

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

---

*Том 8, стр. 72–104 (2011)*

УДК 519.626.1

MSC 49N05

АППРОКСИМАЦИЯ МНОЖЕСТВ ДОСТИЖИМОСТИ И  
ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ  
УПРАВЛЕНИЯ В РЕАЛЬНОМ ВРЕМЕНИ

В.М. АЛЕКСАНДРОВ

**АБСТРАКТ.** A new approach to realization of time-optimal control in real time for linear systems under control with constraint is proposed. It is based on subdividing the computational costs on those made in advance of the control process and those carried as it proceeds. The preliminary computations do not depend on actual initial condition and rely on approximation of attainability sets in different periods of time by complex of hyperplane. Methods of constructing them are given with a way to single out the support hyperplane. Methods of approximate finding and following correction for normalized vector of adjoint system initial conditions, switching times of time-optimal control, and the control completion time are suggested. Estimation of computational working time is given. Reduction of unspecified form systems to their canonical form is considered. Quantitative measure of total controllability is determined. Results of modeling and numerical calculations are presented.

**Keywords:** optimal control, speed, attainability sets, hyperplane, real time, adjoint system, initial condition, edge point, first approximation, approximating construction, computational costs.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Оптимальное управление по различным критериям качества представляет значительный теоретический и практический интерес. Одним из важнейших критериев является быстродействие. Поэтому нахождение оптимального по

---

ALEKSANDROV, V.M., APPROXIMATION OF ATTAINABILITY SETS AND CALCULATION OF TIME-OPTIMAL CONTROL IN REAL TIME.

© 2011 АЛЕКСАНДРОВ В.М.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00035) и Сибирским отделением РАН (проект 85).

Поступила 17 марта 2011 г., опубликована 11 мая 2011 г.

быстродействию управления весьма актуальная задача [1],[2]. Так как аналитическое решение задачи в общем случае невозможно, то отечественными и зарубежными специалистами предложены различные численные методы, каждый из которых обладает определенными достоинствами и недостатками [3] - [14]. Однако их реализация связана со значительными вычислительными затратами. Большие вычислительные затраты не позволяют реализовать в реальном времени оптимальное управление многими объектами и процессами и приводят к необходимости разработки новых численных методов, учитывающих специфику решаемой задачи и обладающих в процессе управления малой вычислительной трудоемкостью.

Одним из возможных подходов является разделение вычислительных затрат на предварительные вычисления и вычисления в процессе управления. Резкое снижение вычислительных затрат в процессе управления позволяет реализовать оптимальное управление в реальном времени.

В настоящей работе предлагается реализация такого подхода.

Область начальных условий динамической системы разбивается на области достижимости за различные времена. Каждая область достижимости аппроксимируется совокупностью гиперплоскостей. Для этого на фазовых осях находятся граничные точки, т.е. точки пересечения границы области достижимости за время  $T_s$ ,  $s = \overline{1, q}$  с осями фазового пространства. Одновременно находятся граничные точки на лучах, исходящих из начала координат. Каждая область достижимости аппроксимируется совокупностью гиперплоскостей, проходящих через различные комбинации граничных точек. Каждой гиперплоскости соответствует один единственный нормальный вектор, направленный внутрь области достижимости. Рассмотрена процедура выделения подмножества начальных условий и алгоритм определения для подмножества опорной гиперплоскости. Нормальный вектор к опорной гиперплоскости является нормированным приближенным вектором начальных условий сопряженной системы. Вектор начальных условий сопряженной системы однозначно определяет моменты переключений оптимального по быстродействию управления. В результате получаем аппроксимирующую конструкцию, позволяющую получить *приближенное* решение исходной задачи – найти оптимальное по быстродействию управление в реальном времени. Самое главное состоит в том, что *аппроксимирующая конструкция строится предварительно до начала процесса управления*, так как ее реализация не зависит от конкретного начального условия.

Вычисления в процессе управления заключаются: 1) в определении конкретной опорной гиперплоскости, соответствующей заданным начальным условиям; 2) в уточнении приближенно найденных моментов переключений оптимального управления. Процедура определения опорной гиперплоскости сводится к проверке простых неравенств. Процедура уточнения приближенно найденных моментов переключений оптимального управления состоит в интегрировании системы дифференциальных уравнений на интервалах перемещения конечного момента и моментов переключений управления.

Вычислительную трудоемкость любого метода нахождения оптимального управления принято оценивать по затратам на наиболее трудоемкие в вычислительном отношении операции – по числу решений задачи Коши. В традиционных методах нахождения оптимального управления это, как правило, десятки решений задачи Коши. Для оптимального управления в реальном времени важны лишь вычислительные затраты в процессе управления. В рассматриваемом методе нет необходимости в решении задачи Коши в процессе управления. Достаточно интегрировать систему дифференциальных уравнений лишь на интервалах перемещения конечного момента и моментов переключений управления, что резко снижает вычислительные затраты и позволяет реализовать в реальном времени оптимальное управление быстродействующими объектами и быстропротекающими процессами.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где  $x$  –  $n$ -мерный вектор фазового состояния;  $A(t)$  и  $B(t)$  – непрерывные матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно;  $u$  –  $m$ -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (2.2)$$

Предполагается, что система (2.1) полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[ \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (2.3)$$

и переводима в начало координат из ограниченной области начальных условий  $D$ ;  $V$  – область управляемости;  $\Phi(t, t_0)$  – фундаментальная матрица решений однородного дифференциального уравнения; \* – знак транспонирования.

**Задача.** Найти в реальном времени допустимое управление  $u^0(t)$ , переводящее за минимальное время  $T = t_k - t_0$  систему (2.1) из начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в начало координат  $x(t_k) = 0$ .

**Замечание 1.** Вычисление оптимального управления в реальном времени приводит к необходимости введения в теорию оптимального управления принципиально нового типа ограничения – ограничения на время вычисления оптимального управления:

$$\min_{j \in [1, m]} (\nu_j^1 - t_0) \geq T_*. \quad (2.4)$$

Здесь  $T_*$  – время, затрачиваемое на вычисление оптимального управления;  $\nu_j^1$  – первый момент переключения  $j$  компоненты вектора управления. Нарушение этого ограничения не влечет потерю работоспособности метода, но приводит к структуре оптимального управления, отличной от структуры традиционного

программного управления в задаче линейного быстрогодействия с фиксированным левым концом.

**Замечание 2.** Перевод системы в любое конечное состояние (принимаемое за новое начало координат) преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат.

**Замечание 3.** Задача нахождения оптимального управления с несимметричными ограничениями на управления сводится к задаче оптимального управления с симметричными ограничениями (2.2).

### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

**3.1. Аппроксимация областей достижимости гиперплоскостями.** Область достижимости  $R_T$  за время  $T$  - это область фазового пространства  $X$ , из точек которого система (2.1) может быть переведена оптимальным по быстродействию управлением в начало координат за время  $\leq T$ . Так как область управления  $U$  (2.2) выпуклое ограниченное замкнутое множество, то и область достижимости  $R_T$  - выпуклое ограниченное замкнутое множество. Из точек фазового пространства, принадлежащих границе множества достижимости  $R_T$  система (2.1) переводится оптимальным управлением строго за время  $T$ , а из внутренних точек переводится за время  $< T$ .

Обозначим через  $x_{(i)}^*$  - точки на фазовых осях, переход из которых в начало координат происходит за время  $T$ , т.е.  $x_{(i)}^*$  - *границные* точки пересечения с осями фазового пространства границы области достижимости за время  $T$ . Задача нахождения  $x_{(i)}^*$  является *обратной* задачей оптимального быстрогодействия и решается *предварительно* до начала процесса управления. На рис. 1 показана область достижимости  $R_T$  за время  $T$  и граничные точки  $\pm x_{(i)}^*$ ,  $i = \overline{1, 2}$ . Для системы  $n$  порядка имеем на фазовых осях  $2n$  граничных точек, время оптимального по быстродействию перевода из которых равно  $T$ .

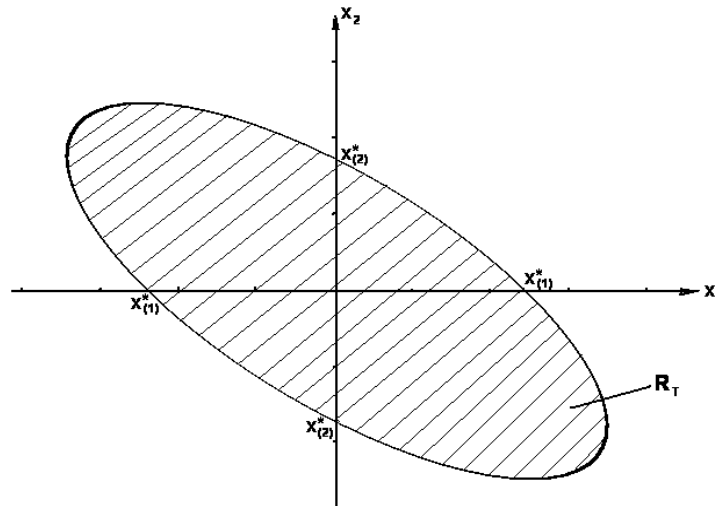


Рис. 1

Проведем через  $n$  различных граничных точек, принадлежащих различным фазовым осям, гиперплоскости, каждая из которых описывается одним из нижеследующих уравнений в отрезках

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\pm x_{(i)}^*} - 1 = 0. \quad (3.1)$$

Число гиперплоскостей, которые проходят через  $2n$  граничных точек, равно  $2^n$ . Совокупность гиперплоскостей (3.1), ограничивающих часть фазового пространства, может быть описана векторным уравнением

$$Px - I = 0. \quad (3.2)$$

Здесь  $x$  –  $n$ -мерный вектор фазового пространства;  $I$  – единичный вектор-столбец размера  $2^n$ ;  $P$  – матрица размера  $2^n \times n$ , составленная из  $2^n$  комбинаций различных значений  $\frac{1}{\pm x_{(i)}^*}$  по  $n$  в каждой строке:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_{(1)}^*} & \frac{1}{x_{(2)}^*} & \frac{1}{x_{(3)}^*} & \cdots & \frac{1}{x_{(n)}^*} \\ \frac{1}{-x_{(1)}^*} & \frac{1}{x_{(2)}^*} & \frac{1}{x_{(3)}^*} & \cdots & \frac{1}{x_{(n)}^*} \\ \frac{1}{-x_{(1)}^*} & \frac{1}{-x_{(2)}^*} & \frac{1}{x_{(3)}^*} & \cdots & \frac{1}{x_{(n)}^*} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{-x_{(1)}^*} & \frac{1}{-x_{(2)}^*} & \frac{1}{-x_{(3)}^*} & \cdots & \frac{1}{-x_{(n)}^*} \end{bmatrix}.$$

Если выполнено условие

$$Px(t_0) - I \leq 0 \quad (3.3)$$

для всех  $2^n$  линейных неравенств, то точка  $x(t_0)$  лежит внутри (либо на границе в случае равенства) фазового пространства, ограниченного гиперплоскостями (3.1). Нетрудно видеть, что (3.3) выделяет многогранник  $Y$ , вписанный в множество достижимости  $R_T$  за время  $T$  и имеющий с ним  $2n$  общих граничных точек (см. рис. 2).

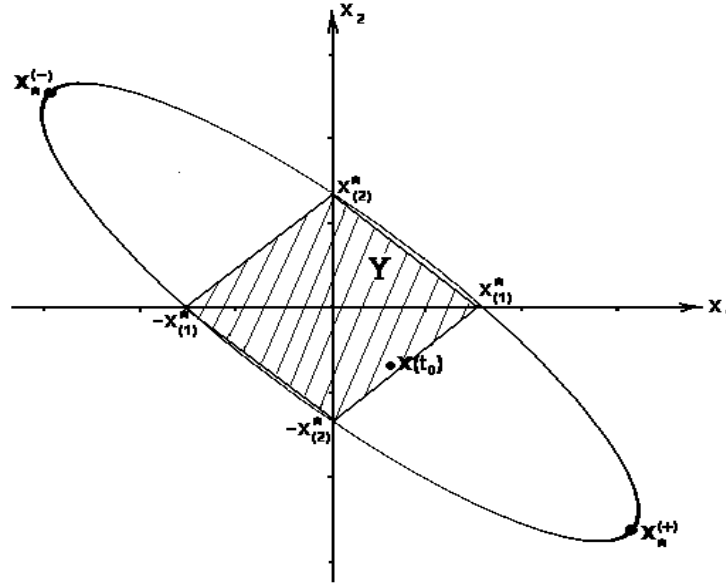


Рис. 2

Процедуру выделения множества  $Y$  можно существенно упростить. Нет необходимости в одновременном рассмотрении всех  $2^n$  линейных неравенств (3.3). Так как справедливо соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{\pm x_{(i)}^*} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right|,$$

то *достаточно* рассмотреть предельное соотношение, которое справедливо при *любом* расположении начальной точки в фазовом пространстве

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right| - 1 \leq 0. \tag{3.4}$$

Если (3.4) выполняется, то  $x(t_0) \in Y$ . Если (3.4) не выполняется, то начальное условие не принадлежит множеству  $Y$ .

Достоинством рассмотренного способа является простота реализации. Недостатком такого способа является малая выделяемая область достижимости, которая может быть значительно увеличена следующим образом. Дополним рассмотрение еще двумя граничными точками  $x_*^{(+)}$  и  $x_*^{(-)}$ . Известно, что области достижимости по форме близки к эллипсоидам [15]. Точки  $x_*^{(+)}$  и  $x_*^{(-)}$  это крайние граничные точки области достижимости, которые находятся следующим образом. Проведем через начало координат и точку  $X_R = (x_{(1)}^*, x_{(2)}^*, \dots, x_{(n)}^*)$  прямую линию. Координаты точки  $X_R$  равны значениям граничных точек на фазовых осях. На этом луче находим такую точку  $x_* = \mu X_R$ , изменяя коэффициент  $\mu$ , для которой система (2.1) с начальным условием  $x(t_0) = x_*$  переводится в начало координат оптимальным по быстрдействию управлением за время  $T$ . Следовательно, находим граничные точки на лучах в каждом квадранте фазового пространства. Находим две точки, для которых радиус-векторы максимальны. В этих квадрантах фазового пространства, изменяя



Аналогично имеем другую совокупность гиперплоскостей (3.7), аппроксимирующих множество достижимости в квадранте, в котором находится точка  $x_*^{(-)}$ . В результате получаем  $(2^n - 2 + 2n)$  гиперплоскостей, аппроксимирующих множество достижимости за время  $T$ . На рис.3 показана аппроксимация гиперплоскостями множества достижимости за время  $T$ .

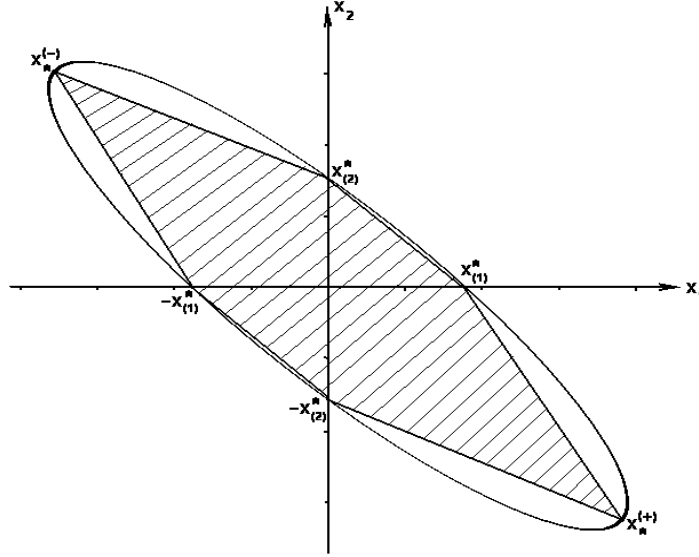


Рис. 3

Важно подчеркнуть, что для определения принадлежности начального условия  $x(t_0) = x_0$  области достижимости нет необходимости в проверке всех  $(2^n - 2 + 2n)$  неравенств. Если начальное условие не находится в квадранте, в котором находится граничная точка  $x_*^{(+)}$  или  $x_*^{(-)}$ , то *достаточно* проверить выполнение предельного соотношения (3.4). Если (3.4) выполняется, то  $x(t_0) \in R_T$ . Если (3.4) не выполняется, то начальное условие не принадлежит области достижимости  $R_T$ . Начальное условие не принадлежит квадранту, в котором находится граничная точка  $x_*^{(+)}$  (или  $x_*^{(-)}$ ), если  $\text{sign } x_i(t_0) \neq \text{sign } x_{i*}^{(+)}$  (или  $\text{sign } x_i(t_0) \neq \text{sign } x_{i*}^{(-)}$ ) хотя бы для некоторого *одного* значения  $i \in [1, n]$ .

Если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  находится в квадранте, в котором находится граничная точка  $x_*^{(+)}$ , то начальное условие принадлежит области достижимости при выполнении *всех*  $n$  неравенств

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+)} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.8}$$

Аналогично, если начальное условие находится в другом квадранте, в котором находится симметричная граничная точка  $x_*^{(-)}$ , то начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит области достижимости при выполнении *всех*  $n$  других неравенств

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(-)} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{3.9}$$



**3.2. Вычисление нормированного вектора начальных условий сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$ .** Предположим, что начальное условие  $x(t_0) = x_0$  системы (2.1) находится на границе области достижимости  $R_T$  за время  $T$ . Проведем через точку  $x(t_0) = x_0$  опорную гиперплоскость  $\Gamma$  к множеству достижимости  $R_T$  (см. рис. 4).

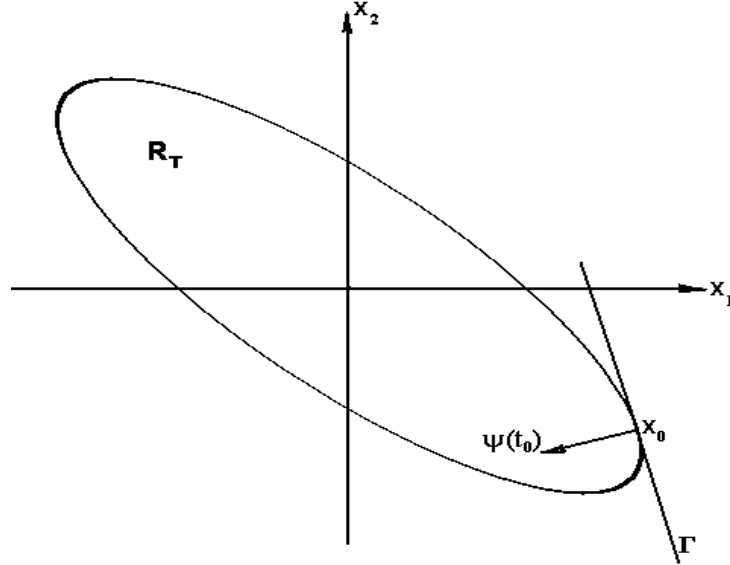


Рис. 4

Нормальный вектор гиперплоскости, исходящий из точки  $x(t_0) = x_0$  и направленный внутрь области достижимости и есть вектор  $\psi(t_0)$  [2]. Следует подчеркнуть, что для задачи быстрогодействия в силу однородности функции Понтрягина относительно вектора сопряженной системы важно лишь направление вектора  $\psi(t_0)$ , а его величина не имеет значения.

Так как область достижимости аппроксимирована гиперплоскостями, то нормальный вектор к соответствующей опорной гиперплоскости и есть вектор  $\hat{\psi}(t_0)$ . Компоненты *единичного* нормального вектора  $\hat{\psi}(t_0)$  определяются через направляющие косинусы. Так, если через начальное условие  $x(t_0)$  проходит, например,  $\mu$  гиперплоскость вида

$$A_{1\mu}x_1(t_0) + A_{2\mu}x_2(t_0) + \dots + A_{n\mu}x_n(t_0) - 1 = 0, \quad \mu \in [1, n], \quad (3.10)$$

то имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(t_0) &= -\frac{A_{1\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n A_{i\mu}^2\right]^{1/2}}; & \psi_2(t_0) &= -\frac{A_{2\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n A_{i\mu}^2\right]^{1/2}}; \dots \\ \dots & \psi_k(t_0) = -\frac{A_{k\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n A_{i\mu}^2\right]^{1/2}}; \dots & \psi_n(t_0) &= -\frac{A_{n\mu}}{\left[\sum_{i=1}^n A_{i\mu}^2\right]^{1/2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Следует отметить ряд существенных моментов.

Во-первых, область достижимости аппроксимируется гиперплоскостями, т.е. граница области достижимости совпадает с аппроксимирующим многогранником лишь в отдельных точках, число которых  $2(n+1)$ . Поэтому начальное

условие  $x(t_0) = x_0$  в общем случае может находиться *вблизи* границы области достижимости и, следовательно, начальное условие сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$  вычисляется приближенно.

Во-вторых, на границе области достижимости опорная гиперплоскость изменяется непрерывно и параллельна аппроксимирующей гиперплоскости лишь в одной "средней" точке. Следовательно, только для этой точки нормальный вектор к опорной гиперплоскости и нормальный вектор к аппроксимирующей гиперплоскости совпадают по направлению, т.е. параллельны. Это вторая причина, в силу которой начальное условие сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$  вычисляется приближенно.

В третьих, в качестве граничных точек берутся точки пересечения границы области достижимости с фазовыми осями и две точки на лучах. Это также приводит к приближенному вычислению нормированного вектора начальных условий сопряженной системы.

Таким образом, нормированный вектор начальных условий сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$  вычисляется приближенно, т.е. задается начальное приближение для итерационного метода вычисления оптимального управления.

Покажем, каким образом можно задавать начальное приближение для *любого* начального условия  $x_0 \in D$ , принадлежащего ограниченной области начальных условий  $D$ .

**3.3. Деление области начальных условий на области достижимости.** Разобьем все ограниченное множество начальных условий  $x_0 \in D$  на  $q$  областей достижимости за разные времена  $T_s, s = \overline{1, q}$ , где  $T_{s-1} < T_s$ . Каждое подмножество достижимости за время  $T_s$  задается совокупностью из  $(2^n - 2 + 2n)$  гиперплоскостей. Каждая из гиперплоскостей описывается одним из нижеследующих уравнений при фиксированном  $s$

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\pm x_{(i)}^{*s}} - 1 = 0, \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.12)$$

если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадрантам фазового пространства, в которых не находятся граничные точки  $x_{*s}^{(+)}$  или  $x_{*s}^{(-)}$ . В (3.12)  $x_{(i)}^{*s}$  – граничные точки на фазовых осях, переход из которых в начало координат происходит за времена  $T_s$ , т.е. это точки пересечения с осями фазового пространства границ областей достижимости за времена  $T_s, s = \overline{1, q}$ . Задача нахождения  $x_{(i)}^{*s}$  является обратной задачей оптимального быстрогодействия и решается предварительно до начала процесса управления. В результате для системы  $n$  порядка имеем на осях  $2nq$  граничных точек. Число таких гиперплоскостей (3.12) для каждого подмножества достижимости равно  $(2^n - 2)$ .

И каждая из гиперплоскостей описывается следующим уравнением при фиксированных  $k$  и  $s$ :

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+s)} x_i - 1 = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.13)$$

если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту фазового пространства, в котором находится граничная точка  $x_{*s}^{(+)}$ , или

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(-s)} x_i - 1 = 0, \quad k = \overline{1, n}; \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.14)$$

если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту фазового пространства, в котором находится граничная точка  $x_{*s}^{(-)}$ . Число гиперплоскостей (3.13) и (3.14) для каждого подмножества достижимости равно  $2n$ . На рис. 5 показано деление области начальных условий на области достижимости.

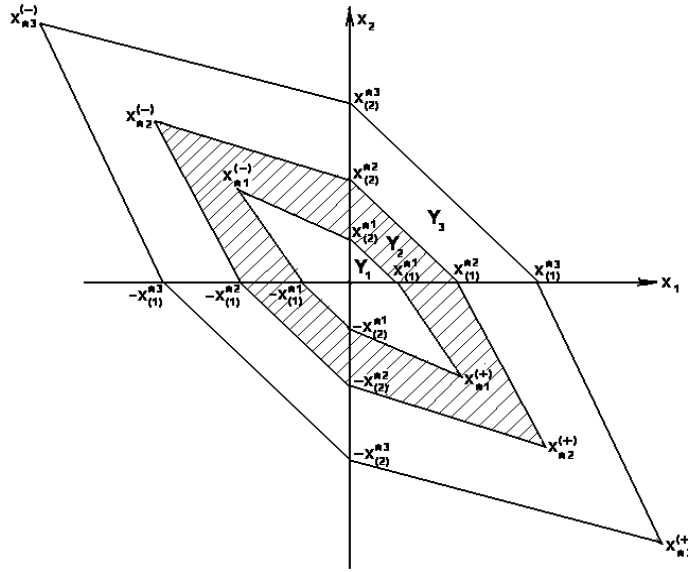


Рис. 5. Деление области начальных условий на области достижимости

Если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  не принадлежит квадранту, в котором находится граничная точка  $x_{*s}^{(+)}$  или  $x_{*s}^{(-)}$ ,  $s = \overline{1, q}$ , то подмножество начальных условий  $Y_s$  выделяется следующим образом. Минимальное значение  $s$ , при котором выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*s}^{(i)}} \right| - 1 \leq 0, \quad s = \overline{1, q}, \quad (3.15)$$

и определяет подмножество  $Y_s$ , принадлежность к которому теперь задается так:

$$Y_s = \left\{ x(t_0) : \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*s}^{(i)}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*(s-1)}^{(i)}} \right| - 1 > 0 \right\}. \quad (3.16)$$

Если для произвольно выбранного  $s$  выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*s}^{(i)}} \right| - 1 < 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*(s-1)}^{(i)}} \right| - 1 \leq 0, \quad (3.17)$$

то это является условием уменьшения  $s$ . Если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*s}^{(i)}} \right| - 1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{*(s-1)}^{(i)}} \right| - 1 > 0, \quad (3.18)$$

то это является условием увеличения  $s$ . Процесс выбора  $s$  заканчивается, если

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^{*s}} \right| - 1 \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^{*(s-1)}} \right| - 1 > 0, \quad (3.19)$$

Так целенаправленно происходит выбор  $s$  и той гиперплоскости, вблизи которой находится начальное условие  $x(t_0)$ . *Знаки координат граничных точек на осях в соответствующем уравнении гиперплоскости определяются знаками координат начального условия  $x(t_0)$ .* Гиперплоскость  $\Gamma_{s-1}$  принимается за опорную гиперплоскость для точки  $x(t_0)$  множества достижимости за время  $T_{s-1}$ , а нормальный вектор к опорной гиперплоскости, направленный внутрь множества достижимости, принимается за нормированный вектор начальных условий  $\hat{\psi}(t_0)$  сопряженной системы. В результате, если выбрано  $s = r$ , то компоненты нормированного вектора сопряженной системы вычисляются следующим образом:

$$\hat{\psi}_i(t_0) = - \frac{1 \operatorname{sign} x_i(t_0)}{|x_{(i)}^{*(r-1)}| \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_i^{*(r-1)}} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.20)$$

Если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту, в котором находится граничная точка  $x_{*s}^{(+)}$  (или  $x_{*s}^{(-)}$ ),  $s = \overline{1, q}$ , то подмножество  $Y_s$  выделяется следующим образом. Находится минимальное значение  $s$ , при котором для каждого  $k = \overline{1, n}$  выполняется неравенство (3.8), а при  $(s-1)$  существуют такие  $k \in [1, n]$  (или хотя бы одно значение), для которых неравенство (3.8) не выполняется:

$$Y_s = \left[ x(t_0) : \sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+s)} x_i(t_0) - 1 \leq 0, k = \overline{1, n}; \exists k \in [1, n] \sum_{i=1}^n A_{ik}^{+(s-1)} x_i(t_0) - 1 > 0 \right] \quad (3.21)$$

Если для произвольно выбранного  $s$  выполняются для каждого  $k = \overline{1, n}$  соотношения

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+s)} x_i(t_0) - 1 < 0, \quad \sum_{i=1}^n A_{ik}^{+(s-1)} x_i(t_0) - 1 \leq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (3.22)$$

то это является условием уменьшения  $s$ . Если существуют такие значения  $k \in [1, n]$  (или хотя бы одно значение), для которых не выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+s)} x_i(t_0) - 1 > 0, \quad \sum_{i=1}^n A_{ik}^{+(s-1)} x_i(t_0) - 1 > 0, \quad \exists k \in [1, n], \quad (3.23)$$

то это является условием увеличения  $s$ . Процесс выбора  $s$  заканчивается, когда выполняются условия (3.21).

Итак,  $s$  найдено. Переходим к выбору гиперплоскости, которую следует принять в качестве опорной. Докажем, что в качестве опорной следует взять гиперплоскость, для которой нормированное расстояние от начального условия  $x(t_0) = x_0$  до гиперплоскости неотрицательно и максимально. Под нормированным расстоянием понимается величина  $d_k = \sum_{i=1}^n A_{ik} x_i(t_0) - 1, k = \overline{1, n}$ .

**Теорема.** Нормированное расстояние  $d_k = \sum_{i=1}^n A_{ik}x_i(t_0) - 1$ ,  $k = \overline{1, n}$  от начального условия  $x(t_0) = x_0$  до опорной гиперплоскости  $\Gamma_r$ ,  $r \in [1, n]$  множества достижимости за время  $T_s$  неотрицательно ( $d \geq 0$ ) и максимально:  $d_r = \max_k d_k$ .

**Доказательство.** Неотрицательность нормированного расстояния ( $d \geq 0$ ) следует из определения опорной гиперплоскости к множеству достижимости.

Докажем, что  $d$  должно быть максимальным.

Допустим, что точка  $x(t_0) = x_0$  находится в квадранте фазового пространства, в котором по построению есть только граничные точки на фазовых осях. Тогда в качестве опорной принимается гиперплоскость

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_{(i)}^*} - 1 = 0, \quad (3.24)$$

где  $x_{(i)}^*$  – координаты граничных точек на таких фазовых осях, знаки которых совпадают со знаками координат начального условия, т.е.  $\text{sign } x_{(i)}^* = \text{sign } x_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Действительно, так как справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \leq \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right|, \quad (3.25)$$

то нет необходимости в проверке всех гиперплоскостей. Достаточно проверить максимальное значение  $d$ , которое достигается при предельном соотношении (3.25). В результате для определения положения точки  $x(t_0) = x_0$  относительно опорной гиперплоскости необходимо и достаточно проверить значение  $d$  при предельном соотношении

$$d = \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^*} \right| - 1. \quad (3.26)$$

Если  $d \geq 0$ , то начальное условие  $x(t_0) = x_0$  находится с началом координат по разные стороны от опорной гиперплоскости (или принадлежит опорной гиперплоскости). Самое существенное состоит в том, что для определения опорной гиперплоскости необходимо и достаточно рассмотреть такую гиперплоскость, для которой  $d$  максимально. Это и есть опорная гиперплоскость.

Если точка  $x(t_0) = x_0$  находится в квадранте, в котором есть граничная точка  $x_*^{(+)}$  (или  $x_*^{(-)}$ ) на луче, исходящем из начала координат, и граничные точки  $x_{(i)}^*$ ,  $i = \overline{1, n}$  на фазовых осях, то гиперплоскости уже заданы

$$\sum_{i=1}^n A_{ik}x_i - 1 = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Именно из этих  $n$  гиперплоскостей необходимо сделать выбор одной из них, приняв ее в качестве опорной гиперплоскости. Коэффициенты  $A_{ik}$ ,  $k = \overline{1, n}$  находятся из условия прохождения каждой гиперплоскости через  $n$  точек: через граничную точку на луче и комбинацию из  $(n-1)$  различных граничных точек на фазовых осях. Принимая для каждого  $k \in [1, n]$ , что  $A_{ik} = \frac{1}{x_{(i)}^*}$ , приходим для каждой гиперплоскости к уравнению в отрезках вида (3.24). А в этом случае выше было доказано, что в качестве опорной гиперплоскости следует брать

гиперплоскость, для которой нормированное расстояние ( $d$ ) неотрицательно и максимально.

**Теорема доказана.**

Для опорной гиперплоскости находится нормальный вектор, направляющие косинусы которого позволяют вычислить нормированный вектор начальных условий сопряженной системы

$$\hat{\psi}_i(t_0) = - \frac{A_{ir}^{(+)(s-1)}}{\left[ \sum_{k=1}^n \left( A_{kr}^{(+)(s-1)} \right)^2 \right]^{1/2}}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.27)$$

Нетрудно видеть, что для каждого начального условия выделяется многогранник, вписанный в множество достижимости за время  $T_{s-1}$  и имеющий с ним  $2(n + 1)$  общих граничных точек. В результате для системы  $n$  порядка имеем  $2(n + 1)q$  граничных точек, времена перевода из которых и структуры управлений совпадают с временами и структурами оптимальных по быстродействию управлений. Поэтому такая конструкция является аппроксимирующей и дает приближенное решение задачи быстродействия.

С ростом порядка управляемой системы сложность реализации незначительно увеличивается. Так как каждая гиперплоскость имеет единственный нормальный вектор, то нормированный вектор начальных условий  $\hat{\psi}(t_0)$  может быть вычислен *предварительно до начала процесса управления*. Зная  $\hat{\psi}(t_0)$ , можно предварительно вычислить для каждой гиперплоскости моменты переключений и структуру (знаки) искомого оптимального управления  $u(t)$ . В свою очередь, зная приближенно оптимальное управление, можно вычислить предварительно до начала процесса управления и интегральные выражения, входящие в решение задачи Коши. *Все эти операции не зависят от конкретного начального условия и поэтому могут быть выполнены предварительно до начала процесса управления и "привязаны" к каждой гиперплоскости.* С момента задания конкретного начального условия начинается определение конкретной опорной гиперплоскости, соответствующей заданному начальному условию. Эта операция выполняется уже *в процессе управления*. Процедура выделения соответствующей опорной гиперплоскости сводится к проверке простых неравенств. Ниже показано, как просто уточняется время перевода системы из заданного начального условия в начало координат.

**3.4. Уточнение времени перевода системы.** Рассмотренная процедура выделения подобласти, которой принадлежит начальное условие  $x(t_0) = x_0$ , позволяет дискретно и приближенно определить время оптимального по быстродействию перевода системы из заданного начального состояния в начало координат. Метод уточнения приближенного значения времени перевода системы состоит в следующем. При определении подобласти  $Y_s$ , которой принадлежит точка  $x(t_0) = x_0$ , выделяются две гиперплоскости: опорная гиперплоскость  $\Gamma_1$  и ей "параллельная" гиперплоскость  $\Gamma_2$ . Опорная гиперплоскость  $\Gamma_1$  отделяет начальное условие  $x(t_0) = x_0$  от множества достижимости за время  $T_{s-1}$ , т.е. точки  $x(t_0) = x_0$  и начало координат лежат по разные стороны от гиперплоскости  $\Gamma_1$ . Гиперплоскость  $\Gamma_1$  проходит через  $(n - 1)$  граничные точки на осях и через граничную точку  $x_{*(s-1)}^{(+)}$  (или  $x_{*(s-1)}^{(-)}$ ) на луче. Времена перевода системы (2.1) из всех граничных точек равны  $T_{s-1}$ . Гиперплоскость  $\Gamma_2$  проходит

через  $(n-1)$  граничных точек на тех же фазовых осях и граничную точку  $x_{*s}^{(+)}$  (или  $x_{*s}^{(-)}$ ), для которых времена перевода системы (2.1) равны  $T_s = T_{s-1} + \Delta T$ . Знаки координат граничных точек на фазовых осях совпадают, но величины различны. Гиперплоскость  $\Gamma_1$  принадлежит множеству достижимости за время  $T_{s-1}$  и является одной из гиперплоскостей при аппроксимации множества достижимости за время  $T_{s-1}$ . Гиперплоскость  $\Gamma_2$  принадлежит соответственно множеству достижимости за время  $T_s$ .

**Лемма 1.** *Величина  $d = \sum_{i=1}^n A_{ik} x_i(t_0) - 1$  является нормированным расстоянием от точки  $x(t_0) = x_0$  до гиперплоскости  $\sum_{i=1}^n A_{ik} x_i - 1 = 0$ .*

**Доказательство.** Допустим, что начальное условие  $x(t_0) = x_0$  находится на  $i$ -й фазовой оси, т.е.  $x(t_0) = (0, \dots, x_i(t_0), \dots, 0)$ . Согласно построению аппроксимирующей конструкции гиперплоскость проходит через граничную точку на  $i$ -й фазовой оси  $x_{(i)}^{*s}$ , принадлежащую множеству достижимости за время  $T_s$ . Из метода вычисления коэффициентов следует, что  $A_{ik} = \frac{1}{x_{(i)}^{*s}}$ . Учитывая, что при прохождении гиперплоскости через  $i$ -ю фазовую ось, все, кроме  $i$ -й, координаты нулевые, приходим к уравнению

$$\frac{x_i}{x_{(i)}^{*s}} - 1 = 0 \quad (3.28)$$

Если начальное условие, т.е. точка  $x(t_0) = x_0$ , совпадает с граничной точкой  $(0, \dots, x_{(i)}^{*s}, \dots, 0)$  на оси, т.е.  $x_i(t_0) = x_{(i)}^{*s}$ , то  $d = \frac{x_i(t_0)}{x_{(i)}^{*s}} - 1$  равно нулю. Это условие принадлежности точки гиперплоскости. Другими словами, гиперплоскость проходит через заданную точку. Если  $x_i(t_0) < x_{(i)}^{*s}$ , т.е. начальное условие находится на фазовой оси между началом координат и граничной точкой, то  $d < 0$ . Это условие принадлежности точки области достижимости за время  $T_s$ . Если  $x_i(t_0) > x_{(i)}^{*s}$ , т.е. начальное условие находится дальше от начала координат чем граничная точка, то  $d > 0$ . Следовательно, величина  $d$  характеризует положение начальной точки  $x(t_0) = x_0$  относительно гиперплоскости как *количественно* (в долях величины граничной точки  $x_{(i)}^{*s}$ ) так и *качественно* (т.е. с какой стороны относительно граничной точки находится на оси начальное условие). Поэтому  $d$  является нормированным расстоянием от начального условия  $x(t_0) = x_0$  до гиперплоскости.

**Лемма доказана.**

Нормированное расстояние  $(d_1)$  от точки  $x(t_0) = x_0$  до гиперплоскости  $\Gamma_1$  равно

$$d_1 = \sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+)(s-1)} x_i(t_0) - 1, \quad d_1 \geq 0. \quad (3.29)$$

Нормированное расстояние  $(d_2)$  от точки  $x(t_0) = x_0$  до "параллельной" гиперплоскости  $\Gamma_2$  равно

$$d_2 = \sum_{i=1}^n A_{ik}^{(+)(s)} x_i(t_0) - 1, \quad d_2 < 0. \quad (3.30)$$

Точка  $x(t_0) = x_0$  находится с началом координат по одну сторону от гиперплоскости  $\Gamma_2$  и по разные стороны от гиперплоскости  $\Gamma_1$ . Нормированное расстояние учитывает направление от точки  $x(t_0) = x_0$  до гиперплоскости. Поэтому  $d_1 \geq 0$ , а  $d_2 < 0$ .

Точка  $x(t_0) = x_0$  находится между гиперплоскостями  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , отстоящими на  $\Delta T = T_s - T_{s-1}$ . Уточненное время перевода системы (2.1) из заданного начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в начало координат пропорционально расстоянию и равно

$$T = T_{s-1} + \frac{d_1}{d_1 + |d_2|} (T_s - T_{s-1}), \quad (3.31)$$

если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту фазового пространства, в котором не находятся граничные точки  $x_{*s}^{(+)}$  или  $x_{*s}^{(-)}$ , и

$$T = T_{s-1} + \frac{d_1}{2(d_1 + |d_2|)} (T_s - T_{s-1}), \quad (3.32)$$

если  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту, в котором находятся граничные точки  $x_{*s}^{(+)}$  или  $x_{*s}^{(-)}$ . В (3.32) вводится поправочный коэффициент  $1/2$ , учитывающий в этом случае более грубую аппроксимацию гиперплоскостью границы множества достижимости.

Следует подчеркнуть, что значения  $d_1$  и  $d_2$  вычисляются при определении подобласти  $Y_s$ , которой принадлежит заданное начальное условие  $x(t_0) = x_0$ , и сводятся к проверке простых неравенств вида (3.26) или (3.29), (3.30). Таким образом, процедура уточнения времени перевода не требует дополнительных сложных вычислений.

**3.5. Уточнение моментов переключений управления.** Если начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит квадранту фазового пространства, в котором нет граничных точек  $x_{*s}^{(+)}$  или  $x_{*s}^{(-)}$ , то множество достижимости за время  $T_s$  аппроксимируется одной гиперплоскостью. Эта гиперплоскость проходит через граничные точки на фазовых осях и имеет единственный нормальный вектор, направленный внутрь множества достижимости. Следовательно, для всех начальных условий  $x(t_0) = x_0$ , принадлежащих области фазового пространства между двумя гиперплоскостями, имеем единственный вектор  $\hat{\psi}(t_0)$  начальных условий сопряженной системы. Это означает, что для всех начальных условий этой области имеем одинаковые моменты переключений управления  $u(t)$ . Поэтому и начальное приближение для управления  $u(t)$  остается неизменным для всех начальных условий  $x(t_0)$  из этой области. Точность начального приближения (задания  $\hat{\psi}(t_0)$  и, следовательно,  $u(t)$ ) может быть увеличена введением дополнительно граничной точки. На луче, исходящем из начала координат и проходящем через точку  $X_R = (x_{(1)}^{*s}, x_{(2)}^{*s}, \dots, x_{(n)}^{*s})$ , находим граничную точку  $x_{*s} = \mu X_R$ , для которой система (2.1) с начальным условием  $x(t_0) = x_{*s}$  переводится в начало координат оптимальным по быстродействию управлением за время  $T_s$ .

Таким образом, точка  $x_{*s}$  принадлежит границе множества достижимости за время  $T_s$ . Координаты точки  $X_R$  являются граничными точками на фазовых осях  $x_{(i)}^{*s}, i = \overline{1, n}$ , времена перевода из которых системы (2.1) равны  $T_s$ . Рис. 6 иллюстрирует это построение. Точка  $x_{*s}$  находится *предварительно до начала процесса управления* подбором коэффициента  $\mu$ . Проводим гиперплоскости через точку  $x_{*s}$  и  $(n - 1)$  различные граничные точки на фазовых осях. Процедура выделения опорной гиперплоскости, определения вектора  $\hat{\psi}(t_0)$  начальных условий сопряженной системы, вычисления моментов переключений и структуры искомого оптимального управления аналогична вышерассмотренной.



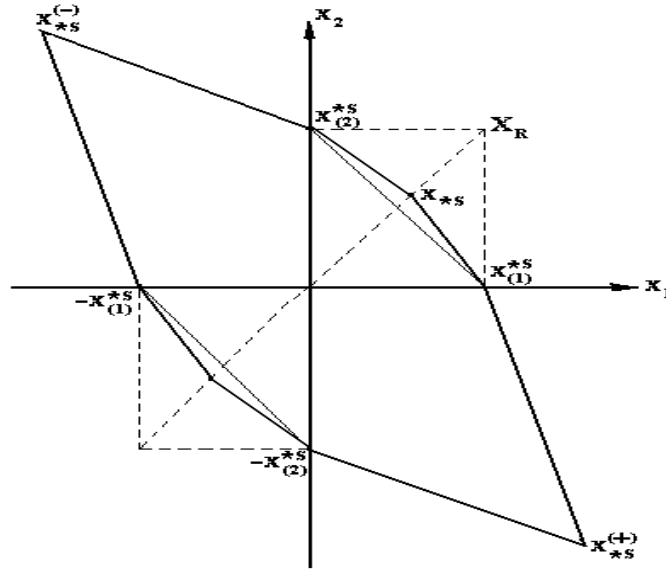


Рис. 6

Процедура предварительного расчета и построения аппроксимирующей конструкции несколько усложняется, однако увеличивается точность начального приближения. А это приводит к уменьшению времени интегрирования в процессе управления, что делает возможным реализацию оптимального управления в реальном времени.

#### 4. ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

**4.1. Отклонение фазовых координат при вариации моментов переключений управления.** Выпишем отклонение от начала координат решения уравнения (2.1) в конечный момент времени  $t = t_k$  в случае приближенного задания оптимального управления. Для кусочно-постоянного управления  $u(t)$ , компоненты которого переключаются в моменты времени  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j}$ , и принимают значения  $u_j(t) = u_j^p$ ,  $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ , где  $\nu_j^0 = t_0$ ,  $\nu_j^{r_j} = t_k$ , имеем:

$$\Delta \tilde{x}(t_k) = \Phi(t_k, t_0)x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{\nu_j^{p-1}}^{\nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^p d\tau. \quad (4.1)$$

Необходимо так изменить конечный момент времени  $t = t_k$  и моменты переключений  $\nu_j^p$ , чтобы вызванное этим изменением отклонение фазовых координат  $\Delta \hat{x}(t_k)$  компенсировало отклонение  $\Delta \tilde{x}(t_k)$ , вызванное неточным (приближенным) заданием оптимального управления (4.1). Должно выполняться уравнение баланса отклонений

$$\Delta \hat{x}(t_k) + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (4.2)$$

Изменим моменты переключений  $\nu_j^p$  на  $\Delta \nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ , а конечный момент  $t_k$  — на  $\Delta t_k$ . Для отклонения фазовых координат  $\Delta \hat{x}(t_k)$  получим

выражение

$$\Delta \hat{x}(t_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{\nu_j^p}^{\nu_j^p + \Delta \nu_j^p} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) [u_j^p - u_j^{p+1}] d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_k}^{t_k + \Delta t_k} \Phi(t_k, \tau) B_j(\tau) u_j^{r_j} d\tau. \quad (4.3)$$

Если  $\Delta \nu_j^p$  и  $\Delta t_k$  достаточно малы (а это, как показано ниже, достигается специальным приемом — компенсацией отклонений по частям), то можно записать следующее приближенное соотношение, которое тем точнее, чем меньше по модулю  $\Delta \nu_j^p$  и  $\Delta t_k$ :

$$\Delta \hat{x}(t_k) \approx \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) [u_j^p - u_j^{p+1}] \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) u_j^{r_j} \Delta t_k. \quad (4.4)$$

Для линейной системы (2.1) оптимальное по быстродействию управление задается выражением:

$$u_j^0(t) = M_j \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.5)$$

где  $[B_j(t)]^*$  — транспонированный  $j$ -й столбец матрицы  $B(t)$ ;  $\psi(t)$  — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi(t), \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad (4.6)$$

имеющее следующий вид

$$\psi(t) = \hat{\Phi}(t, t_0)\psi(t_0). \quad (4.7)$$

Здесь  $\hat{\Phi}(t, t_0)$  — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (4.6), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\hat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t)\hat{\Phi}(t, t_0), \quad \hat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (4.8)$$

Матрица  $\hat{\Phi}(t, t_0)$  выражается через фундаментальную матрицу решений прямой системы (2.1) следующим образом:  $\hat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ . Отсюда  $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\hat{\Phi}(t, t_0)]^*$ .

Моменты переключений  $\nu_j^p$  компонент вектора оптимального управления и их число  $r_j$  на интервале  $[t_0, t_k]$  однозначно определяются функциями переключений  $[B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$ , если известно решение  $\psi(t)$ , т.е. известны начальные условия  $\psi_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, n}$  сопряженной системы. Тогда на  $p$  интервале знакопостоянства оптимального управления (4.5) можно записать  $u_j^p(t) = M_j S_j(p)$ , где  $S_j(p) = \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ . Так как  $S_j(p+1) = -S_j(p)$ , то  $(u_j^p - u_j^{p+1}) = 2M_j S_j(p)$  и выражение (4.4) принимает вид

$$\Delta \hat{x}(t_k) \approx 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k. \quad (4.9)$$

Подставим (4.9) в (4.2). Получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений, связывающих отклонения  $\Delta \nu_j^p$  моментов переключений  $\nu_j^p$  и отклонение  $\Delta t_k$  конечного момента времени  $t_k$  с отклонениями фазовых координат  $\Delta \tilde{x}(t_k)$ ,

порожденными неточным (приближенным) заданием искомого оптимального управления:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (4.10)$$

В (4.10) число неизвестных  $\Delta \nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  и  $\Delta t_k$  может не быть равным числу линейных алгебраических уравнений. Моменты переключений *не являются независимыми* переменными, а однозначно определяются начальным условием сопряженной системы. Необходимо выразить отклонения  $\Delta \nu_j^p$  через отклонения начальных условий нормированной сопряженной системы  $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ . Число последних всегда  $(n - 1)$ . Вместе с  $\Delta t_k$  они образуют  $n$  неизвестных, которые и находим, решая систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений.

#### 4.2. Связь между отклонениями моментов переключений и отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы.

В моменты переключений функция переключения равна нулю, т.е.

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \psi(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.11)$$

Введем обозначение  $\hat{\psi}(t_0) = \psi(t_0) / \psi_\alpha(t_0)$ , где  $\alpha \in [1, n]$ . Здесь  $\psi_\alpha(t_0)$  — начальное условие  $\alpha$  фазовой координаты, отличное от нуля в момент  $t_0$ . Причем  $\alpha$  — *любое* из множества  $[1, n]$ , для которого  $\psi_\alpha(t_0) \neq 0$ . Получим систему

$$[B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \quad (4.12)$$

которая связывает моменты переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  с начальным условием нормированной сопряженной системы  $\hat{\psi}(t_0)$ .

Изменим  $\hat{\psi}(t_0)$  на  $\Delta \hat{\psi}(t_0)$ . Это порождает изменение  $\nu_j^p$  на  $\Delta \nu_j^p$ :

$$[B_j(\nu_j^p + \Delta \nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p + \Delta \nu_j^p, t_0) [\hat{\psi}(t_0) + \Delta \hat{\psi}(t_0)] = 0, \quad (4.13)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами. Получим следующее приближенное выражение, связывающее отклонения  $\Delta \nu_j^p$  моментов переключений с отклонением  $\Delta \hat{\psi}(t_0)$  начального условия нормированной сопряженной системы [16]:

$$\Delta \nu_j^p \approx \left\{ \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \right\} \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad (4.14)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Для краткости записи (4.14) используем выражение

$$\Delta \nu_j^p \approx L \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.14)'$$

Важно подчеркнуть, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (4.14) имеет простой вид, благодаря матрицам размера  $(n \times 1)$  и  $(1 \times n)$ , входящим в (4.14).

Следует также отметить, что выражение (4.14) позволяет определять отклонения не только для существующих моментов переключений управления, но и

для *новых* моментов переключений, которые могут появиться в системе при ее движении в фазовом пространстве.

**4.3. Связь между отклонениями прямой и сопряженной систем.**

Подставим (4.14)' в (4.10) и получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) L \Delta \hat{\psi}(t_0) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k + \Delta \tilde{x}(t_k) = 0. \quad (4.15)$$

Неизвестными в (4.15) являются  $(n - 1)$  отклонений  $\Delta \hat{\psi}_i(t_0)$  и отклонение  $\Delta t_k$  конечного момента времени  $t_k$ . Система (4.15) разрешима при выполнении следующих необходимых условий: 1) начальное условие  $x(t_0) = x_0$  принадлежит области управляемости  $V$ ; 2) система (2.1) полностью управляема.

Действительно, система (2.1) может быть как устойчивой так и неустойчивой. Для устойчивой системы перевод в начало координат возможен из любой точки фазового пространства. Для неустойчивой системы перевод в начало координат ограниченным управлением (2.2) возможен лишь из ограниченной области начальных условий, которую принято называть областью управляемости [1],[2]. Область управляемости  $V$  – это незамкнутое, выпуклое, ограниченное множество фазового пространства  $X$ , из точек которого система может быть переведена в начало координат. Для динамической системы области достижимости  $R_T$  при  $T$  стремящемся к бесконечности стремится к области управляемости: для устойчивой системы это все фазовое пространство  $X$ , а для неустойчивой системы – ограниченное пространство пространства  $X$ . Если  $x_0 \notin V$ , то невозможен перевод системы в начало координат. Для возможности перевода системы, не оговаривая устойчивая или неустойчивая рассматриваемая система (2.1), начальное условие должно принадлежать области управляемости, что и отражено в постановке задачи:  $x_0 \in D$ ,  $D \subset V$ .

Докажем теперь, что решение системы линейных алгебраических уравнений существует. Для этого необходимо доказать невырожденность матрицы

$$\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p).$$

**Лемма 2.** *Если система (2.1) полностью управляема, то матрица*

$\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p)$  *невырождена и решение системы линейных алгебраических уравнений (4.15) существует.*

**Доказательство.** Справедлива запись  $\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) = \Phi(t_k, \nu_j^p) B(\nu_j^p)$ ,

$j = \overline{1, m}$ . Для автономной системы матрица фундаментальных решений имеет вид  $\Phi(t_k, t_0) = e^{A(t_k-t_0)}$ , а условие полной управляемости (2.3) записывается в виде:

$$\text{rank} \left[ B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \right] = n. \quad (2.3)'$$

Разложим матрицу  $e^{A(t_k-t_0)}$  в ряд Тейлора [17]. Получим

$$e^{A(t_k-t_0)} = E + A(t_k - t_0) + A^2(t_k - t_0)^2 + A^3(t_k - t_0)^3 + \dots$$

В результате имеем

$$\sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) = B + AB(t_k - \nu_j^p) + A^2 B(t_k - \nu_j^p)^2 + A^3 B(t_k - \nu_j^p)^3 + \dots$$

Так как условие полной управляемости (2.3) в постановке задачи предполагается выполненным, то, следовательно, ранг рассматриваемой матрицы максимален и равен  $n$

$$\text{rank} \left[ \sum_{j=1}^m \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) \right] = n,$$

т.е. матрица невырождена и решение системы линейных алгебраических уравнений существует.

**Лемма доказана.**

Таким образом, для невырожденности матриц неоднородных систем линейных алгебраических уравнений необходимо выполнение условия полной управляемости. В постановке задачи предполагается выполнение этого необходимого условия (см. (2.3)).

**4.4. Итерационный вычислительный процесс.** Каждой гиперплоскости соответствует свой вектор  $\hat{\psi}(t_0)$  начальных условий нормированной сопряженной системы и, следовательно, свои значения моментов переключений управления, которые могут быть вычислены предварительно до начала процесса управления. В результате вычисление оптимального управления сводится к уточнению приближенно найденных моментов  $(\nu_j^p)$  переключений управления и к уточнению конечного момента  $t_k$ . Так как определение опорной гиперплоскости заключается в проверке простых неравенств, то задание начального приближения можно осуществить в реальном времени.

Интегрируем систему (2.1) с приближенно найденным управлением  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k^0]$  и вычисляем отклонение фазовой траектории от начала координат, т.е. вычисляем  $\Delta \tilde{x}(t_k^0)$ . Решаем систему линейных алгебраических уравнений (4.15). Находим  $\Delta \hat{\psi}(t_0)$  и  $\Delta t_k$ . Вычисляем по формуле (4.14)  $\Delta \nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$ . Если  $\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|] \leq \gamma(t_k - t_0)$ ,  $0 < \gamma < 1$ , то находим уточненные значения моментов переключений, конечного момента и начальных условий сопряженной системы:

$$\nu_j^{p,c+1} = \nu_j^{p,c} + \Delta \nu_j^{p,c}; \quad t_k^{c+1} = t_k^c + \Delta t_k^c; \quad \hat{\psi}^{c+1}(t_0) = \hat{\psi}^c(t_0) + \Delta \hat{\psi}^c(t_0), \quad (4.16)$$

$$j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1},$$

где  $c$  - номер итерации.

Если  $\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|] > \gamma(t_k - t_0)$ ,  $0 < \gamma < 1$ , то полагаем  $\nu_j^{p,c+1} = \nu_j^{p,c} + \xi \Delta \nu_j^{p,c}$ ;  $t_k^{c+1} = t_k^c + \xi \Delta t_k^c$ ;  $\hat{\psi}^{c+1}(t_0) = \hat{\psi}^c(t_0) + \xi \Delta \hat{\psi}^c(t_0)$ , где коэффициент  $\xi$  вычисляется по формуле

$$\xi = \frac{\gamma(t_k - t_0)}{\max_{j,p} [|\Delta \nu_j^p|, |\Delta t_k|]}. \quad (4.17)$$

В результате максимальное отклонение на этой итерации принимается равным предельно допустимому значению, а остальные отклонения уменьшаются пропорционально в  $\xi$  раз и компенсируется не все отклонение  $\Delta \tilde{x}(t_k)$ , а лишь его

$\xi$  часть. Ограничение больших отклонений позволяет избежать расходимости итерационного процесса вычислений из-за приближенности выражений (4.4) и (4.14).

Интегрируем систему (2.1) с уточненным управлением  $u^{c+1}$ ,  $t \in [t_0, t_k^{c+1}]$  и находим отклонение  $\Delta\tilde{x}(t_k^{c+1})$  фазовой траектории от начала координат в уточненный конечный момент  $t_k^{c+1}$ . Начинается новый шаг вычислений и уточнений моментов переключений управления и конечного момента времени. Процесс вычислений заканчивается, если  $\|\Delta\tilde{x}(t_k)\| \leq \epsilon_0$ , где  $\epsilon_0$  задано и характеризует требуемую точность вычисления оптимального управления.

Необходимо отметить следующее. Задание хорошего начального приближения значительно сокращает число необходимых итераций. На каждой итерации нет необходимости в интегрировании уравнения (2.1) на интервале  $[t_0, t_k]$ , так как достаточно проинтегрировать уравнение (2.1) на интервале  $[t_0, t_k]$  один раз и затем интегрировать лишь на интервалах перемещений конечного момента и моментов переключений управления. Операция интегрирования является в вычислительном отношении наиболее затратной по времени в сравнении с другими операциями, в частности, по сравнению с решением системы линейных алгебраических уравнений, которая является основной в рассматриваемом методе вычисления оптимального по быстродействию управления.

## 5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТРУДОЕМКОСТЬ МЕТОДА

Трудоёмкость вычислительного метода принято выражать суммарными затратами времени на вычисления. Основные вычислительные затраты любого метода нахождения оптимального управления вызваны интегрированием систем дифференциальных уравнений. Затраты времени на другие операции, в частности, на решение систем линейных алгебраических уравнений значительно меньше. Поэтому трудоёмкость любого метода нахождения оптимального управления принято выражать через число решений задач Коши [5]. Однако для корректного сравнения вычислительных методов и учета вычислительных затрат целесообразно учитывать не только число решений задач Коши, но и порядок интегрируемой системы дифференциальных уравнений, т.е. умножить число решений задач Коши на порядок ( $n$ ) системы. Следует отметить, что чем выше порядок системы, тем, как правило, и больше число решений задач Коши. Поэтому вычислительная трудоёмкость возрастает нелинейно.

В предлагаемом методе нет необходимости в интегрировании систем дифференциальных уравнений на каждой итерации на интервале  $t \in [t_0, t_k^c]$ . Достаточно *предварительно на этапе построения аппроксимирующей конструкции* провести интегрирование на интервале  $t \in [t_0, t_k^0]$ , запомнить значения интегральных выражений в моменты переключений управления и в конечный момент времени и затем проводить интегрирование лишь на интервалах  $\Delta\nu_j^{p,c}, \Delta t_k^c$ , на которые изменяются моменты переключений и конечный момент на каждой итерации. Разбиение гиперплоскостями области начальных условий на подобласти со своими значениями моментов переключений и времени перевода позволяет проинтегрировать *предварительно* до начала процесса управления систему дифференциальных уравнений, запомнить интегральные выражения и присвоить каждой гиперплоскости свои соответствующие значения. Предварительные вычисления не входят в оценку трудоёмкости вычислительного метода, так как для оптимального управления в *реальном времени* важны

лишь те вычислительные операции, которые производятся в *процессе управления* системой. В результате суммарное время интегрирования определяется выражением

$$T_* = \sum_{c=1}^N \left[ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} |\Delta \nu_j^{p,c}| + |\Delta t_k^c| \right]. \quad (5.1)$$

**Определение.** *Трудоёмкость ( $R$ ) вычислительного метода – это отношение затрат времени на интегрирование при вычислении оптимального управления к времени оптимального процесса  $T_{opt} = t_k - t_0$ .*

Трудоёмкость рассматриваемого метода равна

$$R = \frac{T_*}{T_{opt}}. \quad (5.2)$$

Вычислительная трудоёмкость метода определяется суммарным перемещением моментов переключений и конечного момента и *в случае монотонной сходимости не зависит от числа перемещений, т.е. не зависит от числа итераций.* Более того, чем *точнее начальное приближение, тем более монотонно сходится вычислительный процесс и, следовательно, тем меньше величина суммарного перемещения  $T_*$ .* В качестве нижней оценки затрат времени на вычисления можно принять

$$T_{*min} = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} |\nu_j^p - \nu_j^{p,\circ}| + |t_k - t_k^\circ|, \quad R_{min} = \frac{T_{*min}}{T_{opt}}. \quad (5.3)$$

Здесь  $\nu_j^{p,\circ}, t_k^\circ$  - начальные значения моментов переключений управления и конечного момента времени (начальное приближение);  $\nu_j^p, t_k$  - значения оптимального процесса.

## 6. ПРИВЕДЕНИЕ СИСТЕМ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

**6.1. Приведение систем произвольного вида к канонической форме.** Линейная полностью управляемая система с произвольной матрицей  $A$  может быть приведена к канонической форме с матрицей Фробениуса [18],[19]. В случае скалярного управления полностью управляемая система приводится к каноническому виду единственным образом, что впервые установлено в [20]. Для многомерного управления существует множество способов по выбору базиса, в котором матрицы  $A$  и  $B$  имели бы каноническую форму. Рассмотрим способ, при котором каноническое представление аналогично одномерному случаю.

Пусть задана система

$$\dot{z} = Cz + Du, \quad z(t_0) = z_0, \quad |u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.1)$$

где  $C$  и  $D$  - произвольные матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно. Сделаем замену  $z = \sum_{j=1}^m z^{(j)}$  и запишем (6.1) следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \dot{z}^{(j)} = \sum_{j=1}^m Cz^{(j)} + \sum_{j=1}^m (D_j)u_j, \quad \sum_{j=1}^m z^{(j)}(t_0) = z_0, \quad |u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.2)$$

где  $(D_j)$  -  $j$ -й столбец матрицы  $D$ .

Рассмотрим  $j$  уравнение этой системы

$$\dot{z}^{(j)} = Cz^{(j)} + (D_j)u_j, \quad z^{(j)}(t_0) = z_0^{(j)}, \quad |u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (6.3)$$

В (6.3)  $u_j$  – скаляр и (6.3) единственным образом приводится к канонической форме, если система (6.3) полностью управляема. Действительно, введем новую переменную  $x^{(j)} = P_j^{-1}z^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , где  $P_j$  – некоторая неособенная матрица размера  $n \times n$ . Система (6.3) преобразуется в систему

$$\dot{x}^{(j)} = P_j^{-1}CP_jx^{(j)} + P_j^{-1}(D_j)u_j, \quad x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}, \quad |u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.3')$$

которая имеет каноническую форму, если элементы матриц удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} [P_j^{-1}CP_j]_{i\beta} &= 0, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \beta = \overline{1, n}; \quad \beta \neq i+1, \\ [P_j^{-1}CP_j]_{i\beta} &= 1, \quad i = \overline{1, n-1}; \quad \beta = i+1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$[P_j^{-1}CP_j]_{n1} = -a_n,$$

$$[P_j^{-1}(D_j)]_i = 0, \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Получили систему из  $n^2$  уравнений для нахождения  $n^2$  неизвестных коэффициентов матрицы  $P_j$ ,  $j = \overline{1, m}$ . Система (6.4) имеет решение, если для (6.3) выполняется условие полной управляемости:

$$\text{rank}[(D_j), C(D_j), \dots, C^{n-1}(D_j)] = n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (6.5)$$

Это соответствует условию покомпонентной полной управляемости системы (6.1) в случае векторного управления  $u(t)$ .

Покомпонентная полная управляемость следует для рассматриваемых ограничений (2.2) из условия общности положения [1]. Действительно, область управления  $U$  представляет собой прямоугольный параллелепипед, каждое ребро которого параллельно одной из фазовых осей. Число различных (непараллельных) ребер равно  $m \leq n$ . Если  $\omega_j$ ,  $j = \overline{1, m}$  единичный вектор, имеющий направление одного из ребер параллелепипеда  $U$ , то

$$D\omega_j = (D_j), \quad j = \overline{1, m}. \quad (6.6)$$

Поэтому из условия линейной независимости векторов  $D\omega, CD\omega, \dots, C^{n-1}D\omega$ , соответствующего условию общности положения, следует

$$\text{rank}[(D_j), C(D_j), \dots, C^{n-1}(D_j)] = n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (6.7)$$

А это есть условие покомпонентной полной управляемости (6.5).

**6.2. Количественная мера полной управляемости.** Понятие полной управляемости является одним из фундаментальных и широко используется в современной теории управления. Линейная автономная система полностью управляема, если

$$\text{rank}[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (6.8)$$



Критерий полной управляемости в форме условия (6.8) был впервые установлен в конце 50-х годов Р.Калманом [21] для скалярного управления и Ла Саллем [22] для векторного управления. Линейная неавтономная система полностью управляема, если

$$\text{rank} \left[ \int_{t_0}^{t_k} \Phi(t_k, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k, \tau) d\tau \right] = n, \quad (6.9)$$

Критерий полной управляемости (6.8), (6.9) как и любые другие эквивалентные его формы [23] является "релейным" т.е. дает ответ на вопрос существования полной управляемости в форме "да-нет". Поэтому критерий в такой форме носит *качественный* характер.

В то же время весьма актуальна проблема нахождения и определения *количественной* меры полной управляемости. На основе решения задач финитного управления и параметрической оптимизации возможно определение и нахождение количественной меры полной управляемости.

При переводе системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.10)$$

из  $x(t_0) = x_0$  в  $x(t_k) = 0$  за фиксированное время  $T^0 = t_k - t_0$  величины управляющих воздействий  $|u_j(t)| = |\eta_j M_j \text{sign} [B_j]^* \psi(t)|$ ,  $j = \overline{1, m}$  различны и зависят от коэффициентов матриц  $A$  и  $B$ . Чем больше коэффициенты матрицы  $B$ , тем меньше необходимые величины управляющих воздействий. Зависимость от коэффициентов матрицы  $A$  носит более сложный характер. Существуют такие значения коэффициентов матрицы  $A$ , при которых фазовые координаты системы (6.10) оказываются линейно зависимыми. В этом случае нарушается условие (6.8), т.е.  $\text{rank}(A, B) < n$ . В этом случае величины управляющих воздействий, необходимые для перевода системы, становятся бесконечно большими. Физически это объясняется следующим образом. При наличии линейной зависимости между некоторыми фазовыми координатами для их разделения и управления в отдельности каждой фазовой координатой необходимо приложить управляющее воздействие бесконечной величины.

Более важным и интересным с практической точки зрения является управление системами достаточно "удаленными" от линейной зависимости. И здесь возникает актуальная проблема нахождения (на этапе проектирования управляемых объектов) коэффициентов (собственных значений) матрицы  $A$ , при которых амплитуды управляющих воздействий минимальны. Минимальные управляющие воздействия будут для систем с минимально возможным временем квазиоптимальных процессов [24]. Действительно, чем меньше заданное время, тем больше необходимые величины управляющих воздействий. Если, наоборот, зафиксировано время перевода системы, то для систем с оптимальными значениями параметров достаточно меньших значений управляющих воздействий, чем для систем с неоптимальными значениями.

На основании вышеизложенного дадим следующее

**Определение.** Количественной мерой полной управляемости автономной линейной системы  $\dot{x} = Ax + Bu$  является величина  $W = \frac{\|u^0\|}{\|u\|}$ . Здесь  $u$  – финитное управление:  $u_j(t) = \eta_j M_j \text{sign} B_j^* \psi(t)$ ,  $j = \overline{1, m}$  при решении задачи перевода системы (6.10) за фиксированное время  $T^0 = t_k - t_0$  из точки  $x(t_0) = x_0$

в начало координат  $x(t_k) = 0$ ;  $u^0$  – финитное управление, переводящее линейную систему из  $x(t_0) = x_0$  в начало координат  $x(t_k) = 0$  с оптимальными значениями коэффициентов.

Имеем  $W \in (0, 1]$ .

**Замечание.** Мере "1" соответствует система с минимальной величиной управления; мере "0" соответствует система с бесконечно большой величиной управления. Это уже неполностью управляемая система, так как в этом случае  $rank(A, B) < n$ .

На этапе проектирования управляемых систем наибольший практический интерес представляет построение систем с  $W = 1$ .

**6.3. Быстродействие управляемой системы.** Систему (6.3') можно записать так

$$\dot{x}^{(j)} = Ax^{(j)} + Bu_j, \quad x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.11)$$

где  $A$  - матрица Фробениуса, у которой над главной диагональю стоят единицы, а последняя строка имеет вид  $\sum_{i=1}^n a_i x_i$ ; матрица  $B$  имеет вид  $[0, \dots, 0, b_n]^*$ .

При подаче на вход устойчивой системы (6.11) ступенчатого воздействия на выходе имеем установившееся значение  $x_1 = \frac{b_n u_j}{a_1}$ . Время установления показаний стремится к бесконечности. Поэтому в теории управления [25] за время установления показаний принимается время вхождения в 5 процентную зону установившегося значения, которое не зависит от величины входного воздействия  $u_j$ , а определяется собственными значениями матрицы  $A$  и составляет:  $t_{ust} \approx 3|\lambda_{max}|$ , если объект устойчив и все собственные значения отрицательны;  $t_{ust} \approx 3 \min_{\lambda, \alpha} [|\lambda_{max}|, |\alpha_{max}|]$ , если объект устойчив и имеет действительные отрицательные и комплексно-сопряженные собственные значения с отрицательной вещественной частью. Время установления показаний служит количественной характеристикой быстродействия управляемой системы. Если  $t_{ust} < 1$ , то объект или процесс является быстродействующим или быстропротекающим. Если  $t_{ust} \gg 1$ , то объект или процесс является медленнодействующим или медленнопротекающим. Для возможности управления в реальном времени должно быть  $R < 1$ .

Запишем (6.11) в следующем виде

$$\frac{dx^{(j)}}{dt} = Ax^{(j)} + Bu_j, \quad x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Сделаем замену переменных, полагая  $t = -\tau$ . Получаем систему

$$\frac{dx^{(j)}}{d\tau} = -Ax^{(j)} - Bu_j, \quad x^{(j)}(t_0) = x_0^{(j)}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (6.12)$$

в "обращенном" времени. Если  $t = \alpha\tau$ , где  $0 < \alpha < 1$ , то переходим к "замедленной" системе дифференциальных уравнений. Если  $\alpha > 1$ , то переходим к "ускоренной" системе дифференциальных уравнений. Если  $t = \tau$ , (т.е.  $\alpha = 1$ ), то имеем процесс в реальном времени.

## 7. МОДЕЛИРОВАНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= x_{10}, \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= x_{20}, \\ \dot{x}_3 &= bu, \quad |u| \leq M, & x_3(t_0) &= x_{30}. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Принимаем следующими значения коэффициентов:  $b = 4$ , ограничение на управление  $M = 5$ .

Разобьем область начальных условий на десять областей достижимости с временами  $T_s, s = \overline{1, 10}$ . Принимаем  $T_1 = 0, 5; T_{10} = 5; T_{s+1} - T_s = 0, 5$ . Находим граничные точки на фазовых осях. Для системы (7.1) можно воспользоваться соотношениями, приведенными в [16]:

$$|x_{(1)}^{*s}| = \frac{bMT_s^3}{32}; \quad |x_{(2)}^{*s}| = \frac{bMT_s^2}{4(2 + 5^{1/2})}; \quad |x_{(3)}^{*s}| \approx \frac{bMT_s}{4, 3902}. \quad (7.2)$$

На лучах  $x = \mu X_R^{(s)}$ , исходящих из начала координат и проходящих через точки  $X_R^{(s)}$ , находим граничные точки  $x_{**s}^{(+)}$ ,  $s = \overline{1, 10}$  (одновременно получаем и симметричные точки  $x_{**s}^{(-)}$ ), времена перевода из которых оптимальным управлением равны  $T_s, s = \overline{1, 10}$ . Проводим гиперплоскости через соответствующие граничные точки, находим коэффициенты гиперплоскостей, определяем нормированное начальное условие  $\hat{\psi}(t_0)$  сопряженной системы, вычисляем структуру и моменты переключений управления.

Допустим, что задано начальное условие  $x(t_0) = (7, -10, 15)$ . Эта точка принадлежит квадранту, в котором находятся граничные точки  $x_{**s}^{(+)}, s = \overline{1, 10}$ . Проверяем выполнение неравенств (3.21) и находим, что заданное начальное условие принадлежит множеству достижимости за время  $T_4 = 2$  и не принадлежит множеству достижимости за время  $T_3 = 1, 5$ . Опорная гиперплоскость при  $T_3 = 1, 5$  проходит через граничные точки на фазовых осях  $x_{(1)}^{*3} = 2, 1094; x_{(3)}^{*3} = 6, 8334$  и граничную точку на луче  $x_{*3}^{(+)} = (11, 25; -22, 5; 30)$  и описывается уравнением

$$0, 474068x_1 + 0, 387709x_2 + 0, 14634x_3 - 1 = 0. \quad (7.3)$$

Расстояние ( $d_1$ ) от точки  $x(t_0) = (7, -10, 15)$  до опорной гиперплоскости равно  $d_1 = 0, 636486$ . Вектор начальных условий сопряженной системы равен  $\hat{\psi}(t_0) = (-0, 752893; -0, 615741; -0, 23241)$ , которому соответствуют следующие моменты переключений:  $\nu_1 = 0, 590957; \nu_2 = 1, 044713$ . Структура искомого оптимального управления  $(-M, +M, -M)$ .

"Параллельная" опорной гиперплоскости при  $T_4 = 2$  проходит через граничные точки на осях  $x_{(1)}^{*4} = 5; x_{(3)}^{*4} = 9, 1112$  и граничную точку на луче  $x_{*4}^{(+)}$  и описывается уравнением

$$0, 2x_1 + 0, 224118x_2 + 0, 109755x_3 - 1 = 0. \quad (7.4)$$

Расстояние ( $d_2$ ) от точки  $x(t_0)$  до гиперплоскости, "параллельной" опорной, равно  $d_2 = -0, 194855$ . По формуле (3.32) находим приближенное уточненное время перевода системы (7.1) из точки  $x(t_0)$  в начало координат:  $T \approx 1, 69$ .

В табл.1 приведены вычисленные на каждой итерации ( $c$ ) значения моментов переключений  $\nu_i, i = \overline{1, 2}$  искомого оптимального по быстродействию

управления, нормированные начальные условия сопряженной системы  $\hat{\psi}_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и норма  $\|x(t_k)\|$  системы (7.1) в конечный момент времени  $t = t_k$ . В табл. 1 приведены нормированные начальные условия сопряженной системы при нормировке, принятой в вычислительной процедуре.

Т а б л и ц а 1.

$c$	$\nu_1$	$\nu_2$	$t_k$	$\hat{\psi}_1(t_0)$	$\hat{\psi}_2(t_0)$	$\hat{\psi}_3(t_0)$	$\ x(t_k)\ $
0	0.590957	1.044713	1.690000	-1	-0.817835	-0.308690	3.552596
1	0.756298	1.225418	1.688239	-1	-0.990858	-0.463390	0.210288
2	0.780367	1.278838	1.746941	-1	-1.029603	-0.498982	0.019449
3	0.778973	1.276547	1.745149	-1	-1.027760	-0.497198	0.000036
4	0.778972	1.276548	1.745152	-1	-1.027760	-0.497198	0.000000

Затраты времени на вычисления составляют  $T_* = 0,489478 \approx 0,5$ . Вычислительная трудоемкость метода  $R = 0,280479 \approx 0,28$ ;  $R_{min} = 0,272184 \approx 0,27$ .

На рис. 7 показано начальное приближение (пунктирные линии) и вычисленное оптимальное по быстрдействию управление  $u^0(t)$ .

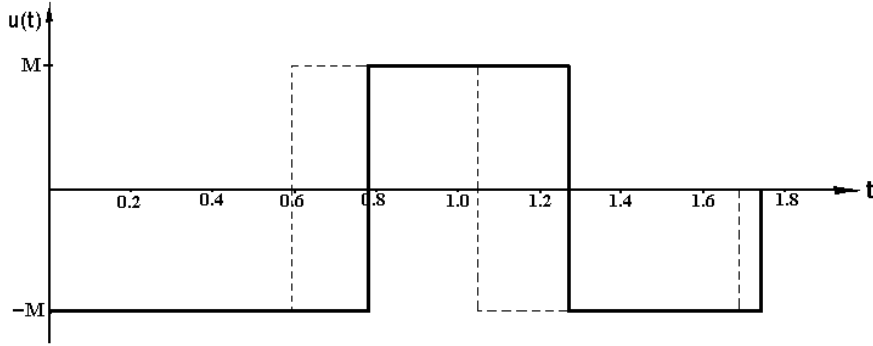


Рис. 7. Начальное приближение и оптимальное управление

Зададим другое начальное условие  $x(t_0) = (3, 5, 7)$ . Эта точка находится в первом квадранте фазового пространства, в котором нет граничных точек  $x_{*s}^{(+)}$  и  $x_{*s}^{(-)}$ . Проверяем выполнение неравенств (3.16) и находим, что данное начальное условие принадлежит множеству достижимости за время  $T_7 = 3,5$  и не принадлежит множеству достижимости за время  $T_6 = 3$ . Опорная гиперплоскость для  $T_6 = 3$  проходит через граничные точки на фазовых осях  $x_{(1)}^{*6} = 16,875$ ;  $x_{(2)}^{*6} = 10,623$ ;  $x_{(3)}^{*6} = 13,6668$  и описывается уравнением

$$0,059259x_1 + 0,094135x_2 + 0,07317x_3 - 1 = 0. \quad (7.5)$$

Расстояние от точки  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  до опорной гиперплоскости равно  $d_1 = 0,16067$ . Вектор нормированных начальных условий сопряженной системы равен  $\hat{\psi}(t_0) = (-0,44508; -0,70703; -0,54956)$ . Для этого вектора имеем следующие моменты переключений  $\nu_1 = 1,356189$ ;  $\nu_2 = 1,820902$  и структуру управления  $(-M, +M, -M)$ .

Гиперплоскость  $\Gamma_2$ , "параллельная" опорной, проходит через граничные точки на фазовых осях  $x_{(1)}^{*7} = 26,7969$ ;  $x_{(2)}^{*7} = 14,459$ ;  $x_{(3)}^{*7} = 15,9446$  и описывается уравнением

$$0,037318x_1 + 0,069161x_2 + 0,062717x_3 - 1 = 0. \quad (7.6)$$

Расстояние от точки  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  до этой гиперплоскости  $d_2 = -0,10323$ . По формуле (3.31) находим приближенное уточненное время перевода системы (7.1) из начального состояния  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  в начало координат:  $T \approx 3,3$ .

В табл.2 приведены вычисленные на каждой итерации ( $c$ ) моменты переключений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  искомого оптимального управления, нормированные начальные условия сопряженной системы  $\hat{\psi}_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1,3}$  и норма  $\|x(t_k)\|$  системы (7.1) в конечный момент времени  $t = t_k$ . В табл. 2 приведены нормированные начальные условия сопряженной системы при нормировке, принятой в вычислительной процедуре.

Т а б л и ц а 2.

$c$	$\nu_1$	$\nu_2$	$t_k$	$\hat{\psi}_1(t_0)$	$\hat{\psi}_2(t_0)$	$\hat{\psi}_3(t_0)$	$\ x(t_k)\ $
0	1.356189	1.820902	3.300000	-1	-1.588546	-1.234744	74.288028
1	1.443882	2.767353	2.996942	-1	-2.105617	-1.997865	22.690240
2	1.115460	2.359010	2.837101	-1	-1.737235	-1.315691	2.690837
3	1.179645	2.638366	3.267443	-1	-1.909005	-1.556167	0.677888
4	1.168428	2.586297	3.185736	-1	-1.877363	-1.510951	0.032840
5	1.167839	2.583686	3.181694	-1	-1.875663	-1.508665	0.000081
6	1.167838	2.583680	3.181684	-1	-1.875759	-1.508660	0.000000

Затраты времени на вычисления составляют  $T_* = 3,159943 \approx 3,16$ . Вычислительная трудоемкость метода  $R = 0,993167 \approx 1$ ;  $R_{min} = 0,336125 \approx 0,34$ .

Точность задания начального приближения во втором случае, как показано в разделе 3.5, может быть увеличена. Это приводит к уменьшению числа итераций, улучшению сходимости и уменьшению затрат времени на вычисления оптимального управления.

Проведем луч из начала координат через точку, координаты которой равны значениям граничных точек на фазовых осях:  $x_{(1)}^{*6} = 16,875$ ;  $x_{(2)}^{*6} = 10,623$ ;  $x_{(3)}^{*6} = 13,6668$ . Найдем на этом луче точку  $X_{*6} = (6,07136; 3,57139; 5)$ , время перевода из которой системы (7.1) в начало координат равно  $T_6 = 3$ . Нашли дополнительную граничную точку.

Проводим три гиперплоскости через эту граничную точку и комбинацию из двух различных граничных точек на фазовых осях. Опорная гиперплоскость проходит через точку  $X_{*6} = (6,07136; 3,57139; 5)$  и граничные точки на фазовых осях  $x_2$  и  $x_3$  ( $x_{(2)}^{*6} = 10,623$ ;  $x_{(3)}^{*6} = 13,6668$ ) и описывается уравнением

$$0,049076x_1 + 0,094135x_2 + 0,07317x_3 - 1 = 0. \quad (7.7)$$

Расстояние ( $d_1$ ) от точки  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  до опорной гиперплоскости равно  $d_1 = 0,130093$ . Вектор начальных условия сопряженной системы равен  $\hat{\psi}(t_0) = (-0,380633; -0,730108; -0,567504)$ . Моменты переключений управления  $\nu_1 = 1,083054$ ;  $\nu_2 = 2,753230$ . Структура искомого оптимального управления  $(-M, +M, -M)$ .

Гиперплоскость ("параллельная" опорной) для  $T_7 = 3,5$  проходит через граничную точку  $X_{*7} = (8,19171; 4,81865; 6,74611)$  и граничные точки на тех же фазовых осях  $x_2$  и  $x_3$  ( $x_{(2)}^{*7} = 14,459$ ;  $x_{(3)}^{*7} = 15,9446$ ) и описывается уравнением

$$0,0297424x_1 + 0,069161x_2 + 0,062717x_3 - 1 = 0. \quad (7.8)$$

Расстояние ( $d_2 < 0$ ) от точки  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  до этой гиперплоскости равно  $d_2 = -0,125947$ . По формуле (3.31) находим приближенное уточненное время перевода системы (7.1) из точки  $x(t_0) = (3, 5, 7)$  в начало координат:  $T \approx 3, 25$ .

В табл.3 приведены вычисленные на каждой итерации ( $c$ ) моменты переключений  $\nu_1$  и  $\nu_2$  искомого оптимального управления, нормированные начальные условия сопряженной системы  $\hat{\psi}_i(t_0)$ ,  $i = \overline{1, 3}$  и норма  $\|x(t_k)\|$  системы (7.1) в конечный момент времени  $t = t_k$ .

Т а б л и ц а 3.

$c$	$\nu_1$	$\nu_2$	$t_k$	$\hat{\psi}_1(t_0)$	$\hat{\psi}_2(t_0)$	$\hat{\psi}_3(t_0)$	$\ x(t_k)\ $
0	1.083054	2.753230	3.250000	-1	-1.918142	-1.490948	16.68643
1	1.166665	2.559191	3.135062	-1	-1.862925	-1.492853	0.485361
2	1.168019	2.584723	3.183408	-1	-1.876371	-1.509503	0.012634
3	1.167838	2.583682	3.181686	-1	-1.875760	-1.508661	0.000017
4	1.167838	2.583680	3.181684	-1	-1.875759	-1.508660	0.000000

Затраты времени на вычисления составляют  $T_* = 0,470768 \approx 0,47$ . Вычислительная трудоемкость метода  $R = 0,147962 \approx 0,15$ ;  $R_{min} = 0,101486 \approx 0,1$ .

Сравнивая результаты вычислений в табл.2 и табл.3 видим, что введение дополнительной граничной точки почти в 2 раза уменьшило число итераций, в  $\approx 6,7$  раза затраты времени на вычисления и во столько же раз уменьшило вычислительную трудоемкость метода.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация оптимального управления в реальном времени требует нового подхода к проблеме. Одним из возможных подходов является разделение вычислительных затрат на: 1) предварительные вычисления; 2) вычисления в процессе управления. Каждый из этих этапов обладает своей спецификой.

Предварительные вычисления требуют разработки метода, который не зависит от конкретного начального условия, т.е. не требует знания начального условия. На этом этапе вычисляется начальное приближение.

Метод вычисления оптимального управления в процессе управления должен обладать малыми вычислительными затратами, что позволяет реализовать его в реальном времени. По существу это уточнение начального приближения.

В работе рассмотрена реализация такого подхода для задачи линейного быстродействия.

Предварительные вычисления состоят в построении аппроксимирующей конструкции. Каждое из множеств достижимости аппроксимируется совокупностью из  $(2^n - 2 + 2n)$  гиперплоскостей, а вся область начальных условий – совокупностью из  $(2^n - 2 + 2n)q$  гиперплоскостей. Каждая гиперплоскость имеет единственный (направленный внутрь области достижимости) нормальный вектор, который является нормированным вектором начальных условий сопряженной системы. Зная начальные условия сопряженной системы, вычисляем искомое оптимальное по быстродействию управление. Вычисляем, однако, не точное, а его приближенное значение. В этом заключается достоинство и недостаток метода. Достоинство состоит в том, что для целой подобласти начальных условий управляемой системы вычисляется одно начальное условие сопряженной системы. Недостаток как раз и заключается в том, что вычисляется одно

начальное условие, так как для оптимального управления каждому начальному условию управляемой системы соответствует свое начальное условие сопряженной системы. Это противоречие разрешается так: на первом этапе (т.е. на этапе предварительных вычислений) находится приближенное значение оптимального управления, которое уточняется на втором этапе, т.е. находится точное значение оптимального управления. Вычисления производятся уже в процессе управления. Самое существенное состоит в том, что разделение области начальных условий на *конечное число* подобластей с одними и теми же начальными условиями сопряженной системы для каждой подобласти, позволяет их вычислить независимо от *конкретного* начального условия управляемой системы. Но проблема не в том, чтобы просто разбить область начальных условий управляемой системы на конечное число подобластей, а разделить так, чтобы полученное приближенное значение оптимального управления было бы "близко" к точному значению оптимального управления. Это значит, что вычислительные затраты на втором этапе должны быть малыми: время, затраченное на вычисление точного значения оптимального управления, не должно превышать времени до момента первого переключения управления. *Это необходимое условие сохранения оптимальности процесса управления в реальном времени.* Действительно, оптимальное по быстродействию управление принимает только предельные значения  $u_j(t) = \pm M_j$  и, следовательно, знак и величина управления остаются неизменными до первого переключения управления. После построения аппроксимирующей конструкции приближенно известен момент первого переключения управления для каждой гиперплоскости.

Минимизация времени вычислений на втором этапе достигается двумя путями. Во-первых, вычисление опорной гиперплоскости для конкретного начального условия сводится к проверке *простых неравенств*, требующих малых вычислительных затрат. Во-вторых, в получении "хорошего" начального приближения. Чем ближе получено начальное приближение к точному значению оптимального управления, тем меньше и вычислительные затраты. В оптимальном управлении вычислительные затраты принято оценивать по затратам времени на наиболее трудоемкие операции, к которым относится операция интегрирования. Другие операции, например, решение систем линейных алгебраических уравнений, требуют существенно меньше времени. Поэтому трудоемкость методов принято оценивать числом решений задач Коши. *Для оптимального управления в реальном времени важны лишь затраты времени на вычисления в процессе управления.* В предлагаемом методе нет необходимости в решении задач Коши в *процессе управления*. Достаточно интегрировать систему дифференциальных уравнений лишь на интервалах перемещения конечного момента и моментов переключений управления. В случае монотонной сходимости вычислительного процесса суммарное (по модулю) отклонение стремится к разности между приближенно заданным и точным (истинным) значением момента и *не зависит от числа итераций*. Монотонность вычислительного процесса достигается заданием хорошего начального приближения. В результате с увеличением точности начального приближения значительно уменьшаются и вычислительные затраты в процессе управления, что позволяет реализовать оптимальное управление в реальном времени.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко, *Математическая теория оптимальных процессов*, Наука, Москва, 1976.
- [2] В.Г. Болтянский, *Математические методы оптимального управления*, Наука, Москва, 1969.
- [3] И.А. Крылов, Ф.Л. Черноусько, *О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **6** (1962), 1132–1139.
- [4] В.Б. Гиндес, *Один метод последовательных приближений для решения линейных задач оптимального управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **1** (1970), 216–223.
- [5] Р.П. Федоренко, *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, Москва, 1978.
- [6] Ф.Л. Черноусько, В.Б. Колмановский, *Вычислительные и приближенные методы оптимального управления*, Математический анализ, **14** (1977), 101–166.
- [7] А.А. Любушин, *О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **1** (1982), 30–35.
- [8] Н.И. Грачев, Ю.Г.Евтушенко, *Библиотека программ для решения задач оптимального управления*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **2** (1979), 367–387.
- [9] Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, *Построение последовательных приближений для некоторых задач оптимального управления*, Автоматика и телемеханика, **2** (1966), 5–17.
- [10] Б.Н. Пшеничный, Л.А. Соболенко, *Ускоренный метод решения задачи линейного быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **6** (1968), 1343–1351.
- [11] А.А. Белопицкий, *Численный метод решения линейной задачи оптимального управления сведением ее к задаче Коши*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **6** (1977), 1380–1386.
- [12] Ю.Н.Киселев, М.В. Орлов, *Численные алгоритмы линейных быстрыхдействий*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **12** (1991), 1763–1771.
- [13] В.А. Срочко, *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, Москва, 2000.
- [14] В.М. Александров, *Численный метод решения задачи линейного быстрогодействия*, Журнал вычислительной математики и математической физики, **6** (1998), 918–931.
- [15] Ф.Л. Черноусько, *Эллипсоидальные оценки области достижимости управляемой системы*, Прикладная математика и механика, **1** (1981), 11–19.
- [16] В.М. Александров, *Оптимальное по быстроддействию позиционно-программное управление линейными динамическими системами*, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 385–439.
- [17] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва, 1966.
- [18] Ю.Н. Андреев, *Алгебраические методы пространства состояний в теории управления линейными объектами (обзор зарубежной литературы)*, Автоматика и телемеханика, **3** (1977), 5–50.
- [19] Е.Я. Смирнов, *Некоторые задачи математической теории управления*, Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1981.
- [20] R.E. Kalman, *Mathematical description of linear dynamical systems*, SIAM J. Control, **1** (1963), 152–192.
- [21] Р. Калман, *Об общей теории систем управления*, Труды I-го Конгресса ИФАК, Наука, Москва, 1966, 260–266.
- [22] J.P. La Salle, *Time optimal control systems*, Proc. Nat. Ac. USA, **4** (1959), 573-577.
- [23] В.М. Попов, *Гиперустойчивость автоматических систем*, Наука, Москва, 1970.
- [24] В.М. Александров, *Приближенное решение задач оптимального управления*, Проблемы кибернетики, Наука, Москва, **41** (1984), 143–206.
- [25] А.А. Фельдбаум, *Основы теории оптимальных автоматических систем*, Наука, Москва, 1966.



Владимир Михайлович Александров  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. академика Коптюга 4,  
630090, Новосибирск, Россия  
*E-mail address:* [vladalex@math.nsc.ru](mailto:vladalex@math.nsc.ru)