S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 201–207 (2012) УДК 512.56
MSC 08C15, 20N02

МИНИМАЛЬНЫЕ КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ГРУППОИДОВ С НЕНУЛЕВЫМ УМНОЖЕНИЕМ

А. В. КРАВЧЕНКО

Abstract. We describe all covers of the variety of left zero modes in the lattice of quasivarieties of differential groupoids.

Keywords: differential groupoid, quasivariety, lattice of quasivarieties.

Дифференциальным группоидом называется алгебра с одной бинарной операцией, удовлетворяющая тождествам

(I) $\forall x\,[x \cdot x = x]$,
(E) $\forall x\,\forall y\,\forall z\,\forall t\,[(x \cdot y) \cdot (z \cdot t) = (x \cdot z) \cdot (y \cdot t)]$,
(D) $\forall x\,\forall y\,[x \cdot (x \cdot y) = x]$.

Пусть $\mathbf{Dm}$ обозначает многообразие всех дифференциальных группоидов. Введем сокращения: $x_1x_2\ldots x_n$ для $(\ldots(x_1 \cdot x_2) \cdot \ldots) \cdot x_n$ и xy^n для $x\underbrace{y\ldots y}_{n}$.

Пусть $\mathbf{D}_{i,n}$ обозначает многообразие дифференциальных группоидов, определенное дополнительным тождеством $\forall x\,\forall y\,[xy^{i+n} = xy^i]$.

В работе [7] дано явное описание решетки $\mathrm{L_v}(\mathbf{Dm})$ многообразий дифференциальных группоидов (см. также [9, Теорема 8.4.14]).

Предложение 1. *Собственные подмногообразия* $\mathbf{Dm}$ *образуют решетку, изоморфную прямому произведению* $\mathbb{N}_c \times \mathbb{N}_d$*, где* $\mathbb{N}_c$ *обозначает решетку натуральных чисел с обычным порядком, а* $\mathbb{N}_d$ *— решетку положительных целых чисел с порядком относительно делимости. Паре* (i,n)*, где* $i \geqslant 0$ *и* $n > 0$*, соответствует многообразие* $\mathbf{D}_{i,n}$.

Kravchenko, A. V., Minimal quasivarieties of differential groupoids with nonzero multiplication.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Й. Мяновского и Совета Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (грант НШ-4787.2006.1).

Поступила 13 февраля 2012 г., опубликована 22 марта 2012 г.

Строение решетки квазимногообразий $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$ гораздо более сложное. Как установлено в [4], эта решетка $\mathcal{Q}$-универсальная, т. е. имеет максимальную сложность среди решеток квазимногообразий алгебраических систем конечной сигнатуры. В [2] показано, что $\mathcal{Q}$-универсальной является решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{2,1})$. В [3] установлено, что для любого собственного подмногообразия $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Dm}$, кроме $\mathbf{D}_{0,1}$ и $\mathbf{D}_{1,1}$, решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{K})$ имеет мощность 2^ω.

Из предложения 1 следует, что наименьшим собственным многообразием дифференциальных группоидов является многообразие $\mathbf{D}_{0,1}$, определенное в $\mathbf{Dm}$ тождеством $\forall x \, \forall y \, [xy = x]$. Такие группоиды называются *группоидами с нулевым (левым) умножением* или **Lz**-*модами.* Покрытиями этого многообразия в решетке многообразий $\mathrm{L_v}(\mathbf{Dm})$ являются многообразия $\mathbf{D}_{1,1}$ и $\mathbf{D}_{0,p}$, где p — простое число (см. предложение 1).

В данной работе мы опишем покрытия многообразия $\mathbf{D}_{0,1}$ группоидов с нулевым умножением в решетке квазимногообразий $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$. В силу [4] одним из них является многообразие $\mathbf{D}_{1,1}$. Мы также установим, что для многих многообразий дифференциальных группоидов решетка подквазимногообразий не является модулярной.

1. Вспомогательные определения и утверждения

Для наших целей удобным оказывается следующее представление дифференциальных группоидов.

Группоид $\mathcal{G}$ называется **Lz**-**Lz**-*суммой* (орбит $\mathcal{G}_i$ над группоидом $\mathcal{I}$), *удовлетворяющей левому нормальному закону*, если существует разбиение $G = \bigcup_{i\in I} G_i$ такое, что для каждой пары $(i,j) \in I^2$ существует отображение $h_i^j : G_i \to G_i$ и выполняются следующие условия:

(i) h_i^i — тождественное отображение для каждого $i \in I$,

(ii) $h_i^j(h_i^k(x)) = h_i^k(h_i^j(x))$ для всех $i,j,k \in I$ и $x \in G_i$,

(iii) $a_i \cdot a_j = h_i^j(a_i)$ для всех $i,j \in I$, $a_i \in G_i$ и $a_j \in G_j$.

Согласно теореме 2.2 работы [7], группоид является дифференциальным тогда и только тогда, когда он представим в виде **Lz**-**Lz**-суммы, удовлетворяющей левому нормальному закону (см. также [5, 6, 8]). Более детальную информацию о дифференциальных группоидах и модах можно найти в монографии [9]

Пусть $\overline{x}$ — кортеж переменных, а t_i и s_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, — термы с переменными из $\overline{x}$. Предложения вида

$$\forall \overline{x} \, [t_0(\overline{x}) = s_0(\overline{x})]$$

называются *тождествами*, а предложения вида

$$\forall \overline{x} \, [t_1(\overline{x}) = s_1(\overline{x}) \,\&\, \ldots \,\&\, t_n(\overline{x}) = s_n(\overline{x}) \to t_0(\overline{x}) = s_0(\overline{x})]$$

называются *квазитождествами.* Класс моделей множества тождеств называется *многообразием*, а класс моделей множества квазитождеств — *квазимногообразием.* Под *квазимногообразием, порожденным классом* $\mathbf{K}$, будем понимать наименьшее квазимногообразие, содержащее $\mathbf{K}$.

Дифференциальный группоид $\mathcal{G}$ *аппроксимируется* семейством $\{\mathcal{G}_i : i \in I\}$ дифференциальных группоидов, если для любых $x, y \in G$ таких, что $x \neq y$, существуют $i \in I$ и гомоморфизм $f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_i$ такие, что $f(x) \neq f(y)$. Хорошо известно (см., например, [1]), что группоид, аппроксимируемый семейством группоидов $\mathbf{K}$, принадлежит квазимногообразию, порожденному $\mathbf{K}$. С помощью этого факта мы будем проверять принадлежность группоидов квазимногообразиям. Более детальную информацию о квазимногообразиях алгебраических систем можно найти в монографии [1].

2. Покрытия многообразия группоидов с нулевым умножением

Рассмотрим вопрос о строении минимальных квазимногообразий с ненулевым умножением, т. е. опишем покрытия многообразия $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке квазимногообразий $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$.

В силу предложения 1 в решетке многообразий $\mathrm{L_v}(\mathbf{Dm})$ покрытиями $\mathbf{D}_{0,1}$ являются $\mathbf{D}_{1,1}$ и $\mathbf{D}_{0,p}$, где p — простое число. Из [4] следует, что $\mathbf{D}_{1,1}$ также является покрытием $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$. Из [3] следует, что ни одно многообразие вида $\mathbf{D}_{0,p}$ не является покрытием $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$. Более того, интервал $[\mathbf{D}_{0,1}, \mathbf{D}_{0,p}]$ этой решетки содержит 2^ω элементов. Мы покажем, что список покрытий $\mathbf{D}_{0,1}$ в $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$ не ограничивается $\mathbf{D}_{1,1}$ и подквазимногообразиями многообразий вида $\mathbf{D}_{0,p}$.

Нам потребуется следующая модификация конструкции из [3].

Пусть $\mathcal{C}_{k,l}$, где $l \geqslant k \geqslant 1$, обозначает **Lz**-**Lz**-сумму (непересекающихся) орбит $A = \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ и $B = \{b_0, \dots, b_{l-1}\}$, где $a_i b_j = a_n$, $n \equiv i + 1 \pmod{k}$, и $b_j a_i = b_m$, $m \equiv j + 1 \pmod{l}$.

Пусть $\mathcal{C}_{k,\infty}$, где $k \geqslant 1$, обозначает **Lz**-**Lz**-сумму (непересекающихся) орбит $A = \{a_0, \dots, a_{k-1}\}$ и $B = \{b_j : j < \omega\}$, где $a_i b_j = a_n$, $n \equiv i + 1 \pmod{k}$, и $b_j a_i = b_{j+1}$.

Пусть $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ обозначает **Lz**-**Lz**-сумму (непересекающихся) орбит $A = \{a_i : i < \omega\}$ и $B = \{b_j : j < \omega\}$, где $a_i b_j = a_{i+1}$ и $b_j a_i = b_{j+1}$.

Через $\mathbf{C}_{k,l}$ обозначим квазимногообразие, порожденное дифференциальным группоидом $\mathcal{C}_{k,l}$.

Теорема 1. *Квазимногообразие* $\mathbf{K}$ *дифференциальных группоидов является покрытием* $\mathbf{D}_{0,1}$ *в решетке* $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$ *тогда и только тогда когда выполняется одно из двух условий*

(1) $\mathbf{K} = \mathbf{D}_{1,1}$,
(2) $\mathbf{K} = \mathbf{C}_{k,k}$ *для некоторого* $k \in \{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* $l \in \{2, 3, 4, \dots,\} \cup \{\infty\}$, *то квазимногообразие* $\mathbf{C}_{1,l}$ *не является покрытием* $\mathbf{D}_{0,1}$ *в* $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$.

Доказательство. Пусть φ обозначает квазитождество

$$\forall x \, \forall y \, [yx = y \to xy = x], \tag{1}$$

а $\mathbf{C}_{1,l}^{\varphi}$ — подквазимногообразие квазимногообразия $\mathbf{C}_{1,l}$, определенное квазитождеством φ. Так как $\mathcal{C}_{1,l}$ не удовлетворяет φ, это собственное подквазимногообразие. Группоид $\mathcal{C}_{l,l}$ аппроксимируется копиями $\mathcal{C}_{1,l}$ (достаточно рассмотреть гомоморфизмы, отождествляющие все элементы одной из орбит). Следовательно, $\mathcal{C}_{l,l} \in \mathbf{C}_{1,l}$. Очевидно, $\mathcal{C}_{l,l} \notin \mathbf{D}_{0,1}$. Если $yx = y$ выполняется в $\mathcal{C}_{l,l}$, то x и y принадлежат одной орбите и, следовательно, $xy = x$. Таким образом, $\mathcal{C}_{l,l}$ удовлетворяет (1) и $\mathbf{D}_{0,1} \subsetneq \mathbf{C}_{1,l}^{\varphi} \subsetneq \mathbf{C}_{1,l}$. □

Лемма 2. *Если* $k \in \{2, 3, 4, \dots\} \cup \{\infty\}$, *то* $\mathbf{C}_{k,k}$ *является покрытием* $\mathbf{D}_{0,1}$ *в* $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{G} \in \mathbf{C}_{k,k}$. Если $ab = a$ для всех $a, b \in G$, то $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{0,1}$. Поэтому далее считаем, что существуют $a, b \in G$ такие, что $ab \neq a$.

Если $k = \infty$, то все элементы a, ab, $ab^2 \dots$ различные. Действительно, при любых $0 \leqslant i < j$ группоид $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ удовлетворяет квазитождеству

$$\varphi_{i,j} \leftrightharpoons \forall x\, \forall y\, [xy^i = xy^j \to xy = x]. \tag{2}$$

Так как $\mathcal{G} \in \mathbf{C}_{\infty,\infty}$, группоид $\mathcal{G}$ также удовлетворяет (2).

Если $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$, то все элементы a, ab, $ab^2, \dots, ab^{k-1}$ различные и $ab^k = a$. Действительно, при любых $0 \leqslant i < j < k$ группоид $\mathcal{C}_{k,k}$ удовлетворяет квазитождеству (2). Так как $\mathcal{C}_{k,k} \in \mathbf{D}_{0,k}$, этот группоид также удовлетворяет тождеству $\forall x\, \forall y\, [xy^k = x]$.

Как отмечено при доказательстве леммы 1, группоид $\mathcal{C}_{k,k}$ удовлетворяет квазитождеству (1). Следовательно, группоид $\mathcal{G}$ также удовлетворяет квазитождеству (1). Так как $ab \neq a$, получаем $ba \neq b$. Как и выше, все элементы b, ba, $ba^2, \dots$ или b, ba, $ba^2, \dots, ba^{k-1}$ различные. Следовательно, группоид $\mathcal{C}_{k,k}$ вложим в группоид $\mathcal{G}$ и $\mathcal{G}$ порождает квазимногообразие $\mathbf{C}_{k,k}$.

Таким образом, если $\mathbf{D}_{0,1} \subseteq \mathbf{K} \subseteq \mathbf{C}_{k,k}$, то $\mathbf{D}_{0,1} = \mathbf{K}$ или $\mathbf{K} = \mathbf{C}_{k,k}$, т. е. $\mathbf{C}_{k,k}$ является покрытием $\mathbf{D}_{0,1}$ в $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$. $\square$

Из леммы 2 и [4] следует, что все квазимногообразия, удовлетворяющие условиям теоремы 1, являются покрытиями $\mathbf{D}_{0,1}$ в $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$. В частности, список покрытий $\mathbf{D}_{0,1}$ в $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$ не ограничивается $\mathbf{D}_{1,1}$ и подквазимногообразиями многообразий вида $\mathbf{D}_{0,p}$, так как $\mathbf{C}_{\infty,\infty} \nsubseteq \mathbf{D}_{0,p}$ для любого простого числа p. Остается показать, что других покрытий нет.

Лемма 3. *Пусть* $m > l > 1$ *и пусть* k *— наименьшее общее кратное чисел* m *и* l. *Тогда* $\mathbf{C}_{k,k}$ *— собственное подквазимногообразие* $\mathbf{C}_{l,m}$.

Доказательство. Построим отображения орбит группоида $\mathcal{C}_{k,k}$ в орбиты группоида $\mathcal{C}_{l,m}$ следующим образом:

$$\begin{cases} f_1(a_j) = a_i, & i \equiv j \pmod{l}, \\ f_1(b_j) = b_i, & i \equiv j \pmod{m}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(b_j) = a_i, & i \equiv j \pmod{l}, \\ f_2(a_j) = b_i, & i \equiv j \pmod{m}. \end{cases} \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что f_1 и f_2 — гомоморфизмы из $\mathcal{C}_{k,k}$ на $\mathcal{C}_{l,m}$. Если $f_i(x) = f_i(y)$, при $i \in \{1, 2\}$, то в силу (3) либо $x = a_i$, $y = a_j$, либо $x = b_i$, $y = b_j$, где

$$i \equiv j \pmod{l} \text{ и } i \equiv j \pmod{m}. \tag{4}$$

Так как система сравнений (4) равносильна сравнению $i \equiv j \pmod{k}$, получаем $x = y$. Следовательно, группоид $\mathcal{C}_{k,k}$ аппроксимируется копиями группоида $\mathcal{C}_{l,m}$ и $\mathbf{C}_{k,k} \subseteq \mathbf{C}_{l,m}$.

Если $x = xy^l$ выполняется в $\mathcal{C}_{k,k}$, то x и y принадлежат одной орбите и, следовательно, $xy = x$. Таким образом, квазитождество $\varphi_{0,l}$ (см. (2)) истинно в $\mathcal{C}_{k,k}$, но ложно в $\mathcal{C}_{l,m}$ (при $x = a$ и $y = b$). Следовательно, $\mathcal{C}_{l,m} \notin \mathbf{C}_{k,k}$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Пусть $\mathbf{K}$ обозначает произвольное покрытие $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$.

Рассмотрим произвольный группоид $\mathcal{H} \in \mathbf{K}$ такой, что $\mathcal{H} \notin \mathbf{D}_{0,1}$. Выберем $a, b \in H$ такие, что $ab \neq a$. Рассмотрим подгруппоид $\mathcal{G}$ группоида $\mathcal{H}$, порожденный элементами a и b. Так как $\mathcal{G} \in \mathbf{K} \setminus \mathbf{D}_{0,1}$, группоид $\mathcal{G}$ порождает все квазимногообразие $\mathbf{K}$.

Рассмотрим орбиты порождающих

$$A = \{ab^i : 0 \leqslant i < \omega\} \text{ и } B = \{ba^j : 0 \leqslant j < \omega\}.$$

Пусть множества A и B бесконечные. Тогда $\mathcal{G}$ изоморфен $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{C}_{\infty,\infty}$.

Пусть одно из множеств конечное (например, $ab^k = a$), а другое — бесконечное. Тогда $\mathcal{G}$ изоморфен $\mathcal{C}_{k,\infty}$. Покажем, что $\mathbf{C}_{\infty,\infty} \subsetneq \mathbf{K}$. Построим отображения орбит группоида $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ в орбиты группоида $\mathcal{C}_{k,\infty}$ следующим образом:

$$(5) \qquad \begin{cases} f_1(a_j) = a_i, & i \equiv j \pmod{k}, \\ f_1(b_i) = b_i. \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(b_j) = a_i, & i \equiv j \pmod{k}, \\ f_2(a_i) = b_i. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что f_1 и f_2 — гомоморфизмы из $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ на $\mathcal{C}_{k,\infty}$. Если $f_i(x) = f_i(y)$ при $i \in \{1, 2\}$, то $x = y$ в силу (5). Следовательно, группоид $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$ аппроксимируется копиями группоида $\mathcal{C}_{k,\infty}$ и $\mathbf{C}_{\infty,\infty} \subseteq \mathbf{C}_{k,\infty}$.

Если $x = xy^k$ выполняется в $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$, то x и y принадлежат одной орбите и, следовательно, $xy = x$. Таким образом, квазитождество $\varphi_{0,k}$ (см. (2)) истинно в $\mathcal{C}_{\infty,\infty}$, но ложно в $\mathcal{G}$ (при $x = a$, $y = b$). Следовательно, $\mathbf{C}_{\infty,\infty} \subsetneq \mathbf{C}_{k,\infty}$.

Пусть A и B — конечные множества,

$$A = \{ab^i : 0 \leqslant i \leqslant n\} \text{ и } B = \{ba^j : 0 \leqslant j \leqslant m\}.$$

Будем говорить, что элемент $x \in A$ *периодический*, если $xb^k = x$ для некоторого $k > 0$. Это число k будем называть *периодом* элемента x (и элемента a). *Глубиной* элемента a будем называть наименьшее натуральное число l такое, что ab^l — периодический элемент. Глубина и период элемента b определяются аналогично. Пусть $d(x)$ обозначает глубину элемента x, а $p(x)$ — период элемента x.

Предположим, что $p(a) > 1$ и $p(b) > 1$.

Пусть $k = \min\{p(a), p(b)\}$ и $l = \max\{p(a), p(b)\}$. Подгруппоид $\mathcal{G}'$ группоида $\mathcal{G}$, порожденный элементами $ab^{d(a)}$ and $ba^{d(b)}$, изоморфен $\mathcal{C}_{k,l}$ и не принадлежит $\mathbf{D}_{0,1}$. Следовательно, он порождает все квазимногообразие $\mathbf{K}$. По лемме 3 получаем $k = l$ и $\mathbf{K} = \mathbf{C}_{k,k}$.

Пусть $p(a) = 1$ и $p(b) = l > 1$. Подгруппоид $\mathcal{G}'$ группоида $\mathcal{G}$, порожденный элементами $ab^{d(a)}$ and $ba^{d(b)}$, изоморфен $\mathcal{C}_{1,l}$ и не принадлежит $\mathbf{D}_{0,1}$. Следовательно, он порождает все квазимногообразие $\mathbf{K}$. По лемме 1 получаем противоречие. Таким образом, $p(a) = 1$ тогда и только тогда, когда $p(b) = 1$. Если $d(a) = d(b) = 0$, то $\mathcal{G} \in \mathbf{D}_{0,1}$, противоречие. При $d(a) = 1$ и $d(b) = 0$ группоид $\mathcal{G}$ изоморфен группоиду $\mathcal{G}_1$, порождающему $\mathbf{D}_{1,1}$, см. [4]. В остальных случаях $\mathcal{G}_1$ вложим в $\mathcal{G}$ и $\mathbf{K} = \mathbf{D}_{1,1}$. □

3. Немодулярные решетки квазимногообразий

Используя эти же методы, мы получим дополнительную информацию о сложности решеток квазимногообразий $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{i,n})$.

Как установлено в [2], решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{i,1})$ является $\mathcal{Q}$-универсальной при $i \geqslant 2$, а при $i < 2$ такая решетка изоморфна $(i+2)$-элементной цепи. В [3] показано, что при $n > 1$ решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{i,n})$ «сложная» в том смысле, что ее мощность равна 2^ω. Однако неизвестно, являются ли все такие решетки $\mathcal{Q}$-универсальными или среди них есть удовлетворяющие каким-либо нетривиальным решеточным тождествами (например, тождествам дистрибутивности) и в этом смысле «простые».

Теорема 2. *Если многообразие $\mathbf{D}_{i,n}$ не является покрытием многообразия $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке $\mathrm{L_v}(\mathbf{Dm})$, то решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{i,n})$ немодулярная.*

Доказательство. Из предложения 1 следует, что многообразие $\mathbf{D}_{i,n}$ не является покрытием многообразия $\mathbf{D}_{0,1}$ в решетке $\mathrm{L_v}(\mathbf{Dm})$, если выполняется одно из следующих условий:

(1) $\mathbf{D}_{2,1} \subseteq \mathbf{D}_{i,n}$,
(2) $\mathbf{D}_{1,p} \subseteq \mathbf{D}_{i,n}$,
(3) $\mathbf{D}_{0,pq} \subseteq \mathbf{D}_{i,n}$,
(4) $\mathbf{D}_{0,p^2} \subseteq \mathbf{D}_{i,n}$,

где p и q — различные простые числа. Как отмечено выше, если выполняется первое условие, то доказывать нечего. Для остальных случаев нам потребуется следующее утверждение, см. [1, теорема 5.2.17].

Предложение 2. *Пусть существуют попарно неизоморфные конечные группоиды $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{D}_{i,n}$ такие, что*

(i) *$\mathcal{A}$ аппроксимируется группоидами $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$,*
(ii) *$\mathcal{A}$ не аппроксимируется подгруппоидами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$,*
(iii) *$\mathcal{A}$ не принадлежит квазимногообразию, порожденному $\mathcal{B}$.*

Тогда решетка $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{i,n})$ немодулярная.

Далее $\mathcal{G}_{i,n}$ обозначает группоид, порожденный элементами a и b, такой, что $ba = b$, глубина элемента a равна i, а период элемента a равен n.

Пусть $i = 1$, а p — простое число.

Положим
$$\mathcal{A} = \mathcal{G}_{1,p}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{G}_{1,1}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{1,p}.$$
Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{D}_{1,p}$.

Пусть
$$\begin{cases} f_1(ab^i) = ab, & 1 \leqslant i \leqslant p, \\ f_1(x) = x, & x \in \{a, b\}, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(ab^j) = b_i, & i \equiv j \pmod p, \\ f_2(b) = a_0. \end{cases}$$
Тогда f_1 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, а f_2 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$. Так как $\ker f_1 \cap \ker f_2$ совпадает с отношением равенства, выполняется условие (i).

Если f — эндоморфизм группоида $\mathcal{A}$, отличный от тождественного, то $f(a) = f(ab^p)$. Так как $\mathcal{C}$ является подгруппоидом $\mathcal{A}$, выполняется условие (ii).

Так как группоид $\mathcal{B}$ порождает квазимногообразие $\mathbf{D}_{1,1}$, а группоид $\mathcal{A}$ не удовлетворяет тождеству $\forall x \, \forall y \, [xy^2 = xy]$, выполняется условие (iii).

Пусть $i = 0$, а p и q — различные простые числа.

Положим
$$\mathcal{A} = \mathcal{C}_{pq,pq}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}_{p,p}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{q,q}.$$
Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{D}_{0,pq}$.

Пусть

$$\begin{cases} f_1(a_j) = a_i, & i \equiv j \pmod p, \\ f_1(b_j) = b_i, & i \equiv j \pmod p, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(a_j) = a_i, & i \equiv j \pmod q, \\ f_2(b_j) = b_i, & i \equiv j \pmod q. \end{cases}$$

Тогда f_1 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, а f_2 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$. Так как $\ker f_1 \cap \ker f_2$ совпадает с отношением равенства, выполняется условие (i).

Если f — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$, то $f(a_0) = f(a_q)$. Так как любой собственный подгруппоид группоида $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathbf{D}_{0,1}$, выполняется условие (ii).

Так как $\mathbf{C}_{pq,pq}$ и $\mathbf{C}_{p,p}$ — различные покрытия $\mathbf{D}_{0,1}$ в $\mathrm{L_q}(\mathbf{Dm})$, выполняется условие (iii).

Пусть $i = 0$, а p — простое число.

Положим

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}_{p,p^2}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{C}_{p,p}, \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}_{1,p^2}.$$

Тогда $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathbf{D}_{0,p^2}$.

Пусть

$$\begin{cases} f_1(a_j) = a_j, & \\ f_1(b_j) = b_i, & i \equiv j \pmod p, \end{cases} \qquad \begin{cases} f_2(a_j) = a_0, \\ f_2(b_j) = b_j. \end{cases}$$

Тогда f_1 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{B}$, а f_2 — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ на $\mathcal{C}$. Так как $\ker f_1 \cap \ker f_2$ совпадает с отношением равенства, выполняется условие (i).

Если f — гомоморфизм из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{C}$, то $f(a_0) = f(a_1)$. Так как любой собственный подгруппоид группоида $\mathcal{A}$ принадлежит $\mathbf{D}_{0,1}$, выполняется условие (ii).

Так как $\mathcal{C}_{p,p^2} \notin \mathbf{C}_{p,p}$ по лемме 3, выполняется условие (iii). $\square$

Таким образом, остается естественный вопрос: являются ли решетки $\mathrm{L_q}(\mathbf{D}_{0,p})$, где p — простое число, дистрибутивными?

Список литературы

[1] В. А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий*, Научная книга, Новосибирск, 1999. Zbl 0986.08002

[2] А. В. Кравченко, *Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов*, Мат. труды **12** (2009), 26–39. MR2569647 MR2655018

[3] А. В. Кравченко, *Сложность решеток квазимногообразий для многообразий дифференциальных группоидов*. II, Мат. труды (в печати).

[4] A. V. Kravchenko, *On the lattice of quasivarieties of differential groupoids*, Comment. Math. Univ. Carolin. **49** (2008), 11–17. MR2432816

[5] J. Płonka, *On k-cyclic groupoids*, Math. Japon. **30** (1985), 371–382. MR0803288

[6] A. Romanowska, *On some representations of groupoid modes satisfying the reduction law*, Demonstr. Math. **21** (1988), 943–960. MR0993839

[7] A. Romanowska and B. Roszkowska, *On some groupoid modes*, Demonstr. Math. **20** (1987), 277–290. MR0941422

[8] A. Romanowska and B. Roszkowska, *Representation of n-cyclic groupoids*, Algebra Universalis **26** (1989), 7–15. MR0981422

[9] A. B. Romanowska and J. D. H. Smith, *Modes*, World Scientific, Singapore, 2002. MR1932199

Александр Владимирович Кравченко
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: a.v.kravchenko@mail.ru