S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. A.16–A.19 (2012) УДК 513.73, 51
MSC 52A20, 01A70

ЛЕММА ЗЮССА И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

В.П. Голубятников

Abstract. On the ocassion of the centenary of Alexandr D. Alexandrov's birth, we describe some aspects of geometric tomography that we discussed with him.

Keywords: convex bodies, visible bodies, transformation groups.

1. В известной работе Александра Даниловича Александрова [1] «К теории смешанных объемов выпуклых тел» по ходу изложения основных результатов приводится принадлежащее И.М. Либерману изящное доказательство одного утверждения Вильгельма Зюсса [8] (см. также [2]):

Лемма. *Если проекции двух выпуклых тел при любом направлении проектирования равны и параллельно расположены, то и сами тела равны и параллельно расположены.* (Речь идет о телах в не менее чем трехмерном пространстве, так как лемма заведомо неверна для выпуклых областей на плоскости.)

Подобный круг вопросов мне довелось изучать, занимаясь на первый взгляд совсем другой проблематикой. В августе 1977 года я поступил на работу в лабораторию обратных задач математической физики ВЦ СО АН СССР. Начальное условие сотрудничества, которое было мне сформулировано заведующим лабораторией Ю.Е. Аниконовым, звучало примерно так: половину рабочего времени Вы тратите на задачи лаборатории, а оставшуюся половину — на Ваши топологические хобби. Мне очень повезло, оказалось, что эти «хобби» никак не противоречили интересам лаборатории, наоборот! После обязательной по тем временам двухнедельной отработки в деревне я приступил к исполнению служебных обязанностей, и для начала Юрий Евгеньевич предложил мне геометрическую задачу, имеющую отношение к теории распространения сейсмических волн:

Golubyatnikov, V.P., Süss's Lemma and Inverse Problems.

Работа поддержана РФФИ (грант 12-01-00074).

Поступила 14 июля 2012 г., опубликована 16 июля 2012 г.

Пусть G — гомеоморфная шару область в римановом пространстве. Если любые две граничные точки этой области соединяются в G единственной геодезической линией, то и две любые точки из G соединяются в этой области единственной геодезической.

В двумерном случае это утверждение было доказано В.А. Топоноговым [9]. Сохранив общий план доказательства и используя гомотопическую технику (нестягиваемость сферы), я получил доказательство этого утверждения и для многомерных пространств.

Поскольку в те времена начинали приобретать большую популярность томографические проблемы, следующая серия задач, которую тогда же, в 1977 году, мне предложил Ю.Е. Аниконов, была связана с обобщениями леммы Зюсса на другие группы преобразований проекций выпуклых тел. В конечном итоге ([4, 5]) была сформулирована такая проблема:

Если у двух (выпуклых) тел V, W в n-мерном евклидовом пространстве (вещественном, либо комплексном) проекции на любую k-мерную плоскость, $(1 < k < n)$ совмещаются преобразованиями из некоторой группы G линейных преобразований k-мерного пространства ($\mathbb{R}^k$ или $\mathbb{C}^k$), то насколько сильно могут при этом отличаться тела W и V? Какими преобразованиями объемлющего пространства они могут переводиться друг в друга?

В лемме Зюсса фигурировала группа параллельных переносов.

Довольно скоро мне удалось разобрать два простых случая, в которых у двух выпуклых многогранников проекции на любую гиперплоскость совмещаются

1. сохраняющими ориентацию изометриями;
2. сохраняющими ориентацию подобиями.

Были рассмотрены также вопросы минимизации необходимых проекционных данных.

В те далекие времена одной из самых больших знаменитостей Академгородка был «молоточник» — маньяк, подстерегавший на лесных тропинках одиноко идущих женщин. Судя по слухам, тактика его нападений была однообразной: он шел вдогонку очередной своей жертвы, бил ее молотком по голове, и далее действовал по обстоятельствам. Его фоторобот был развешан во всех людных местах Академгородка и многие мои знакомые находили в нем некоторое портретное сходство со мной, о чем всякий раз радостно мне сообщали.

В октябре 1977 года я рассказывал на семинаре у Александра Даниловича о своих первых достижениях в области обобщений леммы Зюсса, а также и о единственности геодезических. Во время доклада в аудиторию постоянно заглядывали какие-то люди, никогда ранее в геометрических кругах не появлявшиеся. Оказалось, они выслеживали молоточника и его сообщников!

Диспетчер главного корпуса НГУ Дина Харламовна позднее рассказывала мне, что к ней забежала одна дама и потребовала срочно вызвать милицию: «Там на третьем этаже молоточник беседует с каким-то седым стариком!»

2. В середине 80-х годов мне удалось получить более сложную версию леммы Зюсса:

Если у двух выпуклых компактных тел проекции на любую двумерную плоскость ориентируемо изометричны (или ориентируемо подобны) и не имеют симметрий относительно поворотов, то эти тела совмещаются в объемлющем пространстве либо параллельным переносом, либо центральной симметрией (соответственно, либо параллельным переносом, либо гомотетией, возможно с отрицательным коэффициентом).

В последнем случае коэффициент подобия проекций *à priori* не предполагался постоянным, не зависящим от плоскости, на которую осуществлялось проектирование.

Рассказал я Александру Даниловичу об этих результатах и попросил его представить в Доклады Академии Наук СССР соответствующий текст. Однако, он довольно тонко польстил мне — отказался представлять подготовленную статью в Доклады АН с такой примерно мотивировкой: «В этом направлении не было продвижений лет 50, значит, все это либо никому не интересно, либо очень сложно. В обоих случаях следует публиковать подробное изложение, а не докладную заметку».

В итоге вариации на темы леммы Зюсса были напечатаны в Сибирском математическом журнале, в Математическом сборнике [3], см. также [5], а Александр Данилович представил в Доклады другую мою заметку, посвященную когомотопическим свойствам пространств Тома.

Примерно тогда же мне удалось перенести эти результаты на довольно широкий класс невыпуклых компактных множеств. Название им было придумано во время многочисленных обсуждений с Д.А. Троценко:

Назовем компактное подмножество W евклидова пространства **обозримым**, *если каждая точка, не лежащая в W, содержится в некоторой прямой, которая не пересекается с W.*

Иными словами, если точка не лежит во множестве, то это можно увидеть на некоторой проекции этого множества.

Услыхав на очередном моем докладе такой выразительный термин, Александр Данилович задумчиво повторил его, а потом добродушно проворчал: «Вы бы еще ощупываемые тела придумали». Однако же, во время всех наших последующих встреч он постоянно интересовался дальнейшими продвижениями в этой области.

Были эти результаты обобщены и на другие типы проекционных данных [5, 6], в частности, на *видимые контуры гладких поверхностей.* Эти геометрические объекты можно наблюдать на экране overhead'a, если согнуть лист «прозрачки» — на экране будет видна проекция «линии сгиба». Такие видимые контуры естественным образом появляются при изучении каустик волновых фронтов в сейсмической томографии. Позднее я узнал, что в теории функций многих комплексных переменных есть аналоги и обозримых множеств и объектов, которые вполне естественно было бы называть ощупываемыми.

Отмечу, что упомянутое условие отсутствия симметрий у изометричных проекций для меня остается загадкой. Насколько оно существенно, я не знаю до сих пор. А вот в случае ориентируемо подобных проекций условие отсутствия симметрий оказалось необходимым. Соответствующий пример был опубликован в статье К. Петти и Дж. МакКинни [7]. Любопытно, что рукопись их статьи в Португальском математическом журнале ожидала в редакции своего выхода в свет почти 14 лет.

Вопросами единственности восстановления выпуклых тел по формам их проекций занимался также и ученик Александра Даниловича А.В. Кузьминых, получивший ряд соответствующих результатов в предположении о том, что функция ширины реконструируемых тел имеет конечное число максимумов.

Литература

[1] Александров А.Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. II // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1238. Zbl 0018.27601 См. также Александров А.Д. Геометрия и приложения. Новосибирск: Наука, 2006. (Избранные труды, Т. 1. С. 59–96). MR2383191

[2] Gardner R.J. Geometric tomography (2d ed.) Cambridge: Cambridge University Press, 2006. MR2251886

[3] Голубятников В.П. Об однозначной восстановимости выпуклых и обозримых компактов по их проекциям // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 5. С. 611–621. MR1124099

[4] Голубятников В.П. Об однозначной восстановимости выпуклых компактов по их проекциям. Случай комплексных пространств // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 4. С. 805–810. MR1721675

[5] Golubyatnikov V.P., Uniqueness questions in reconstruction of multidimensional objects from tomography-type projection data. Utrecht: VSP, 2000.

[6] Голубятников В.П., Ровенский В.Ю. Некоторые обобщения класса k-выпуклых тел // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1037–1049. MR2603849

[7] Petty C.M., McKinney J.R. Convex bodies with circumscribing boxes of constant width // Port. Math. 1987. V. 44, No 4. P. 447–455. MR0952791

[8] Süss W. Zusammenensetzung von Eiköpern und homotetische Eiflächen // Tôhoku Math. J. 1932. V. 35. P. 47–50.

[9] Топоногов В.А. Изопериметрическое неравенство для поверхностей, гауссова кривизна которых ограничена снизу // Сиб. мат. журн. 1969. Т. 10. С. 144–157. MR0238234

Владимир Петрович Голубятников
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
проспект Академика Коптюга, 4,
630090, Новосибирск
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru