функция $(z - z_*)\Phi(z)$ допускает линейную оценку на бесконечности. Значит, она сама линейна, а $\Phi(z)$ дробно-линейна. Учитывая, что $\Phi(0) = 0$ и $\Phi'(0) = -1$, мы приходим к формуле (10), где $c = -1/z_*$. С другой стороны, формула (10) при любых c дает нам пример инволюции. Вот и всё.

Если $c = 0$, то $\Phi(z) = -z$. Тогда $F(z) = z$, а значит, $U(z) = z^2$. Иначе говоря, среди систем, порожденных целыми потенциалами изохронными оказываются только гармонические осцилляторы. Если же $c \neq 0$, то

$$U(z) = \frac{z^2}{4}\left(\frac{2+cz}{1+cz}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}\left(1 + cz - \frac{1}{1+cz}\right)^2,$$

что, с точностью до аффинных преобразований, представляет собой квадрат функции Жуковского. Таковы все мероморфные изохронные потенциалы.

Мне приятно в этих электронных строчках выразить свою благодарность вдохновителю моих воспоминаний о мимолетных увлечениях, которым стал Charles Leedhem-Green (Queen Mary University on London), работающий сейчас над новым английским переводом Principia Ньютона, и В. М. Чересизу, еще в прошлом веке познакомившему меня с интегральным преобразованием Абеля и великолепным сочинением Аппеля по теоретической механике.

Список литературы

[1] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика.* М.: Наука, 1988. Т. 1.

[2] Аппель П. *Теоретическая механика.* М.: Физматлит, 1960. Т. 1.

[3] Иванов В. В. *Isochronous Oscillations in a Conservative Newton System.* Международная конференция «Геометрия и приложения» (Новосибирск, 13–16 марта 2000 г.): Тез. докл., Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 47–48.

Владимир Вениаминович Иванов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: iva@math.nsc.ru