S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 208-226 (2012) УДК 517.958:532.5
MSC 35Q35

ПОДМОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С ЛИНЕЙНЫМ ПОЛЕМ СКОРОСТЕЙ

Ю.В. ЮЛМУХАМЕТОВА

Abstract. We consider the gas dynamics equation with an arbitrary state equation. After substitution of solution in the form of the linear field of velocity in equation of gas dynamics, the set of equations is received. Research of its compatibility gives a terminating parity into which the auxiliary matrix enters. This parity allowed to make classification of all submodels by a rank of an auxiliary matrix. All submodels for zero, degenerate and nondegenerate auxiliary matrixes are found. In separate point the case when the density depends only on time is considered. Quite certain submodel is found. It is as a result received quite certain 11 submodels of flow of gas with the linear field of velocity. For each submodel the equation of state is found.

Keywords: gas dynamics, line field of velocity, submodel.

1. Введение

Работа посвящена нахождению решений уравнений газовой динамики в виде линейного поля скоростей. Такие движения сплошной среды изучались G.L. Dirichlet [1] и Б. Риманом [2]. В их работах рассматривались движения с однородной деформацией несжимаемой жидкости. При этом предполагалось, что жидкость движется в силовом поле, обусловленном взаимным притяжением частиц по закону всемирного тяготения Ньютона. В статье Л.В. Овсянникова [3] впервые было показано, что для политропного газа система уравнений газодинамики сводится к системе девяти обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Найдено несколько первых интегралов такой системы. Развитие математической теории этих уравнений получил J.F. Dyson [4]

Yulmukhametova Yu.V., Submodels in gas dynamics with linear field of velocity.

Работа поддержана грантом Правительства РФ № 11.G34.31.0042.

Поступила 23 января 2012 г., опубликована 7 апреля 2012 г.

при изучении динамики вращающегося газового облака. Им были найдены другие первые интегралы системы и выяснено за какие физические законы сохранения они отвечают. Найден интеграл энергии системы при условии, что внутренняя энергия зависит только от времени. Доказано утверждение (лемма Дайсона) о необходимости и достаточности равенства нулю первых интегралов системы для того, чтобы существовали такие системы эйлеровых и лагранжевых координат, в которых матрица перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным диагональная. В работе В.К. Андреева [5] рассматриваются уравнения газовой динамики в лагранжевых переменных. Найдена функция давления при условии, что плотность зависит только от времени. Для изоэнтропических движений найдено соотношение для определения давления. О.И. Богоявленским в [6] доказаны некоторые общие свойства динамики газового эллипсоида с однородной деформацией. А именно, получены оценки скорости роста суммы квадратов полуосей эллипсоида. Результаты, полученные в [3], были использованы И.В. Немчиновым в [7] для описания адиабатического разлета в пустоту трехосного газового эллипсоида. Были приведены результаты численных расчетов, показывающих изменение формы газового облака и характер его разлета во времени. Найдено частное решение для случая движения газа при наличии подогрева. На основании работ [3], [4] С.И. Анисимовым и Ю.И. Лысиковым в [8] решается задача о расширении газового облака в вакуум. Найдены частные решения, описывающие расширение сфероида в отсутствие вращения и вращающегося эллиптического цилиндра. В работе С.И. Анисимова и Н.А. Иногамова [9] исследовано нелинейное развитие возмущений при изэнтропическом сжатии сферической капли под действием приложенного к ее поверхности внешнего давления. Показано, что сферическая форма капли неустойчива. Хабировым С.В. в [10] были найдены все подмодели движения газа с линейным полем скоростей в случае нулевого следа основной матрицы. В работе M. Fujimoto [11] изучались коллапс и осцилляции вращающегося, сжимающегося эллипсоида с плотностью, зависящей только от времени, с учетом гравитации. В этой модели рассмотрено решение в виде линейного поля скоростей. Для случая неадиабатического движения совершенного газа, найдена система семи дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая коллапс остывающего газового эллипсоида с вращением. Построено численное решение такой системы.

В настоящей статье, в отличии от перечисленных, разыскивались решения с линейным полем скоростей уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с произвольным уравнением состояния. Хотя задачи о нахождении решения в эйлеровом и лагранжевом представлениях эквивалентны, но при решении задачи в эйлеровых переменных намечается полная классификация подмоделей по рангу не постоянной вспомогательной матрицы и по видам уравнений состояния.

2. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим уравнения газовой динамики

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + \frac{\nabla p}{\rho} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \quad \frac{dp}{dt} + \rho a^2(p,\rho)\,\mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{2.1}$$

где p – давление, ρ – плотность, $\vec{u}$ – вектор скрости, уравнение состояния (УС) $p = f(\rho, \mathcal{S})$, $a^2 = f_\rho$ – квадрат скорости звука, $\mathcal{S}$ – энтропия, $d/dt = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ –

оператор полного дифференцирования по времени. Решение УГД разыскиваем в виде линейного поля скоростей

$$\vec{u} = A(t)\vec{x} + \vec{u}_0(t), \tag{2.2}$$

где A – матрица, $\vec{u}_0$ – вектор. Задача заключается в нахождении уравнений состояния, для которых УГД имеет решение вида (2.2), в выводе зависимости функции ρ, p от $\vec{x}$ и в получении обыкновенных дифференциальных уравнений для матрицы A и вектора $\vec{u}_0$. Эту систему назовем подмоделью.

После подстановки представления (2.2) в (2.1) находим все производные от функции давления. Условия совместности для функции давления дают переопределенную систему для плотности

$$(\ln\rho)_t + (A\vec{x} + \vec{u}_0)\cdot\nabla\ln\rho + \mathrm{tr}A = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla\rho\otimes\vec{c} + \rho B^T = \rho B + \vec{c}\otimes\nabla\rho, \tag{2.4}$$

$$(B' + BA + A^TB - B\mathrm{tr}A)\vec{x} + \vec{v}' + A^T\vec{v} - \vec{v}\ \mathrm{tr}A + B\vec{u}_0 =$$

$$= \mathrm{tr}A[(\rho a^2)_\rho\nabla\ln\rho - \rho(a^2)_p\,\vec{c}\,], \tag{2.5}$$

где

$$A' + A^2 = B = ||b_{ij}||, \quad \vec{v} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0, \tag{2.6}$$

$\vec{c} = B\vec{x} + \vec{v}$, $\otimes$ – тензорное произведение. Из уравнения (2.4) следует соотношение

$$\nabla\ln\rho\times\vec{c} = -2\vec{\omega}, \tag{2.7}$$

где $-2\vec{\omega} = (b_{23} - b_{32}, b_{31} - b_{13}, b_{12} - b_{21})$. Из (2.7) следует дифференциальное уравнение для плотности

$$\vec{\omega}\cdot\nabla\rho = 0 \tag{2.8}$$

и конечные соотношения

$$S\vec{\omega} = 0, \tag{2.9}$$

$$\vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0, \tag{2.10}$$

где использовано разложение матрицы B на симметричную и антисимметричную части

$$B = S + \Omega, \quad \Omega = -\Omega^T = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 0 & -\omega^1 \\ -\omega^2 & \omega^1 & 0 \end{array} \right\| = E\langle\vec{\omega}\rangle = \|\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3\|,$$

$S = S^T = \|\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{s}_3\|$ – вспомогательная матрица, $\vec{\omega} = (\omega^1, \omega^2, \omega^3)$ – угловая скорость.

Итак, система (2.1) с условием (2.2) эквивалентна переопределенной системе (2.3), (2.5), (2.7), (2.9), (2.10). Классификацию подмоделей будем производить по рангу вспомогательной матрицы S.

В процессе классификации возникают несколько случаев. В каждом из них необходимо рассмотреть подслучаи с плотностью зависящей только от t. Все такие подслучаи объединены в одном рассмотрении.

3. Решения с плотностью зависящей только от времени.

Если $\rho = \rho(t)$, то решения уравнений (2.3), (2.4) и первого уравнения из (2.1) имеют вид

$$\rho = \rho_0 \exp\big(-\int \mathrm{tr}A dt\big), \quad B = B^T = S, \tag{3.1}$$
$$p = -2^{-1}\rho\vec{x}\cdot S\vec{x} - \rho\vec{v}\cdot\vec{x} + p_0(t),$$

где p_0 – некоторая функция, ρ_0 – постоянная. Уравнение для функции давления из (2.1) принимает вид

$$-\vec{x}\cdot(2^{-1}(\rho S)' + \rho SA)\vec{x} - \vec{x}\cdot((\rho\vec{v})' + \rho A^T\vec{v} + \rho S\vec{u}_0) + p_0' - \rho\vec{u}_0\cdot\vec{v} =$$
$$= -\rho\,\mathrm{tr}Aa^2(p,\rho). \tag{3.2}$$

В (3.2) слева стоит полином второй степени по $\vec{x}$, справа – функция $a^2(p,\rho)$, имеющая аргумент второй степени по $\vec{x}$. Значит, $a^2(p,\rho)$ есть линейная функция давления $a^2(p,\rho) \equiv \partial p/\partial\rho = \alpha^{-1}\alpha'(p-\beta)+\beta'$, где $\alpha(\rho)$ и $\beta(\rho)$ – произвольные функции. Уравнение состояния в этом случае таково

$$p = \alpha D(\mathcal{S}) + \beta, \tag{3.3}$$

где D – произвольная функция. После подстановки $a^2(p,\rho)$ в (3.2) коэффициенты при одинаковых степенях $\vec{x}$ приравняем нулю. Получим

ПОДМОДЕЛЬ 1

$$S' + 2SA = (1-\alpha^{-1}\alpha'\rho)S\mathrm{tr}A, \quad A' + A^2 = S,$$
$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = (1-\alpha^{-1}\alpha'\rho)\vec{v}\mathrm{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$
$$p_0' - \rho\vec{u}_0\cdot\vec{v} = -\rho(\alpha^{-1}\alpha'(p_0-\beta)+\beta')\mathrm{tr}A,$$

Плотность и давление задаются уравнением (3.1). Уравнение состояния (3.3).

4. Нулевая угловая скорость.

Уравнение (2.7) эквивалентно соотношениям

$$\frac{\rho_{x^1}}{c_1} = \frac{\rho_{x^2}}{c_2} = \frac{\rho_{x^3}}{c_3}, \tag{4.1}$$

где $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3) = S\vec{x} + \vec{v} \neq 0$, иначе $S = 0$. Этот случай рассмотрен в диссертации [12].

В переопределенной системе (4.1) введем новые независимые переменные x^1, x^2, J, t с помощью интегралов системы (4.1)

$$J = \vec{x}\cdot S\vec{x} + 2\vec{v}\cdot\vec{x}, \quad t,$$

т.е. $\rho = \rho(t, x^1, x^2, J)$. Подстановка представления для ρ в (4.1) дает $\rho_{x^1} = \rho_{x^2} = 0$, следовательно

$$\rho = \rho(t, J). \tag{4.2}$$

Уравнение (2.3) с учетом (4.2) примет вид

$$(\ln\rho)_t + (\ln\rho)_J[\vec{x}\cdot S'\vec{x} + 2\vec{x}\cdot\vec{v}' + 2(A\vec{x}+\vec{u}_0)\cdot(S\vec{x}+\vec{v})] + \mathrm{tr}A = 0. \tag{4.3}$$

Далее считаем, что $\rho_J \neq 0$, иначе получим случай п. 3. При этом условии уравнение (4.3) перепишем в виде

$$\vec{x}\cdot(S' + 2SA)\vec{x} + 2\vec{x}\cdot(\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0) + 2\vec{u}_0\cdot\vec{v} =$$
$$= -(\mathrm{tr}A + (\ln\rho)_t)(\ln\rho)_J^{-1} \equiv m(t,J). \tag{4.4}$$

В (4.4) слева стоит полином степени 2 по $\vec{x}$, а справа – функция, зависящая от полинома степени 2. Поэтому $m(t,J) = a_0(t)J + 2b_0(t)$, где a_0, b_0 – некоторые функции. Подставляя $m(t,J)$ в (4.4) и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $\vec{x}$, получим дифференциальные уравнения подмодели

$$S' + 2SA = a_0(t)S, \quad A' + A^2 = S,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = a_0(t)\vec{v}, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$

а также выражение для $b_0(t) = \vec{u}_0 \cdot \vec{v}$ и дифференциальное уравнение для ρ

$$(\ln\rho)_t + (\ln\rho)_J(a_0J + 2\vec{u}_0 \cdot \vec{v}) = -\mathrm{tr}A,$$

решение которого имеет вид

$$\rho = e^{-\int \mathrm{tr}A dt}R'(I), \quad I = Je^{-\int a_0 dt} - 2\int \vec{u}_0 \cdot \vec{v}e^{-\int a_0 dt}dt, \tag{4.5}$$

где R – произвольная функция. С учетом (4.5) и дифференциальн уравнений подмодели уравнение (2.5) примет вид

$$a_0(t) = \mathrm{tr}A[1 + 2(\rho a^2)_\rho(\ln R')'e^{-\int a_0 dt} - (\rho a^2)_p]. \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) может выполниться только для специальных УС. Случай, когда $\mathrm{tr}A = 0$ рассмотрен в [10]. Поэтому рассмотрим случай, когда в уравнении (4.6) $\mathrm{tr}A \neq 0$.

В (4.6) входят функции, зависящие от переменных t, I, p, которые можно считать независимыми. Поэтому дифференцируя его по p, получим классифицирующее соотношение:

$$2(\rho a^2)_{\rho p}e^{-\int a_0 dt}(\ln R')' = (\rho a^2)_{pp}.$$

Рассмотрим все возможные решения этого уравнения.

4.1. Если $(\rho a^2)_{\rho p} = 0$, то $(\rho a^2)_{pp} = 0$. Функция $a^2(p,\rho)$ определяется из соотношения

$$\rho a^2(p,\rho) = \gamma p + h(\rho),$$

где h – некоторая функция, γ – произвольная постоянная. Найденную функцию a^2 подставим в (4.6) и запишем его в виде

$$\alpha(t) = 2h'(\rho)\Phi(\rho e^{\int \mathrm{tr}A dt}), \tag{4.7}$$

где $\alpha(t) = [a_0(\mathrm{tr}A)^{-1} - 1 + \gamma]e^{\int a_0 dt}$, а функция Φ определяется равенством $\Phi = (\ln R')'$, $R'(I) = \rho\exp(\int \mathrm{tr}A dt)$.

Если $h'(\rho) = 0$, то функция $h(\rho)$ постоянная и уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) - p_0\frac{1-\rho^\gamma}{\gamma}, \tag{4.8}$$

где p_0 – произвольная постоянная. В этом случае $\alpha(t) = 0$, следовательно $a_0(t) = (1-\gamma)\mathrm{tr}A$. Тогда ПОДМОДЕЛЬ 2 состоит из уравнений

$$S' + 2SA = (1-\gamma)S\mathrm{tr}A, \quad A' + A^2 = S,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$

функция плотности задается формулой (4.5), где $R'(I)$ произвольная функция, уравнение состояния задается формулой (4.8). Подмодель вполне определена.

Если в уравнении (4.7) $h'(\rho) \neq 0$, то после деления (4.7) на h' и дифференцирования по t и по ρ, получим два равенства. Разделив их друг на друга, получим соотношение, в котором переменные разделяются

$$\frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)\mathrm{tr}A} = -\frac{h''(\rho)}{h'(\rho)}\rho = 1 - \gamma_1, \quad \gamma_1 - \text{постоянная}. \tag{4.9}$$

Из (4.9) следует дифференциальное уравнение на $\alpha(t)$. Так как в выражение для $\alpha(t)$ входит функция $a_0(t)$, поэтому из дифференциального уравнения на $\alpha(t)$ следует дифференциальное уравнение на $a_0(t)$, решение которого имеет вид

$$a_0(t) = \mathrm{tr}A\frac{(1-\gamma_1)e^{(\gamma-\gamma_1)\int \mathrm{tr}Adt}N + \gamma - 1}{e^{(\gamma-\gamma_1)\int \mathrm{tr}Adt}N - 1}, \tag{4.10}$$

где N – постоянная. Заметим, что при $\gamma \to \gamma_1$ в пределе получим $a_0(t) = (1-\gamma)\mathrm{tr}A$ как в подмодели случая $h' = 0$, т. е. формула (4.10) задает общий вид функции $a_0(t)$.

Из (4.9) получим дифференциальное уравнение для $h(\rho)$, решение которого имеет вид

$$h = p_0\frac{\rho^{\gamma_1} - 1}{\gamma_1} + \gamma_2 \Rightarrow$$

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) + p_0\frac{\rho^{\gamma_1} - \rho^\gamma}{(\gamma_1 - \gamma)\gamma_1} - \gamma_2\frac{1 - \rho^\gamma}{\gamma}, \tag{4.11}$$

где γ_2, p_0 – постоянные и формула имеет смысл в предельных случаях $\gamma \to 0$ и $\gamma_1 \to \gamma$.

Используя найденные функции $\alpha(t)$ и $h(\rho)$ из (4.9), определим вид функции $R'(I)$ из (4.7):

$$R'(I) = \rho_0|I_1 + (\gamma_1 - 1)I|^{1/(\gamma_1 - 1)}, \tag{4.12}$$

где ρ_0, I_1– постоянные.

Таким образом, ПОДМОДЕЛЬ 3 состоит из уравнений

$$S' + 2SA = a_0(t)S, \quad A' + A^2 = S,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = a_0(t)\vec{v}, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$

где $a_0(t)$ вида (4.10).

УС задается формулой (4.11), а функция плотности имеет вид:

$$\rho = \rho_0 e^{-\int \mathrm{tr}Adt}|I_1 + (\gamma_1 - 1)I|^{1/(\gamma_1 - 1)}, \tag{4.13}$$

где I определяется формулой (4.5).

4.2. Если в классифицирующем соотношении $(\rho a^2)_{\rho p} \neq 0$, то после разделения переменных, получим

$$2e^{-\int a_0 dt}(\ln R')' = \frac{(\rho a^2)_{pp}}{(\rho a^2)_{\rho p}} = F(\rho), \tag{4.14}$$

где F – некоторая функция и использовано соотношение (4.5), в силу которого I есть функция ρ и t. В (4.14) переменные t, ρ, p считаем независимыми. Тогда в (4.6) переменные разделяются в силу (4.14)

$$a_0(\mathrm{tr}A)^{-1} - 1 = F(\rho)(\rho a^2)_\rho - (\rho a^2)_p = -\gamma,$$

где γ – постоянная. Отсюда следует $a_0(t) = (1-\gamma)\mathrm{tr}A$ и уравнение для определения УС

$$\rho\frac{\partial p}{\partial \rho} = p\gamma + h\Big(p + \int \frac{d\rho}{F(\rho)}\Big), \tag{4.15}$$

где h – произвольная функция. Дифференцирование (4.14) по t дает уравнение для функции $R'(I)$, решением которого будет функция (4.12) с $\gamma_1 = \gamma$. Тогда из (4.14) получим $F(\rho) = F_0\rho^{1-\gamma}$, где $F_0 = 2\rho_0^{\gamma-1}$ и уравнение (4.15) интегрируется. Получим УС в виде

$$p = H\frac{\rho^\gamma - 1}{\gamma} + \chi(\rho g(\mathcal{S})), \tag{4.16}$$

где H – произвольная постоянная, $\chi(z), g(\mathcal{S})$ – произвольные функции.

Таким образом, ПОДМОДЕЛЬ 4 состоит из уравнений

$$S' + 2SA = (1-\gamma)S\mathrm{tr}A, \quad A' + A^2 = S,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 = (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v}.$$

УС задается формулой (4.16), а функция плотности имеет вид (4.13) при $\gamma_1 = \gamma$.

Замечание. Все уравнения подмоделей, полученные в п. 4 для нулевой угловой скорости ($\vec{\omega} = 0$) будут справедливы для любой матрицы S. Если матрица S вырождена: имеет ранг 2, т.е. $\det S = 0$ или ранг 1, т.е. $\det S = 0$, $(\mathrm{tr}S)^2 = \mathrm{tr}S^2$, или имеет ранг 0, т.е. $S = 0$, то указанные дополнительные соотношения не переопределяют подмодель, т.к., если они верны в начальный момент времени, то они выполнены в любой другой момент времени.

Далее рассмотрим случай $\vec{\omega} \neq 0$.

5. Нулевая вспомогательная матрица.

При $S = 0$ уравнения (2.7) равносильны переопределенной системе (2.8), (2.10) и

$$\vec{\omega}\,(\vec{x}\cdot\nabla\ln\rho + 2) = \vec{v}\times\nabla\ln\rho. \tag{5.1}$$

Пусть $\vec{\omega} \neq 0$, например $\omega^1 \neq 0$. Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\rho = \rho\,(t, \alpha, \beta)\,, \quad \alpha = x^2 - \frac{\omega^2}{\omega^1}x^1, \quad \beta = x^3 - \frac{\omega^3}{\omega^1}x^1. \tag{5.2}$$

Тогда (5.1) сводится к одному скалярному уравнению

$$\rho_\alpha\left(\alpha\omega^1 + v^3\right) + \rho_\beta\left(\beta\omega^1 - v^2\right) = -2\omega^1\rho.$$

Общее решение этого уравнения, после замены $\alpha = \alpha_1 - v^3(\omega^1)^{-1}$, $\beta = \beta_1 + v^2(\omega^1)^{-1}$, запишем в виде

$$\rho = \alpha_1^{-2}R(t, I), \tag{5.3}$$

где $I = \beta_1/\alpha_1$, $R(t, I)$ – некоторая функция.

С учетом того, что $B = \Omega$ и $\Omega\vec{s} = \vec{\omega}\times\vec{s}$, где $\vec{s}$ – любой вектор, уравнение (2.5) запишется в виде

$$\vec{\omega}\times A\vec{x} + A^T\left(\vec{\omega}\times\vec{x}\right) + \vec{\omega}'\times\vec{x} - \vec{\omega}\times\vec{x}\mathrm{tr}A + \vec{v}' + A^T\vec{v} -$$

$$-\vec{v}\mathrm{tr}A + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 = \mathrm{tr}A\left[\left(\rho a^2\right)_\rho\nabla\ln\rho - \left(\rho a^2\right)_p\left(\vec{\omega}\times\vec{x} + \vec{v}\right)\right]. \tag{5.4}$$

После скалярного умножения (5.4) на вектор $\vec{\omega}$ получим соотношение линейное по $\vec{x}$ с коэффициентами, зависящими от t. Приравнивая коэффициенты при $\vec{x}$ нулю, получим дифференциальное уравнение для $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega}' = A\vec{\omega} + \sigma(t)\vec{\omega}, \tag{5.5}$$

и соотношение $\left(\vec{v}' + A^T\vec{v}\right)\cdot\vec{\omega} = 0$, которое в силу (2.9), (2.10) тождественно выполняется. Учитывая (5.3), (5.5), уравнение (5.4) примет вид:

$$\sqrt{R\rho}\vec{\tau} + R\sigma\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) = \mathrm{tr}A[(\omega^1)^{-1}\rho(\rho a^2)_\rho\left(R_I R^{-1}\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right) - \\ - R(\rho a^2)_p(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2)], \tag{5.6}$$

где $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) = \vec{v}' + A^T\vec{v} - (\sigma + \mathrm{tr}A)\,\vec{v} + \vec{\omega}\times\vec{u}_0$, $\vec{e}_2 = -\omega^2\vec{i} + \omega^1\vec{j}$, $\vec{e}_3 = -\omega^3\vec{i} + \omega^1\vec{k}$; $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – декартовый базис.

В уравнение (5.6) входят независимые переменные t, p, ρ, I. При дифференцировании по p получим уравнение

$$(\omega^1)^{-1}\rho(\rho a^2)_{p\rho}\left(R_I R^{-1}\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right) = R(\rho a^2)_{pp}(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2).$$

Если в последнем уравнении $\left(\rho a^2\right)_{p\rho} \neq 0$, то, разделяя переменные, получим

$$R_I R^{-1}\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2 = \omega^1\gamma R\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right),$$

где γ – произвольная постоянная. Вектора $\vec{\omega}, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ образуют базис. Приравнивание коэффициентов при базисных векторах, дает противоречивые соотношения. Значит, $\left(\rho a^2\right)_{pp} = \left(\rho a^2\right)_{p\rho} = 0$ и уравнение состояния определяется из соотношения $\rho a^2 = \gamma p + h(\rho)$, где h – некоторая функция.

С учетом найденного уравнения состояния, (5.6) примет вид

$$\sqrt{R\rho}\vec{\tau} + (\sigma + \gamma\mathrm{tr}A)\,R(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2) = \omega_1^{-1}\rho h'\left(R_I R^{-1}\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right)\mathrm{tr}A. \tag{5.7}$$

В (5.7) входят независимые переменные t, I, ρ. Дифференцирование по ρ приводит к разделению переменных. Откуда следует

$$h = \gamma_1\sqrt{\rho} + \gamma_2\ln\rho + \gamma_3,$$

где $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ – произвольные постоянные.

Подстановка вида функции h в (5.7) и расщепление по $\sqrt{\rho}$ дает

$$\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau} = 2^{-1}\gamma_1\mathrm{tr}A\left(R^{-1}R_I\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right),$$

$$\omega^1 R\left(\sigma + \gamma\mathrm{tr}A\right)\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) = \gamma_2\mathrm{tr}A\left(R^{-1}R_I\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right).$$

Проектируя эти равенства на вектора $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_3$, получим соотношения:

$$\gamma_2 = 0, \quad \sigma + \gamma\mathrm{tr}A = 0,$$

$$2\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau}\cdot\vec{e}_2 = \gamma_1\left(R_I R^{-1}\omega^2\omega^3 - \Delta\right)\left(IR_I R^{-1} + 2\right)\mathrm{tr}A,$$

$$2\omega^1\sqrt{R}\vec{\tau}\cdot\vec{e}_3 = \gamma_1\left(R_I R^{-1}\Delta - \left(IR_I R^{-1} + 2\right)\omega^2\omega^3\right)\mathrm{tr}A,$$

где $\Delta = \left(\omega^1\right)^2 + \left(\omega^2\right)^2$ Решение последней системы возможно в двух случаях.

Случай 1: $\gamma_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$R^{-1/2} = -\frac{\tau_2 + \tau_3 I}{\gamma_1\mathrm{tr}A}. \tag{5.8}$$

Случай 2: $\gamma_1 = 0 \Rightarrow \vec{\tau} = 0$, R – некоторая функция.

В обоих случаях уравнение (2.3) в переменных t, I принимает вид

$$\left(R_t R^{-1} + \mathrm{tr}A\right)\omega^1 + (\vec{a}_2 + I\vec{a}_3)\cdot\left(R^{-1}R_I\left(\vec{e}_3 - I\vec{e}_2\right) - 2\vec{e}_2\right) = 0. \tag{5.9}$$

В случае 2 уравнение (5.9) определяет функцию R. Таким образом, получена вполне определенная ПОДМОДЕЛЬ 5:

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 + (\gamma - 1)\mathrm{tr}A\vec{v} = 0, \quad \vec{v} = \vec{u}_0' + A\vec{u}_0,$$

$$A' + A^2 = E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \mathrm{tr}A\vec{\omega}, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0$$

с уравнением состояния $p = h_0(\mathcal{S})\rho^\gamma$, где h_0 – произвольная функция, а плотность определяется по формуле (5.3). Дополнительное соотношение $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0$ выполняется для любого t, если оно выполнено в начальный момент времени.

В случае 1 из (5.8) и (5.9) получим дифференциальные уравнения на компоненты вектора $\vec{\tau}$, которые входят в ПОДМОДЕЛЬ 6

$$A' + A^2 = E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma \mathrm{tr}A\vec{\omega}, \quad \vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0$$

$$\tau_2' + \vec{a}_2 \cdot \vec{\tau} = \tau_2 \left(\frac{(\mathrm{tr}A)'}{\mathrm{tr}A} + \frac{\mathrm{tr}A}{2} \right), \quad \tau_3' + \vec{a}_3 \cdot \vec{\tau} = \tau_3 \left(\frac{(\mathrm{tr}A)'}{\mathrm{tr}A} + \frac{\mathrm{tr}A}{2} \right),$$

где $\vec{\tau}$ из (5.6). УС имеет вид

$$p = h_0(\mathcal{S})\rho^\gamma + 2\gamma_1 \frac{\sqrt{\rho} - \rho^\gamma}{1 - 2\gamma},$$

которое верно для любого γ. Плотность определяется по формуле (5.3), где R из (5.8). Дополнительное соотношение $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 0$ здесь вполне определяет подмодель. Давление для случая 1 имеет вид

$$p = \omega^1 \gamma_1 \mathrm{tr}A\sqrt{R}\tau_3^{-1} + p_0(t),$$

где функция $p_0(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$p_0' + \gamma_1 \mathrm{tr}A\tau_3^{-2}\vec{a}_3 \cdot \vec{e}_2 + (\gamma p_0 + \gamma_3)\,\mathrm{tr}A = 0.$$

6. Вырожденная вспомогательная матрица.

В п. 4 был рассмотрен случай с $\vec{\omega} = 0$. Если вектор $\vec{\omega} \neq 0$, то из (2.9) следует $\det S = 0$ и матрица S вырождена. Считаем $S \neq 0$, $\omega^1 \neq 0$. Решение уравнения (2.8) для случая $\omega^1 \neq 0$ имеет вид (5.3). Векторное уравнение (2.7) в новых переменных t, α, β сводится к одному скалярному линейному уравнению для представления плотности

$$\rho_\alpha(v^3 + \alpha(\omega^1 + s_{23}) + \beta s_{33}) - \rho_\beta(v^2 + \alpha s_{22} + \beta(s_{23} - \omega^1)) = -2\rho\omega^1. \qquad (6.1)$$

с линейными неоднородными коэффициентами. Для линейного уравнения (6.1) найдем общее решение в явном виде. Сделаем замену переменных α, β, чтобы уравнение было инвариантно относительно растяжения или переноса. Тогда в инвариантах получим искомое представление.

6.1. Уравнение для представления плотности инвариантно относительно растяжения. Пусть $\Delta = s_{22}s_{33} - s_{23}^2 + (\omega^1)^2 \neq 0$. После замены

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_0, \quad \beta = \beta_1 + \beta_0, \quad I = \beta_1/\alpha_1. \qquad (6.2)$$

где $\alpha_0 = (-v^2 s_{33} + v^3(s_{23} - \omega^1))/\Delta$, $\beta_0 = (-v^3 s_{22} + v^2(\omega^1 + s_{23}))/\Delta$, I – новая независимая переменная, дифференциальное уравнение (6.1) допускает растяжение. Получаем интегрируемое уравнение

$$\alpha_1 \rho_{\alpha_1}(\omega^1 + s_{23} + s_{33}I) - \rho_I(s_{22} + 2s_{23}I + s_{33}I^2) = -2\rho\omega^1,$$

общее решение, которого запишем в виде

$$\rho = e^{2\omega^1 \int P^{-1} dI} R(t, J), \tag{6.3}$$

где

$$P(t, I) = s_{33} I^2 + 2 s_{23} I + s_{22}, \quad J = \alpha_1 |P|^{1/2} e^{\omega^1 \int P^{-1} dI},$$

R – некоторая функция.

Перепишем уравнение совместности (2.5) учитывая $\mathrm{tr}A \neq 0$

$$C\vec{x} + \vec{\tau} = (\rho a^2)_\rho \nabla \ln \rho - (\rho a^2)_p (S\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{v}), \tag{6.4}$$

где $C\ \mathrm{tr}A = B' + BA + A^T B - B\ \mathrm{tr}A$, $\vec{\tau}\ \mathrm{tr}A = \vec{v}' + A^T \vec{v} - \vec{v}\ \mathrm{tr}A + B\vec{u}_0$.

После скалярного умножения уравнения (6.4) на вектор $\vec{\omega}$ получим соотношение линейное по $\vec{x}$, с коэффициентами, зависящими от t. Приравнивая нулю коэффициенты при $\vec{x}$, получим:

$$(S' + SA)\vec{\omega} = (\Omega' + \Omega A)\vec{\omega}, \quad \vec{\omega} \cdot (\vec{v}' + A^T \vec{v}) = 0.$$

После дифференцирования уравнений (2.9), (2.10) последние равенства, перепишем в виде

$$(S - \Omega)(A\vec{\omega} - \vec{\omega}') = 0, \quad \vec{v} \cdot (A\vec{\omega} - \vec{\omega}') = 0. \tag{6.5}$$

Запишем вектор $\vec{x}$ через переменные I, α_1, x^1 в силу (5.2), (6.2)

$$\vec{x} = \alpha_1 \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ I \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 0 \\ \alpha_0 \\ \beta_0 \end{matrix} \right\| + \frac{x^1}{\omega^1} \vec{\omega} \tag{6.6}$$

и подставим в уравнение (6.4), учитывая (6.5). Тогда в уравнении (6.4) переменная x^1 – свободная (уравнение не содержит функций, зависящих от x^1), а следовательно коэффициенты при x^1 должны равняться нулю.

$$S(A\vec{\omega} - \vec{\omega}') = 0. \tag{6.7}$$

Предложение 1. *В уравнении (6.4) выражения $(\rho a^2)_{pp}$, $(\rho a^2)_{\rho p}$ равны нулю.*

Доказательство. В уравнение (6.4) переменные t, J, p, ρ можно считать независимыми. Переменная p входит только в функцию $a^2(p, \rho)$, поэтому дифференцируем (6.4) по p. Получим векторное уравнение, которое после подстановки функции ρ вида (6.3) образует однородную систему для определения выражений для $(\rho a^2)_{pp}$ и $(\rho a^2)_{p\rho}$. Определитель системы не равен нулю. Поэтому система имеет тривиальное решение $(\rho a^2)_{pp} = (\rho a^2)_{p\rho} = 0$.

Из предложения 1 следует

$$\rho a^2 = \gamma p + h(\rho), \tag{6.8}$$

где γ – произвольная постоянная, h – некоторая функция.

Так как функция $a^2(p, \rho)$ найдена путем дифференцирования уравнения (6.4), поэтому ее необходимо подставить в это уравнение. Получим

$$\nabla H(\rho) = C\vec{x} + \vec{\tau} + \gamma(S\vec{x} + \vec{\omega} \times \vec{x} + \vec{v}), \quad H(\rho) = \int \rho^{-1} h'(\rho) d\rho. \tag{6.9}$$

Предложение 2. *Из уравнения (6.9) следует дифференциальное уравнение для угловой скорости $\vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega} trA$.*

Доказательство. Вычислим ротор от обеих частей (6.9):

$$\nabla \times [(C - \gamma\Omega)\vec{x}] = 0 \;\Rightarrow\; \Omega_C + \gamma\Omega = 0, \tag{6.10}$$

где Ω_C – антисимметричная часть матрицы C. Матрица C выражается через матрицу B (см. (6.4)), поэтому антисимметричная и симметричная части матрицы C выражаются через антисимметричную и симметричную части матрицы B:

$$\Omega_C\ \mathrm{tr}A = \Omega' + \Omega A + A^T\Omega - \Omega\ \mathrm{tr}A \equiv E < \vec{\omega}' - A\vec{\omega} >, \tag{6.11}$$

$$S_C\ \mathrm{tr}A = S' + SA + A^TS - S\ \mathrm{tr}A,$$

где S_C – симметричная часть матрицы C. Учитывая (6.11), матричное уравнение (6.10) эквивалентно дифференциальному уравнению для $\vec{\omega}$: $\vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega}\mathrm{tr}A$.

Тогда соотношения (6.5), (6.7) выполняются в силу (2.9), (2.10). Интегрирование (6.9) с учетом (6.10), дает

$$H(\rho) = 2^{-1}\vec{x}\cdot(S_C + \gamma S)\vec{x} + (\vec{\tau} + \gamma\vec{v})\cdot\vec{x} + H_1(t), \tag{6.12}$$

где H_1 – некоторая функция.

После подстановки $\vec{x}$ вида (6.6) в (6.12), выберем переменные t, I, ρ в качестве независимых. Выразим через них величину $\alpha_1 = \Phi e^{-\omega^1\int P^{-1}dI}|P|^{-1/2}$, где Φ – обратная функция к функции R из (6.3). Полученное равенство дифференцируем по I и от переменных t, I, ρ переходим к t, I, J, используя (6.3).

Получим тождество со свободной переменной I

$$Je^{-\omega^1\int P^{-1}dI}Q_2(I,t,J) = |P|^{1/2}T_1(I,t,J),$$

где T_1, Q_2 – многочлены первой и второй степени по I соответственно

$$T_1(I,t,J) = \omega^1(2RR_J^{-1} + J)(I\bar{m}_3 + \bar{m}_2) + J(\bar{m}_2(Is_{33} + s_{23}) -$$

$$-\bar{m}_3(Is_{23} + s_{22})),$$

$$Q_2(I,t,J) = \omega^1(2RR_J^{-1} + J)(\bar{s}_{33}I^2 + 2\bar{s}_{23}I + \bar{s}_{22}) +$$

$$J(I^2(\bar{s}_{23}s_{33} - \bar{s}_{33}s_{23}) + I(s_{33}\bar{s}_{22} - \bar{s}_{33}s_{22}) + s_{23}\bar{s}_{22} - \bar{s}_{23}s_{22}),$$

$\bar{m}_2 = \alpha_0\bar{s}_{22} + \beta_0\bar{s}_{23} + \sigma_2$, $\bar{m}_3 = \alpha_0\bar{s}_{23} + \beta_0\bar{s}_{33} + \sigma_3$,

где

$$\bar{s}_{ij} = s_{Cij} + \gamma s_{ij}, \quad \sigma_k = \tau_k + \gamma v^k, \quad i,j,k = 2,3. \tag{6.13}$$

Так как функции $e^{-\omega^1\int P^{-1}dI}$ и $|P|^{1/2}$ не являются многочленами от I и линейно не зависимы, то из тождества следует $T_1 = Q_2 = 0$.

Приравнивая коэффициенты при различных степенях I в уравнениях $T_1 = 0$, $Q_2 = 0$, получим систему пяти равенств, из которых следует, что

$$\frac{2R}{JR_J} = r(t) \quad\Rightarrow\quad R(t,J) = R_0(t)|J|^{\frac{2}{r(t)}}, \tag{6.14}$$

где $r(t)$ – некоторая функция.

Предложение 3. *В (6.14) функция $r(t)$ не зависит от t, то есть является постоянной.*

Доказательство. После подстановки $\vec{x}$ вида (6.6) в (6.12) получим, что правая часть в (6.12) есть многочлен 2-ой степени по I.

Используя (6.3), (6.14), выразим α_1 через независимые переменные ρ, I, t: $\alpha_1 = \left(\rho R_0^{-1}\right)^{r(t)/2} |P|^{-1/2} e^{-(r(t)+1)\omega^1 \int P^{-1}dI}$. Тогда функция (6.12) примет вид

$$H(\rho) = \pm\rho^{r(t)}\varphi(t,I) \pm \rho^{r(t)/2}\psi(t,I) + \chi(t), \tag{6.15}$$

где знак $\pm$ выбирается в зависимости от знака P и α_1:

$$2\varphi(t,I) = R_0^{-r(t)} P^{-1} e^{-2(r(t)+1)\omega^1 \int P^{-1}dI}(\bar{s}_{33}I^2 + 2\bar{s}_{23}I + \bar{s}_{22}),$$

$$\psi(t,I) = R_0^{-r(t)/2} |P|^{-1/2} e^{-(r(t)+1)\omega^1 \int P^{-1}dI}(\bar{m}_2 + \bar{m}_3 I),$$

$$2\chi(t) = \alpha_0^2\bar{s}_{22} + 2\alpha_0\beta_0\bar{s}_{23} + \beta_0^2\bar{s}_{33} + 2(\alpha_0\sigma_2 + \beta_0\sigma_3 + H_1(t)).$$

Дифференцирование уравнения (6.15) по t дает соотношение, в которое входят функции $\rho^{r(t)}\ln\rho$, $\rho^{r(t)/2}\ln\rho$, $\rho^{r(t)}$, $\rho^{r(t)/2}$, являющиеся линейно независимыми. Следовательно коэффициенты при этих функциях должны быть нулевыми: $\varphi'_t = 0$, $\psi'_t = 0$, $r'\psi = 0$, $r'\varphi = 0$, $\chi' = 0$. Так как функции $\varphi(t,I)$ и $\psi(t,I)$ одновременно не могут равняться нулю (иначе $H(\rho)$ зависит только от времени), то $r'(t) = 0$. Значит $r(t) = \gamma_1$, где γ_1 – некоторая постоянная. Утверждение доказано.

Предложение 4. *Для получения новых подмоделей постоянная r должна равняться -1.*

Доказательство. Дифференцирование (6.15) по I дает

$$\varphi = \gamma a_0/2, \quad \psi = b_0, \quad \chi = c_0/2, \tag{6.16}$$

где a_0, b_0, c_0 – произвольные постоянные. Из (6.15), имеем

$$H(\rho) = \pm\gamma a_0\rho^{\gamma_1}/2 \pm b_0\rho^{\gamma_1/2} + c_0/2. \tag{6.17}$$

В уравнение (6.16) для функции φ, с учетом обозначений в (6.15), входят функция $e^{2(1+\gamma_1)\omega^1 \int P^{-1}dI}$, зависящая от t, I и функция квадратичная по I. Они являются линейно независимыми. При $\gamma_1 \neq -1$ получим, что $H(\rho)$ постоянная функция. Этот случай был разобран в п. 4. Другой альтернативной возможностью выполнения уравнений (6.16) является $\gamma_1 = -1$. Что и требовалось доказать.

При $\gamma_1 = -1$ уравнение (6.16) для φ имеет вид

$$\bar{s}_{33}I^2 + 2\bar{s}_{23}I + \bar{s}_{22} = \gamma a_0 R_0^{-1}(s_{33}I^2 + 2s_{23}I + s_{22}).$$

Последнее выражение является многочленом второй степени по I с коэффициентами, зависящими от t. Поэтому для его выполнения необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях I равнялись нулю:

$$\bar{s}_{22} = \frac{\gamma a_0}{R_0(t)}s_{22}, \quad \bar{s}_{23} = \frac{\gamma a_0}{R_0(t)}s_{23}, \quad \bar{s}_{33} = \frac{\gamma a_0}{R_0(t)}s_{33}, \tag{6.18}$$

при условии $a_0 \neq 0$. Уравнения (6.18) запишем в матричном виде

$$S' + SA + A^T S - (1-\gamma)S\ \mathrm{tr}A = \gamma\frac{a_0\ \mathrm{tr}A}{R_0(t)}S.$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения матрицы S.

Уравнение (6.16) для функции ψ с учетом обозначений в (6.15) при $\gamma_1 = -1$ имеет вид

$$(\bar{m}_2 + \bar{m}_3 I) R_0^{1/2} = b_0 |s_{33} I^2 + 2 s_{23} I + s_{22}|^{1/2}.$$

При $s_{22}s_{33} - s_{23}^2 \neq 0$ имеем $b_0 = 0$ и $\bar{m}_3 = 0, \quad \bar{m}_2 = 0$, которые в силу (6.13) и (2.10), запишем в векторном виде

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = (1-\gamma)\vec{v}\,\mathrm{tr}A - \gamma a_0 R_0^{-1} \vec{\xi}\,\mathrm{tr}A,$$

где $\Delta\vec{\xi} = (s_{33}s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1 \left[v^2 \vec{s}_3 - v^3 \vec{s}_2\right]$.

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения вектора $\vec{v}$. Для этого случая определим уравнение состояния. Из (6.8), (6.9) и вида функции $H(\rho)$ (6.17) при $\gamma_1 = -1$ имеем

$$h(\rho) = \pm \frac{\gamma a_0}{2} \ln \rho + h_0 \quad \Rightarrow \quad p = \rho^\gamma h_1(\mathcal{S}) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho, \tag{6.19}$$

где h_0 – произвольная постоянная, h_1 – произвольная функция.

При $s_{22}s_{33} - s_{23}^2 = 0$ имеем

$$\bar{m}_2 = b_0 |s_{22}|^{1/2} R_0^{-1/2}, \quad \bar{m}_3 = b_0 |s_{33}|^{1/2} R_0^{-1/2}.$$

В силу (6.13), (2.10) эти равенства запишем в векторном виде

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = (1-\gamma)\vec{v}\,\mathrm{tr}A - \gamma a_0 R_0^{-1} \vec{\xi}\,\mathrm{tr}A +$$
$$\frac{b_0}{\omega^1} R_0^{-1/2} \left\| \begin{array}{c} -\omega^2 \sqrt{|s_{22}|} - \omega^3 \sqrt{|s_{33}|} \\ \omega^1 \sqrt{|s_{22}|} \\ \omega^1 \sqrt{|s_{33}|} \end{array} \right\| \mathrm{tr}A,$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения вектора $\vec{v}$. В этом случае для любого γ уравнение состояния имеет вид

$$p = \rho^\gamma h_1(S) \pm \frac{a_0}{2} \ln \rho \pm b_0 \frac{\rho^{1/2} - \rho^\gamma}{\gamma - 1/2}, \tag{6.20}$$

Уравнения совместности (2.4), (2.5) выполнены. Остается рассмотреть уравнение (2.3). Для этого подставим в (2.3) функцию ρ вида (6.3), где $R(t,J)$ имеет вид (6.14) с $r(t) = -1$. Получим дифференциальное уравнение для функции $R_0(t)$

$$R_0' + \gamma R_0\ \mathrm{tr}A = \gamma a_0\ \mathrm{tr}A,$$

решением, которого является функция

$$R_0(t) = a_0 - \exp(-\gamma \int_{t_0}^{t} \mathrm{tr}A dt),$$

где t_0 – произвольная постоянная.

Таким образом, получены две подмодели, каждая из которых состоит из дифференциальных уравнений для матриц A, S и векторов $\vec{u}_0$, $\vec{\omega}$ вида:

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma(\mathrm{tr}A)\vec{\omega},$$

$$S' + SA + A^T S = (1 - \gamma + c_0(t)) S\ \mathrm{tr}A, \quad \vec{u}_0' + A\vec{u}_0 = \vec{v},$$

$$\vec{v}' + A^T \vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega} \times \vec{u}_0 = (1-\gamma)\vec{v}\,\mathrm{tr}A - c_0(t)\ \vec{\xi}\,\mathrm{tr}A + \vec{v}_0(t),$$

где

$$\Delta\phi(t) = (v^3)^2 s_{22} + (v^2)^2 s_{33} + 2v^2 v^3 s_{23},$$

$$\Delta\vec{\xi} = (s_{33}s_{22} - s_{23}^2)\vec{v} - \omega^1 \left(v^2 \vec{s}_3 - v^3 \vec{s}_2\right),$$

$$c_0(t)(a_0+\exp(-\gamma\int_{t_0}^t \mathrm{tr}Adt))=\gamma,\quad \Delta=s_{22}s_{33}-s_{23}^2+(\omega^1)^2.$$

Представление для плотности таково

$$\rho=(\vec{x}\cdot S\vec{x}+2\vec{\xi}\cdot\vec{x}+\phi(t))^{-1}(a_0+\exp(-\gamma\int_{t_0}^t \mathrm{tr}Adt)).$$

Специфика подмоделей заключается в следующем:

ПОДМОДЕЛЬ 7

$\omega^1\neq 0$, $\Delta\neq 0$ и $s_{23}^2-s_{22}s_{33}\neq 0$. В этом случае в уравнении для $\vec{v}$ должно быть $\vec{v}_0=0$, а уравнение состояния (6.19).

ПОДМОДЕЛЬ 8

$\omega^1\neq 0$, $\Delta\neq 0$ и $s_{23}^2-s_{22}s_{33}=0$. В этом случае в уравнении для вектора $\vec{v}$ имеем

$$\vec{v}_0(t)=\frac{b_0}{\omega^1}(a_0+\exp(-\gamma\int_{t_0}^t \mathrm{tr}Adt))^{-1/2}\left\|\begin{array}{c}-\omega^2\sqrt{|s_{22}|}-\omega^3\sqrt{|s_{33}|}\\ \omega^1\sqrt{|s_{22}|}\\ \omega^1\sqrt{|s_{33}|}\end{array}\right\|\mathrm{tr}A,$$

а уравнения состояния (6.20).

Замечание. Дополнительные соотношения для элементов матрицы S ($S\vec{\omega}=0$, $s_{23}^2-s_{22}s_{33}=0$) не переопределяют подмодель, т.к. из выполнимости соотношений в начальный момент времени следует, что они выполняются в любой момент времени. Это легко проверить дифференцированием.

6.2. Уравнение для представления плотности инвариантно относительно переноса. Пусть

$$\frac{s_{23}+\omega^1}{s_{22}}=\frac{s_{33}}{s_{23}-\omega^1}\equiv\lambda(t)\neq 0,\tag{6.21}$$

$$I_1=\alpha s_{22}\lambda+\beta s_{33},\tag{6.22}$$

где λ – некоторая функция. Тогда уравнение (6.1) инвариантно относительно переноса по α и примет вид

$$\rho_\alpha(v^3+I_1)+\rho_{I_1}(\lambda s_{22}v^3-s_{33}v^2+2\omega^1 I_1)=-2\rho\omega^1.$$

Общее решение этого уравнения дает представление для плотности

$$\rho=R(t,J_1)n^{-1},\tag{6.23}$$

где R – некоторая функция, $J_1=2\omega^1(\alpha+\beta\lambda)-(v^3-\lambda v^2)\ln|n|$, $n=2\omega^1 I_1+\lambda s_{22}v^3-s_{33}v^2$.

Уравнение совместности (2.5) будет иметь вид (6.4) и справедливы равенства (6.5). Представим вектор $\vec{x}$ в виде

$$\vec{x}=\left\|\begin{array}{c}0\\ \alpha\\ \beta\end{array}\right\|+\frac{x^1}{\omega^1}\vec{\omega}.\tag{6.24}$$

После подстановки $\vec{x}$ в (6.4) получим соотношение (6.7). Для функции ρ вида (6.23) справедливо предложение 1, из которого следует формула (6.8) для квадрата скорости звука. Так же для ρ справедлива формула (6.9) и предложение 2. Предложение 2 позволяет найти вид функции $H(\rho)$ вида (6.12). Подстановка $\vec{x}$ вида (6.24) в (6.12) дает следующее представление для функции $H(\rho)$

$$H(\rho)=2^{-1}(\alpha^2\bar{s}_{22}+2\alpha\beta\bar{s}_{23}+\beta^2\bar{s}_{33})+\alpha\sigma_2+\beta\sigma_3+H_1(t),\tag{6.25}$$

где H_1 – некоторая функция.

В (6.25) входят переменные t, α, β, ρ. Выразим α, β через t, J_1, ρ из (6.22) и (6.23). После подстановки α и β в уравнение (6.25) получим выражение, содержащее функции $(\ln\rho)^2$, $\ln\rho$, ρ^{-1}, ρ^{-2}, $\rho^{-1}\ln\rho$. Коэффициенты при этих функциях должны быть постоянными, так как $H(\rho)$ зависит только от ρ. Имеем представление

$$H(\rho) = 2^{-1}k_1(\ln\rho)^2 + k_4\ln\rho + k_5\rho^{-1} + 2^{-1}k_2\rho^{-2} + k_3\rho^{-1}\ln\rho + k_6, \qquad (6.26)$$

Сравнивая (6.25) и (6.26), получим уравнения для функций, зависящих от t и функции $R(t, J_1)$. Далее рассмотрим два случая: $R = R(t)$ и $R_{J_1} \neq 0$.

При $R_{J_1} \neq 0$ получим следующие равенства

$$k_1\lambda(2\omega^1)^3 = (v^3 - \lambda v^2)^2(\bar{s}_{33}s_{22} - s_{33}\bar{s}_{22}), \quad k_2 = 0, \quad k_3 = 0, \qquad (6.27)$$

$$\bar{s}_{22}\lambda^2 - 2\bar{s}_{23}\lambda + \bar{s}_{33} = 0, \qquad (6.28)$$

$$(v^3 - \lambda v^2)(\bar{s}_{22}s_{33} + \bar{s}_{33}s_{22} - 2\bar{s}_{23}s_{33}) = 0, \qquad (6.29)$$

$$k_4 = -k_1\left(\frac{\chi}{v^3 - \lambda v^2}\right) + \frac{v^3 - \lambda v^2}{\lambda(2\omega^1)^2}(\sigma_2 s_{33} - \sigma_3\lambda s_{22}), \qquad (6.30)$$

$$\frac{k_5}{R} = \frac{\sigma_2\lambda - \sigma_3}{\lambda(2\omega^1)^2} + \omega^1\frac{\chi}{\lambda^2(2\omega^1)^4}(\bar{s}_{22}\lambda^2 - \bar{s}_{33}), \qquad (6.31)$$

$$8k_6\lambda^2(\omega^1)^4 = \bar{s}_{22}F^2 + 2\bar{s}_{23}FG + \bar{s}_{33}G^2 + 2\lambda(2\omega^1)^2(\sigma_2F + \sigma_3G) + \\ + 2\lambda(2\omega^1)^2H_1(t), \qquad (6.32)$$

где $F = \lambda(s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3) - s_{33}\chi$, $G = \lambda s_{22}v^3 - s_{33}v^2 + s_{22}\lambda\chi$, $\chi = J_1 + (v^3 - \lambda v^2)\ln R$.

Если в (6.32) $\chi_{J_1} = 0$, то это уравнение есть уравнение для определения $H_1(t)$. При $\chi_{J_1} \neq 0$, (6.32) расщепляется по степеням χ.

Рассмотрим случай $\chi_{J_1} = 0$, а именно, пусть $\chi = \ln R_0(t)(v^3 - \lambda v^2)$, $R_0(t) > 0$. Причем $v^3 - \lambda v^2 \neq 0$, иначе получаем противоречие. Тогда функция $R(t, J_1)$ имеет вид

$$R(t, J_1) = R_0(t)\exp\left(\frac{J_1}{\lambda v^2 - v^3}\right). \qquad (6.33)$$

Из уравнений (6.27), (6.28), (6.29) следует система уравнений для определения $\bar{s}_{22}$, $\bar{s}_{23}$, $\bar{s}_{33}$. Определитель системы $-\lambda^2(2\omega^1)^3$ не равен нулю. Решение запишем в матричном виде

$$S' + SA + A^TS - (1-\gamma)S\mathrm{tr}A = \frac{(2\omega^1)^2k_1}{v^3 - \lambda v^2}\vec{e}\otimes\vec{e}\,\mathrm{tr}A,$$

где $\vec{e} = \lambda\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_3$, $E < \vec{\omega} >= ||\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3||$. Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения матрицы S.

С учетом уравнения (6.33) из уравнения (6.31) следует $k_5 = 0$ и $\sigma_2\lambda - \sigma_3 = 0$. Из последнего равенства и (6.30) находим σ_2 и σ_3, которые в силу (2.10) и (6.13), запишем в векторном виде

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 - (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A = -2\omega^1\frac{k_4 + k_1\ln R_0}{v^3 - \lambda v^2}\vec{e}\,\mathrm{tr}A.$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения вектора $\vec{v}$

Определим уравнение состояния. Учитывая, что $k_2 = k_3 = k_5 = 0$, и обозначение в (6.9), имеем

$$h(\rho) = k_4\rho + k_1(\rho\ln\rho - \rho) + h_0 \quad \Rightarrow$$
$$p = \rho^\gamma h_1(S) + \frac{\rho}{1-\gamma}(k_0 + k_1\ln\rho), \quad \text{при} \quad \gamma \neq 1, \tag{6.34}$$
$$p = \rho h_1(S) + \rho\ln\rho(k_1\ln\rho + k_4 - k_1), \quad \text{при} \quad \gamma = 1,$$

где h_0 – произвольная постоянная, h_1 – произвольная функция, $k_0 = k_4 - k_1 - k_1/(1-\gamma)$.

Уравнения совместности (2.4), (2.5) выполнены. Остается рассмотреть уравнение (2.3). Для этого подставим в (2.3) функцию ρ вида (6.23), где $R(t, J_1)$ имеет вид (6.33). Получим дифференциальное уравнение для функции $R_0(t)$:

$$(\lambda v^2 - v^3)\left((\ln R_0)' + \mathrm{tr}A\right) + 2\omega^1\vec{u}_0\cdot\vec{e} = 0. \tag{6.35}$$

Таким образом, получена ПОДМОДЕЛЬ 9, которая состоит из уравнений:

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega}\mathrm{tr}A,$$
$$S' + SA + A^TS = (1-\gamma)S\mathrm{tr}A + \frac{(2\omega^1)^2k_1}{v^3 - \lambda v^2}\vec{e}\otimes\vec{e}\mathrm{tr}A, \quad S\vec{\omega} = 0,$$
$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 - (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A = -2\omega^1\frac{k_4 + k_1\ln R_0}{v^3 - \lambda v^2}\vec{e}, \quad \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0,$$

где λ из (6.21), $\vec{e} = \lambda\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_3$. Плотность имеет экспоненциальный вид

$$\rho = R_0(t)\exp\left(\frac{2\omega^1\vec{x}\cdot\vec{e}}{\lambda v^2 - v^3}\right),$$

где $R_0(t)$ удовлетворяет уравнению (6.35). Уравнение состояния (6.34).

Замечание. Конечные соотношения не переопределяют подмодель. Это легко проверить дифференцированием.

Рассмотрим случай, когда в уравнении (6.32) функция χ_{J_1} зависит от J_1. Тогда коэффициенты при χ^2 и χ должны равняться нулю:

$$\bar{s}_{22}s_{33}^2 - 2\bar{s}_{23}s_{33}s_{22}\lambda + \bar{s}_{33}s_{22}^2\lambda^2 = 0, \tag{6.36}$$
$$4(\omega^1)^2(s_{33}\sigma_2 - s_{22}\lambda\sigma_3) + (s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3)(\bar{s}_{22}s_{33} - 2\bar{s}_{23}s_{23} + \bar{s}_{33}s_{22}) = 0. \tag{6.37}$$

Остается уравнение для определения функции $H_1(t)$. Из (6.37), (6.30), (6.29) следует $k_4 = 0$, $k_1 = 0$.

При $v^3 - \lambda v^2 \neq 0$ из (6.28), (6.29) получим $H(\rho) = k_6$. Этот случай был рассмотрен в п. 4. Таким образом, для нахождения новых подмоделей необходимо рассмотреть случай $v^3 - \lambda v^2 = 0$. Тогда $\chi = J_1$ и из (6.31) следует представление для функции $R(t, J_1)$:

$$R(t, J_1) = \frac{4(\omega^1)^2R_0(t)\lambda}{J_1 + m(t)}, \tag{6.38}$$

где $R_0(t)$ и $m(t)$ связаны соотношениями

$$R_0(\bar{s}_{22}\lambda^2 - \bar{s}_{33}) = 4\omega^1\lambda k_5, \tag{6.39}$$
$$R_0(\sigma_2\lambda - \sigma_3) = k_5m\lambda. \tag{6.40}$$

Из (6.36), (6.28), (6.39) следует система уравнений для определения $\bar{s}_{22}$, $\bar{s}_{23}$, $\bar{s}_{33}$. Определитель системы не равен нулю. Решение запишем в матричном виде

$$S' + SA + A^TS = (1 - \gamma + \varphi)S\mathrm{tr}A,$$

где $\varphi(t) = 2\lambda k_5 R_0^{-1}$. Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения матрицы S.

Из (6.40), (6.37) следует система уравнений для определения σ_2, σ_3. Определитель системы не равен нулю. Решение запишем в векторном виде

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 = \mathrm{tr}A\left((1-\gamma)\vec{v} + \frac{\varphi}{2}\vec{v} + \frac{m\varphi}{(2\omega^1)^2}\left(\vec{s}_3 + \vec{\omega}_2\right)\right).$$

Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения вектора $\vec{v}$.

Замечание. Дифференцирование равенства $v^3 = \lambda v^2$ по t в силу дифференциальных уравнений для матрицы S и вектора $\vec{v}$ дает $m(t) = 2\omega^1 v^2 s_{22}^{-1}$.

Определим уравнение состояния. Учитывая, что $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, выражение (6.25) и обозначение в (6.9), имеем

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) + \frac{k_5}{\gamma}\ln\rho,\ \text{при } \gamma \neq 0,$$

$$p = h_0(\mathcal{S}) - \frac{k_5(\ln\rho)^2}{2} + k_0\ln\rho,\ \text{при } \gamma = 0. \qquad (6.41)$$

где k_0 – произвольная постоянная.

После подстановки функции ρ вида (6.23) в уравнение (2.3) для ρ, где $R(t, J_1)$ имеет вид (6.38), получим дифференциальное уравнение для определения функции $R_0(t)$

$$(\ln R_0)' = (\varphi - \gamma)\mathrm{tr}A \qquad (6.42)$$

и дополнительное соотношение

$$s_{22}\vec{u}_0\cdot\vec{\omega}_2 = v^2\vec{a}_2\cdot\vec{\omega}_2. \qquad (6.43)$$

В результате получена ПОДМОДЕЛЬ 10, которая состоит из уравнений:

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >,\quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega}\mathrm{tr}A,$$

$$S' + SA + A^TS = (1-\gamma+\varphi)S\mathrm{tr}A,\quad S\vec{\omega} = 0,\quad \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 - (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A = v^2 s_{22}^{-1}\varphi\vec{s}_2\mathrm{tr}A,$$

где λ определено равенством (6.21).

Представление плотности дробного типа

$$\rho = \frac{\left(s_{23} + \omega^1\right)R_0(t)}{(S\vec{x} + \Omega\vec{x} + \vec{v})_3\,(S\vec{x} - \Omega\vec{x} + \vec{v})_2}$$

где $R_0(t)$ удовлетворяет уравнению (6.42). Здесь нижний индекс означает номер координаты вектора. I_1, J_1 из (6.22), (6.23). Уравнение состояния (6.41).

Замечание. Конечные соотношения не переопределяют подмодель. Это легко проверить дифференцированием.

Замечание. Данная подмодель получена в случае $\omega^1 \neq 0$ и $\Delta_1 = 0$. При этом ω^2 и ω^3 считаются произвольными. В зависимости от значений ω^2 и ω^3 возможны три случая:

(1) $\omega^2 \neq 0, \omega^3 \neq 0$ и $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ (иначе получим после переобозначения случай, рассмотренный в п. 2).
(2) $\omega^2 = 0, \omega^3 \neq 0$, $\Delta_3 = 0$.
(3) $\omega^2 = \omega^3 = 0$.

Для 2-го и 3-го случаев дополнительное соотношение (6.43) после дифференцирования тождественно выполняется в силу уравнений подмоделей. Таким образом, оно будет выполняться в любой момент времени, если будет выполняться в начальный момент времени. Для 1-го случая получаем противоречие.

В уравнение (6.25) входят переменные α и β, которые выражаются через переменные t, ρ, J_1. Если считать, что $R = R(t)$, то в выражениях для α и β переменная J_1 свободная (функций, зависящих от J_1 нет). После подстановки α и β в (6.25) кэффициенты при различных степенях J_1 приравяем нулю, получим (6.36) и соотношение, линейное по ρ. Приравнивая нулю коэффициенты при ρ в этом соотношении, получим два равенства:

$$\bar{s}_{22}s_{33} - 2s_{23}\bar{s}_{23} + \bar{s}_{33}s_{22} = 0, \quad s_{33}\sigma_2 - \lambda s_{22}\sigma_3 = 0. \tag{6.44}$$

С учетом этих равенств и уравнения (6.36), равенство (6.25) будет содержать слагаемые, зависящие только от ρ и t. При этом ρ входит в виде функций $(\ln\rho)^2$, $\ln\rho$, ρ^{-2}, ρ^{-1}, $\rho^{-1}\ln\rho$. Так как H зависит только от ρ, поэтому коэффициенты при $(\ln\rho)^2$, $\ln\rho$, ρ^{-2}, ρ^{-1}, $\rho^{-1}\ln\rho$ должны быть постоянными, значит $H(\rho)$ будет имеет представление

$$H(\rho) = 2^{-1}p_1(\ln\rho)^2 + p_4\ln\rho + p_5\rho^{-1} + 2^{-1}p_2\rho^{-2} + p_3\rho^{-1}\ln\rho + p_6,$$

Приравнивание коэффициентов при $(\ln\rho)^2$, $\ln\rho$, ρ^{-2}, ρ^{-1}, $\rho^{-1}\ln\rho$ некоторым постоянным, дает следующие равенства:

$$p_1 = p_3 = p_4 = 0, \quad R^2(\bar{s}_{22}\lambda^2 - 2\bar{s}_{23}\lambda + \bar{s}_{33}) = (2\omega^1)^4\lambda^2 p_2, \tag{6.45}$$

$$R^2(\sigma_2\lambda - \sigma_3) + 4(\omega^1)^2\lambda p_2(s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3) = 4(\omega^1)^2\lambda R p_5, \tag{6.46}$$

$$(s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3)^2\lambda^2(2\omega^1)^4 p_2 + H_1R^2 = p_6\lambda^2(2\omega^1)^4R^2.$$

Из (6.36), (6.44), (6.45) получаем систему для определения элементов $\bar{s}_{22}, \bar{s}_{23}$, $\bar{s}_{33}$. Определитель системы не равен нулю. Решение запишем в матричном виде

$$S' + SA + A^TS - (1-\gamma)S\mathrm{tr}A = \left(\frac{2\omega^1}{R}\right)^2 p_2 e_1 \otimes e_1 \mathrm{tr}A,$$

где $e_1 = \vec{s}_3 - \vec{\omega}_3$. Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения матрицы S.

Из уравнений (6.44), (6.46) следует система уравнений для определения функций σ_2, σ_3. Определитель системы не равен нулю. Решение запишем в векторном виде

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 - (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A = \frac{2\omega^1}{R}\left(p_5 - p_2\delta R^{-1}\right)e_1\mathrm{tr}A,$$

где $\delta = s_{33}v^2 - \lambda s_{22}v^3$. Последнее уравнение есть дифференциальное уравнение подмодели для определения вектора $\vec{v}$.

Определим уравнение состояния. Так как $p_1 = p_3 = p_4 = 0$, то, учитывая обозначение (6.9) имеем

$$h(\rho) = p_2\rho^{-1} - p_5\ln\rho + p_0, \quad \Rightarrow$$

$$p = \rho^\gamma h_0(\mathcal{S}) - p_2\frac{\rho^{-1} - \rho^\gamma}{\gamma+1} + \frac{p_5}{\gamma}\ln\rho \text{ при } \gamma \neq 0, \tag{6.47}$$

$$p = h_0(\mathcal{S}) - p_2\rho^{-1} - \ln\rho\left(p_0 - 2^{-1}p_5\ln\rho\right) \text{ при } \gamma = 0,$$

где p_0 – произвольная постоянная, h_0 – произвольная функция. После подстановки функции ρ вида (6.23), где $R = R(t)$, в уравнение (2.3) для плотности получим дифференциальное уравнение для определения функции $R(t)$:

$$(\ln R)' + \mathrm{tr}A = (\ln \delta)' + 2\delta^{-1}\vec{u}_0 \cdot (s_{33}\vec{\omega}_2 - s_{22}\lambda\vec{\omega}_3). \tag{6.48}$$

Таким образом, вполне определенная ПОДМОДЕЛЬ 11 состоит из уравнений

$$A' + A^2 = S + E < \vec{\omega} >, \quad \vec{\omega}' = A\vec{\omega} - \gamma\vec{\omega}\mathrm{tr}A, \quad S\vec{\omega} = 0, \quad \vec{v}\cdot\vec{\omega} = 0,$$

$$S' + SA + A^T S - (1-\gamma)S\ \mathrm{tr}A = \left(\frac{2\omega^1}{R}\right)^2 p_2 e_1 \otimes e_1^T \mathrm{tr}A,$$

$$\vec{v}' + A^T\vec{v} + S\vec{u}_0 + \vec{\omega}\times\vec{u}_0 - (1-\gamma)\vec{v}\mathrm{tr}A = \frac{2\omega^1}{R}\left(p_5 - p_2\delta R^{-1}\right)e_1\mathrm{tr}A,$$

где λ определено равенством (6.21). Плотность имеет вид (6.23), где $R(t, J_1) = R(t)$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению (6.48). Уравнение состояния (6.47).

Замечание. Конечные соотношения выполняются в любой момент времени, если выполняются в начальный момент времени. Таким образом, подмодель вполне определена.

Резюме. В статье получены все возможные **новые** подмодели газовой динамики с линейным полем скоростей. Всего одиннадцать подмоделей.

Список литературы

[1] G. L. Dirichlet, *Untersuchunger uber eih Problem der Gydrodynamik*, J. Reine Angev. Math., **58** (1860), 181.

[2] Б. Риман, *Сочинения*, ГИТТЛ, Москва-Ленинград, 1948.

[3] Л.В. Овсянников, *Новое решение уравнений гидродинамики* , Докл. АН СССР, **111(1)** (1956), 47–49. MR0085824

[4] J.F. Dyson, *Dynamics of a spinning gas cloud*, J.Math.Mech., **18(1)** (1968), 91–101. Zbl 0197.24501

[5] В.К. Андреев, *К задаче о неустановившемся движении сжимаемой жидкости со свободной границей*, ДАН СССР, **244(5)** (1979), 1107–1110. MR0530434

[6] О.И. Богоявленский, *Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике.*, Наука, Москва, 1980. MR0604548

[7] И.В. Немчинов, *Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме*, ПММ, **29(1)** (1965), 134–140.

[8] С.И. Анисимов, Ю.И. Лысиков, *Разлет трехосного газового эллипсоида в регулярном режиме*, ПММ, **34(5)** (1970), 926–929.

[9] С.И. Анисимов, Н.А. Иногамов, *Развитие неустойчивости и потеря симметрии при изэнтропическом сжатии сферической капли*, Письма в ЖЭТФ, **20(3)** (1974), 174–176.

[10] С.В. Хабиров, *Движения газа без расхождения с линейным полем скоростей*, Труды института математики с ВЦ УНЦ РАН, **1** (2008), 208–215.

[11] M. Fujimoto *Gravitational collapse of rotating gaseous ellipsoids*, The Astrophysical Journal, **152** (1967), 523–536.

[12] Л.З. Уразбахтина *Математическое моделирование движения сжимаемой жидкости методами группового анализа*, диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. (2009).

Юлия Валерьевна Юлмухаметова
Институт механики УНЦ РАН,
пр. Октября 71,
450054, Уфа, Россия
E-mail address: yulmukhametova.yulya@yandex.ru