S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

*Том 9, стр. 13–44 (2012)* УДК 512.66:513.83, 519.7
MSC 18G35, 55U10, 68Q85

# ГРУППЫ ГОМОЛОГИЙ АСИНХРОННЫХ СИСТЕМ, СЕТЕЙ ПЕТРИ И ЯЗЫКОВ ТРАСС

А.А. ХУСАИНОВ

Abstract. The paper is devoted to the homology groups of mathematical models for concurrent systems. It is proved that the homology groups of a set with a trace monoid action is isomorphic to the homology groups of a corresponding semi-cubical set. Homology groups of Petri nets and Mazurkiewicz trace languages are introduced. It is shown that in dimensions $n \geqslant 2$, the homology groups of Petri nets and Mazurkiewicz languages can be arbitrary, up to direct summands which are equal to the homology groups of generalized tori. Examples of the computing the homology groups of state spaces and Petri nets are considered. The integral homology groups of some partially ordered sets of traces are investigated.

**Keywords:** semi-cubical set, homology of small categories, free partially commutative monoid, trace monoid, asynchronous transition system, Petri nets, trace languages.

## 1. Введение

Рассматриваемые в работе математические модели параллельных систем представляют собой множества, на которых действуют моноиды трасс. Работа посвящена группам гомологий этих математических моделей. Доказано, что

Khusainov, A.A., Homology groups of asynchronous systems, Petri nets, and trace languages.



Работа выполнена в рамках программы стратегического развития государственных образовательных учреждений высшего профессионального образования, № 2011-ПР-054; работа частично финансирована Научно-образовательным центром суперкомпьютерных технологий в Дальневосточном федеральном округе в рамках реализации проекта комиссии Президента РФ по модернизации и технологическому развитию экономики России.

*Поступила 30 августа 2011 г., опубликована 24 января 2012 г.*

группы гомологий множества с действием моноида трасс изоморфны группам гомологий соответствующего ему полукубического множества. Вводятся группы гомологий сетей Петри и языков Мазуркевича. Доказано, что в размерностях $n \geqslant 2$ группы гомологий сетей Петри и языков Мазуркевича могут быть произвольными, с точностью до прямых слагаемых, равных группам гомологий обобщенного тора. Рассмотрены примеры вычисления групп гомологий пространств состояний и сетей Петри. Исследуются целочисленные группы гомологий некоторых частично упорядоченных множеств трасс.

Асинхронные системы переходов были введены М. Шилдсом [1] и М. Беднарчиком [2] для моделирования вычислительных систем. Различные математические модели параллельных систем сравнивались в ряде работ, например [3]–[5]. В некоторых случаях для сравнения строились сопряженные функторы. Но о категории асинхронных систем неизвестно, будет ли она кополна [2]. Поэтому неясно, как строить сопряженные функторы между этой категорией и категорией автоматов высших размерности. Этот пробел восполняет сравнение групп гомологий. Для асинхронных систем они были введены в [6]. В работе [7] был разработан алгоритм вычисления первой группы гомологий. В работах Э. Губо [8] и Ф. Гоше [9] были введены и изучены группы гомологий других моделей параллельных систем – автоматов высших размерностей. В данной работе мы находим условия, при которых группы гомологий асинхронной системы и соответствующего автомата высшей размерности изоморфны. В работе [10, теорема 1] с помощью резольвенты Л. Поляковой [11] был построен комплекс для вычисления групп гомологий в случае конечной асинхронной системы переходов. В данной работе будет построен комплекс для вычисления групп гомологий асинхронной системы переходов (следствие 9), не имеющей бесконечных множеств попарно независимых событий. Если максимальное число попарно независимых событий конечно, то этот комплекс имеет конечную длину. Это позволяет построить комплекс конечной длины для вычисления групп гомологий сетей Петри. В работе доказано, что для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$ существует сеть Петри, $n$-е группы гомологий которых для всех $n \geqslant 2$ изоморфны прямой сумме $A_n \oplus \mathbb{Z}^{(p_n)}$, где $p_n$ обозначает мощность множества $n$-клик графа независимости. В [12] изучались связи между элементарными сетями Петри и языками трасс. Мы вводим группы гомологий префиксно замкнутых языков трасс и доказываем, что первая группа гомологий у них свободна. В случае конечного числа действий группы гомологий в размерностях $\geqslant 2$ могут быть произвольными конечно порожденными абелевыми группами.

Статья организована следующим образом. В части 2 приводятся факты из теории гомологий малых категорий, полукубических множеств и моноидов. Кроме того, доказано, что для произвольного полукубического множества группы его целочисленных гомологий изоморфны сингулярным группам гомологий геометрической реализации (предложение 2). Это аналог леммы Эйленберга о группах гомологий симплициальных множеств. Часть 3 посвящена сравнению гомологий категории, связанной с действием моноида трасс, с гомологиями соответствующего полукубического множества с коэффициентами в гомологической системе. Группы гомологий категории берутся с коэффициентами в диаграммах абелевых групп на этой категории. Сначала изучение групп гомологий этой категории сводится к гомологиям моноида трасс (предложение

4). Затем доказывается основной результат (теорема 1) о том, что группы гомологий категории, связанной с действием моноида трасс, изоморфны группам гомологий соответствующего полукубического множества. Вводятся обобщенные торы и вычисляются их целочисленные группы гомологии (следствие 4). Даны формулы для вычисления групп гомологий Губо $H_n^0$ полукубического множества, соответствующего множеству с действием моноиду трасс (теорема 2). В части 4 пространство состояний дополняется до клеточного пространства с помощью промежуточных состояний. Добавляется бесконечно удаленная точка и исследуются целочисленные группы гомологий полученного клеточного пространства. Доказано утверждение, позволяющее при некоторых условиях конечности построить алгоритм для вычисления этих групп гомологий (теорема 3). Приводится пример применения этого алгоритма. Затем вычисляются группы гомологий пространства состояний, имеющего единственное состояние (теорема 4). Установлено, что они могут быть устроены довольно сложно (следствие 8). В части 5 гомологии асинхронных систем определяются как гомологии пространства достижимых состояний. Строится комплекс для вычисления целочисленных групп гомологий (следствие 9). Рассматривается функтор из категории сетей Петри и морфизмов Уинскела в категорию асинхронных систем (предложение 8). Он позволяет ввести группы гомологий сети Петри с помощью соответствующей ей асинхронной системы. Рассмотрен пример вычисления групп гомологий конвейера. Установлено, что группы гомологий сетей Петри могут быть сложными, в частности, иметь кручение (следствие 10). Часть 6 посвящена изучению групп гомологий префиксно замкнутых языков трасс. Группы гомологий языка трасс определяется с помощью гомологий частично упорядоченного множества трасс с коэффициентами в диаграмме, равной $\mathbb{Z}$ на трассах принадлежащих языку, и равной 0, в остальных случаях. Для коммутативного моноида трасс эти группы равны 0 в размерностях $n \geqslant 1$ (предложение 9), а для свободных монидов эти группы равны 0 в размерностях $n \geqslant 2$ (следствие 12). Группы гомологий префиксно замкнутого языка изоморфны приведенным группам гомологий частично упорядоченного множества, состоящего из трасс, не принадлежащих языку (теорема 5). Они изоморфны также группам гомологий некоторой асинхронной системы (теорема 6) и, значит, вычислимы. Установлено, что первая группа гомологий префиксно замкнутого языка свободна, а остальные могут быть изоморфны произвольным конечно порожденным абелевым группам (следствие 13). Для любой последовательности конечно порожденных абелевых групп $A_n$, $n \geqslant 1$, существует моноид трасс $M(E, I)$, для которого целочисленные группы гомологий множества $M(E, I) \setminus \{1\}$, упорядоченного отношением предшествования трасс, изоморфны группам $A_n$ (следствие 14).

## 2. Предварительные сведения

Эта часть посвящена гомологиям малых категорий и гомологиям полукубических множеств с коэффициентами в гомологических системах абелевых групп, а также некоторым сведениям из теории гомологий моноидов трасс.

Пусть $\mathcal{A}$ – произвольная категория. Через $\mathcal{A}^{op}$ будем обозначать двойственную категорию. Для объектов $a, b \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$ через $\mathcal{A}(a, b)$ обозначим множество морфизмов $a \to b$. Если $\mathscr{C}$ — малая категория, то функторы $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ будут называться *диаграммами объектов категории $\mathcal{A}$ над $\mathscr{C}$*. В этом случае наряду с $F : \mathscr{C} \to \mathcal{A}$ используется обозначение $\{F(c)\}_{c\in\mathscr{C}}$. Пусть $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ – категория диаграмм объектов категории $\mathcal{A}$ над $\mathscr{C}$. Морфизмами категории $\mathcal{A}^{\mathscr{C}}$ служат естественные преобразования. Далее

- Set – категория множеств и отображений;
- Ab – категория абелевых групп и гомоморфизмов;
- Top – категория всех топологических пространств и непрерывных отображений;
- $\mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$ – категория полукубических множеств (п. 2.1.1);
- $TrMon$ – категория моноидов трасс и гомоморфизмов между ними (п. 3.1);
- $\mathcal{S}$ – категория пространств состояний (п. 4.1.1);
- $AS$ – категория асинхронных систем (п. 5.1);
- $Petri^{\|}$ – категория сетей Петри и морфизмов Уинскела (п. 5.2.1);
- pt – категория, состоящая из единственного объекта и тождественного морфизма, или множество, имеющее один элемент;
- $\mathbb{Z}$ – множество или аддитивная группа целых чисел;
- $\mathbb{N}$ – множество неотрицательных целых чисел или порожденный одним элементом свободный моноид $\{1, a, a^2, \cdots\}$;
- $\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел;
- $[0,1] = \{t \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ – отрезок единичной длины.

Для произвольного семейства абелевых групп $\{A_j\}_{j\in J}$ прямая сумма обозначается $\bigoplus\limits_{j\in J} A_j$. Элементы прямых слагаемых записываются как пары $(j, g)$, состоящие из $j \in J$ и $g \in A_j$. Если $A_j = A$ для всех $j \in J$, то эта прямая сумма обозначается через $\bigoplus\limits_{j\in J} A$. Если вместо множества $J$ указана мощность $p = |J|$, то она обозначется $A^{(p)}$.

2.1. **Полукубические множества.** Напомним определение полукубического множества и его геометрической реализации.

2.1.1. *Определение и примеры полукубических множеств.* Пусть $\square_+$ – категория частично упорядоченных множеств $\mathbb{I}^n = \{0,1\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, равных декартовым степеням линейно упорядоченного множества $\mathbb{I} = \{0,1\}$. Её морфизмами служат возрастающие отображения частично упорядоченных множеств, допускающих разложение в композицию отображений $\delta_i^{n,\varepsilon} : \mathbb{I}^{n-1} \to \mathbb{I}^n$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \mathbb{I}$, действующих по формуле

$$\delta_i^{n,\varepsilon}(x_1, \cdots, x_{n-1}) = (x_1, \cdots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \cdots, x_{n-1}). \tag{1}$$

*Полукубическим множеством* (см., например, [13]) называется произвольный функтор $X : \square_+^{op} \to \mathrm{Set}$. (В работе [8] оно называется предкубическим множеством.) Морфизмы между полукубическими множествами определяются как естественные преобразования. Хорошо известно, что полукубическое множество можно задать как пару $(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$, состоящую из последовательности множеств $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и семейства отображений $\partial_i^{n,\varepsilon} : X_n \to X_{n-1}$, определенных при $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, и удовлетворяющих условию

$$\partial_i^{n-1,\alpha} \circ \partial_j^{n,\beta} = \partial_{j-1}^{n-1,\beta} \circ \partial_i^{n,\alpha}\ , \text{ при } \alpha, \beta \in \{0,1\}, n \geqslant 2 \text{ и } 1 \leqslant i < j \leqslant n.$$

Эти отображения будут равны $\partial_i^{n,\varepsilon} = X(\delta_i^{n,\varepsilon})$.

Например, произвольный направленный граф, заданный парой отображений $X_1 \underset{\mathrm{cod}}{\overset{\mathrm{dom}}{\rightrightarrows}} X_0$ , сопоставляющих каждой стрелке начало и конец, можно превратить в полукубическое множество, полагая $\partial_1^{1,0} = \mathrm{dom}$, $\partial_1^{1,1} = \mathrm{cod}$ и $X_n = \emptyset$ для всех $n \geqslant 2$. При $n \geqslant 2$ отображения $\partial_i^{n,\varepsilon}$ определяются как пустые.

Двумерные полукубические множества (полукубические множества, у которых $X_n = \emptyset$ при $n > 2$) получаются из направленного графа $X_1 \underset{\mathrm{cod}}{\overset{\mathrm{dom}}{\rightrightarrows}} X_0$ следующим образом. Выбираются некоторые четверки направленных ребер $\gamma_1^0, \gamma_2^0, \gamma_1^1, \gamma_2^1$, удовлетворящих соотношениям $\mathrm{dom}(\gamma_1^0) = \mathrm{dom}(\gamma_2^0)$, $\mathrm{cod}(\gamma_1^1) = \mathrm{cod}(\gamma_2^1)$, $\mathrm{cod}(\gamma_1^0) = \mathrm{dom}(\gamma_2^1)$, $\mathrm{cod}(\gamma_2^0) = \mathrm{dom}(\gamma_1^1)$.

$$\begin{tikzcd}
\circ \arrow[r, "\gamma_1^1"] & \circ \\
\circ \arrow[u, "\gamma_2^0"] \arrow[r, "\gamma_1^0"'] & \circ \arrow[u, "\gamma_2^1"']
\end{tikzcd}$$

Множество $X_2$ строится путем добавления элементов $\sigma$, для каждой выбранной четверки. Значения отображений $\partial_i^{2,\varepsilon}(\sigma)$ определяются как $\partial_1^{2,0}(\sigma) = \gamma_1^0$, $\partial_2^{2,0}(\sigma) = \gamma_2^0$, $\partial_1^{2,1}(\sigma) = \gamma_1^1$, $\partial_2^{2,1}(\sigma) = \gamma_2^1$.

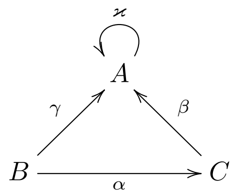



Рис. 1. Полукубическое множество

Рассмотрим, например, показанный на рис. 1 направленный граф. Присоединяя к нему множество $X_2 = \{\sigma\}$, получим полукубическое множество, состоящее из множеств $X_0 = \{A, B, C\}$, $X_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, \varkappa\}$, $X_2 = \{\sigma\}$ и отображений $\partial_1^{1,0} = \mathrm{dom} : X_1 \to X_0$, $\partial_1^{1,1} = \mathrm{cod} : X_1 \to X_0$, $\partial_1^{2,0}(\sigma) = \alpha$, $\partial_2^{2,0}(\sigma) = \gamma$, $\partial_1^{2,1}(\sigma) = \varkappa$, $\partial_2^{2,1}(\sigma) = \beta$.

Согласно [13], примерами полукубических множеств являются *кубические подмножества евклидова $n$-мерного пространства* $\mathbb{R}^n$. Они состоят из единичных кубов различной размерности. Ребра этих кубов параллельны координатным осям, а вершины имеют целочисленные координаты. Эти кубические множества были введены и изучены в [14]-[15].

Всякому топологическому пространству $X$ будет соответствовать полукубическое множество $(S_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$, состоящее из множеств $S_n X = \mathrm{Top}([0,1]^n, X)$ непрерывных отображений $n$-мерного единичного куба в $X$, отображения $\partial_i^{n,\varepsilon}$ : $\mathrm{Top}([0,1]^n, X) \to \mathrm{Top}([0,1]^{n-1}, X)$ сопоставляют непрерывным отображениям $\sigma : [0,1]^n \to X$ композиции $\sigma \circ |\delta_i^{n,\varepsilon}|$. Здесь $|\delta_i^{n,\varepsilon}| : [0,1]^{n-1} \to [0,1]^n$ обозначает отображение, определенное по формуле (1).

Аналогично, как функторы $\square_+^{op} \to \mathcal{A}$, определяются *полукубические объекты* $(X_n, \partial_i^{n,\varepsilon})$ произвольной категории $\mathcal{A}$.

2.1.2. *Геометрическая реализация.* Пусть $X \in \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$ – полукубическое множество. Его геометрической реализацией (см., например, [16]) называется топологическое пространство

$$|X|_{\square_+} = \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \times [0,1]^n / \equiv$$

по отношению наименьшему эквивалентности, такому что

$$(\partial_i^{n,\nu} x, t_1, \cdots, t_{n-1}) \equiv (x, t_1, \cdots, t_{i-1}, \nu, t_i, \cdots, t_{n-1}),$$

для всех $n \geqslant 0$, $\in \{0,1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $t_i \in [0,1]$. Геометрическая реализация определяет функтор, сопоставляющий морфизму полукубических множеств $f : X \to Y$ отображение $|f|_{\square_+} : |X|_{\square_+} \to |Y|_{\square_+}$ такое, что $|f|_{\square_+}(x, t_1, \cdots, t_n) = (f(x), t_1, \cdots, t_n)$. Функтор геометрической реализации $| - |_{\square_+}$ строится с помощью функтора $H : \square_+ \to \mathrm{Top}$ как в [17, Предложение II.1.3]. Согласно [17, Предложение II.1.3], он перестановочен с копределами.

2.2. **Гомологии малых категорий.** В данном разделе рассматриваются группы гомологий малых категорий с коэффициентами в функторах в категорию абелевых групп.

2.2.1. *Гомологии категорий и производные функтора копредела.*

**Определение 1.** *Пусть* $\mathscr{C}$ *– малая категория,* $F : \mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$ *– функтор,* $C_\diamond(\mathscr{C}, F)$ *– цепной комплекс абелевых групп*

$$C_n(\mathscr{C}, F) = \bigoplus_{c_0 \to \cdots \to c_n} F(c_0), \quad n \geqslant 0,$$

*и гомоморфизмов* $d_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^n : C_n(\mathscr{C}, F) \to C_{n-1}(\mathscr{C}, F)$, $n > 0$, *где* $d_i^n(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, a) =$

$$\begin{cases} (c_1 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, F(c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1)(a)) \;, & \text{если } i = 0 \\ (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i-1}} c_{i-1} \xrightarrow{\alpha_{i+1}\alpha_i} c_{i+1} \xrightarrow{\alpha_{i+2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n, a) \;, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (c_0 \xrightarrow{\alpha_1} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} c_{n-1}, a) \;, & \text{если } i = n \end{cases}$$

*Фактор-группы* $H_n(C_\diamond(\mathscr{C}, F)) = \mathrm{Ker}\,(d_n)/\mathrm{Im}\,(d_{n+1})$ *называются* $n$-ми группами гомологий категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в $F$.

Известно [13], что функторы $H_n(C_\diamond(\mathscr{C}, -)) : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$ естественно изоморфны левым производным функтора копредела $\varinjlim^{\mathscr{C}} : \mathrm{Ab}^{\mathscr{C}} \to \mathrm{Ab}$. Поэтому мы можем обозначить эти функторы через $\varinjlim_n^{\mathscr{C}}$.

Для произвольной малой категории $\mathscr{C}$ обозначим через $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$, или коротко $\Delta\mathbb{Z}$, функтор $\mathscr{C} \to \mathrm{Ab}$, принимающий постоянные значения $\mathbb{Z}$ на объектах, и $1_{\mathbb{Z}}$ – на морфизмах. *Группами целочисленных гомологий* $H_n(\mathscr{C})$ малой категории $\mathscr{C}$ называются значения $\varinjlim_n^{\mathscr{C}} \Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$ левых сателлитов функтора копредела на функторе $\Delta_{\mathscr{C}}\mathbb{Z}$. *Классифицирующим пространством* $B\mathscr{C}$ *малой категории* $\mathscr{C}$ [18] называется геометрическая реализация ее нерва. Из теоремы Эйленберга [17, Приложение 2], об изоморфизме групп гомологий симплициального множества сингулярным группам гомологий его геометрической реализации, следует, что для всех $n \geqslant 0$ сингулярные группы гомологий $H_n^{sing}(B\mathscr{C})$ классифицирующего пространства изоморфны $H_n(\mathscr{C})$. Например, для категории $\mathrm{pt}$, состоящей из единственного объекта и тождественного морфизма, $H_n(\mathrm{pt}) = 0$ при $n > 0$ и $H_0(\mathrm{pt}) = \mathbb{Z}$.

2.2.2. *Коинициальные функторы.* Малая категория $\mathscr{C}$ называется *ацикличной*, если $H_n(\mathscr{C}) = 0$ при $n > 0$, и $H_0(\mathscr{C}) \cong \mathbb{Z}$. Пусть $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ – функтор из малой категории в произвольную. Для произвольного объекта $d \in \mathrm{Ob}(\mathscr{D})$ *слоем* (или *комма-категорией* [19]) $S/d$ называется категория, объектами которой являются пары $(c, \alpha)$, состоящие из объектов $c \in \mathscr{C}$ и морфизмов $\alpha \in \mathscr{D}(S(c), d)$. Морфизмами категории $S/d$ служат тройки $(f, \alpha_1, \alpha_2)$, состоящие из морфизмов $f \in \mathscr{C}(c_1, c_2)$, $\alpha_1 \in \mathscr{D}(S(c_1), d)$, $\alpha_2 \in \mathscr{D}(S(c_2), d)$, для которых $\alpha_2 \circ S(f) = \alpha_1$. *Забывающим функтором* $Q_d : S/d \to \mathscr{C}$ *слоя относительно* $S$ называется функтор, действующий как $Q_d(c, \alpha) = c$, на объектах, и $Q_d(f, \alpha_1, \alpha_2) = f$ – на морфизмах. Если $S$ – полное вложение подкатегории $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{D}$, то $S/d$ обозначается как $\mathscr{C}/d$.

**Определение 2.** *Функтор $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями называется* строго коинициальным*, если для каждого объекта $d \in \mathscr{D}$ категории $S/d$ ацикличны.*

С помощью [20, Theorem 2.3] доказывается, что функтор $S : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ между малыми категориями строго коинициален тогда и только тогда, когда канонические гомоморфизмы $\varinjlim_n^{\mathscr{C}^{op}}(F \circ S^{op}) \to \varinjlim_n^{\mathscr{D}^{op}} F$ являются изоморфизмами для всех $n \geqslant 0$ и для всякого функтора $F : \mathscr{D}^{op} \to \mathrm{Ab}$ [21, Proposition 1.4].

2.3. **Гомологии полукубических множеств.** Приведем некоторые сведения из [13].

Пусть $X \in \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$ – полукубическое множество. *Категорией сингулярных кубиков* $h_*/X$ называется слой вложения Ионеды $h_* : \square_+ \to \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$ над объектом $X$. Рассмотрим категорию $\square_+/X$, объектами которой являются элементы $\sigma \in \coprod\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Ее морфизмами между $\sigma \in X_m$ и $\tau \in X_n$ служат тройки $(\alpha, \sigma, \tau)$, $\alpha \in \square_+(\mathbb{I}^m, \mathbb{I}^n)$, удовлетворяющие сотношению $X(\alpha)(\tau) = \sigma$. Категории $h_*/X$ и $\square_+/X$ изоморфны, и мы будем их отождествлять. *Гомологической системой на полукубическом множестве* $X$ называется произвольный функтор $F : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$.

2.3.1. *Группы гомологий с коэффициентами в гомологической системе.* Перейдем к изучению групп гомологий $\varinjlim_n^{(\square_+/X)^{op}} F$ категории сингулярных кубиков с коэффициентами в гомологической системе $F$ на $X$. Рассмотрим абелевы группы $C_n(X, F) = \bigoplus\limits_{\sigma \in X_n} F(\sigma)$. Пусть $d_i^{n,\varepsilon} : C_n(X, F) \to C_{n-1}(X, F)$ – гомоморфизмы

$$\bigoplus_{\sigma \in X_n} F(\sigma) \xrightarrow{d_i^{n,\varepsilon}} \bigoplus_{\sigma \in X_{n-1}} F(\sigma)$$

определенные на прямых слагаемых при $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \mathbb{I} = \{0, 1\}$, $\sigma \in X_n$, $f \in F(\sigma)$ по формуле

$$d_i^{n.\varepsilon}(\sigma, f) = (\partial_i^{n,\varepsilon}(\sigma), F(\delta_i^{n,\varepsilon}, \partial_i^{n,\varepsilon}(\sigma), \sigma)(f))$$

**Определение 3.** *Пусть* $F : (\square_+/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ *– гомологическая система на полукубическом множестве* $X$. Группами гомологий $H_n(X,F)$ с коэффициентами в $F$ *называются* $n$*-е группы гомологий комплекса* $C_\diamond(X,F)$*, состоящего из групп* $C_n(X,F) = \bigoplus\limits_{\sigma\in X_n} F(\sigma)$ *и дифференциалов* $d_n = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i(d_i^{n,1} - d_i^{n,0})$.

Группы $H_n(X, \Delta\,\mathbb{Z})$ называются $n$-ми *целочисленными* группами гомологий.

**Предложение 1.** [13, теорема 4.3]*, Для произвольного полукубического множества* $X$ *и гомологической системы* $F$ *на* $X$ *имеют место изоморфизмы* $\varinjlim\nolimits_n^{(\square_+/X)^{op}} F \cong H_n(X,F)$*, для всех* $n \geqslant 0$.

Отсюда вытекает, что изученные в [14] и [15] группы гомологий кубических множеств изоморфны группам гомологий соответствующих полукубических множеств с постоянными системами коэффициентов.

*Группы гомологий* $H_n^\varepsilon(X)$ *Губо* [8] полукубического множества $X$, при $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon \in \{0,1\}$, определяются как группы гомологий комплексов $C_n^\varepsilon(X) = L(X_n)$ свободных абелевых групп порожденных множествами $X_n$:

$$0 \leftarrow L(X_0) \xleftarrow{d_1^\varepsilon} L(X_1) \xleftarrow{d_2^\varepsilon} L(X_2) \xleftarrow{d_3^\varepsilon} \cdots$$

с гомоморфизмами $d_n^0 = -\sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i L(\partial_i^{n,0})$ и $d_n^1 = \sum\limits_{i=1}^{n}(-1)^i L(\partial_i^{n,1})$. Рассмотрим функторы $\mathbb{Z}^0$, $\mathbb{Z}^1 : \square_+^{op} \to \mathrm{Ab}$, определенные для всех $n \in \mathbb{N}$ на объектах как $\mathbb{Z}^0(\mathbb{I}^n) = \mathbb{Z}^1(\mathbb{I}^n) = \mathbb{Z}$, а на морфизмах, при $1 \leqslant i \leqslant n$, заданных с помощью формул

$$\mathbb{Z}^0(\delta_i^{n,0}) = 1_{\mathbb{Z}}, \quad \mathbb{Z}^0(\delta_i^{n,1}) = 0;$$
$$\mathbb{Z}^1(\delta_i^{n,0}) = 0, \quad \mathbb{Z}^0(\delta_i^{n,1}) = 1_{\mathbb{Z}}.$$

**Следствие 1.** *Для всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\varepsilon \in \{0,1\}$ *имеют место естественные изоморфизмы*

$$H_n^\varepsilon(X) \cong \varinjlim\nolimits_n^{(\square_+/X)^{op}} \mathbb{Z}^\varepsilon Q_X^{op},$$

*где* $Q_X : \square_+/X \to \square_+$ *– забывающий функтор слоя относительно функтора вложения Ионеды* $h_* : \square_+ \to \mathrm{Set}^{\square_+^{op}}$.

2.3.2. *Группы гомологий геометрической реализации полукубического множества.* Пусть Top – категория топологических пространств и непрерывных отображений, $|-|_{\square_+} : \mathrm{Set}^{\square_+^{op}} \to \mathrm{Top}$ – функтор геометрической реализации полукубических множеств, $|-|_\Delta : \mathrm{Set}^{\Delta^{op}} \to \mathrm{Top}$ – функтор геометрической реализации симплициальных множеств.

**Предложение 2.** *Пусть* $X$ *полукубическое множество. Тогда существуют изоморфизмы* $H_n^{sing}(|X|_{\square_+}) \cong H_n(X, \Delta\,\mathbb{Z})$*, для всех* $n \geqslant 0$.

Доказательство. Согласно определению, $|X|_{\square_+} = \varinjlim^{\square_+/X}\{I^n\}_{h_{\mathbb{I}^n} \xrightarrow{\widetilde{x}} X}$. Заметим, что $I^n$ будет гомеоморфен геометрической реализации $|N(\square_+/\mathbb{I}^n)|_\Delta$ нерва барицентрического подразбиения, состоящего из многомерных тетраэдров, вершинами которых служат центры конечных последовательностей вложенных кубов. Более того, всякой конечной последовательности сингулярных кубов

$$h_{\mathbb{I}^{n_0}} \xrightarrow{\alpha_1} h_{\mathbb{I}^{n_1}} \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_k} h_{\mathbb{I}^{n_k}} \xrightarrow{\widetilde{x}} X$$

будет отвечать последовательность точек $(c_0, \cdots, c_k)$, где $c_i$ – центр куба $I^{n_i}$, $0 \leqslant i \leqslant k$ соответствующего сингулярному кубу $h_{\mathbb{I}^{n_i}} \stackrel{\widetilde{x_i}}{\to} X$, при $\widetilde{x_i} = \widetilde{x}\alpha_k \cdots \alpha_{i+1}$. Топологическое пространство $|X|_{\square_+}$ будет склеено из многомерных тетраэдров, равных

$$\{\lambda_0 c_0 + \cdots \lambda_k c_k | \lambda_i \in \mathbb{R}, \lambda_i \geqslant 0 \text{ при } 0 \leqslant i \leqslant k, \lambda_0 + \cdots \lambda_k = 1\}.$$

Точки кубов, которые отождествлялись в $|X|_{\square_+}$, будут отождествляться как точки тетраэдров в $|N(\square_+/X)|_\Delta$. Отсюда $|X|_{\square_+} \cong |N(\square_+/X)|_\Delta$. (Полученный гомеоморфизм можно доказать и без обращения к геометрической интуиции. Он получается из естественного по $\mathbb{I}^n$ гомеоморфизма $|N(\square_+/\mathbb{I}^n)|_\Delta \cong |\mathbb{I}^n|_{\square_+}$, ибо функтор $|-|_{\square_+}$ с точностью до изоморфизма определяется значениями на объектах и морфизмах категории $\square_+$.) По лемме Эйленберга [17, Приложение 2], сингулярные группы гомологий геометрической реализации $|N(\square_+/X)|_\Delta$ изоморфны группам симплициальных гомологий $H_n(N(\square_+/X))$, изоморфных группам

$$\varinjlim\nolimits_n^{\square_+/X} \Delta\,\mathbb{Z} \cong H_n(X, \Delta\,\mathbb{Z}),$$

согласно предложению 1. Отсюда вытекает, что сингулярные группы гомологий $H_n^{sing}(|X|_{\square_+})$ будут изоморфны $H_n(X, \Delta\,\mathbb{Z})$. □

2.4. **Гомологии моноидов трасс.** Приведем сведения из [22].

Всякий моноид $M$ мы будем рассматривать как категорию, класс объектов которой $\mathrm{Ob}\, M = \{M\}$ состоит из одного объекта, а класс морфизмов совпадает с моноидом $M$. Это сказывается на обозначениях и терминологии. В частности, правое $M$–множество $X$ с действием $(x, \mu) \mapsto x \cdot \mu$, при $x \in X$ и $\mu \in M$, мы рассматриваем и обозначаем как функтор $X : M^{op} \to \mathrm{Set}$, определенный по формуле $X(\mu)(x) = x \cdot \mu$. Морфизмами правых $M$-множеств будут естественные преобразования.

Функторы $G : M^{op} \to \mathrm{Ab}$ называются правыми $M$-модулями. *Группы гомологий моноида с коэффициентами в правом $M$-модуле $G$* определим по формуле

$$H_n(M^{op}, G) = \varinjlim\nolimits_n^{M^{op}} G\,.$$

**Определение 4.** *Пусть $E$ – множество, $I \subseteq E \times E$ – антирефлексивное симметричное отношение на $E$. Моноид, заданный с помощью множества образующих $E$ и соотношений $ab = ba$, выполненных для пар $(a, b) \in I$, называется* моноидом трасс *или* свободным частично коммутативным моноидом *и обозначается через $M(E, I)$. Элементы $a, b \in E$, для которых $(a, b) \in I$ называются* перестановочными образующими.

Наше определение более общее чем в [23], ибо мы не требуем конечности множества $E$.

Для произвольного простого (неориентированного) графа *$n$-кликой* называется подграф, изоморфный полному графу $K_n$ имеющему $n$ вершин. Подграф называется *кликой*, если он является $n$-кликой для некоторого кардинального числа $n \geqslant 1$. Пусть $M(E, I)$ – моноид трасс с множеством образующих $E$ и множеством определяющих соотношений $ab = ba$, где $(a, b) \in I$. Пусть $V$ – множество максимальных клик его графа независимости. Для каждой клики $v \in V$ обозначим через $E_v \subseteq E$ множество ее вершин. Ясно, что $E_v$ будет максимальным подмножеством множества образующих моноида $M(E, I)$, состоящее из попарно независимых элементов. Множество $E_v$ будет порождать максимальный коммутативный подмоноид $M(E_v) \subseteq M(E,I)$. Моноид $M(E,I)$ называется *локально конечномерным*, если множества $E_v$ конечны для всех $v \in V$. Это равносильно тому, что граф независимости не содержит бесконечных клик. Или тому, что множество $E$ не содержит бесконечных подмножеств попарно перестановочных элементов.

Для моноида $M(E,I)$ и отношения линейного порядка на $E$ рассмотрим полукубическое множество $(T_n(E,I), \partial_i^{n,\varepsilon})$, где

$$T_n(E,I) = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_1 < \cdots < a_n, (a_i, a_j) \in I \text{ для всех } 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$$

и $\partial_i^{n,\varepsilon}(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, a_{i-1}, a_{i+1}, \cdots, a_n)$, для всех $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \{0,1\}$.

В работе [22] был получен комплекс для вычисления групп гомологий моноида трасс:

**Предложение 3.** [22, следствие 2.6] *Пусть $M(E,I)$ – локально конечномерный моноид трасс, $G$ – правый $M(E,I)$—модуль. Тогда для произвольного отношения линейного порядка на $E$ группы $H_n(M(E,I)^{op}, G)$ будут изоморфны группам гомологий комплекса*

$$0 \leftarrow G \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{a_1 \in T_1(E,I)} G \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(a_1,\ldots,a_n)\in T_n(E,I)} G \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(a_1,\ldots,a_{n-1})\in T_{n-1}(E,I)} G \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(a_1,\ldots,a_n)\in T_n(E,I)} G \leftarrow \cdots,$$

*$n$-й член которого при $n \geqslant 0$ равен прямой сумме абелевых групп $G$ по всем последовательностям попарно перестановочных элементов $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ множества $E$, а дифференциалы определены по формуле*

$$d_n(a_1, \cdots, a_n, g) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^s (a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n, G(a_s)(g) - g) \tag{2}$$

## 3. Гомологии множеств с действием моноида трасс

Данная часть посвящена группам гомологий правых $M(E,I)$-множеств $X$ с коэффициентами в функторах $F : (M(E,I)/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$. Показано, что эти группы можно изучать как группы гомологий моноида $M(E,I)$. Доказывается основной результат данной работы об изоморфизме групп гомологий $M(E,I)$-множества и соответствующего ему полукубического множества. Это результат применяется для вычисления групп гомологий пространств состояний в простейших случаях.

3.1. **Группы гомологий множеств с действием моноидов.** Пусть $M$ – моноид, $X \in \mathrm{Set}^{M^{op}}$ – правое $M$-множество, $F : (M/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ – функтор. Рассмотрим функтор $S = Q^{op} : (M/X)^{op} \to M^{op}$ двойственный к забывающему функтору слоя. Пусть $\mathrm{Lan}^S F : M^{op} \to Ab$ – левое расширение Кана [19] функтора $F$ вдоль $S$. Легко видеть, что объекты категории $(M/X)^{op}$ можно рассматривать как элементы $x \in X$, а морфизмы как тройки $x \xrightarrow{\mu} y$, для которых $\mu \in M$ и $x \cdot \mu = y$. Подставляя в [13, предложение 3.7] вместо малой категории моноид, получаем

**Предложение 4.** *Правый $M$-модуль $\mathrm{Lan}^S F$ будет изоморфен абелевой группе $\bigoplus_{x\in X} F(x)$ с действием, определенном на элементах $(x,f)$, $x \in X$, $f \in F(x)$ как $(x,f)\mu = \mathrm{Lan}^S F(\mu)(x,f) = (x\cdot\mu, F(x \xrightarrow{\mu} x\cdot\mu)(f))$. Для всех $n \geqslant 0$ имеют место изоморфизмы $\varinjlim_n^{(M/X)^{op}} F \cong H_n(M^{op}, \mathrm{Lan}^S F)$.*

Пусть $(Mon, Set)$ – категория, объекты которой – пары $(M,X)$, состоящие из моноидов $M$ и правых $M$-множеств $X$. Каждый ее морфизм $(f,\xi) : (M,X) \to (M',X')$ состоит из гомоморфизма $f : M \to M'$ и отображения $\xi : X \to X'$, удовлетворяющих равенству $\xi(x\cdot\mu) = \xi(x)\cdot f(\mu)$, для всех $x \in X$ и $\mu \in M$. Определим функторы гомологий $H_n : (Mon, Set) \to Ab$ с помощью групп гомологий категорий $(M/X)^{op}$. Множество объектов категории $(M/X)^{op}$ равно $X$, морфизмами $x_1 \xrightarrow{\mu} x_2$ служат тройки, для которых верно $x_1\cdot\mu = x_2$. С этой целью мы сопоставим каждому морфизму $(f,\xi) : (M,X) \to (M',X')$ функтор $(M/X)^{op} \to (M'/X')^{op}$, определенный на объектах как отображение $\xi : X \to X'$, а на морфизмах $(x_1 \xrightarrow{\mu} x_2) \mapsto (\xi(x_1) \xrightarrow{f(\mu)} \xi(x_2))$. Это дает функтор $(Mon, \mathrm{Set}) \to Cat$. Полагая $H_n(M,X) = H_n((M/X)^{op})$, мы получаем функторы $H_n : (Mon, Set) \to \mathrm{Ab}$, $n \geqslant 0$.

Пусть $TrMon$ – категория, объектами которой служат моноиды трасс, а морфизмами – произвольные гомоморфизмы между моноидами трасс. Обозначим через $(TrMon, \mathrm{Set}) \subset (Mon, \mathrm{Set})$ полную подкатегорию, состоящую из пар $(M(E,I), X)$, в которых $M(E,I)$ – моноиды трасс. Ограничения функторов $H_n$ на $(TrMon, \mathrm{Set})$ определяют функторы $H_n : (TrMon, \mathrm{Set}) \to \mathrm{Ab}$.

3.2. **Кубические гомологии множеств с действием моноидов трасс.** Пусть $X$ – правое $M(E,I)$-множество. Рассмотрим произвольное отношение линейного порядка на $E$. Определим множества

$$Q_nX = \{(x, a_1, \cdots, a_n) : a_1 < \cdots < a_n \& (1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow (a_i, a_j) \in I)\}.$$

В частности $Q_0X = X$. Определим отображения $Q_nX \underset{\partial_i^{n,1}}{\overset{\partial_i^{n,0}}{\rightrightarrows}} Q_{n-1}X$, при $n \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$, по формулам

$$\partial_i^{n,\varepsilon}(x, a_1, \cdots, a_n) = (x\cdot a_i^\varepsilon, a_1, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_n)\ , \varepsilon \in \{0,1\},$$

где $a_i^0 = 1$ и $a_i^1 = a_i$.

**Лемма 1.** *Последовательность множеств $Q_nX$ и семейство отображений $\partial_i^{n,\varepsilon}$, $n \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\varepsilon \in \mathbb{I}$, определяют полукубическое множество.*

Обозначим это полукубическое множество через $Q_\diamond X$.

В частности, если $X$ состоит из единственной точки, то $Q_\diamond X$ будет изоморфно полукубическому множеству, состоящему из множеств $T_0(E,I) = \{1\}$ и

$$T_n(E,I) = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_1 < \cdots < a_n \& (1 \leqslant i < j \leqslant n \Rightarrow (a_i, a_j) \in I)\}$$

при $n \geqslant 0$, с граничными операторами $\partial_i^{n,\varepsilon}(a_1, \cdots, a_n) = (a_1, \cdots, \widehat{a_i}, \cdots, a_n)$, для всех $\varepsilon \in \{0,1\}$. Обозначим это полукубическое множество через $T(E,I)$.

Для произвольного функтора $F : (M(E,I)/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ определим гомологическую систему $\overline{F} : (\square_+/Q_\diamond X)^{op} \to \mathrm{Ab}$, полагая $\overline{F}(x, a_1, \cdots, a_n) = F(x)$. На морфизмах гомологическая система $\overline{F}$ определяется значениями

$$\overline{F}(\delta_i^{n,\varepsilon}, \partial_i^{n,\varepsilon}(\sigma), \sigma) = F(x \stackrel{a_i^\varepsilon}{\to} xa_i^\varepsilon), \text{ при } \sigma = (x, a_1, \cdots, a_n).$$

**Теорема 1.** *Пусть $M(E,I)$ – локально конечномерный моноид трасс, $X$ – правое $M(E,I)-$множество, $F : (M(E,I)/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ – функтор, $\overline{F}$ – соответствующая ему гомологическая система. Тогда, независимо от отношения линейного порядка на $E$, верно $\varinjlim_n^{(M(E,I)/X)^{op}} F \cong H_n(Q_\diamond X, \overline{F})$ для всех $n \geqslant 0$. Иными словами, группы $\varinjlim_n^{(M(E,I)/X)^{op}} F$ изоморфны группам гомологий комплекса*

$$(3) \quad 0 \leftarrow \bigoplus_{x\in Q_0X} F(x) \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{(x,a_1)\in Q_1X} F(x) \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(x,a_1,a_2)\in Q_2X} F(x) \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(x,a_1,\cdots,a_{n-1})\in Q_{n-1}X} F(x) \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(x,a_1,\cdots,a_n)\in Q_nX} F(x) \leftarrow \cdots ,$$

*где*

$$(4) \quad d_n(x, a_1, \cdots, a_n, f) =$$
$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^s ((x \cdot a_s, a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n, F(x \stackrel{a_s}{\to} x \cdot a_s)(f)) - (x, a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n, f))$$

Доказательство. Применим предложение 4 к моноиду $M = M(E,I)$. С помощью предложения 3 получаем комплекс для вычисления гомологий с коэффициентами в $\mathrm{Lan}^S F$

$$0 \leftarrow \mathrm{Lan}^S F \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{a_1\in T_1(E,I)} \mathrm{Lan}^S F \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(a_1,a_2)\in T_2(E,I)} \mathrm{Lan}^S F \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\in T_{n-1}(E,I)} \mathrm{Lan}^S F \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in T_n(E,I)} \mathrm{Lan}^S F \leftarrow \cdots$$

дифференциалы которого определены по формуле (2). При $(a_1, \ldots, a_n) \in T_n(E,I)$ и $g \in \mathrm{Lan}^S F$ значения $d_n(a_1, \cdots, a_n, g)$ равны

$$\sum_{s=1}^{n} (-1)^s (a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n, \mathrm{Lan}^S F(a_s)(g)) - \sum_{s=1}^{n} (-1)^s (a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n, g)$$

Подставляя $g = (x, f) \in \bigoplus_{x\in X} F(x) = \mathrm{Lan}^S F$ и учитывая выполненное по предложению 4 равенство $\mathrm{Lan}^S F(a_s)(x, f) = (x \cdot a_s, F(x \stackrel{a_s}{\to} x \cdot a_s)(f))$, получаем формулу (4). □

**Следствие 2.** *Если $M(E,I)$ локально конечномерен, то для любого правого $M(E,I)-$множества $X$ группы гомологий $\varinjlim_n^{(M(E,I)/X)^{op}} \Delta\mathbb{Z}$ изоморфны целочисленным группам гомологий полукубического множества $Q_\diamond X$.*

Классифицирующее пространство категории $(M(E,I)/X)^{op}$ строится следующим образом. Элементы $x \in X$ рассматриваются как точки. Если $x_0\mu = x_1$, для $x_0, x_1 \in X$ и $\mu \in M(E,I)$, то к точкам $x_0$ и $x_1$ приклеивается отрезок. Для любого коммутативного треугольника $x_0 \stackrel{\mu_1}{\to} x_1 \stackrel{\mu_2}{\to} x_2$ к отрезкам приклеивается треугольник. В общем случае последовательности $x_0 \stackrel{\mu_1}{\to} x_1 \stackrel{\mu_2}{\to} \cdots \stackrel{\mu_n}{\to} x_n$ будет соответствовать $n$-мерный тетраэдр, приклеенный к $(n-1)$-мерным тетраэдрам, соответствующих последовательностям $x_0 \stackrel{\mu_1}{\to} \cdots \stackrel{\mu_{i-1}}{\to} \widehat{x_i} \stackrel{\mu_i}{\to} \cdots \stackrel{\mu_n}{\to} x_n$, полученных при $i=0$ и $i=n$ удалением $x_i$ вместе со связанной с ним стрелкой, а при $0<i<n$ – удалением $x_i$ и заменой связанных с ним стрелок $x_{i-1} \stackrel{\mu_{i-1}}{\to} x_i$ и $x_i \stackrel{\mu_i}{\to} x_{i+1}$ их композицией $x_{i-1} \stackrel{\mu_{i-1}\mu_i}{\to} x_{i+1}$.

Для любой малой категории $\mathscr{C}$ группы гомологий $H_n(\mathscr{C}) = \varinjlim_n^{\mathscr{C}} \Delta\,\mathbb{Z}$ изоморфны сингулярным группам гомологий $H_n^{sing}(B\mathscr{C})$ ее классифицирующего пространства. Учитывая, что $B\mathscr{C}$ гомеоморфно $B(\mathscr{C}^{op})$, получаем

**Следствие 3.** *Если $M(E,I)$ локально конечномерен, то для любого правого $M(E,I)-$множества $X$ группы $H_n^{sing}(B(M(E,I)/X))$ сингулярных гомологий классифицирующего пространства $M(E,I)/X$ изоморфны целочисленным группам $H_n(Q_\diamond X, \Delta\,\mathbb{Z})$ полукубического множества.*

Согласно предложению 2, эти группы изоморфны $H_n^{sing}(|Q_\diamond X|_{\square_+})$. Возникает

**Гипотеза 1.** *Если $M(E,I)$ локально конечномерен, то для любого правого $M(E,I)-$множества $X$ группа гомологий $\varinjlim_1^{(M(E,I)/X)^{op}} \Delta\,\mathbb{Z}$ не имеет кручения.*

**Определение 5.** *Топологическое пространство $|T(E,I)|_{\square_+}$ называется обобщенным тором.*

Легко видеть, что обобщенный тор $|T(E,I)|_{\square_+}$ будет гомеоморфен фактор-пространству дизъюнктивного объединения кубов

$$\{t_1e_1+\cdots+t_ne_n | t_i\in[0,1], e_i<e_j, (e_i,e_j)\in I, \text{ для всех } 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

по отношению эквивалентности, отождествляющему элементы $t_1e_1+\cdots+t_ne_n$ с элементами $t_1e_1+\cdots+t_{i-1}e_{i-1}+t_{i+1}e_{i+1}+\cdots t_ne_n$ в случае $t_i=0$ или $t_i=1$.

**Следствие 4.** *Пусть $M(E,I)$ – локально конечномерный моноид трасс. Тогда $H_n^{sing}(BM(E,I)) \cong \mathbb{Z}^{(p_n)}$, где $p_n$ – число $n$-клик графа $(E,I)$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathrm{pt}=\{p\}$ – множество, состоящее из единственного элемента $p$. Пусть $P=(M(E,I), \Delta_{M(E,I)^{op}}\mathrm{pt})$ – правое множество над локально конечномерным моноидом трасс $M(E,I)$, с действием $p\cdot\mu=p$, для всех $\mu\in M(E,I)$. В этом случае по теореме 1 группы гомологий $\varinjlim_n^{(M(E,I)/\,\mathrm{pt})^{op}} \Delta\,\mathbb{Z}$ будут изоморфны группам гомологий комплекса

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \stackrel{d_1}{\longleftarrow} \bigoplus_{(p,a_1)\in Q_1P} \mathbb{Z} \stackrel{d_2}{\longleftarrow} \bigoplus_{(p,a_1,a_2)\in Q_2P} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(p,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\in Q_{n-1}P} \mathbb{Z} \stackrel{d_n}{\longleftarrow} \bigoplus_{(p,a_1,a_2,\cdots,a_n)\in Q_nP} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots,$$

с дифференциалами $d_n(p,a_1,\cdots,a_n)=0$. Получаем $\varinjlim_n^{(M(E,I)/P)^{op}} \Delta\,\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}^{(p_n)}$ – прямая сумма $p_n$ копий группы $\mathbb{Z}$. Здесь $p_n=|T_n(E,I)|$ – мощность множества подмножеств $\{a_1,\cdots,a_n\}\subseteq E$, состоящих из попарно независимых элементов. В частности, число пустых подмножеств $p_0=1$. $\square$

3.3. **Группа гомологий Губо.** Каждому правому $M(E,I)$-множеству $X$ с отношением линейного порядка на $E$ соответствует полукубическое множество $Q_\diamond X$. Этому полукубическому множеству можно сопоставить группы гомологий Губо $H^0_n(Q_\diamond X)$ и $H^1_n(Q_\diamond X)$. Покажем, что группы $H^0_n(Q_\diamond X)$ не зависят от отношения порядка на $E$ и изоморфны гомологиям правого $M(E,I)$-множества $X$ с коэффициентами в некоторой диаграмме абелевых групп над $(M(E,I)/X)^{op}$. С этой целью рассмотрим функторы $\Delta^0\,\mathbb{Z} : (M(E,I)/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$, принимающие постоянные значения $\mathbb{Z}$ на объектах и определенные на морфизмах по формуле

$$\Delta^0\,\mathbb{Z}(x \xrightarrow{\mu} x\cdot\mu) = \begin{cases} 1_{\mathbb{Z}}, & \text{при} \quad \mu = 1, \\ 0, & \text{при} \quad \mu \neq 1. \end{cases}$$

**Следствие 5.** *Для локально конечномерных моноидов трасс $M(E,I)$ абелевы группы $\varinjlim_n^{(M(E,I)/X)^{op}} \Delta^0\,\mathbb{Z}$ изоморфны группам гомологий Губо $H^0_n(Q_\diamond X)$, для всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство. Рассмотрим гомологическую систему $\overline{\Delta^0\,\mathbb{Z}}$, соответствующую диаграмме $\Delta^0\,\mathbb{Z}$ по формулам, определенным в п.3.2. Легко видеть, что $\overline{\Delta^0\,\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}^0 Q^{op}_{Q_\diamond X}$, где $Q_{Q_\diamond X} : \Box_+/Q_\diamond X \to \Box_+$ – забывающий функтор слоя. С помощью следствия 1 получаем $\varinjlim_n^{(\Box_+/Q_\diamond X)^{op}} \overline{\Delta^0\,\mathbb{Z}} \cong H^0_n(Q_\diamond X)$. Применяя теорему 1, приходим к изоморфизмам $\varinjlim_n^{M(E,I)/X^{op}} \Delta^0\,\mathbb{Z} \cong H^0_n(Q_\diamond X)$. $\Box$

Напомним, что *симплициальной схемой* называется пара $(E, \mathfrak{M})$, состоящая из произвольного множества $E$ и множества $\mathfrak{M}$ его конечных непустых подмножеств, таких, что

(1) $e \in E \Rightarrow \{e\} \in \mathfrak{M}$
(2) $S \subseteq T \in \mathfrak{M} \Rightarrow S \in \mathfrak{M}$.

Пусть $(E, \mathfrak{M})$ – симплициальная схема. Рассмотрим произвольное отношение линейного порядка $\leqslant$ на $E$. Запись $e < e'$ означает, что $e \leqslant e'$ & $e \neq e'$. Пусть

$$E_n = \{(e_0, e_1, \cdots, e_n) : \{e_0, e_1, \cdots, e_n\} \in \mathfrak{M} \quad \& \quad e_0 < e_1 < \cdots < e_n\}.$$

Пусть $L(S)$ обозначает свободную абелеву группу, порожденную множеством $S$. Рассмотрим семейство абелевых групп

$$C_n(E,\mathfrak{M}) = \begin{cases} L(E_n), & \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Определим гомоморфизмы $d_n : C_n(E,\mathfrak{M}) \to C_{n-1}(E,\mathfrak{M})$ на элементах базиса по формуле

$$d_n(e_0, e_1, \cdots, e_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (e_0, \cdots, e_{i-1}, e_{i+1}, \cdots, e_n).$$

Хорошо известно, что семейство $(C_n(E,\mathfrak{M}), d_n)$ является цепным комплексом. Обозначим $C_\diamond(E,\mathfrak{M}) = (C_n(E,\mathfrak{M}), d_n)$. Известно также, что группы гомологий комплекса $C_\diamond(E,\mathfrak{M})$ не зависят от отношения линейного порядка. Они называются *группами гомологий $H_n(E,\mathfrak{M})$ симплициальной схемы* $(E,\mathfrak{M})$. При $n \geqslant 1$ определим *приведенные группы гомологий* по формуле $\widetilde{H}_n(E,\mathfrak{M}) = H_n(E,\mathfrak{M})$, и определим $\widetilde{H}_0(E,\mathfrak{M})$ как ядро гомоморфизма $H_0(E,\mathfrak{M}) \to \mathbb{Z}$, переводящего каждую образующую группы $H_0(E,\mathfrak{M})$ в элемент $1 \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\Delta^0 \mathbb{Z}[x] : (M(E,I)/X)^{op} \to \mathrm{Ab}$ – функтор, определенный на объектах $y \in (M(E,I)/X)^{op}$ как $\Delta^0 \mathbb{Z}[x](y) = 0$ при $y \neq x$, и $\Delta^0 \mathbb{Z}[x](x) = \mathbb{Z}$. На морфизмах он действует по формуле

$$\Delta^0 \mathbb{Z}[x](x_1 \stackrel{\mu}{\to} x_2) = \begin{cases} 1_{\mathbb{Z}}, & \text{если } x_1 = x_2 = x \text{ и } \mu = 1 \\ 0, & \text{в других случаях} \end{cases}$$

Пусть $(E, \mathfrak{M}_I)$ – симплициальная схема, у которой $\mathfrak{M}_I$ состоит из конечных подмножеств попарно независимых элементов.

**Предложение 5.** *Для локально конечномерного моноида $M(E,I)$, действующего справа на множестве $X$, верно*

$$\varinjlim\nolimits_n^{(M(E,I)/X)^{op}} \Delta^0 \mathbb{Z}[x] \cong \widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M}_I),$$

*для всех $x \in X$ и $n \geqslant 1$.*

Доказательство. По теореме 1 группы гомологий $\varinjlim_n^{(M(E,I)/X)^{op}}$ будут изоморфны группам гомологий комплекса

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{a_1 \in E_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(a_1,a_2)\in E_2} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})\in E_{n-1}} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in E_n} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots ,$$

с дифференциалами $d_n(a_1, \cdots, a_n) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{s+1} (a_1, \cdots, \widehat{a_s}, \cdots, a_n)$.

Этот комплекс в размерностях $k \geqslant 1$ совпадает со сдвинутым комплексом $(C_{k-1}(E, \mathfrak{M}), d_{k-1})$. Поэтому его $k$-е группы гомологий в размерностях $k \geqslant 2$ изоморфны $H_{k-1}(E, \mathfrak{M})$. Легко видеть (см. [24] или [25, теорема 3.1]), что при $n = 1$ гомологии этого комплекса изоморфны $\widetilde{H}_0(E, \mathfrak{M})$. Искомые изоморфизмы получены. □

**Теорема 2.** *Для локально конечномерного моноида $M(E,I)$, действующего справа на множестве $X$ для всех $n \geqslant 1$ имеют место изоморфизмы*

$$H_n^0(Q_\diamond X) \cong \bigoplus_{x \in X} \widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M}_I).$$

Доказательство. Немедленно вытекает из равенства $\Delta^0 \mathbb{Z} = \bigoplus_{x\in X} \Delta^0 \mathbb{Z}[x]$, следствия 5 и предложения 5. □

## 4. Топология и группы гомологий пространства состояний

Состояния параллельной системы мы дополним некоторыми промежуточными состояниями, таким способом, что вычислительным процессам будут соответствовать непрерывные кривые в полученном топологическом пространстве. Мы изучаем это топологическое пространство. Более того, мы исследуем группы гомологий пространства состояний с коэффициентами в гомологических системах. Приводим пример, демонстрирующий алгоритм вычисления целочисленных групп гомологий пространства состояний. Доказываем, что группы гомологий обобщенного тора, возникающие в результате добавления "состояния зависания", выделяются как прямые слагаемые целочисленных групп гомологий пространства состояний. Попытка избавиться от обобщенных торов приводит к гипотезе, подтверждение которой привело бы к решению проблемы построения алгоритма вычисления групп гомологий сетей Петри, поставленной в [7, Open Problem 1]. Доказываем, что для любой конечной последовательности произвольных конечно-порожденных абелевых групп $A_n$ можно построить такое пространство состояний, что $n$-мерные сингулярные группы гомологий соответствующего топологического пространства при $n \geqslant 2$ будут изоморфны $A_n \oplus H_n(M(E,I))$.

4.1. **Топология и группы гомологий аугментированного пространства состояний.** Добавим к пространству состояний бесконечно удаленную точку и будем изучать его как множество с тотальным действием моноида трасс. Опишем топологическое пространство промежуточных состояний и группы гомологий аугментированной категории состояний с коэффициентами в функторах.

Сначала напомним, как категорию множеств и частичных отображений можно рассматривать как категорию пунктированных множеств.

Частичные отображения и пунктированные множества. *Пунктированным множеством* $X$ называется множество с выделенной в нем точкой, которая обозначается символом $\star$. *Пунктированным отображением* $f : X \to Y$ называется такое отображение между соответствующими множествами, что $f(\star) = \star$.

Пусть $\mathrm{Set}_*$ – категория, объектами которой являются пунктированные множества, а морфизмами – пунктированные отображения. Обозначим через $\sqcup$ дизъюнктное объединение. Категория множеств и отображений Set допускает вложение в $\mathrm{Set}_*$, сопоставляющее каждому множеству $S$ пунктированное множество $S_* = S \sqcup \{\star\}$, отображению $\sigma : S \to S'$ – отображение $\sigma_* : S_* \to S'_*$, определенное как $\sigma_*(s) = \sigma(s)$ при $s \in S$ и $\sigma_*(\star) = \star$.

С другой стороны, пунктированные множества и отображения можно рассматривать как обычные. Это определяет вложение категорий $U : \mathrm{Set}_* \to \mathrm{Set}$, которое называется забывающим функтором.

Всякому частичному отображению $f : X \rightharpoonup Y$ с областью определения $Domf \subseteq X$ можно поставить в соответствие пунктированное отображение $f_* : X_* \to Y_*$, полагая

$$f_*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in Domf, \\ \star, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Согласно [2], это соответствие определяет эквивалентность категории множеств и частичных отображений и категории $\mathrm{Set}_*$.

4.1.1. *Категория пространств состояний.*

**Определение 6.** *Пространством состояний* $\Sigma = (S, E, I, \mathrm{Tran})$ *называется четверка, состоящая из множеств* $S$ *и* $E$*, подмножества* $\mathrm{Tran} \subseteq S \times E \times S$ *и антирефлексивного симметричного отношения* $I \subseteq E \times E$*, удовлетворяющих аксиомам:*

1. *если* $(s, e, s') \in \mathrm{Tran}$ *и* $(s, e, s'') \in \mathrm{Tran}$*, то* $s' = s''$*;*
2. *для любой пары* $(e_1, e_2) \in I$ *и троек* $(s, e_1, s_1) \in \mathrm{Tran}$, $(s_1, e_2, v) \in \mathrm{Tran}$ *существует такой* $s_2 \in S$*, что* $(s, e_2, s_2) \in \mathrm{Tran}$ *и* $(s_2, e_1, v) \in \mathrm{Tran}$.

*Элементы из* $S$ *называются* состояниями*, из* Tran – переходами*, из* $E$ – событиями*,* $I$ – отношением независимости.

Пусть $\mathcal{S}$ – категория, объектами которой являются пространства состояний, а морфизмами $(\sigma, \eta) : (S, E, \mathrm{Tran}\,, I) \to (S', E', \mathrm{Tran}\,', I')$ – пары, состоящие из отображений $\sigma : S \to S'$ и $\eta : E_* \to E'_*$, удовлетворяющих условиям

(1) для любого $(s_1, e, s_2) \in \mathrm{Tran}$, если $\eta(e) \neq \star$, то $(\sigma(s_1), \eta(e), \sigma(s_2)) \in \mathrm{Tran}\,'$, иначе $\sigma(s_1) = \sigma(s_2)$;
(2) если $(e_1, e_2) \in I$, $\eta(e_1) \neq \star$, $\eta(e_2) \neq \star$, то $(\eta(e_1), \eta(e_2)) \in I'$.

Это определение вместе с условием $\sigma(s_0) = s'_0$ дает определение морфизма асинхронных систем переходов. Для $\eta$, удовлетворяющему условию (ii), обозначим $\eta_\odot : E \to E' \cup \{1\}$ отображение

$$\eta_\odot = \begin{cases} \eta(e), & \text{если } \eta(e) \text{ определено,} \\ 1, & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

Пусть $\widetilde{\eta_\odot} : M(E, I) \to M(E', I')$ – продолжение $\eta_\odot$ до гомоморфизма моноидов.

Согласно [10, предложение 2], каждый объект $\Sigma$ категории пространств состояний $\mathcal{S}$ можно задавать как пунктированное множество $S_* = S \sqcup \{\star\}$ с правым действием некоторого моноида трасс. Морфизмам между $\Sigma : M(E, I)^{op} \to \mathrm{Set}_*$ и $\Sigma' : M(E', I')^{op} \to \mathrm{Set}_*$ соответствуют пары $(\widetilde{\eta_\odot}, \sigma_*)$, состоящие из гомоморфизма $\widetilde{\eta_\odot} : M(E, I) \to M(E', I')$ и естественного преобразования $\sigma_* : \Sigma \to \Sigma' \circ \widetilde{\eta_\odot}^{op}$ между функторами, показанных на рис. 2. Естественное преобразование $\sigma_*$ определяется отображением, продолжающим некоторое отображение $\sigma : S \to S'$.

$$\begin{tikzcd} M(E,I)^{\mathrm{op}} \arrow[rr, "\widetilde{\eta_\odot}^{\mathrm{op}}"] \arrow[dr, "\Sigma"'] & & M(E',I')^{\mathrm{op}} \arrow[dl, "\Sigma'"] \\ & \mathrm{Set}_* & \end{tikzcd}$$

Рис. 2. Множества с действием моноидов трасс как функторы

Следовательно, всякое пространство состояний можно рассматривать как пунктированное множество с действием некоторого моноида трасс $M(E, I)$. Но морфизмов между пространствами состояний меньше, чем между пунктированными множествами с действием моноидов трасс.

4.1.2. *Гомологии аугментированной категории состояний.* Пусть $U : \mathrm{Set}_* \to \mathrm{Set}$ – функтор, забывающий отмеченную точку. Тогда для любого пространства состояний $\Sigma : M(E, I)^{op} \to \mathrm{Set}_*$ композиция $U \circ \Sigma$ определяет правое $M(E, I)$-множество. Обозначим через $K_*(\Sigma)$ категорию $(M(E, I)/(U \circ \Sigma))^{op}$. Она называется *аугментированной категорией состояний* пространства состояний $(M(E, I), \Sigma)$. Ее объекты можно рассматривать как элементы множества $S_*$, а морфизмы – как тройки $s_1 \xrightarrow{\mu} s_2$, $\mu \in M(E, I)$, $s_1 \in S_*$, $s_2 \in S_*$. Композиция морфизмов $(s_2 \xrightarrow{\mu_2} s_3) \circ (s_1 \xrightarrow{\mu_1} s_2)$ равна $(s_1 \xrightarrow{\mu_1\mu_2} s_3)$.

*Группы гомологий пространства состояний с коэффициентами в функторе* $F : K_*(\Sigma) \to \mathrm{Ab}$ определяются как $H_n(\Sigma, F) = \varinjlim_n^{K_*(\Sigma)} F$, $n \geqslant 0$.

*Полурегулярные автоматы высшей размерности* [8] – это в точности полукубические множества. Поэтому для таких автоматов $X$ определены группы гомологий $H_n(X, F)$ с коэффициентами в гомологических системах $F$. Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 6.** *Пусть $\Sigma = (S, E, I, \mathrm{Tran})$ – пространство состояний. Если $M(E, I)$ локально конечномерен, то $H_n(\Sigma, F) \cong H_n(Q_\diamond(U \circ \Sigma), \overline{F})$, для всех $n \geqslant 0$.*

4.1.3. *Топологическое пространство промежуточных состояний.* Пространство состояний можно рассматривать как пунктированное множество с действием моноида трасс, или как функтор $\Sigma : M(E, I)^{op} \to \mathrm{Set}_*$. Оно задается с помощью четверки $(S, E, I, Tran)$, определяющей действие моноида $M(E, I)$ справа на множестве $S \sqcup \{*\}$. Если вычислительная система находится в состоянии $s \in S$, и для нее определены независимые действия $a_1, \cdots, a_n$, то с помощью одновременного выполнения этих действий вычислительный процесс может перейти в состояние $sa_1 \cdots a_n$. Для того, чтобы эти действия можно было применять к любому состоянию, мы ввели состояние '*'. Введем промежуточные состояния $sa_1^{t_1} \cdots a_n^{t_n}$, где $t_i \in [0, 1]$ – "доля" выполнения действия $a_i$, при $1 \leqslant i \leqslant n$. Этим промежуточным состояниям будут соответствовать классы точек $(s, t_1a_1 + \cdots + t_na_n)$, принадлежащие топологическому пространству $|Q_\diamond(U \circ \Sigma)|_{\square_+}$. Следовательно, топологическое пространство промежуточных состояний можно интерпретировать как геометрическую реализацию полукубического множества, соответствующего пространству состояний $\Sigma$.

**Пример 1.** *Рассмотрим пространство состояний (см. рис. 3), состоящее из $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $E = \{a, b\}$, $I = \{(a, b), (b, a)\}$. элементы из $Tran$ состоят из троек $(s, e, s')$, соответствующих стрелкам $s \xrightarrow{e} s'$ диаграммы*

$$\begin{tikzcd}
s_3 \arrow[r, "a"] & s_4 \arrow[r, "a"] & s_5 \\
s_0 \arrow[u, "b"'] \arrow[r, "a"] & s_1 \arrow[u, "b"'] \arrow[r, "a"] & s_2 \arrow[u, "b"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 3. Пример пространства состояний

*Топологическая пространство $|Q_\diamond(U \circ \Sigma)|_{\square_+}$ получается из объединения единичных квадратов отождествлением между собой вершин $\star$, отождествлением отрезков $\star \overset{a}{\text{——}} \star$, отождествлением отрезков $\star \overset{b}{\text{——}} \star$ и отождествлением клеток, все вершины которых равны $\star$. Вычислительный процесс интерпретируется как последовательность применения действий как некоторому состоянию. Траектория выполнения процесса, переводящего, например, $s_0$ в $s_0a^2b$, может состоять из точек прямолинейного отрезка, соединяющего $s_0$ и $s_5$. Траектория может быть любой непрерывной кривой, обе координаты точек которой не убывают.*

*Таким образом, изучая группы $H_n(M(E, I)/(U \circ \Sigma))$, мы получаем информацию о топологическом пространстве $|Q_\diamond(U \circ \Sigma)|_{\square_+}$, точки которого интерпретируются как промежуточные состояния.*

$$
\begin{tikzcd}
\star \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[r, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[d, dash, "b"] & & \\
\star \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[d, dash, "b"] & & \\
s_3 \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & s_4 \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & s_5 \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[r, dash, "a"] \arrow[d, dash, "b"] & \star \arrow[d, dash, "b"] \\
s_0 \arrow[r, dash, "a"] & s_1 \arrow[r, dash, "a"] & s_2 \arrow[r, dash, "a"] & \star \arrow[r, dash, "a"] & \star
\end{tikzcd}
$$

Рис. 4. Топологическое пространство промежуточных состояний

4.1.4. *Прямые слагаемые групп целочисленных гомологий.* Покажем, что рассмотренные в примере группы гомологий одноточечного множества выделяются прямыми слагаемыми в $H_n(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z})$. С этой целью определим функторы, принимающие на объектах значения $\mathbb{Z}$ и 0. Подмножество $S \subseteq \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ объектов малой категории $\mathscr{C}$ называется *открытым*, если оно вместе с любым $s \in S$ содержит все объекты $c \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$, допускающие морфизмы $s \to c$. Например, подмножество $\{\star\}$ будет открытым в $K_*(\Sigma)$. Дополнение к открытому подмножеству называется *замкнутым*. Пересечение открытого и замкнутого подмножеств называется *выпуклым*. Если подмножество $S \subseteq \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ выпукло, то определен функтор $\mathbb{Z}[S]$, значения которого на объектах равны

$$
\mathbb{Z}[S](c) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } c \in S, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases}
$$

а на морфизмах – $\mathbb{Z}[S](c_1 \to c_2) = 1_{\mathbb{Z}}$ при $c_2 \in S$. На остальных морфизмах значения, в частности при $c_1 \notin S$, равны нулевым гомоморфизмам.

**Предложение 6.** *Пусть* $\Sigma = (S, E, I, \operatorname{Tran})$ *– пространство состояний. Тогда* $H_n(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{(p_n)} \oplus H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[S])$*, для всех* $n \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим полную подкатегорию $K_*(\emptyset) \subseteq K_*(\Sigma)$ с множеством объектов $\{\star\}$. Вложение этой полной подкатегории является коретракцией. Точная последовательность $0 \to \mathbb{Z}[\star] \to \Delta\,\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[S] \to 0$ в категории $\mathrm{Ab}^{K_*(\Sigma)}$ приводит к точной последовательности комплексов абелевых групп

$$
0 \to C_\diamond(K_*(\Sigma), \mathbb{Z}[\star]) \to C_\diamond(K_*(\Sigma), \Delta\,\mathbb{Z}) \to C_\diamond(K_*(\Sigma), \mathbb{Z}[S]) \to 0 \tag{5}
$$

Цепной гомоморфизм $C_\diamond(K_*(\Sigma), \mathbb{Z}[\star]) \to C_\diamond(K_*(\Sigma), \Delta\,\mathbb{Z})$ будет равен композиции изоморфизма комплексов $C_\diamond(K_*(\Sigma), \mathbb{Z}[\star]) \to C_\diamond(K_*(\emptyset), \Delta\,\mathbb{Z})$ и коретракции $C_\diamond(K_*(\emptyset), \Delta\,\mathbb{Z}) \to C_\diamond(K_*(\Sigma), \Delta\,\mathbb{Z})$. Поэтому точная последовательность (5) расщепляется. Переходя к группам гомологий, получаем искомое утверждение. □

В частности, если $H_n(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z}) \cong H_n(\mathrm{pt})$ для всех $n \geqslant 0$, то $p_n = 0$ при $n > 0$. В этом случае $E = \emptyset$, $I = \emptyset$ и, значит, $K_*(\Sigma)$ – дискретная категория. Поскольку $H_0(K_*(\Sigma)) = \mathbb{Z}$, то эта категория имеет единственный объект. Стало быть, $S = \emptyset$. Отсюда вытекает важное для классификации пространств состояний

**Следствие 7.** *Пусть* $\Sigma = (S, E, I, \mathrm{Tran})$ *– пространство состояний. Если* $H_n(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z}) = 0$ *для всех* $n > 0$, *и* $H_0(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, *то* $S = E = I = \mathrm{Tran} = \emptyset$.

4.1.5. *Метод вычисления групп гомологий пространств состояний.* Для выпуклого подмножества $S' \subseteq S \cup \{*\}$ объектов категории $K_*(\Sigma)$ функтор $\mathbb{Z}[S']$ принимает значения

$$\mathbb{Z}[S'](s \xrightarrow{e_i} s \cdot e_i)(f) = \begin{cases} f, & \text{если } s \cdot e_i \in S', \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Следующее утверждение мы будем применять в основном при $S' = S$ или $S' = S \cup \{*\}$.

**Теорема 3.** *Пусть* $\Sigma = (S, E, I, Tran)$ *– пространство состояний. Если моноид трасс* $M(E, I)$ *локально конечномерен, то для любого выпуклого множества* $S' \subseteq S \cup \{*\}$ *объектов категории* $K_*(\Sigma)$ *группы* $H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[S'])$, *при* $n \geqslant 0$, *для любого отношения линейного порядка на* $E$, *будут изоморфны группам гомологий комплекса*

$$0 \leftarrow \bigoplus_{s \in S'} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{(s,e_1) \in S' \times T_1(E,I)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(s,e_1,e_2) \in S' \times T_2(E,I)} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$
$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(s,e_1,\cdots,e_{n-1}) \in S' \times T_{n-1}(E,I)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(s,e_1,\cdots,e_n) \in S' \times T_n(E,I)} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

*с дифференциалами, определенных на базисах свободных абелевых групп комплекса по формуле:*

$$d_n(s, e_1 \cdots e_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left((s * e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n) - (s, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n)\right)$$

*Здесь*

$$(s * e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n) = \begin{cases} (s \cdot e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n), & \text{если } s \cdot e_i \in S', \\ 0, & \text{если } s \cdot e_i \notin S', \end{cases}$$

Доказательство. Применим теорему 1 для случая $F = \mathbb{Z}[S']$. Поскольку дифференциалы определены значениями $d_n(s, e_1, \cdots, e_n, 1)$ на базисах свободных абелевых групп, то достаточно определить эти значения. Вычисляя

$$d_n(s, e_1, \cdots, e_n, 1) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i ((s \cdot e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n, \mathbb{Z}[S'](s \xrightarrow{e_i} s \cdot e_i)(1)) - (s, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n, 1))$$

получим определение этих значений на базисах. □

**Пример 2.** *Рассмотрим пространство состояний с петлями (рис. 5). Пусть* $\Sigma = (S, E, I, Tran)$, *где* $S = \{s_0, s_1\}$, $E = \{a, b\}$, $I = \{(a, b), (b, a)\}$, $Tran = \{(s_0, a, s_0), (s_0, b, s_1), (s_1, a, s_1)\}$.

*Вычислим группы* $H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[S])$. *Поскольку для показанного на рис. 5 пространства состояний* $T_1(E, I) = \{a, b\}$, $T_2(E, I) = \{(a, b)\}$, *и* $T_n(E, I) = \emptyset$ *при* $n > 2$, *то по теореме 3 комплекс будет состоять из абелевых групп*

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}^2 \xleftarrow{d_1} \mathbb{Z}^4 \xleftarrow{d_2} \mathbb{Z}^2 \leftarrow 0$$

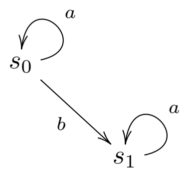


Рис. 5. Пространство состояний с петлями

*Дифференциал* $d_1(s, e_1) = -s * e_1 + s$ *задается матрицей*

$$\begin{array}{c} \\ s_0 \\ s_1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (s_0, a) & (s_0, b) & (s_1, a) & (s_1, b) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc} +1-1 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & +1-1 & +1 \end{array}\right) \end{array}$$

*Дифференциал* $d_2(s, e_1, e_2) = -(s * e_1, e_2) + (s, e_2) + (s * e_2, e_1) - (s, e_1)$ –

$$\begin{array}{c} \\ (s_0, a) \\ (s_0, b) \\ (s_1, a) \\ (s_1, b) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} (s_0, a, b) & (s_1, a, b) \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ -1+1 & 0 \\ +1 & -1 \\ 0 & -1+1 \end{array}\right) \end{array}$$

*С помощью приведения этих матриц к нормальной форме Смита получим* $H_0(\Sigma, \mathbb{Z}[S]) = \mathbb{Z}^{2-2} = 0$, $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}[S]) = \mathbb{Z}^{4-2-2} = 0$, $H_2(\Sigma, \mathbb{Z}[S]) = \mathbb{Z}^{2-2} = 0$. *Следовательно,* $H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[S]) = 0$ *для всех* $n \geqslant 0$. *Поскольку граф* $(E, I)$ *в данном случае состоит из двух вершин и одного ребра, то число* 1*-клик равно* $p_1 = 2$, *а* 2*-клик* $p_2 = 1$. *Всегда* $p_0 = 1$. *Из предложения 6 следует* $H_0(\Sigma, \Delta\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, $H_1(\Sigma, \Delta\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$, $H_2(\Sigma, \Delta\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

4.1.6. *Группы гомологий точки с действием моноида трасс.* Может сложится впечатление, что группы гомологий пространств состояний не имеют кручения. Покажем, что это не так.

**Предложение 7.** *Пусть* $\Sigma = (\{x_0\}, E, I, \mathrm{Tran}\,)$ – *пространство состояний, имеющее единственное состояние, с действием локально конечномерного моноида* $M(E, I)$, *определенным по формуле* $x_0 \cdot a = \star$, *для каждого* $a \in E$, *и пусть* $\mathbb{Z}[x_0] : K_*(\Sigma) \to \mathrm{Ab}$ – *функтор, принимающий значения* $\mathbb{Z}[x_0](x_0) = \mathbb{Z}$ *и* $\mathbb{Z}[x_0](\star) = 0$. *Тогда* $H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[x_0]) \cong \widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M}_I)$, *для всех* $n \geqslant 1$.

Доказательство. В данном случае не существует гомоморфизмов $x_0 \xrightarrow{\mu} x_0$, кроме $x_0 \xrightarrow{1} x_0$, поэтому $\mathbb{Z}[x_0] = \Delta^0\,\mathbb{Z}[x_0]$. Утверждение вытекает из предложения 5. □

**Теорема 4.** *Пусть* $\Sigma = (\{x_0\}, E, I, \mathrm{Tran}\,)$ – *пространство состояний, в котором действие моноида* $M(E, I)$ *определено по формуле* $x_0 \cdot a = \star$, *для каждого* $a \in E$. *Пусть* $p_n = |E_n|$ – *кардинальное число множества всех* $n$*-клик графа независимости, и* $p_0 = 1$. *Если моноид* $M(E, I)$ *локально конечномерен, то* $H_n(\Sigma, \Delta\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{(p_n)} \oplus \widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M})$, *для всех* $n \geqslant 1$. *Группа* $H_0(\Sigma, \mathbb{Z})$ *изоморфна* $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Группа $H_0(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z})$ будет изоморфна $\mathbb{Z}$ как копредел диаграммы $\Delta\,\mathbb{Z}$ по связной категории. Согласно предложению 6 верно

$$H_n(\Sigma, \Delta\,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{(p_n)} \oplus H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[x_0]). \tag{6}$$

Предложение 7 дает изоморфизмы $H_n(\Sigma, \mathbb{Z}[x_0]) \cong \widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M}_I)$, $n \geqslant 1$. Подставляя их в формулу (6), приходим к требуемому. □

Мы докажем, что пространство состояний может иметь любые группы гомологий, с точностью до прямых слагаемых, равных группам гомологий обобщенных торов $H_n(M(E,I))$. Для этого нам понадобится следующая

**Лемма 2.** *Для любой симплициальной схемы $(X, \mathfrak{M})$ существует множество $E$ с отношением независимости $I$, для которой $H_n(E, \mathfrak{M}_I) \cong H_n(X, \mathfrak{M})$ для всех $n \geqslant 0$.*

Доказательство. *Барицентрическим подразделением симплициальной схемы* $(X, \mathfrak{M})$ называется симплициальная схема, вершинами которой являются симплексы $S \in \mathfrak{M}$, а симплексами – конечные множества $\{S_0, \cdots, S_m\}$ симплексов $S_i \in \mathfrak{M}$, $i \in \{0, \cdots, m\}$, линейно упорядоченные отношением $\subset$. Хорошо известно, что группы гомологий барицентрического подразбиения изоморфны группам $H_n(X, \mathfrak{M})$, для всех $n \geqslant 0$. Рассмотрим множество $E = \mathfrak{M}$ и определим $I \subseteq E \times E$ как состоящее из пар

$$(S, S') \in I \;\Leftrightarrow\; (S \subset S') \vee (S' \subset S).$$

Всякий симплекс $\{S_0, \cdots, S_m\}$ барицентрического подразделения будет состоять из таких элементов множества $E$, что для всех $i \neq j$, принадлежащих $\{0, \cdots, m\}$, верно $(S_i, S_j) \in I$. И наоборот, для любого симплекса $\{S_0, \cdots, S_m\}$ симплициальной схемы $(E, \mathfrak{M}_I)$ для любых $i \neq j$ имеет место $S_i \subset S_j$ или $S_j \subset S_i$, откуда следует линейная упорядоченность множества $\{S_0, \cdots, S_m\}$. Следовательно, симплексы барицентрического подразделения совпадают с симплексами симплициальной схемы $(E, \mathfrak{M}_I)$. Значит, барицетрическое подразделение симплициальной схемы $(X, \mathfrak{M})$ равно симлициальной схеме $(E, \mathfrak{M})$. Получаем искомый изоморфизм $H_n(E, \mathfrak{M}_I) \cong H_n(X, \mathfrak{M})$. □

Последовательность абелевых групп $A_n$, $n \geqslant 0$, мы будем называть *конечной*, если число ненулевых групп в этой последовательности конечно. Хорошо известно [26, гл.4, упр. С-7], что для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$, таких, что $A_0$ свободна, существует компактный полиэдр $K$, группы гомологий которого $\widetilde{H_n}(K)$ изоморфны $A_n$. Компактные полиэдры – это топологические пространства, допускающие конечную триангуляцию [26, гл.3, следствие 20]. Следовательно, для этих групп $A_n$ существует такая симплициальная схема $(X, \mathfrak{M})$, что $H_n(X, \mathfrak{M}) \cong A_n$, для всех $n \geqslant 1$. Отсюда вытекает

**Следствие 8.** *Для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$, $n \geqslant 2$, существует такой моноид трасс $M(E, I)$, что группы гомологий пространства состояний $H_n(\Sigma)$, определенного в теореме 4, изоморфны группам $\mathbb{Z}^{(p_n)} \oplus A_n$, для всех $n \geqslant 2$.*

4.2. **Гомологии неаугментированной категории состояний.** Рассмотрим пространство состояний $\Sigma = (S, E, I, Tran)$. Пусть $K(\Sigma) \subset K_*(\Sigma)$ – полная подкатегория, объектами которой служат элементы $s \in S$. Она называется *категорией состояний* для $\Sigma$. В работе [7] изучались группы гомологий категории $K(\Sigma)$, был построен алгоритм вычисления первой группы целочисленных групп гомологий этой категории и применен для нахождения групп гомологий конечных CE-сетей Петри. Алгоритм вычисления всех целочисленных групп гомологий конечных CE-сетей Петри пока неизвестен [7, Open Problem 1]. Выдвинем гипотезу, доказательство которой позволило бы решить эту проблему. Категории $K(\Sigma)$ соответствует полукубическое подмножество $Q'_\diamond(U\circ\Sigma)\subseteq Q_\diamond(U\circ\Sigma)$ состоящее из подмножеств

$$Q'_n(U\circ\Sigma)=\{(s,e_1,\cdots,e_n)\in Q_n(U\circ\Sigma): se_1\cdots e_n\neq\star\}$$

**Гипотеза 2.** *Пусть $\Sigma=(S,E,I,Tran)$ – пространство состояний, для которого моноид $M(E,I)$ локально конечномерен. Тогда для всех целых $n\geqslant 0$ группы $\varinjlim_n^{K(\Sigma)}\Delta\,\mathbb{Z}$ изоморфны $n$-м группам гомологий комплекса, состоящего из групп $\bigoplus\limits_{(s,e_1,\cdots,e_n)\in Q'_n(U\circ\Sigma)}\mathbb{Z}$ и дифференциалов, определенных по формуле*

$$d_n(s,e_1,\cdots,e_n)=\\ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i((s\cdot e_i,e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_n)-(s,e_1,\cdots,\widehat{e_i},\cdots,e_n))$$

При $n=1$ это утверждение можно доказать с помощью интерпретации элеметов первой группы гомологий малой категории как классов потоков [7, Theorem 3.2].

## 5. Группы гомологий асинхронных систем

Мы будем изучать группы гомологий пространства достижимых состояний асинхронной системы $(\Sigma,s_0)$. Рассматривая сеть Петри как асинхронную систему, мы определим ее группы гомологий и докажем, что группы гомологий сети Петри могут быть почти произвольными. Приводим пример вычисления гомологий сети Петри, имеющей бесконечное число состояний.

5.1. **Асинхронные системы.** Асинхронной системой $T=(\Sigma,s_0)$ называется пара, состоящая из пространства состояний $\Sigma$ и некоторого выделенного состояния $s_0\in S$, которое называется *начальным.* Морфизмами между асинхронными системами переходов $(\Sigma,s_0)\to(\Sigma',s'_0)$ служат морфизмы пространств состояний $(\sigma,\eta):\Sigma\to\Sigma'$, такие что $\sigma(s_0)=s'_0$. Категорию асинхронных систем обозначим через $AS$.

5.1.1. *Целочисленные группы гомологий асинхронных систем.* Пусть $T$ – асинхронная система переходов, $\Sigma=(S,E,I,\mathrm{Tran})$ – её пространство состояний, $s_0\in S$ – ее начальное состояние. Множество $F\subseteq E$ состоит из *попарно независимых* событий, если для любых $e,e'\in F$, таких, что $e\neq e'$, будет верно $(e,e')\in I$.

Напомним, что $S_*$ обозначает множество $S\sqcup\{*\}$. Состояние $s\in S$ называется *достижимым*, если существует такой элемент $\mu\in M(E,I)$, что $s_0\cdot\mu=s$. Множество достижимых состояний $s\neq *$ обозначим через $S(s_0)$. Моноид $M(E,I)$ будет действовать на множестве $S_*(s_0)=S(s_0)\cup\{*\}$. Пусть $T(s_0)$ – пространство состояний, соответствующее этому действию. Тогда $K_*(T(s_0))$ будет обозначать аугментированную категорию состояний. Определим группы гомологий асинхронной системы $T$ как группы $\varinjlim_n^{K_*(T(s_0))}\Delta\,\mathbb{Z}$. Из теоремы 1 получаем

**Следствие 9.** *Пусть $T = (\Sigma, s_0)$ – асинхронная система, не содержащая бесконечных подмножеств попарно независимых событий, $\Sigma = (S, E, I, \mathrm{Tran}\,)$ ее пространство состояний. И пусть на $E$ задано некоторое отношение линейного порядка. Тогда группы $\varinjlim_n^{K_*(T(s_0))} \mathbb{Z}[S(s_0)]$ будут изоморфны $n$-м группам гомологий комплекса*

$$0 \leftarrow \bigoplus_{s\in S(s_0)} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{(s,e_1)\in S(s_0)\times E_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(s,e_1,e_2)\in S(s_0)\times E_2} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

$$\cdots \leftarrow \bigoplus_{(s,e_1,\cdots,e_{n-1})\in S(s_0)\times E_{n-1}} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_n} \bigoplus_{(s,e_1,\cdots,e_n)\in S(s_0)\times E_n} \mathbb{Z} \leftarrow \cdots$$

*где $E_n$ состоит из кортежей попарно перестановочных элементов $e_1 < \cdots < e_n$ из $E$, а*

$$d_n(s, e_1\cdots e_n) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \left((s * e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n) - (s, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n)\right)$$

*Здесь*

$$(s * e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n) = \begin{cases} (s\cdot e_i, e_1, \cdots, \widehat{e_i}, \cdots, e_n), & \text{если } s\cdot e_i \neq *, \\ 0, & \text{если } s\cdot e_i = *, \end{cases}$$

*А группы гомологий асинхронной системы $T$ будут равны*

$$\varinjlim_n^{K_*(T(s_0))} \Delta\,\mathbb{Z} \cong \varinjlim_n^{K_*(T(s_0))} \mathbb{Z}[S(s_0)] \oplus \mathbb{Z}^{(p_n)}.$$

Если число попарно независимых событий ограничено сверху, то этот комплекс имеет конечную длину. В частности, для имеющей единственное состояние асинхронной системы $T = (\{s_0\}, s_0, E, I, Tran)$, группы $\varinjlim_n^{K_*(T(s_0))} \Delta\,\mathbb{Z}$ будут изоморфны $\widetilde{H}_{n-1}(E, \mathfrak{M}) \oplus \mathbb{Z}^{(p_n)}$, где $\mathfrak{M}$ – симплициальная схема клик графа $(E, I)$, а $p_n$ – мощность множества $n$-клик. Отсюда вытекает, что для всякого $n \geqslant 2$ группы $n$-х гомологий асинхронной системы могут иметь произвольные конечные подгруппы кручения.

### 5.2. **Группы гомологий сетей Петри.**

5.2.1. *Сети Петри.* *Сеть Петри* [27] $N = (P, T, pre, post, M_0)$ состоит из конечных множеств $P$ и $T$, двух отображений $T \underset{post}{\overset{pre}{\rightrightarrows}} \mathbb{N}^P$ и функции $M_0 : P \to \mathbb{N}$. Элементы из множества $P$ называются *местами*, из $T$ – *переходами*. *Маркировкой* называется произвольная функция $M : P \to \mathbb{N}$. Функция $M_0$ называется *начальной маркировкой.*

Ориентированный граф $T \underset{post}{\overset{pre}{\rightrightarrows}} \mathbb{N}^P$ мы будем называть *графом Петри.*

**Определение 7.** *Пусть $T \underset{post}{\overset{pre}{\rightrightarrows}} \mathbb{N}^P$ – граф Петри. Будем говорить, что переход $t$ срабатывает и переводит $M_1 \in \mathbb{N}^P$ в $M_2 \in \mathbb{N}^P$, если*

- $M_1 \geqslant pre(t)$
- $M_1 - pre(t) + post(t) = M_2$

*В этом случае мы будем писать $M_1 \xrightarrow{t} M_2$.*

Пусть $N = (P, T, pre, post, M_0)$ и $N' = (P', T', pre', post', M'_0)$ – сети Петри. Отображения $g : \mathbb{N}^P \to \mathbb{N}^{P'}$, переводящее маркировки в маркировки, будут задаваться матрицами, состоящими из неотрицательных целых чисел. Отображение $g$ будет сопоставлять каждому вектор-столбцу $v \in \mathbb{N}^P$ произведение этой матрицы на вектор-столбец $v$. Такое отображение называется *мультиотношением*. Присоединим к множеству переходов $T$ символ 1. Обозначим $T_* = T \cup \{1\}$. Каждое частичное отображение $f : T \rightharpoonup T'$ будем рассматривать как тотальное $f : T_* \to T'_*$, определяя $f(t) = 1$, если $f(t)$ не определено. Переход 1 действует как тождественное отображение на множестве состояний. Он может произойти при любом состоянии, и он не изменяет состояние. Поэтому положим $pre(1) = post(1) = 0$.

5.2.2. *Группы гомологий сетей Петри и примеры вычисления.* Пусть $I \subseteq T \times T$ и $I' \subseteq T' \times T'$ состоит из пар $(t_1, t_2)$ независимых переходов. Ясно, что оно симметрично и антирефлексивно.

**Определение 8.** [28] Морфизмом Уинскела *между сетями Петри*

$$N = (P, T, pre, post, M_0) \text{ и } N' = (P', T', pre', post', M'_0)$$

*называется пара* $(f : T \rightharpoonup T', g : \mathbb{N}^P \to \mathbb{N}^{P'})$, *состоящая из частичного отображения* $f$ *и мультиотношения* $g$ *таких, что*

- $f(M_0) = M'_0$
- *Коммутативны диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} T_* & \xrightarrow{pre} & \mathbb{N}^P \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ T'_* & \xrightarrow{pre'} & \mathbb{N}^{P'} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T_* & \xrightarrow{post} & \mathbb{N}^P \\ \downarrow f & & \downarrow g \\ T'_* & \xrightarrow{post'} & \mathbb{N}^{P'} \end{array}$$

*Носителем маркировки* $M \in \mathbb{N}^P$ называется подмножество $supp(M) \subseteq P$, состоящее из мест $p \in P$, для которых $M(p) \neq 0$. Переходы $t_1$ и $t_2$ сети Петри называются *независимыми*, если носители маркировок $pre(t_1) + post(t_1)$ и $pre(t_2) + post(t_2)$ не пересекаются. Иными словами, переходы $t_1$ и $t_2$ не имеют общих входных или выходных мест. Поскольку значения маркировок неотрицательны, то независимость равносильна ортогональности в $\mathbb{N}^P$ векторов $pre(t_1) + post(t_1)$ и $pre(t_2) + post(t_2)$.

Пусть $I \subseteq T \times T$ и $I' \subseteq T' \times T'$ состоит из пар $(t_1, t_2)$ независимых переходов. Ясно, что оно симметрично и антирефлексивно.

**Определение 9.** *Морфизм Уинскела между сетями Петри*

$$(f, g) : (P, T, pre, post, M_0) \to (P', T', pre', post', M'_0)$$

*называется* сохраняющим независимость, *если для любых* $(t_1, t_2) \in I$ *верно* $f(t_1) = 1 \vee f(t_2) = 1 \vee (f(t_1), f(t_2)) \in I'$.

Обозначим через $Petri^{\|}$ категорию сетей Петри и сохраняющих независимость морфизмов Уинскела. Для определения действия переходов на множестве маркировок как тотальных отображений добавим маркировку $*$.

**Предложение 8.** *Существует функтор* $\mathfrak{A} : Petri^{\|} \to AS$.

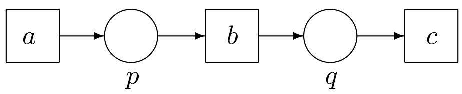
Доказательство. Рассмотрим сеть Петри $N = (P, T, pre, post, M_0)$. Построим для нее асинхронную систему $(\mathbb{N}^P, M(T, I), M_0)$. С этой целью определим действие переходов на множестве маркировок. Рассмотрим произвольный переход $t \in T$. Если $M_1 \geqslant pre(t)$, то $t$ будет переводить $M_1$ в $M_2 = M_1 - pre(t) + post(t)$. В противном случае он будет переводить $M_1$ в $*$. Поскольку независимые переходы определяют перестановочные действия, то получим действие моноида $M(T, I)$ на $\mathbb{N}^P$.

Пусть $M_1 \geqslant pre(t)$. Тогда существует такой $M \in \mathbb{N}^P$, что $M_1 = M + pre(t)$. Рассмотрим морфизм $(f, g) : N \to N'$. Поскольку $g : \mathbb{N}^P \to \mathbb{N}^{P'}$ – гомоморфизм, то $g(M_1) = g(M) + g(pre(t))$. Значит, будет верно $g(M_1) \geqslant g(pre(t)) = pre'(f(t))$. После срабатывания перехода $f(t)$ получаем Поскольку $g(M_2) + g(pre(t)) = g(M_1) + g(post(t))$, $g(pre(t)) = pre'(f(t))$, $g(post(t)) = post'(f(t))$, то $g(M_2) = g(M_1) - pre'(f(t)) + post'(f(t))$. Отсюда вытекает, что сохраняющему независимость морфизму Уинскела будет соответствовать морфизм асинхронных систем. Легко видеть, что это соответствие является функториальным. □

Для каждой сети Петри определена группа гомологий ее асинхронной системы.

**Определение 10.** *Группы $H_n(K_*(\mathfrak{A}(N)))$ называются группами гомологий аугментированной сети Петри.*

**Пример 3.** *Рассмотрим сеть Петри конвейера, состоящего из трех действий*




*Здесь $p, q \in \mathbb{N}$ обозначают значения маркировок в местах сети Петри. Для начальной маркировки $p = 0$ и $q = 0$.*

*Асинхронная система имеет множество состояний $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, множество действий $E = \{a, b, c\}$, отношение независимости $I = \{(a, c), (c, a)\}$, начальное состояние $(0, 0)$. Ее переходы иллюстрируются диаграммой:*

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "c"] & \vdots \arrow[d, "c"] & \vdots \arrow[d, "c"] & \vdots \arrow[d, "c"] & \\
(0,2) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] & (1,2) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & (2,2) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & (3,2) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & \cdots \\
(0,1) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] & (1,1) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & (2,1) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & (3,1) \arrow[r, "a"'] \arrow[d, "c"] \arrow[ul, "b"] & \cdots \\
(0,0) \arrow[r, "a"'] & (1,0) \arrow[r, "a"'] \arrow[ul, "b"] & (2,0) \arrow[r, "a"'] \arrow[ul, "b"] & (3,0) \arrow[r, "a"'] \arrow[ul, "b"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

*Для вычисления групп гомологий $H_n(K_*(T(s_0)), \mathbb{Z}[S(s_0)])$ получаем комплекс*

$$0 \leftarrow \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_1} \bigoplus_{(p,q,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{a,b,c\}} \mathbb{Z} \xleftarrow{d_2} \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{(a,c)\}} \mathbb{Z} \leftarrow 0$$

*Легко видеть, что $d_2$ – инъекция. Поскольку $p_2 = 1$, то отсюда следует, что $H_2(K_*(T(s_0)), \Delta\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, и $H_1(K_*(T(s_0)), \Delta\mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}$. Поскольку категория $K_*(T(s_0))$ связна, то $H_0(K_*(T(s_0)), \Delta\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

**Следствие 10.** *Для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$, существует сеть Петри, $n$-е группы гомологий которой изоморфны группам $A_n \oplus \mathbb{Z}^{(k_n)}$, для всех $n \geqslant 2$, для некоторых неотрицательных целых чисел $k_n$. В частности, группы гомологий сетей Петри $H_n(K_*(\mathfrak{A}(N)))$, при $n \geqslant 2$, могут иметь произвольные подгруппы кручения.*

Доказательство. Возьмем произвольный моноид трасс $M(E, I)$, где $E = \{e_1, \cdots, e_m\}$ – конечное множество. Рассмотрим сеть Петри с нулевой начальной маркировкой, показанную на рис. 6, состоящую из мест $p_i$, соединенных стрелками с переходами $e_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$.

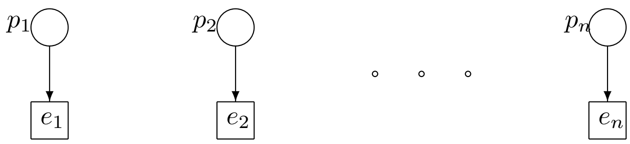



Рис. 6. Первый шаг построения сети Петри

Преобразуем эту сеть Петри (рис. 7), сделав для каждой пары $(e_i, e_j) \in (E \times E) \setminus I$ соответствующие переходы $e_i$ и $e_j$ сети Петри зависимыми, добавив стрелку, соединяющую место $p_i$ с переходом $e_j$, или соединяющую место $p_j$ с переходом $e_i$:

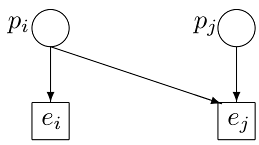



Рис. 7. Добавление стрелок к сети Петри

В результате мы получим сеть Петри, асинхронная система которой имеет единственное состояние, соответствующее маркировке $M_0 = 0$. Доказываемое утверждение вытекает из следствия 8. □

## 6. Группы гомологий языков трасс Мазуркевича

Пусть $M(E, I)$ – моноид трасс. *Языком трасс* называется произвольное подмножество $\mathfrak{L} \subseteq M(E, I)$. Определим отношение порядка на элементах моноида $M(E, I)$, полагая $x \leqslant y$, если существует такой элемент $t \in M(E, I)$, что

$xt = y$. В этом случае $x$ называется *префиксом* для $y$. Язык трасс называется *префиксно замкнутым*, если для каждого $y \in \mathfrak{L}$ всякий его префикс $x \leqslant y$ будет принадлежать $\mathfrak{L}$. *Частично упорядоченным множеством трасс* $P(E, I)$ будем называть множество $M(E, I)$, упорядоченное отношением $x \leqslant y$, если и только если $x$ – префикс $y$.

В данной части мы будем изучать префиксно замкнутые языки трасс. Сначала мы определим их как группы гомологий частично упорядоченного множества всех трасс с коэффициентами в некоторых функторах, соответствующих языкам. Затем мы докажем, что эти группы гомологий изоморфны группам гомологий асинхронной системы, соответствующей языку трас.

6.1. **Группы гомологий частично упорядоченного множества трасс.** Пусть $M$ – произвольный моноид. Подмножество $U \subseteq M$ называется *правым идеалом* моноида $M$, если для всех $u \in U$ и $\mu \in M$ верно $u\mu \in M$. Ясно, что правый идеал будет правым $M$-множеством относительно операции умножения в моноиде.

**Лемма 3.** *Для любого префиксно-замкнутого языка трасс $\mathfrak{L} \subseteq M(E, I)$ его дополнение $M(E, I) \setminus \mathfrak{L}$ будет правым идеалом моноида $M(E, I)$. И наоборот, для всякого правого идеала его дополнение будет префиксно-замкнутым языком трасс.*

Доказательство. Согласно определению, $\mathfrak{L}$ префиксно-замкнутый, если, и только если, верна импликация $xt \in \mathfrak{L} \;\Rightarrow\; x \in \mathfrak{L}$, или, равносильно, $x \notin \mathfrak{L} \;\Rightarrow\; xt \notin \mathfrak{L}$. Откуда следует доказываемое утверждение. □

Поскольку частично упорядоченные множества являются категориями, то для них определены открытые подмножества. Подмножество $U \subseteq J$ частично упорядоченного множества $J$ будет открытым, если $(x \leqslant y \;\&\; x \in U) \Rightarrow y \in U$. Замкнутые подмножества – дополнения к открытым. Мы видим, что открытым подмножествам частично упорядоченного множества $P(E, I)$ будут соответствовать идеалы, а замкнутым – префиксно-замкнутые подмножества.

Пусть $\mathbb{Z}[\mathfrak{L}] : P(E, I) \to \mathrm{Ab}$ – диграмма абелевых групп на частично упорядоченном множестве трасс, принимающая значения

$$\mathbb{Z}[\mathfrak{L}](v) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad v \in \mathfrak{L}, \\ 0, & \text{если} \quad v \notin \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Гомоморфизмы этой диаграммы $\mathbb{Z}[\mathfrak{L}](x \leqslant y)$ определим как тождественные, в случае $x, y \in \mathfrak{L}$. В остальных случаях – как нулевые.

**Определение 11.** *Группами гомологий $H_n(P(E, I), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$, $n \geqslant 0$, префиксно замкнутого языка трасс $\mathfrak{L} \subseteq M(E, I)$ называются группы гомологий частично упорядоченного множества $P(E, I)$ с коэффициентами в диаграмме $\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]$.*

Согласно определению 1, это означает, что группы гомологий $H_n(P(E, I), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$ будут равны $\varinjlim_n^{P(E,I)} \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]$.

Если существует $w \in M(E, I)$, для которого $\mathbb{Z}[\mathfrak{L}](w) = 0$, то, поскольку копредел получен отождествлением переходящих друг в друга элементов, будет верно $\varinjlim^{P(E,I)} \mathbb{Z}[\mathfrak{L}] = 0$. Отсюда

$$H_0(P(E, I), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если} \quad \mathfrak{L} = M(E, I), \\ 0, & \text{если} \quad \mathfrak{L} \neq M(E, I). \end{cases}$$

**Предложение 9.** *Если $M(E,I)$ – свободный коммутативный моноид, то $H_n(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])=0$ при $n>0$.*

Доказательство. В этом случае множество $P(E,I)$ направлено, откуда при $n>0$ верно $\varinjlim_n^{P(E,I)} F=0$, для любого функтора $F: P(E,I)\to \mathrm{Ab}$. Подставляя $F=\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]$, получим данное утверждение. □

**Предложение 10.** *Пусть $C_\diamond^+(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])\subseteq C_\diamond(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$ – подкомплекс, состоящий из групп $C_n^+=L\{(v_0,\cdots,v_n)|\ v_0\in\mathfrak{L}\ \&\ v_0<\cdots<v_n\}$. Группы $H_n(P(E,I),\mathfrak{L})$ будут изоморфны $n$-м группам гомологий комплекса $C_\diamond^+(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$.*

Доказательство. Поскольку частично упорядоченное множество – категория без ретракций, то это вытекает из [22, Предложение 1.1]. □

Для произвольного частично упорядоченного множества $(X,\leqslant)$ обозначим через $H_n(X)$ группы гомологий $H_n(X,\Delta_X\mathbb{Z})$ с коэффициентами в диаграмме, принимающей постоянные значения $\mathbb{Z}$. Эти группы изоморфны группам гомологий нерва частично упорядоченного множества, и, значит, группам гомологий геометрической реализации нерва. Пусть $\widetilde{H}_n(X)$ – *$n$-я приведенная группа гомологий*, которая определяется как ядро гомоморфизма $H_n(X)\to H_n(\mathrm{pt})$, полученного применением функтора гомологий к каноническому отображению $X\to\mathrm{pt}$. Нам будут нужны группы гомологий $\widetilde{H}_n(P(E,I)\setminus\mathfrak{L})$ частично упорядоченного множества трасс, не принадлежащих $\mathfrak{L}$.

**Теорема 5.** *$H_n(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])\cong\widetilde{H}_{n-1}(P(E,I)\setminus\mathfrak{L})$, $n\geqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим точную последовательность в категории диаграмм над частично упорядоченным множеством $P(E,I)$:

$$0\to\mathbb{Z}[P(E,I)\setminus\mathfrak{L}]\to\Delta_{P(E,I)}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]\to 0\,.$$

Ее компоненты состоят из нулевых и тождественных гомоморфизмов. С ней связана длинная точная последовательность абелевых групп

$$\cdots\to\varinjlim_n^{P(E,I)}\mathbb{Z}[P(E,I)\setminus\mathfrak{L}]\to\varinjlim_n^{P(E,I)}\Delta\mathbb{Z}\to\varinjlim_n^{P(E,I)}\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]$$
$$\to\varinjlim_{n-1}^{P(E,I)}\mathbb{Z}[P(E,I)\setminus\mathfrak{L}]\to\varinjlim_{n-1}^{P(E,I)}\Delta\mathbb{Z}\to\cdots$$

Поскольку $P(E,I)$ имеет наименьший элемент, то $\varinjlim_n^{P(E,I)}\Delta\mathbb{Z}=0$, при $n>0$, и $\varinjlim^{P(E,I)}\Delta\mathbb{Z}=\mathbb{Z}$. Подмножества $P(E,I)\setminus\mathfrak{L}$ открыты, откуда вытекает $\varinjlim_n^{P(E,I)}\mathbb{Z}[P(E,I)\setminus\mathfrak{L}]\cong H_n(P(E,I)\setminus\mathfrak{L})$. Отсюда получаем искомые изоморфизмы при $n>1$. При $n=1$ получаем точную последовательность

$$0\to\varinjlim_1^{P(E,I)}\Delta\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]\to H_0(P(E,I)\setminus\mathfrak{L})\to\mathbb{Z}\to\varinjlim^{P(E,I)}\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]\to 0\,.$$

Рассматривая каждый из двух случаев $\mathfrak{L}\neq\emptyset$ или $\mathfrak{L}=\emptyset$, приходим к выводу, что в обоих случаях $\varinjlim^{P(E,I)}\mathbb{Z}[\mathfrak{L}]=0$, и получаем искомый изоморфизм. □

**Следствие 11.** *Для любого префиксно замкнутого языка трасс $\mathfrak{L}\subseteq M(E,I)$ группа $H_1(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$ свободна.*

**Следствие 12.** *Если $M(E,I)=E^*$ – свободный моноид, и значит $I=\emptyset$, то $H_n(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])=0$ при $n\geqslant 2$. В этом случае $H_1(P(E,I),\mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$ будет свободной абелевой группой $\mathbb{Z}^{(m-1)}$, где $m$ – мощность множества минимальных элементов подмножества $P(E,I)\subseteq\mathfrak{L}$.*

Доказательство. Поскольку $M(E,I)$ – свободный моноид, то для любых его несравнимых элементов $u, v$ не существует элемента $w$, удовлетворяющего условию ($u < w$ & $v < w$). Поэтому для любых двух элементов $u, v$ произвольной компоненты связности множества $P(E,I) \setminus \mathfrak{L}$ существует такой $w \in P(E,I) \setminus \mathfrak{L}$, что $w \leqslant u$ и $w \leqslant v$. Значит, эта компонента связности имеет наименьший элемент, который будет минимальным. Отсюда группы гомологий $H_{n-1}(P(E,I) \setminus \mathfrak{L})$ равны 0 при $n > 0$, и $H_0(P(E,I) \setminus \mathfrak{L})$ будет порождена $m$ элементами. Получаем $\widetilde{H}_0(P(E,I) \setminus \mathfrak{L}) = \mathbb{Z}^{(m-1)}$. Применение теоремы 5 завершает доказательство. □

**Пример 4.** *Пусть* $E = \{a, b\}$, $\mathfrak{L} = \{w \in E^* | \operatorname{length}(w) < n\}$. *Здесь* $\operatorname{length}(w)$ *обозначает длину слова. Тогда множество минимальных элементов в* $P(E, \emptyset) \setminus \mathfrak{L}$ *состоит из слов, длина которых равна* $n$. *Число таких слов равно* $2^n$, *откуда* $H_1(P(E,\emptyset), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) \cong \mathbb{Z}^{2^n-1}$. *В более общем случае* $E = \{a_1, \cdots, a_m\}$ *получаем* $H_1(P(E,\emptyset), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) \cong \mathbb{Z}^{m^n-1}$ *и* $H_n(P(E,\emptyset), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) = 0$, *для всех* $n \neq 1$.

6.2. **Гомологии языков трасс и асинхронных систем.** Пусть $\mathfrak{L} \subseteq M(E,I)$ – префиксно замкнутый язык трасс. Определим действие моноида $M(E,I)$ на $\mathfrak{L} \cup \{*\}$, полагая

$$w * \mu = \begin{cases} w\mu, & \text{если} \quad w\mu \in \mathfrak{L}, \\ *, & \text{если} \quad w\mu \notin \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Полученное пространство состояний обозначим через $\Sigma_{\mathfrak{L}}$. Определяя начальное состояние $s_0 = 1$, получим асинхронную систему $(\Sigma_{\mathfrak{L}}, 1)$. Поскольку все ее состояния достижимы, то ее группы гомологий будут равны $H_n(\Sigma_{\mathfrak{L}}, \Delta\mathbb{Z})$.

**Теорема 6.** *Для произвольного префиксно замкнутого языка трасс* $\mathfrak{L}$ *имеют место изоморфизмы* $H_n(P(E,I), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) \cong H_n(\Sigma_{\mathfrak{L}}, \mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$.

Доказательство. Группы $H_n(\Sigma_{\mathfrak{L}}, \mathbb{Z}[\mathfrak{L}])$ равны группам гомологий комплекса, состоящего из свободных абелевых групп

$$C_n(\Sigma_{\mathfrak{L}}, \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) = \bigoplus_{\mathfrak{L} \ni w_0 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_n} w_n} \mathbb{Z},$$

порожденных последовательностями морфизмов $w_0 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_n} w_n$, $w_0 \in \mathfrak{L}$. Рассмотрим гомоморфизмы $C_n(\Sigma_{\mathfrak{L}}, \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) \to L\{(w_0, \cdots, w_n) | w_0 \leqslant \cdots \leqslant w_n), w_0 \in \mathfrak{L}\}$, сопоставляющие образующим $w_0 \xrightarrow{\mu_1} \cdots \xrightarrow{\mu_n} w_n$ образующие $w_0 \leqslant \cdots \leqslant w_n$. Поскольку $M(E,I)$ – моноид с сокращениями, то это соответствие будет биекцией и перестановочно с дифферинциалами. Оно определяет изоморфизм комплексов, а вместе с ним – изоморфизм групп гомологий этих комплексов. □

Как мы заметили выше, для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$, $n \geqslant 0$, существует множество с отношением независимости $(E,I)$, для которых $\widetilde{H}_n(E, \mathfrak{M}_I) \cong A_n$ при $n \geqslant 0$. Отсюда вытекает

**Следствие 13.** *Для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп* $A_n$, $n \geqslant 1$, *в которых* $A_1$ *свободна, существует такой моноид трасс* $M(E,I)$, *что для языка* $\mathfrak{L} = \{1\}$ *имеют место изоморфизмы* $H_n(P(E,I), \mathbb{Z}[\mathfrak{L}]) \cong A_n$, *для всех* $n \geqslant 1$.

Доказательство. Рассмотрим моноид $M(E,I)$ и $\mathfrak{L}=\{1\}$. Используя кубические гомологии, с помощью предложения 7 получаем изоморфизм при $n\geqslant 2$ групп $H_n(P(E,I), \mathbb{Z}[\{1\}])$ группам гомологий $H_{n-1}(E,\mathfrak{M})$ симплициальной схемы, состоящей из клик графа $(E,I)$. □

Из теоремы 6 и следствия 13 получаем

**Следствие 14.** *Для любой конечной последовательности конечно-порожденных абелевых групп $A_n$, $n\geqslant 0$, в которых $A_0$ свободна, существует такой моноид трасс $M(E,I)$, что $\widetilde{H}_n(P(E,I)\setminus\{1\})\cong A_n$, для всех $n\geqslant 0$.*

## 7. Заключение

Дополняя множество состояний асинхронной системы бесконечно удаленной точкой и множеством точек, соответствующих промежуточным состояниям, мы получили некоторое топологическое пространство. Для вычисления его целочисленных гомологий нами построен алгоритм. Мы выяснили, что группы гомологий $\varinjlim_n \Delta^0\,\mathbb{Z}$ аугментированной категории состояний с коэффициентами в диаграмме изоморфны группам гомологий Губо полукубического множества, соответстующего пространству состояний. Мы убедились в том, что группы гомологий асинхронных систем, сетей Петри и языков трасс могут быть достаточно сложными. Тем не менее они поддаются вычислению. Это дает шанс изучать условия разложимости и решать проблемы классификации рассмотренных математических моделей параллельных систем.

## Список литературы


[1] M. W. Shields, *Concurrent machines*, The Computer Journal, **28** (1985), 449–465. MR0824359

[2] M. A. Bednarczyk, *Categories of Asynchronous Systems*, Ph.D. Thesis, University of Sussex, 1988; http://www.ipipan.gda.pl/~marek

[3] M. Nielsen, G. Rozenberg, P. S. Thiagarajan, *Behavioural notions for elementary net systems*, Distributed Computing, **4**:1 (1990), 45–57. MR1097249

[4] R.J. van Glabbeek, *On the Expressiveness of higher dimensional automata*, Theoretical Computer Sci., **356**:3 (2006), 265–290. MR2223695

[5] E. Goubault, S. Mimram, *Formal Relationships Between Geometrical and Classical Models for Concurrency*, New York, 2010, 20 p., (Preprint, Cornell Univ.); http://arxiv.org/abs/1004.2818

[6] А. А. Хусаинов, В.В. Ткаченко, *Группы гомологий асинхронных систем переходов*, Математическое моделирование и смежные вопросы математики, Сб. науч. трудов, изд-во ХГПУ, Хабаровск, 2003, 23–33.

[7] A. A. Husainov, *On the homology of small categories and asynchronous transition systems*, Homology Homotopy Appl., **6**:1 (2004), 439–471; http://www.rmi.acnet.ge/hha MR2118495

[8] E. Goubault, *The Geometry of Concurrency*, Ph.D. Thesis, Ecole Normale Supérieure, 1995; http://www.dmi.ens.fr/~goubault

[9] P. Gaucher, *About the globular homology of higher dimensional automata*, Cah. Topol. Geom. Differ., **43**:2, 2002, 107–156. MR1913102

[10] А. А. Хусаинов, В. Е. Лопаткин, И. А. Трещев, *Исследование математической модели параллельных вычислительных процессов методами алгебраической топологии*, Сиб. журн. индустр. матем., **11**:1 (2008), 141–152. MR2535256

[11] Л. Ю. Полякова, *Резольвенты для свободных частично коммутативных моноидов*, Сиб. мат. журн., **48**:6 (2007), 1295–1304. MR2397511

[12] A. Mazurkiewicz, *Trace theory*, Advances in Petri Nets 1986, Lecture Notes in Computer Science, **255**, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 278–324. MR0902669

[13] А. А. Хусаинов, *О группах гомологий полукубических множеств*, Сиб. мат. журн., **49**:1 (2008), 224–237. MR2400584

[14] T. Kaczynski, K. Mischaikov, M. Mrozek, *Computational homology*, Homology Homotopy Appl., **5**:2 (2003), 233–256. MR1994945
[15] T. Kaczynski, K. Mischaikov, M. Mrozek, *Computational homology*, Appl. Math. Sci. **157**, Springer-Verlag, New York, 2004. MR2028588
[16] U. Fahrenberg, *A Category of Higher-Dimensional Automata*, Foundations of software science and computational structures, Lecture Notes in Computer Science, **3441**, Springer-Verlag, Berlin, 2005, 187–201. MR2179116
[17] П. Габриель, М. Цисман, *Категории частных и теория гомотопий*, Мир, Москва, 1971. MR0353301
[18] D. Quillen, *Higher Algebraic K-Theory: I*, Higher K-Theories, Lecture Notes in Math., **341**, Springer-Verlag, Berlin, 1973, 85–147. MR0338129
[19] С. Маклейн, *Категории для работающего математика*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2004.
[20] U. Oberst, "Homology of categories and exactness of direct limits", *Math. Z.*, **107** (1968), 87–115. MR244347
[21] A. A. Husainov, *On the Leech dimension of a free partially commutative monoid*, Tbilisi Math. J., **1**:1 (2008), 71–87; http://ncst.org.ge/Journals/TMJ/index.html MR2480122
[22] А. А. Хусаинов, *Кубические гомологии и размерность Лича свободных частично коммутативных моноидов*, Матем. сб., **199**:12 (2008), 129–154. Zbl 1160.18006
[23] V. Diekert, Y. Métivier, *Partial Commutation and Traces*, Handbook of formal languages, **3**, Springer-Verlag, New York, 1997, 457–533. MR1470025
[24] V. Lopatkin, *The Torsion of Homology Groups of M(E,I)-sets*, New York, 2008. 5 p. (Preprint, Cornell Univ.); http://arxiv.org/abs/0811.3722
[25] В.Е. Лопаткин, *Исследование математических моделей параллельных вычислительных систем методами алгебраической топологии*, Диссертация на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук., Комсомольск-на-Амуре: Комсомольский-на-Амуре гос. техн. университет, 2010.
[26] Э. Спеньер, *Алгебраическая топология*, Мир, Москва, 1971.
[27] Дж. Питерсон, *Теория сетей Петри и моделирование систем*, Мир, Москва, 1984.
[28] G. Winskel, *Petri nets, algebras, morphisms and compositionality*, Information Computation, **72**:3 (1987), 197–238. MR0878462

Ахмет Аксанович Хусаинов
Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
пр. Ленина 27,
681013, Комсомольск-на-Амуре, Россия
*E-mail address*: husainov51@yandex.ru