S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 185–189 (2012) УДК 512.5
MSC 13A99

О ЦЕНТРАЛИЗАТОРАХ АВТОМОРФИЗМОВ БЕРНСАЙДОВОЙ ГРУППЫ $B_0(2,5)$

К.А. ФИЛИППОВ

Abstract. Suppose $B_0(2,5)$ is a group of exponent 5 having two generators and maximal possible order. We prove that $Aut(G)$ acts fixed points freely on every factor of upper central series of the group G.

Keywords: Burnside problem.

1. Введение

Свободной бернсайдовой группой периода n с m образующими называется группа $B(m,n) = F_m/F_m^n$, где F_m — свободная группа ранга m и F_m^n — ее подгруппа, порожденная всеми n-ми степенями элементов из F_m. Проблема Бернсайда для пары (m,n) звучит так: является ли группа $B(m,n)$ конечной? П.С. Новиков и С.И. Адян в [1] показали, что ответ отрицательный, если $m \geq 2$ и $663 < n$ — достаточно большое нечетное число, так же С.В. Иванов [7] и И.Г. Лысёнок [4] показали, что $B(m,n)$ бесконечна, если $n \geq 2^{48}$ и n делится на 2^9 и $n = 16k \geq 8000$. Однако для небольших нечётных n ($5 \leq n \leq 663$) и чётных n, не удовлетворяющих условиям С.В. Иванова и И.Г. Лысёнка, проблема Бернсайда остается нерешённой.

Пусть $B_0(m,n) = F_m/U(m,n)$, где $U(m,n)$ — пересечение всех нормальных подгрупп $N \leq F_m$, для которых F_m/N – конечная группа периода n. А.И. Кострикин показал, что $B_0(m,n)$ конечна, если n – простое число [3]. Е.И. Зельманов обобщил эту теорему А.И. Кострикина на случай, когда n — степень простого числа [2]. Отсюда и из результатов Ф. Холла и Г. Хигмэна с использованием классификации конечных простых групп вытекает существование $B_0(m,n)$ для произвольных m и n [6].

K.A. Philippov On centralizers of automorphisms of Burnside groups $B_0(2,5)$.

Работа поддержана РФФИ (проект 10-01-00509-а).

Поступила 12 января 2012 г., опубликована 6 марта 2012 г.

Поскольку $B(2,5)$ является "наименьшей" из Бернсайдовых групп, для которых не решён вопрос об их конечности, любые сведения о ней и, в частности, о $B_0(2,5)$ интересны. А.И. Кострикин установил границы для порядка группы $B_0(2,5)$: $5^{31} \leq \mid B_0(2,5) \mid \leq 5^{34}$ [3]. В 1974 г. Хавас, Уолл и Уэмсли в [5] при помощи компьютерных вычислений нашли определяющие соотношения, определили точный порядок группы $B_0(2,5)$, который равен 5^{34}, и ступень нильпотентности данной группы, равную 12.

В данной работе изучаются неподвижные точки автоморфизмов группы $B_0(2,5)$ – наибольшей конечной факторгруппы Бернсайдовой группы $B(2,5)$, т.е. свободной группы периода 5 с двумя образующими.

Пусть далее $G = B_0(2,5)$. Доказан следующий результат.

Теорема 1. *$A = AutG$ действует без нетривиальных неподвижных точек на каждом факторе верхнего центрального ряда группы G.*

2. Предварительные сведения

Пусть $I = \{\varphi \in A | x^\varphi \in \Phi(G)x\}$ – группа автоморфизмов G, действующих тривиально на фактор-группе группы G по её подгруппе Фраттини $\Phi(G)$.

Если x, y – образующие группы G, то следующие отображения:

$$\varphi_1 : \begin{cases} x \to x^{-1} \\ y \to y, \end{cases} \quad \varphi_2 : \begin{cases} x \to x^{-1} \\ y \to x^{-1}y, \end{cases} \quad \varphi_3 : \begin{cases} x \to y^3 \\ y \to x, \end{cases}$$

очевидно, продолжаются до автоморфизмов группы G, которые мы обозначаем через φ_1, φ_2, φ_3 соответственно.

Лемма 1. *$A = \langle I, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ и $A/I \simeq GL(2,5)$.*

Доказательство. Очевидно, A/I изоморфна подгруппе $GL(2,5)$. Так как линейные преобразования двумерного пространства $G/\Phi(G)$ над полем порядка 5, соответствующие автоморфизмам φ_1, φ_2, φ_3, порождают $GL(2,5)$, то лемма верна. □

3. Доказательство основных результатов

Пусть $C_i = C_G(\varphi_i)$ – группа неподвижных точек (централизатор) автоморфизма φ_i в G, $i = 1,2,3$.

Предложение 1. $C_1 \cap C_2 \cap C_3 = 1$.

Доказательство. 1) Как и в [5] будем представлять элементы $B_0(2,5)$ в виде нормальных коммутаторных слов. В качестве первых двух коммутаторов возьмем образующие группы $B_0(2,5)$, которые обозначим 1 и 2, а последующие с 3-го по 34-ый коммутаторы вычисляются рекурсивно через 1 и 2 [5].

В этом случае каждый элемент $g \in B_0(2,5)$ однозначно представляется упорядоченным произведением базисных коммутаторов в определенных степенях

$$g = 1^{\alpha_1} 2^{\alpha_2} \dots 34^{\alpha_{34}},$$

где $\alpha_i \in \{0,1,2,3,4\}$ $(i = 1,2,\dots,34)$. Иногда для краткости мы будем писать $g = (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{34})$.

Для доказательства теоремы необходимо найти в группе $B_0(2,5)$ все такие элементы g, что

(1) $$\varphi_1(g) = \varphi_2(g) = \varphi_3(g) = g.$$

При помощи компьютерных вычислений, используя список соотношений для базисных коммутаторов из [5], был вычислен результат действия φ_i на каждый базисный коммутатор.

$$
\begin{gathered}
\varphi_1(1) = (4000000000000000000000000000000000)\\
\varphi_1(2) = (0100000000000000000000000000000000)\\
\varphi_1(3) = (0041040020013044224221322230213203)\\
\varphi_1(4) = (0001030020413032220001241120320220)\\
\varphi_1(5) = (0000401040100000340043021220124204)\\
\varphi_1(6) = (0000040000200041004330003140113042)\\
\varphi_1(7) = (0000001030300000340203001240334120)\\
\varphi_1(8) = (0000000402002243230243433312303241)\\
\varphi_1(9) = (0000000040300000000210014020340223)\\
\varphi_1(10) = (0000000001002001031340402021223322)\\
\varphi_1(11) = (0000000000100000000000034000230403)\\
\varphi_1(12) = (0000000000040021002440014030344123),\\
\varphi_1(13) = (0000000000004004000020424000334030)\\
\varphi_1(14) = (0000000000000100200443002120002300)\\
\varphi_1(15) = (0000000000000010002000111000320410)\\
\varphi_1(16) = (0000000000000001000000003000300211)\\
\varphi_1(17) = (0000000000000000400110001320331133)\\
\varphi_1(18) = (0000000000000000040310030020210413)\\
\varphi_1(19) = (0000000000000000004000400000400304)\\
\varphi_1(20) = (0000000000000000000100034000230431)\\
\varphi_1(21) = (0000000000000000000010023000030104)\\
\varphi_1(22) = (0000000000000000000004000440003132)\\
\varphi_1(23) = (0000000000000000000000100000000000)\\
\varphi_1(24) = (0000000000000000000000040000300202)\\
\varphi_1(25) = (0000000000000000000000004000300200)\\
\varphi_1(26) = (0000000000000000000000000100000044)\\
\varphi_1(27) = (0000000000000000000000000010000044)\\
\varphi_1(28) = (0000000000000000000000000004001043)\\
\varphi_1(29) = (0000000000000000000000000000100000)\\
\varphi_1(30) = (0000000000000000000000000000040101)\\
\varphi_1(31) = (0000000000000000000000000000001033)\\
\varphi_1(32) = (0000000000000000000000000000000100)\\
\varphi_1(33) = (0000000000000000000000000000000043)\\
\varphi_1(34) = (0000000000000000000000000000000001)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_2(1) = (4000000000000000000000000000000000)\\
\varphi_2(2) = (4100000000000000000000000000000000)\\
\varphi_2(3) = (0041040020013044224221322230213203)\\
\varphi_2(4) = (0001030020413032220001241120320220)\\
\varphi_2(5) = (0001432021340144121311340241330401)\\
\varphi_2(6) = (0000040000200041004330003140113042)\\
\varphi_2(7) = (0000041020004022330423031440001020)\\
\varphi_2(8) = (0000042402022342200204240022443440)\\
\varphi_2(9) = (0000000040200004000220203220031132)\\
\varphi_2(10) = (0000000031002034020330201431132110)\\
\varphi_2(11) = (0000000001000000000000033000430102)\\
\varphi_2(12) = (0000000001400210020000043200223110)\\
\varphi_2(13) = (0000000000204004002030324000124011)\\
\varphi_2(14) = (0000000000234133100022302230313411)\\
\varphi_2(15) = (0000000000000010002000100000000232)\\
\varphi_2(16) = (0000000000000001000000302000100113)\\
\varphi_2(17) = (0000000000000030403110344130413230)\\
\varphi_2(18) = (0000000000000021040410012030240331)\\
\varphi_2(19) = (0000000000000000004000400000000002)\\
\varphi_2(20) = (0000000000000000002100034000320201)\\
\varphi_2(21) = (0000000000000000003010213000320400)\\
\varphi_2(22) = (0000000000000000003244222230333323)\\
\varphi_2(23) = (0000000000000000000000100000000000)\\
\varphi_2(24) = (0000000000000000000000340000300300)\\
\varphi_2(25) = (0000000000000000000000204000400300)\\
\varphi_2(26) = (0000000000000000000000203100310120)\\
\varphi_2(27) = (0000000000000000000000231010010133)\\
\varphi_2(28) = (0000000000000000000000230124440241)\\
\varphi_2(29) = (0000000000000000000000000000100000)\\
\varphi_2(30) = (0000000000000000000000000000240002)\\
\varphi_2(31) = (0000000000000000000000000000231323)\\
\varphi_2(32) = (0000000000000000000000000000000100)\\
\varphi_2(33) = (0000000000000000000000000000000244)\\
\varphi_2(34) = (0000000000000000000000000000000001)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\varphi_3(1) = (0300000000000000000000000000000000)\\
\varphi_3(2) = (1000000000000000000000000000000000)\\
\varphi_3(3) = (0020200401004040404213414410212221)\\
\varphi_3(4) = (0000100202003230103133311001330341)\\
\varphi_3(5) = (0002002034100002041403042414010333)
\end{gathered}
$$

$$\varphi_3(6) = (0000000300000000240444011340323044)$$
$$\varphi_3(7) = (0000001020442400323200044311030420)$$
$$\varphi_3(8) = (0000020020304000001040203030414040)$$
$$\varphi_3(9) = (0000000001041232011002211314041111)$$
$$\varphi_3(10) = (0000000030312001300011300311314000)$$
$$\varphi_3(11) = (0000000000000300240414021412044234)$$
$$\varphi_3(12) = (0000000000001041023010100020114423)$$
$$\varphi_3(13) = (0000000000040013041420013043003032)$$
$$\varphi_3(14) = (0000000000300012000300001010311400)$$
$$\varphi_3(15) = (0000000000000000300013010201121134)$$
$$\varphi_3(16) = (0000000000000000440212040002203314)$$
$$\varphi_3(17) = (0000000000000040001040142000143034)$$
$$\varphi_3(18) = (0000000000000013001410003010433114)$$
$$\varphi_3(19) = (0000000000000000000001000043042130)$$
$$\varphi_3(20) = (0000000000000000000340010120120242)$$
$$\varphi_3(21) = (0000000000000000000320044440422232)$$
$$\varphi_3(22) = (0000000000000000001000141000010332)$$
$$\varphi_3(23) = (0000000000000000000000000003000043)$$
$$\varphi_3(24) = (0000000000000000000000000120010202)$$
$$\varphi_3(25) = (0000000000000000000000000020002241)$$
$$\varphi_3(26) = (0000000000000000000000032000440202)$$
$$\varphi_3(27) = (0000000000000000000000004000000123)$$
$$\varphi_3(28) = (0000000000000000000000100000400103)$$
$$\varphi_3(29) = (0000000000000000000000000000002042)$$
$$\varphi_3(30) = (0000000000000000000000000000030303)$$
$$\varphi_3(31) = (0000000000000000000000000000200003)$$
$$\varphi_3(32) = (0000000000000000000000000000000030)$$
$$\varphi_3(33) = (0000000000000000000000000000000404)$$
$$\varphi_3(34) = (0000000000000000000000000000000004)$$

Так как φ_i — автоморфизмы, то

$$\varphi_i(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\dots 34^{\alpha_{34}}) = \varphi_i(1^{\alpha_1}\dots 10^{\alpha_{10}})\varphi_i(11^{\alpha_{11}}\dots 34^{\alpha_{34}}). \tag{2}$$

В [5] показано, что коммутаторы с 11-го по 34-й перестановочны и порождают в $B_0(2,5)$ характеристическую нормальную абелеву подгруппу, поэтому

$$\varphi_i(11^{\alpha_{11}}12^{\alpha_{12}}\dots 34^{\alpha_{34}}) = 11^{\gamma_{11}}12^{\gamma_{12}}\dots 34^{\gamma_{34}}. \tag{3}$$

Беря во внимание (2) и (3), для всех i найдем такие элементы $v_{ki} = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\dots$ $\dots 10^{\alpha_{10}}$, что $\varphi_i(v_{ki}) = \varphi(1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\dots 10^{\alpha_{10}}) = 1^{\alpha_1}2^{\alpha_2}\dots 10^{\alpha_{10}}b_{ki}$, где $b_{ki} = 11^{\beta_{11}}12^{\beta_{12}}\dots 34^{\beta_{34}}$.

В результате полного перебора, используя компьютерные вычисления, было получено, что всего один элемент $1^0 2^0 \dots 10^0$ удовлетворяет указанному условию.

Ввиду того, что коммутаторы с 11 по 34 перестановочны, нахождение степеней $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{34}$, удовлетворяющих условию (1), сводится к решению системы линейных уравнений над полем $GF(5)$ следующего вида:

$$\begin{cases} A_1\vec{\alpha} = \vec{\alpha}, \\ A_2\vec{\alpha} = \vec{\alpha}, \\ A_3\vec{\alpha} = \vec{\alpha}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь, $\vec{\alpha} = (\alpha_{11}\dots\alpha_{34})^T$ – вектор неизвестных значений степеней коммутаторов с 11-го по 34-й. A_i — матрица размера 24×24, каждый элемент a_{pq} которой вычисляется как $a_{pq} = \beta_{(p+10)}$, т.е. является степенью коммутатора $(p+10)$ под действием автоморфизма φ_i на коммутатор $(q+10)$: $\varphi_i(q+10) = \dots(p+10)^{\beta_{(p+10)}}\dots$ $(p, q = 1, 2, \dots, 24)$. Другими словами, если $w = 11^{\alpha_{11}}\dots 34^{\alpha_{34}}$ и $\varphi_i(w) = 11^{\gamma_{11}}\dots 34^{\gamma_{34}}$, то в векторном виде это можно записать как $A_i\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$, где $\vec{\alpha} = (\alpha_{11}\dots\alpha_{34})^T$ и $\vec{\gamma} = (\gamma_{11}\dots\gamma_{34})^T$.

Перепишем систему (4) в виде:

$$\begin{cases}(A_1-E)\vec{\alpha}=\vec{0},\\(A_2-E)\vec{\alpha}=\vec{0},\\(A_3-E)\vec{\alpha}=\vec{0},\end{cases}\tag{5a}$$

или

$$\begin{pmatrix}A_1-E\\A_2-E\\A_3-E\end{pmatrix}\vec{\alpha}=\vec{0},\tag{5b}$$

где E – единичная матрица соответствующего размера, $\vec{0}$ – нулевой вектор.

Исследуем систему (5) на совместность. При помощи компьютерных вычислений получим, что ранг матрицы системы (5) равен 24. Следовательно, система имеет единственное тривиальное решение.

Таким образом, только элемент $\underbrace{(00\dots0)}_{34}=e$ удовлетворяет условию (1). Предложение доказано. □

Таким же образом показывается, что группа $\langle\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\rangle$ действует без неподвижных точек на каждом факторе $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ центрального ряда группы G. Это доказывает теорему.

Список литературы

[1] С.И. Адян, *Проблема Бернсайда и тождества в группах*, Наука, Москва, 1975. MR0432770

[2] Е.И. Зельманов, *Решение ослабленной проблемы бернсайда для* 2*-групп*, Матем. сб., **182** (1991), №4, 568–592. MR1119009

[3] А.И. Кострикин, *Решение ослабленной проблемы Бернсайда для показателя* 5, Изв. АН. СССР. Сер. матем., **19** (1955), №3, 233–244.

[4] И.Г. Лысёнок, *Бесконечные бернсайдовы группы четного периода*, Изв. РАН. Сер. матем., **60** (1996), №3, 3–224. MR1405529

[5] G. Havas, G. Wall, J. Wamsley, *The two generator restricted Burnside group of exponent five*, Bull. Austral. Math. Soc., **10** (1974), 459–470. MR0367056

[6] P. Hall, G. Higman, *On the p-length of p-soluble groups and reductions theorems for Burnside problem*, Proc. London Math. Soc., **6** (1956), №3, 1–42. MR0072872

[7] S.V. Ivanov, *The free Burnside groups of sufficiently large exponents*, Int. J. of Algebra and Computation, **4** (1994), 1–308. MR1283947

Константин Анатольевич Филиппов
Красноярский государственный аграрный университет,
пр. Мира 90,
660049, Красноярск, Россия
E-mail address: filippov_kostya@mail.ru