S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 227–246 (2012) УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)
MSC 35M20, 74F10, 76S05

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИДРАВЛИЧЕСКОГО УДАРА В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

И.В. НЕКРАСОВА

Abstract. In the present paper we derive mathematical models of the pressure distribution field near the well during the hydraulic shock. To get these models we follow the scheme, suggested by J. Keller and R. Burridge. The scheme is based upon a rigorous homogenization of the exact mathematical model, describing on a microscopic level the joint motion of an elastic solid skeleton and a viscous fluid filling the pores.

Keywords: hydraulic shock, Stokes and Lamé's equations, two-scale convergence.

Введение

Гидравлическим ударом называется резкое повышение давления в некоторой системе, заполненной жидкостью, как трубы, трещины и поры. Этот процесс в нефтяной скважине является частью процесса гидравлического разрыва нефтяного пласта. Существующие математические модели гидравлического удара являются либо упрощенными инженерными моделями ([1], [2], [3]), косвенно связанными с фундаментальными законами механики сплошных сред, либо моделями, описывающими распространение трещин в упругой среде ([4]).

Nekrasova, I.V., Mathematical models of a hydraulic shock in a viscous liquid.

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).

Поступила 25 января 2012 г., опубликована 11 апреля 2012 г.

Но эти модели не работают на более сложных системах, таких как нефтяная скважина. Это, в первую очередь, вызвано отсутствием достаточно простой физически корректной математической модели, описывающей это явление. Под физически корректной математической моделью будем понимать любую из основных моделей механики сплошных сред, либо модель асимптотически близкую к некоторой физически корректной феноменологической модели физического процесса на микроскопическом уровне ([5]).

В настоящей работе мы получили физически корректные математические модели гидравлического удара следуя очень естественной идее Р. Барриджа и Дж. Келлера [6]: в первую очередь, описать физический процесс на микроскопическом уровне, опираясь на физически корректную математическую модель, затем, если модель содержит малый параметр, найти все предельные режимы (усредненные уравнения) устремив малый параметр к нулю.

В качестве базовой математической модели гидравлического удара на микроскопическом уровне мы рассматриваем модель, описывающую кратковременные изотермические процессы в несжимаемой среде [7] – [9], где безразмерный вектор перемещений $\boldsymbol{w}$ сплошной среды в безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\boldsymbol{x'} = L\boldsymbol{x}, \quad t' = \tau t, \quad \boldsymbol{w'} = \frac{L^2}{g\tau^2}\boldsymbol{w}$$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в области Ω при $t > 0$:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w} = 0, \tag{0.1}$$

$$\tilde{\varrho}\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \tilde{\varrho}\boldsymbol{F}, \tag{0.2}$$

$$\mathbb{P} = \tilde{\chi}\bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + (1-\tilde{\chi})\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - p\,\mathbb{I}, \tag{0.3}$$

где

$$\tilde{\varrho} = \tilde{\chi}\varrho_f + (1-\tilde{\chi})\varrho_s,$$
$$\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}) = (1/2)\left(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T\right),$$

$\tilde{\chi}(\boldsymbol{x})$ – характеристическая функция порового пространства, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$ – вектор удельных массовых сил, $p\,(\boldsymbol{x}, t)$ – давление, ρ_f и ρ_s соответственно средние безразмерные плотности жидкости в порах и твердого скелета грунта, соотнесенные к средней плотности воды ρ_0, $\mathbb{I}$ – единичная матрица.

Безразмерные постоянные $\bar{\alpha}_\mu$ и $\bar{\alpha}_\lambda$ определяются формулами

$$\bar{\alpha}_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \bar{\alpha}_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где μ – вязкость жидкости, λ – упругая постоянная Ламэ, τ – характерное время физического процесса, L – характерный размер рассматриваемой физической области.

Уравнение (0.2) понимается в смысле теории распределений и содержит уравнения Стокса в жидкой части, уравнения Ламэ в твердом скелете и условие непрерывности нормальных напряжений на границе «твердый скелет – поровое пространство».

Эта математическая модель содержит естественный малый параметр ε, которым является отношение среднего размера пор l к характерному размеру

L: $\varepsilon = l/L$. Поэтому вполне обоснованным является нахождение предельных режимов в точной модели при стремлении малого параметра к нулю. Такие приближения сильно упрощают исходную задачу, сохраняя при этом все ее основные свойства. Но даже при наличии малого параметра задача все еще достаточно трудная и необходимы дополнительные упрощающие допущения. С геометрической точки зрения таким упрощением является предположение о периодичности порового пространства. А именно, пусть выполнено следующее

Предположение 1. *1) Пусть область Y_s есть «твердая часть» единичного куба $Y = (0,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$, и его «жидкая» часть Y_f есть открытое дополнение Y_s в Y и граница $\gamma = \partial Y_f \bigcap \partial Y_s$ есть липшицева поверхность.*

2) Область E_f есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_f^\varepsilon = \varepsilon Y_f$, область E_s есть периодическое повторение в $\mathbb{R}^3$ элементарной ячейки $Y_s^\varepsilon = \varepsilon Y_s$.

3) Поровое пространство $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_f$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_f, а твердый скелет $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega = \Omega \cap E_s$ есть периодическое повторение в Ω элементарной ячейки εY_s. Непрерывная по Липшицу граница $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$ есть периодическое повторение в Ω границы $\varepsilon\gamma$.

4) $\Omega = \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma^\varepsilon \cup \Omega_s^\varepsilon$. Поровое пространство Ω_f^ε и твердый скелет Ω_s^ε являются связными множествами.

В этих предположениях

$$\tilde{\chi}(\boldsymbol{x}) = \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi_0(\boldsymbol{x})\chi(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}),$$

где $\chi_0(\boldsymbol{x})$ есть характеристическая функция области Ω.

Пусть безразмерные параметры $\bar{\alpha}_\mu$ и $\bar{\alpha}_\lambda$ зависят от малого параметра задачи ε и существуют пределы (конечные или бесконечные) :

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \bar{\alpha}_\mu(\varepsilon) = \mu_0,\ \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\bar{\alpha}_\mu}{\varepsilon^2} = \mu_1,\ \lim_{\varepsilon\searrow 0} \bar{\alpha}_\lambda(\varepsilon) = \lambda_0,\ \lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{\bar{\alpha}_\lambda}{\varepsilon^2} = \lambda_1.$$

Целью настоящей работы является нахождение предельных режимов (усредненных уравнений) и соответствующих начальных и краевых условий при

$$0 < \mu_0 < \infty,\ \lambda_0 = 0$$

в следующих случаях:

1) $\lambda_1 = \infty$,

2) $0 \leqslant \lambda_1 < \infty$.

1. Предварительные сведения

1.1. **Двухмасштабная сходимость.** Вывод усредненных уравнений основан на систематическом применении метода двухмасштабной сходимости, предложенного Г. Нгуетсенгом [10] и получившего широкое применение в теории усреднения.

Определение 1. *Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ называется двухмасштабно сходящейся к пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ тогда и только тогда, когда для любой гладкой 1-периодической по $\boldsymbol{y}$ функции $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0} \int_{\Omega_T} \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)\sigma\left(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{x}/\varepsilon\right) d\boldsymbol{x}dt = \int_{\Omega_T}\int_Y \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}d\boldsymbol{x}dt. \qquad (1.1)$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей утверждаются следующей теоремой:

Теорема 1. ***(теорема Нгуетсенга)***

1. *Из любой ограниченной последовательности в $L^2(\Omega_T)$ можно выбрать подпоследовательность, двухмаситабно сходящуюся к некоторому пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$.*

2. *Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$. Тогда существуют 1-периодическая по $\boldsymbol{y}$ функция $\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что $\varphi, \nabla_y\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$, и φ^ε и $\varepsilon\nabla_x\varphi^\varepsilon$ двухмасштабно сходятся к φ и $\nabla_y\varphi$, соответственно.*

3. *Если последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x\varphi^\varepsilon\}$ равномерно ограничены в $L^2(\Omega_T)$, то существуют функции $\varphi \in L^2(\Omega_T)$ и $\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$ такие, что ψ 1-периодична по $\boldsymbol{y}$, $\nabla_y\psi \in L^2(\Omega_T \times Y)$, и φ^ε и $\nabla_x\varphi^\varepsilon$ двухмаситабно сходятся к φ и $\nabla_x\varphi(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y\psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, соответственно.*

Следствие 1. *Пусть $\sigma \in L^2(Y)$, $\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ и последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(\Omega_T)$ двухмаситабно сходится к некоторому пределу $\varphi \in L^2(\Omega_T \times Y)$. Тогда последовательность $\sigma^\varepsilon\varphi^\varepsilon$ двухмаситабно сходится к $\sigma\varphi$.*

1.2. **Лемма о продолжении.** В задачах, аналогичных модели (0.1) - (0.3), характерным является следующий факт: оценки на градиент перемещения различны в Ω_s и Ω_f (в жидкой и твердой фазах), что не позволяет непосредственно использовать более сильные оценки. Эта сложность преодолевается продолжением поля перемещений, определенного в Ω_f, на всю область Ω с сохранением оценки на норму градиента в Ω_f. Справедлива следующая лемма, которую приведем в удобной для нас формулировке ([11], [12], [13]):

Лемма 1. *Пусть выполнены предположения о геометрии области Ω_f^ε и вектор функция $\boldsymbol{u}^\varepsilon$ принадлежит пространству $W_2^1(\Omega_f^\varepsilon)$.*

Тогда существует функция $\boldsymbol{v}^\varepsilon \in W_2^1(\Omega)$ такая, что ее сужение на подобласть Ω_f^ε совпадает с $\boldsymbol{u}^\varepsilon$:

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{v}^\varepsilon(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{u}^\varepsilon(\boldsymbol{x})) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

и

$$\|\boldsymbol{v}^\varepsilon\|_{2,\Omega} \le C\|u^\varepsilon\|_{2,\Omega_f^\varepsilon}, \quad \|\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}^\varepsilon)\|_{2,\Omega} \le C\|\mathbb{D}(x, \boldsymbol{u}^\varepsilon)\|_{2,\Omega_f^\varepsilon},$$

где постоянная C зависит только от геометрии ячейки Y и не зависит от параметра ε.

Лемма 2. *Обозначим для краткости через A оператор продолжения функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, заданной в $\Omega_f \subset \Omega$ в область Ω:*

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) = A\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t).$$

Оператор A обладает следующими свойствами:
1. Продолжение функции u в Ω_s является измеримой и суммируемой по времени функцией, то есть, если

$$\boldsymbol{u} \in L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega_f)\big), \quad \text{то} \quad A\boldsymbol{u} \in L_2\big((0,T); W_2^1(\Omega_s)\big);$$

2. Операция дифференцирования по времени и операция продолжения перестановочны, а именно:

$$A\big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\big) = \frac{\partial}{\partial t}(A\boldsymbol{u}),$$

если $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \in L_2\big((0,T); L_2(\Omega_f)\big)$.

Доказательство. По построению A – линейный непрерывный оператор, и не зависит от t:

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}|^2\,dx \le C\int_{\Omega_f} |\boldsymbol{u}|^2\,dx, \tag{1.2}$$

$$\int_\Omega |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v})|^2\,dx \le C\int_{\Omega_f} |\mathbb{D}(x,\boldsymbol{u})|^2\,dx. \tag{1.3}$$

При этом, если $\boldsymbol{u} \in C\Big((0,T); C^1(\overline{\Omega}_f)\Big)$, то $\boldsymbol{v} \in C\Big((0,T); C^1(\overline{\Omega}_s)\Big)$.

В частности, из неравенств

$$\int_\Omega |\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t+h)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)|^2\,dx \le C\int_{\Omega_f} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t+h)-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)|^2\,dx$$

и

$$\int_\Omega |\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t{+}h)\big)-\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2\,dx \le C\int_{\Omega_f} |\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t{+}h)\big)-\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\big)|^2\,dx$$

следует измеримость по t функций $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$ и $\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\big)$.

Поэтому из (1.2), (1.3) следует, что

$$\boldsymbol{v} \in L_2\Big((0,T); W_2^1(\Omega)\Big), \quad \text{если} \quad \boldsymbol{u} \in L_2\Big((0,T); W_2^1(\Omega_f)\Big).$$

Пусть теперь $\partial \boldsymbol{u}/\partial t \in L_2\Big((0,T); W_2^1(\Omega_f)\Big)$. Покажем, что

$$A\big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\big) = \frac{\partial}{\partial t}(A\boldsymbol{u}). \tag{1.4}$$

Рассмотрим для этого гладкую функцию $\varphi(\boldsymbol{x},t)$, такую что $\varphi(\boldsymbol{x},t) \equiv 0$ при $0 < t < h_0$ и $T - h_0 < t < T$. Пусть $h < h_0$ и

$$\boldsymbol{u}_h = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \tag{1.5}$$

$$\boldsymbol{u}_{\bar h} = \frac{1}{h}\int_{t-h}^{t} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \tag{1.6}$$

где предполагается, что $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t > T$.

Имеем

$$\int_{\Omega_T} A\big(\big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\big)_h\big)\cdot\varphi\,dxdt = \int_{\Omega_T} A\big(\frac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t+h)-u(\boldsymbol{x},t)}{h}\big)\cdot\varphi\,dxdt =$$

$$\int_{\Omega_T}\big(\frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t+h)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}{h}\big)\cdot\varphi\,dxdt = -\int_{\Omega_T}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big)_{\bar h}\,dxdt$$

или

$$\int_{\Omega_T}\{A\big(\big(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\big)_h\big)\cdot\varphi + A(\boldsymbol{u})\big(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big)_{\bar h}\}\,dxdt = 0. \tag{1.7}$$

В силу свойств операторов сглаживания (1.5) и (1.6)

$$\|\boldsymbol{u}_h - \boldsymbol{u}\|_{2,\Omega_T} \to 0,$$

$$\|\varphi_{\bar{h}} - \varphi\|_{2,\Omega_T} \to 0$$

при $h \to 0$.

Учитывая непрерывность оператора A, окончательно имеем из (1.7) при $h \to 0$

$$\int_{\Omega_T} \{A(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}) \cdot \varphi + A(\boldsymbol{u})\frac{\partial \varphi}{\partial t}\}\, dxdt = 0,$$

где φ – гладкие, равные нулю при $t = T$ и $t = 0$.

Последнее равенство означает, что

$$A(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} A(\boldsymbol{u}).$$

□

Лемма 3. *(Граничные свойства функций, заданных на периодических множествах)*
Пусть

$$v^\varepsilon \in L_2(0, T; W_2^1(\Omega)),$$

$v^\varepsilon = 0$ *на части* $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_f^\varepsilon \subset S_f^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$ *границы* $S = \partial\Omega$ *и последовательность* $\{v^\varepsilon\}$ *сходится слабо в* $L_2(0, T; W_2^1(\Omega))$ *к функции* v.

Тогда $v = 0$ *на части* S_0 *границы* S. *То есть*

$$\int_0^T \int_{S_0} |v(\boldsymbol{x} + \delta \boldsymbol{n}, t)|\, d\sigma dt \to 0 \quad \textit{при} \quad \delta \to 0,$$

где $\boldsymbol{n}$ *– вектор единичной нормали к границе* S *в точке* $\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = h(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ функция $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ является соленоидальной финитной в области $Y_f \subset Y$, а функция $h(\boldsymbol{x}, t)$ сосредоточена в малой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0 \in S_0$. Тогда по построению

$$v^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x} \in S_0,$$

поскольку функция $\boldsymbol{\varphi}^\varepsilon$ исчезает на дополнении к σ^ε, а v^ε обращается в ноль на части σ^ε границы S_0.

Поэтому

$$\int_{\Omega_T} (v^\varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}^\varepsilon \nabla v^\varepsilon)\, dxdt = 0.$$

В силу теоремы Нгуетсенга существует функция $V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) \in L^2(\Omega_T \times Y)$ такая, что V 1-периодична по $\boldsymbol{y}$, $\nabla_y V \in L^2(\Omega_T \times Y)$, и с точностью до подпоследовательностей $\{v^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x v^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно к $v(\boldsymbol{x}, t)$ и $\nabla_x v(\boldsymbol{x}, t) + \nabla_y V(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$, соответственно. Расписывая подробнее последнее тождество и переходя к пределу, получим

$$\int_{\Omega_T} \Big(v^\varepsilon \nabla h\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon) + h\, \boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon) \nabla v^\varepsilon\Big)\, dxdt \to$$

$$\int_{\Omega_T} \{v \nabla h \langle \boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y + h\, \langle (\nabla v + \nabla_y V)\boldsymbol{\varphi}_0 \rangle_Y\}\, dxdt = 0.$$

Выберем $\boldsymbol{\varphi}_0^i(\boldsymbol{y})$ так, чтобы функция $\boldsymbol{\varphi}_0^{(i)}$ обращалась в ноль вне малого шара $Y_0 \subset Y_f$ и $\langle \boldsymbol{\varphi}_0^{(i)} \rangle_Y = \boldsymbol{e}_i, \quad i = 1, 2, 3$, где $\boldsymbol{e}_i$ – единичные векторы декартовой системы координат. Доказательство возможности такого построения в идейном плане повторяет похожее утверждение в [14], но технически более громоздкое.

Полагая

$$v_i = \langle(\nabla v + \nabla_y V)\boldsymbol{\varphi}_0^{(i)}\rangle_Y \in L_2(\Omega_T),$$

получим

$$\int_{\Omega_T}\Big(v\frac{\partial h}{\partial x_i} + v_i h\Big)\,dxdt = 0, \quad i = 1,2,3,$$

для произвольных $h \in W_2^{1,0}(\Omega_T)$. Последнее тождество означает, что $v_i = \partial v/\partial x_i$ и $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = 0$ на S_0. □

Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

1)

$$\langle\Phi\rangle_Y = \int_Y \Phi\,dy, \quad \langle\Phi\rangle_{Y_f} = \int_Y \chi\Phi\,dy, \quad \langle\Phi\rangle_{Y_s} = \int_Y (1-\chi)\Phi\,dy,$$

$$\langle\varphi\rangle_\Omega = \int_\Omega \varphi\,dx, \quad \langle\varphi\rangle_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T}\varphi\,dxdt.$$

2) если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ два вектора, то матрица $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ определяется как

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

для произвольного вектора $\mathbf{c}$;

3) если B и C две матрицы, то $B\otimes C$ есть тензор четвертого ранга такой, что его свертка с произвольной матрицей A дается формулой

$$(B\otimes C) : A = B(C : A);$$

4) через $\mathbb{I}^{ij}$ обозначим матрицу, у которой единственный отличный от нуля элемент, равный единице, стоит на пересечении i-той строки и j-того столбца;

5) наконец

$$\mathbb{J}^{ij} = \frac{1}{2}(\mathbb{I}^{ij} + \mathbb{I}^{ji}) = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_i),$$

где $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ – ортонормированный базис.

2. Постановка задачи

Как правило, начальный импульс, определяющий гидравлический удар, передается в нефтяной пласт через заполненный жидкостью резервуар. Моделируя этот процесс, мы рассматриваем в качестве области Ω подобласть куба $Q = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 | -1 < x_i < 1,\ i = 1,2,3\}$, такую что дополнение Ω в Q есть цилиндр $\overline{\Omega}^{\,0} = \{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2^2 \leqslant \delta^2 < 1,\ -1 < x_3 < 1\}$ (см. рис. 1). Область Ω^0 и есть тот резервуар, через который в область Ω передается начальный импульс.

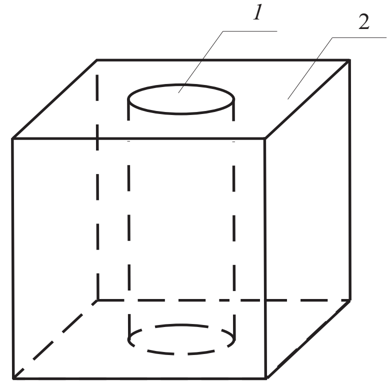

Рис. 1. 1 – область Ω^0, 2 – область Ω

Для фиксированного $\varepsilon > 0$ совместное движение твердого скелета и жидкости, заполняющей поры, в области Ω_T описывается системой

$$\nabla \cdot \boldsymbol{w}^\varepsilon = 0, \tag{2.1}$$

$$\varrho^\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}, \tag{2.2}$$

$$\mathbb{P} = \chi^\varepsilon \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + (1-\chi^\varepsilon)\bar{\alpha}_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon\, \mathbb{I}. \tag{2.3}$$

В области Ω_T^0 движение жидкости описывается системой Стокса, состоящей из уравнения неразрывности (2.1) и уравнения баланса импульса

$$\varrho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} = \nabla \cdot \mathbb{P}^0, \tag{2.4}$$

$$\mathbb{P}^0 = \bar{\alpha}_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) - p^\varepsilon\, \mathbb{I}. \tag{2.5}$$

На общей границе $S^0 = \partial\Omega \cap \partial\Omega^0$ выполнены условия непрерывности перемещений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.6}$$

и нормальных напряжений

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega^0}} \mathbb{P}^0(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega}} \mathbb{P}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}_0), \tag{2.7}$$

для $(\boldsymbol{x}^0, t) \in S_T^0 = S^0 \times (0, T)$.

Сформулируем граничные условия на $S = \partial Q$. На верхнем основании $S^1 = \{x_3 = 1\} \cap \partial\Omega^0$ цилиндра Ω_0 задано нормальное напряжение

$$\mathbb{P}^0(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{e}_3 = p_0(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{e}_3, \tag{2.8}$$

где $p_0(\boldsymbol{x}, t)$ есть импульс, определяющий гидравлический удар.

Будем считать, что функция $p_0(\boldsymbol{x}, t) = p_0(x_1, x_2, t)$ финитна в области $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 + x_2^2 < \delta^2 < 1\}$.

На оставшейся части внешней границы $S^2 = S \backslash S^1$

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) = 0,\ (\boldsymbol{x}, t) \in S_T^2 = S^2 \times (0, T). \tag{2.9}$$

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, 0) = 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}(\boldsymbol{x}, 0) = 0,\ \boldsymbol{x} \in \Omega. \tag{2.10}$$

Обычным образом определяется понятие обобщенного решения задачи (2.1) – (2.10).

Определение 2. *Пара функций* $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, p^\varepsilon\}$, *таких что*

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon \in W_2^{1,1}(\Omega_T),\ p^\varepsilon \in L_2(\Omega_T),$$

называется обобщенным решением задачи (2.1) – (2.10), если данные функции удовлетворяют уравнению неразрывности (2.1) почти всюду в Q_T, граничному условию (2.8), начальному условию (2.10) для функции $\boldsymbol{w}^\varepsilon$, и интегральному тождеству

$$\int_{Q_T}\Big(-\tilde{\varrho}^\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\big(\zeta\mathbb{P}^0+(1-\zeta)\mathbb{P}\big):\nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)dxdt=\int_{Q_T}\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p_{\,0})dxdt \quad (2.11)$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}\in W_2^{1,1}(Q_T)$, таких что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$ на границе S_T^2, и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T)=0$, $\boldsymbol{x}\in Q$.

В уравнении (2.11) $\tilde{\varrho}^\varepsilon=\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)\varrho_f+(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\varrho_s$ и $\zeta=\zeta(\boldsymbol{x})$ есть характеристическая функция области Ω^0 в Q. Через $A:B$ обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е. $A:B=\operatorname{tr}(A\circ B^*)=\sum_{i,j=1}^3 A_{ij}B_{ij}$.

Иногда мы будем записывать тождество (2.11) в дифференциальной форме

$$\tilde{\varrho}^\varepsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}=\nabla\cdot\big(\zeta\mathbb{P}^0+(1-\zeta)\mathbb{P}\big), \quad (2.12)$$

и говорить, что функции $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon,\,p^{\,\varepsilon}\}$ удовлетворяют уравнению (2.12) и граничному условию (2.8) в смысле теории распределений.

Будем считать, что функция $p_{\,0}$ подчинена следующему условию

$$\int_{Q_T}\big(|\nabla\,p_{\,0}(\boldsymbol{x},t)|^2+|\nabla\frac{\partial p_{\,0}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t)|^2\big)dxdt=\mathfrak{P}^2<\infty,$$

где $\mathfrak{P}$ – константа, зависящая только от областей Q, Ω и Ω_0.

Для формулировки нижеследующих утверждений мы нуждаемся в дополнительной конструкции. А именно, пусть $Q_f^\varepsilon=Q\backslash\overline{\Omega}{}_s^\varepsilon$ и

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon=\mathbb{E}_{Q_f^\varepsilon}\big(\boldsymbol{w}^\varepsilon\big),$$

где

$$\mathbb{E}_{Q_f^\varepsilon}:W_2^1(Q_f^\varepsilon)\to W_2^1(Q)$$

есть оператор продолжения из Q_f^ε на Q, так что

$$\boldsymbol{w}_f^\varepsilon=\boldsymbol{w}^\varepsilon \quad \text{в} \quad Q_f^\varepsilon\times(0,T),$$

и

$$\int_Q|\boldsymbol{w}_f^\varepsilon|^2dx\leqslant C_0\int_{Q_f^\varepsilon}|\boldsymbol{w}^\varepsilon|^2dx$$

$$\int_Q|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}_f^\varepsilon)|^2dx\leqslant C_0\int_{Q_f^\varepsilon}|\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)|^2dx \quad (2.13)$$

(более подробно о таком продолжении см. работу [11]).

Вывод усредненных уравнений базируется на следующей теореме.

Теорема 2. При всех $\varepsilon>0$ на произвольном интервале времени [0,T] существует единственное обобщенное решение задачи (2.1) – (2.10) и

$$\max_{0\leq t\leq T}\int_Q\Big(|\frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}|^2+|p^\varepsilon|^2+\bar{\alpha}_\mu\big(\zeta+(1-\zeta)\chi^\varepsilon\big)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2+$$
$$\bar{\alpha}_\lambda(1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t})|^2\Big)dx\leqslant C_0\mathfrak{P}^2, \quad (2.14)$$

где постоянная C_0 не зависит от малого параметра ε.

Доказательство существования обобщенного решения задачи (2.1) – (2.10) при всех $\varepsilon > 0$ и оценки (2.13) стандартно (см. [5], [8]) и базируется на энергетическом тождестве

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_Q \Big(\tilde{\varrho}^{\varepsilon}|\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}|^2 + \bar{\alpha}_{\lambda}(1-\zeta)(1-\chi^{\varepsilon})|\mathbb{D}(x,\frac{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t})|^2\Big)dx +$$
$$\int_Q \bar{\alpha}_{\mu}\big(\zeta + (1-\zeta)\chi^{\varepsilon}\big)|\mathbb{D}(x,\frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2})|^2 dx = \int_Q \nabla(\frac{\partial p_0}{\partial t})\cdot \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}}{\partial t^2}dx,$$

которое получится после дифференцирования уравнения (2.12) по времени, умножения на $\partial^2 \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t^2$ и интегрирования по частям по области Q.

Давление p^{ε} оценивается из интегрального тождества (2.11) как линейный непрерывный функционал над пространством функций $L_2((0,T);W_2^1(Q))$ равных нулю на границе S^2.

3. Формулировка основных результатов

Теорема 3. Пусть $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\, p^{\,\varepsilon}\}$ – слабое решение задачи (2.1) – (2.10),

$$\lambda_1 = \infty,$$

и $\boldsymbol{v}_f^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{Q_f^{\varepsilon}}\big(\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t\big)$. Тогда

1) последовательность $\{\boldsymbol{v}_f^{\varepsilon}\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к функции $\boldsymbol{v}_f$, последовательности $\{\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t\}$ и $\{p^{\,\varepsilon}\}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к функциям $\boldsymbol{v} = \partial \boldsymbol{w}/\partial t = \boldsymbol{v}_f$ и p соответственно;

2) предельные функции $\boldsymbol{v}_f$ и p есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_f = 0, \tag{3.1}$$

закона сохранения импульса

$$\varrho(\boldsymbol{x})\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t} = \nabla \cdot \Big(\mu_0\big(\zeta\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f) + (1-\zeta)\,\mathfrak{N}_0^f : \mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)\big) - p\,\mathbb{I}\Big), \tag{3.2}$$

совместно с краевыми и начальным условиями

$$\Big(\mu_0\mathbb{D}\big(x,\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)\big) - p(\boldsymbol{x},t)\mathbb{I}\Big)\cdot \boldsymbol{e}_3 = -p_0(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{x}\in S^1,\ t\in(0,T), \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t) = 0,\ \boldsymbol{x}\in S^2,\ t\in(0,T), \tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{x}\in Q; \tag{3.5}$$

3) задача (3.1) – (3.5) имеет единственное решение.

В (3.2)

$$\varrho(\boldsymbol{x}) = \Big(\zeta(\boldsymbol{x}) + \big(1-\zeta(\boldsymbol{x})\big)m\Big)\varrho_f + \big(1-\zeta(\boldsymbol{x})\big)(1-m)\varrho_s,$$

$m = \int_Y \chi dy$ – пористость среды, симметричный строго положительно определённый постоянный тензор четвертого ранга $\mathfrak{N}_0^f$ определён ниже формулой (4.12).

Теорема 4. Пусть $\{\boldsymbol{w}^{\varepsilon},\, p^{\,\varepsilon}\}$ – слабое решение задачи (2.1) – (2.10),

$$0 \leqslant \lambda_1 < \infty,$$

и $\boldsymbol{v}_f^{\varepsilon} = \mathbb{E}_{Q_f^{\varepsilon}}\big(\partial \boldsymbol{w}^{\varepsilon}/\partial t\big)$. Тогда

1) последовательность $\{\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$ сходится слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ к функции $\boldsymbol{v}_f$, последовательности $\{\boldsymbol{v}_s^\varepsilon\}$, $\{p^{\,\varepsilon}\}$ и $\{p_s^{\,\varepsilon}\}$, где

$$\boldsymbol{v}_s^\varepsilon = (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t},\ p_s^{\,\varepsilon} = (1-\zeta)(1-\chi^\varepsilon)p^{\,\varepsilon},$$

сходятся слабо в $L_2(Q_T)$ к функциям $\boldsymbol{v}_s$, p и p_s соответственно;

2) предельные функции $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{v}_s$, p и p_s есть решение системы усредненных уравнений в области Q_T, состоящей из уравнения неразрывности

$$\nabla\cdot\big((\zeta+(1-\zeta)m)\boldsymbol{v}_f+\boldsymbol{v}_s\big)=0, \tag{3.6}$$

закона сохранения импульса

$$\varrho_f\big(\zeta+m(1-\zeta)\big)\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}+\varrho_s(1-\zeta)\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}=$$

$$\nabla\cdot\ \Big(\mu_0\big(\zeta\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)+(1-\zeta)\,\mathfrak{N}_1^f:\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)\big)-(\zeta\,p+\frac{(1-\zeta)}{(1-m)}\,p_s)\mathbb{I}\Big) \tag{3.7}$$

для жидкой компоненты, соотношения

$$(1-\zeta)\int_0^t\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\big(\frac{1}{(1-m)}\nabla p_s(\boldsymbol{x},\tau)+\varrho_s\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial \tau}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau=$$
$$(1-\zeta)\big(\boldsymbol{v}_s-(1-m)\boldsymbol{v}_f\big) \tag{3.8}$$

для твердой компоненты среды при $\lambda_1>0$ или усредненного закона сохранения количества движения твердой компоненты в виде

$$(1-\zeta)\Big(\frac{\partial \boldsymbol{v}_s}{\partial t}-\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}\Big)=\ -(1-\zeta)\mathbb{B}^{(s)}(\infty,0)\cdot\big(\frac{1}{(1-m)}\nabla p_s+\varrho_s\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}\big) \tag{3.9}$$

в случае $\lambda_1=0$.

Уравнения (3.6) – (3.9) дополняются краевыми и начальным условиями (3.3) – (3.5) для жидкой компоненты и краевым условием

$$\boldsymbol{v}_s\cdot\boldsymbol{n}=0,\ \boldsymbol{x}\in S^2,\ t\in(0,T) \tag{2.10}$$

для твердой компоненты.

В (3.7) – (3.9) симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга $\mathfrak{N}_1^f$ и матрицы $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,\lambda_1;t)$, $\mathbb{B}^{(s)}(\infty,0)$ определены ниже формулами (4.16), (4.25) и (4.30), $\boldsymbol{n}$ – нормальный вектор к границе S^2.

4. Доказательство теорем

4.1. **Доказательство теоремы 3.** На основании теоремы 2 и свойств оператора $\mathbb{E}_{Q_f^\varepsilon}$ заключаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$, $\{\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f^\varepsilon)\}$, $\{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$, $\{\partial\boldsymbol{v}_f^\varepsilon/\partial t\}$, $\{\mathbb{D}(x,\partial\boldsymbol{v}_f^\varepsilon/\partial t)\}$, $\{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t^2\}$ и $\{\bar{\alpha}_\lambda\nabla(\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно существует подпоследовательность от малого параметра $\{\varepsilon>0\}$ и функции p и $\boldsymbol{w}$, такие что

$$p^\varepsilon\rightharpoonup p,\ \boldsymbol{v}^\varepsilon=\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}=\boldsymbol{v},\ \frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2}\rightharpoonup\frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$, и

$$\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\rightharpoonup\boldsymbol{v}_f,\ \frac{\partial\boldsymbol{v}_f^\varepsilon}{\partial t}\rightharpoonup\frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

В дополнение к сказанному заметим, что

$$\bar{\alpha}_\lambda(1-\zeta)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)\to 0 \tag{4.1}$$

сильно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

Переобозначая, если это необходимо, индексы, считаем сходящимися сами последовательности.

По теореме Нгуетсенга существуют 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ из $L_2(Q_T\times Y)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ из $L_2\big(Q_T;W_2^1(Y)\big)$, такие что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)$, $\nabla_y\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\nabla_x\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)+\nabla_y\boldsymbol{V}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ соответственно.

Лемма 4. *Пусть последовательность $\{\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$ к функции $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, последовательность $\{\beta(\varepsilon)\nabla\boldsymbol{u}^\varepsilon\}$ ограничена в $L_2(Q_T)$ и*

$$\lim_{\varepsilon\searrow 0}\frac{\beta(\varepsilon)}{\varepsilon}=\infty.$$

Тогда

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t).$$

Доказательство. Пусть $\Psi(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ – произвольная гладкая скалярная периодическая по переменной $\boldsymbol{y}$ и финитная в Y функция.

Последовательность $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\}$, где

$$\sigma_{ij}^\varepsilon=\int_{Q_T}\beta(\varepsilon)\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})dxdt,\quad \boldsymbol{u}^\varepsilon=(u_1^\varepsilon,u_2^\varepsilon,u_3^\varepsilon),$$

равномерно ограничена по ε. Следовательно,

$$\int_{Q_T}\varepsilon\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)\Psi(\boldsymbol{x},t,\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon})dxdt=\frac{\varepsilon}{\beta(\varepsilon)}\sigma_{ij}^\varepsilon\to 0$$

при $\varepsilon\searrow 0$, что эквивалентно следующему

$$\int_{Q_T}\int_Y U_i(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\frac{\partial\Psi}{\partial y_j}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dydxdt=0,\quad \boldsymbol{U}=(U_1,U_2,U_3),$$

или $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$. □

Лемма 5. *Предельные функции $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{V}_f$ удовлетворяют макроскопическому и микроскопическому уравнениям неразрывности*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in Q_T,\ \ \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in S_T^2, \tag{4.2}$$

$$\chi(\boldsymbol{y})(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_f+\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}_f)=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \boldsymbol{y}\in Y, \tag{4.3}$$

и

$$\nabla_y\cdot\boldsymbol{W}=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \boldsymbol{y}\in Y,\ \boldsymbol{W}=\int_0^t\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\tau,\boldsymbol{y})d\tau, \tag{4.4}$$

где

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\big(\zeta+\chi(\boldsymbol{y})(1-\zeta)\big)\boldsymbol{v}_f+(1-\zeta)\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}), \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{v}=\langle\boldsymbol{V}\rangle_Y=\big(\zeta+m\,(1-\zeta)\big)\boldsymbol{v}_f+(1-\zeta)\langle\boldsymbol{V}\rangle_{Y_s},$$

и $\boldsymbol{n}$ – единичный вектор нормали к границе S^2.

Для доказательства (4.2) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x}, t) dx dt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой функции φ, равной нулю на части S_T^1 границы ∂Q и перейти к пределу при $\varepsilon \searrow 0$.

Уравнение (4.3) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) \nabla \cdot \boldsymbol{v}_f^\varepsilon = 0$$

для $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$.

Уравнение (4.4) получим, перейдя к двухмасштабному пределу в уравнении неразрывности (2.1) в интегральной форме:

$$\int_{Q_T} \varepsilon\, \boldsymbol{w}^\varepsilon \cdot \nabla \big(h_0(\boldsymbol{x}, t) h(\boldsymbol{x}/\varepsilon)\big) dx dt = 0.$$

Наконец, соотношение (4.5) есть результат двухмасштабного предельного перехода в равенстве

$$\boldsymbol{v}^\varepsilon = \big(\zeta + \chi^\varepsilon(1-\zeta)\big)\boldsymbol{v}_f^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)(1-\zeta)\boldsymbol{v}^\varepsilon.$$

Лемма 6. *Для почти всех $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_T$ и $\boldsymbol{y} \in Y$ слабые и двухмасштабные пределы последовательностей $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$ и $\{(1-\chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$ удовлетворяют соотношению*

$$(1-\zeta)P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = (1-\zeta)\Big(P_f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) + \frac{1}{(1-m)}\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)\, p_s(\boldsymbol{x}, t)\Big), \tag{4.6}$$

где $(1-\zeta)P_f = (1-\zeta)\chi(\boldsymbol{y})P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t)$.

Доказательство. В интегральное тождество (2.11) подставим пробную функцию вида $\boldsymbol{\varphi} = \varepsilon\, \varphi_0(\boldsymbol{x}, t)\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{y})$ – произвольная 1-периодическая финитная в области Y_s функция от $\boldsymbol{y}$. Переходя к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы получим

$$\nabla_y P_s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = 0, \quad \boldsymbol{y} \in Y_s. \tag{4.7}$$

Из чего следует

$$P_s(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, t) = \frac{1}{(1-m)}\big(1-\chi(\boldsymbol{y})\big)\, p_s(\boldsymbol{x}, t).$$

Последнее, с учетом равенства

$$P(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = P_f(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) + P_s(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}), \quad (\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \in \Omega_T \times Y,$$

доказывает (4.6). $\square$

Лемма 7. *Предельные функции $\boldsymbol{v}_f$, p, $\boldsymbol{V}_f$ и P удовлетворяют макроскопическому уравнению баланса импульса*

$$\int_{Q_T} \Big(\big(\varrho_f\big(\zeta + m\,(1-\zeta)\big)\boldsymbol{v}_f + \varrho_s(1-\zeta)\langle \boldsymbol{V}\rangle_{Y_s}\big) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} -$$

$$\big(\mu_0\big((\zeta + m(1-\zeta))\,\mathbb{D}(x, \boldsymbol{v}_f) + (1-\zeta)\langle \mathbb{D}(y, \boldsymbol{V}_f)\rangle_{Y_f}\big) - p\,\mathbb{I}\big) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})\Big) dx dt =$$

$$-\int_{Q_T} \nabla \cdot (\boldsymbol{\varphi}\, p_0) dx dt \tag{4.7}$$

в области Q_T *и микроскопическому уравнению баланса импульса*

$$\nabla_y \cdot \Big(\chi\,\mu_0\big(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_f)\big)-\big(P_f+\frac{(1-\chi)}{(1-m)}\,p_s\big)\mathbb{I}\Big)=0 \qquad (4.8)$$

в области Y *для почти всех* $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$.

Доказательство. Уравнение (4.7) следует из (2.11) после двухмасштабного предельного перехода с пробными функциями вида $\boldsymbol{\varphi}=\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$. Уравнение (4.8) получим, осуществив двухмасштабный предельный переход в тождестве (2.11) с пробными функциями $\boldsymbol{\varphi}=\varepsilon h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где h финитна в Ω. □

Лемма 4 и ограниченность последовательности $\{\bar{\alpha}_\lambda\nabla(\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t)\}$ в $L_2(Q_T)$ влекут равенство

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t).$$

Применяя двухмасштабный предельный переход в равенстве $\chi^\varepsilon(\boldsymbol{v}^\varepsilon-\boldsymbol{v}_f^\varepsilon)=0$, получим

$$\chi(\boldsymbol{y})\big(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)\big)=0,$$

или $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)$. Следовательно функция $\boldsymbol{v}_f$ удовлетворяет уравнению неразрывности (3.1) и уравнению неразрывности (4.3) в форме

$$\chi(\boldsymbol{y})\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}_f=0,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T,\ \boldsymbol{y}\in Y, \qquad (4.9)$$

в то время как макроскопическое уравнение баланса импульса (4.7) обретает вид

$$\int_{Q_T}\Big(\varrho(\boldsymbol{x})\boldsymbol{v}_f\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p_0)-$$
$$\big(\mu_0\big((\zeta+m(1-\zeta))\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)+(1-\zeta)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_f)\rangle_{Y_f}\big)-p\,\mathbb{I}\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big)dxdt=0,$$

что эквивалентно макроскопическому уравнению баланса импульса

$$\varrho(\boldsymbol{x})\frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial t}=$$
$$\nabla\cdot\Big(\mu_0\big((\zeta+m(1-\zeta))\,\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)+(1-\zeta)\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_f)\rangle_{Y_f}\big)-p\,\mathbb{I}\Big). \qquad (4.10)$$

в дифференциальной форме, граничному условию (3.3) и начальному условию (3.5).

Лемма 8. *Предельные функции* $\boldsymbol{v}_f$ *и* p *удовлетворяют в области* Q_T *усредненному уравнению баланса импульса (3.2).*

Доказательство. Усредненное уравнение (3.2) следует из макроскопического уравнения (4.10), после подстановки в него выражения

$$\langle\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_f)\rangle_{Y_f}=\mathfrak{N}_0^f:\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_f)-m\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_f).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (4.8) и (4.9) на элементарной ячейке Y_f. Действительно, полагая

$$\boldsymbol{V}_f=\sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t),$$

$$P_s-\frac{1}{(1-m)}p_s=\mu_0\sum_{i,j=1}^{3}P^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t),$$

где

$$D_{ij}(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_{f,i}}{\partial x_j}(\boldsymbol{x},t)+\frac{\partial v_{f,j}}{\partial x_i}(\boldsymbol{x},t)\Big),\quad \boldsymbol{v}_f=(v_{f,1},\,v_{f,2},\,v_{f,3}),$$

$$\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)=\sum_{i,j=1}^{3}D_{ij}(\boldsymbol{x},t)\,\mathbb{J}^{ij},$$

получим следующую периодическую краевую задачу на Y:

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_y\cdot\Big(\chi\big(\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})+\mathbb{J}^{ij}-P^{(ij)}\mathbb{I}\big)\Big)=0,\ \boldsymbol{y}\in Y,\\ \chi\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}^{(ij)}=0,\ \langle\boldsymbol{V}^{(ij)}\rangle_{Y_f}=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y.\end{array}\right\}\tag{4.11}$$

Тогда

$$\mathfrak{N}_0^f=m\mathbb{J}+\sum_{i,j=1}^{3}\langle\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}^{(ij)})\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{J}^{ij}.\tag{4.12}$$

Симметричность тензора $\mathfrak{N}_0^f$ следует из равенства

$$\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{V}^{(ij)})\rangle_{Y_f}:\mathbb{J}^{kl}=-\langle\mathbb{D}(y,\mathbf{V}^{(ij)}):\mathbb{D}(y,\mathbf{V}^{(kl)})\rangle_{Y_f}\tag{4.13}$$

которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (4.11) для функции $\mathbf{V}^{(ij)}$ на $\mathbf{V}^{(kl)}$ и интегрирования по частям. Это же равенство доставляет нам положительную определенность тензора $\mathfrak{N}_0^f$.

Напомним, что усредненное уравнение баланса импульса (3.2) понимается как интегральное тождество

$$\int_{Q_T}\Big(-\varrho(\boldsymbol{x})\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{v}_f+\Big(\mu_0\big(\zeta\mathbb{J}+(1-\zeta)\,\mathfrak{N}_0^f\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)-p\,\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{\varphi})\Big)dxdt=$$

$$\int_{Q_T}\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p_{\,0})dxdt$$

для всех функций $\boldsymbol{\varphi}\in W_2^{1,1}(Q_T)$, таких что $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)=0$ на границе S_T^2 и $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},T)=0$ при $\boldsymbol{x}\in Q$, которое влечет справедливость граничного и начального условий (3.3) и (3.5) для функции $\boldsymbol{v}_f$.

Единственность решения задачи (3.1) – (3.5) следует из энергетического тождества

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_Q\varrho|\boldsymbol{v}_f|^2dx+\mu_0\int_Q\Big(\big(\zeta\mathbb{J}+(1-\zeta)\,\mathfrak{N}_0^f\big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)\Big):\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)dx=$$

$$\int_{Q_T}\nabla\cdot(\boldsymbol{\varphi}\,p_{\,0})dxdt$$

для усредненной задачи и свойств тензора $\mathfrak{N}_0^f$. Наконец, функция $\boldsymbol{v}_f$ исчезает на границе S_T^2 в силу справедливости леммы 3. □

4.2. **Доказательство теоремы 4.**

4.2.1. *Случай* $\lambda_1 > 0$. Как и в предыдущем параграфе мы утверждаем, что последовательности $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$, $\{\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f^\varepsilon)\}$ $\{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t\}$ и $\{\varepsilon\nabla(\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon/\partial t)\}$ ограничены в $L_2(Q_T)$. Следовательно существуют подпоследовательности от малого параметра $\{\varepsilon>0\}$ и функции p и $\boldsymbol{w}$, такие что

$$p^\varepsilon \rightharpoonup p,\ \boldsymbol{v}^\varepsilon = \frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} = \boldsymbol{v},\ \frac{\partial^2\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \rightharpoonup \frac{\partial^2\boldsymbol{w}}{\partial t^2}$$

слабо в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$, и

$$\boldsymbol{v}_f^\varepsilon \rightharpoonup \boldsymbol{v}_f,\ \frac{\partial\boldsymbol{v}_f^\varepsilon}{\partial t} \rightharpoonup \frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial t}$$

слабо в $W_2^{1,0}(Q_T)$.

Заметим также, что

$$\bar{\alpha}_\lambda(1-\zeta)\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon)\to 0 \tag{4.14}$$

сильно в $L_2(Q_T)$ при $\varepsilon\searrow 0$.

В то же время существуют 1-периодические по $\boldsymbol{y}$ функции $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ из $L_2(Q_T\times Y)$ и $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ из $L_2\big(Q_T;W_2^1(Y)\big)$, такие что $\{p^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$, $\{\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\nabla\boldsymbol{v}^\varepsilon\}$ и $\{\nabla\boldsymbol{v}_f^\varepsilon\}$ сходятся двухмасштабно $L_2(Q_T)$ к функциям $P(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)$, $\nabla_y\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\nabla_x\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)+\nabla_y\boldsymbol{V}_f(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ соответственно.

Для всех этих функций верны утверждения лемм 5 - 7 и краевое условие (3.3).

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (3.7), необходимо записать выражения для $\mathbb{D}(y,\boldsymbol{V}_f)$ и p как операторы на $\mathbb{D}(x,\boldsymbol{v}_f)$ и $\big(\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}_f\big)$, используя систему (4.3) (4.8), и подставить в уравнение (4.7).

Полагая

$$\boldsymbol{V}_f = \sum_{i,j=1}^{3}\boldsymbol{V}^{(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t)+\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{y})\big(\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)\big),$$

$$P_f-\frac{1}{(1-m)}p_s = \mu_0\sum_{i,j=1}^{3}P^{\,(ij)}(\boldsymbol{y})D_{ij}(\boldsymbol{x},t)+\mu_0\,P_0(\boldsymbol{y})\big(\nabla_x\cdot\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)\big),$$

получим следующую периодическую краевую задачу на Y

$$\left.\begin{array}{l}\nabla_y\cdot\Big(\chi\big(\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0)-P_0\mathbb{I}\big)\Big)=0,\\ \chi(\nabla_y\cdot\boldsymbol{V}_0+1)=0,\quad \langle\boldsymbol{V}_0\rangle_{Y_f}=0,\quad \boldsymbol{y}\in Y.\end{array}\right\} \tag{4.15}$$

Тогда

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_f)=\Big(\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}^{(ij)})\otimes\mathbb{J}^{ij}+\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0)\otimes\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_f),$$

$$p=\frac{1}{(1-m)}p_s+\mu_0\Big(\langle\sum_{i,j=1}^{3}P^{\,(ij)}\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{J}^{ij}+\langle P_0\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{I}\Big):\mathbb{D}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}_f),\quad(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\subset\Omega_T\times Y$$

и

$$\mathfrak{N}_1^f=\mathfrak{N}_0^f+\langle\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0)\rangle_{Y_f}\otimes\mathbb{I}+\langle\sum_{i,j=1}^{3}P^{\,(ij)}\rangle_{Y_f}\mathbb{I}\otimes\mathbb{J}^{ij}+\langle P_0\rangle_{Y_f}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I}. \tag{3.16}$$

Симметричность и строгая положительная определенность тензора $\mathfrak{N}_1^f$ следуют из равенств

$$\langle P_0\rangle_{Y_f} = -\langle \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0):\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0)\rangle_{Y_f}, \tag{4.17}$$

$$\langle \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}^{(ij)}):\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0)\rangle_{Y_f} = 0, \tag{4.18}$$

$$\langle P^{(ij)}\rangle_{Y_f} = -\langle \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}_0):\mathbb{J}^{ij}\rangle_{Y_f}, \tag{4.19}$$

$$\langle \mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}^{(ij)}):\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}^{(kl)})\rangle_{Y_f} + \langle \mathbb{J}^{ij}:\mathbb{D}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{V}^{(kl)})\rangle_{Y_f} = 0, \tag{4.20}$$

для всех i, j, k, $l = 1, 2, 3$. Равенства (4.17) и (4.18) есть результат умножения уравнения для $\boldsymbol{V}_0$ на $\boldsymbol{V}_0$ и $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ соответственно и интегрирования по частям по области Y. Соотношения (4.19) и (4.20) получим, умножив уравнения для $\boldsymbol{V}^{(ij)}$ на $\boldsymbol{V}_0$ и $\boldsymbol{V}^{(kl)}$ соответственно, интегрируя по частям по области Y с использованием (4.18).

Легко видеть, что последовательность $\{\boldsymbol{v}_s^\varepsilon\}$ сходится двухмасштабно в $L_2(Q_T)$ к функции $\boldsymbol{V}_s = \big(1-\zeta(\boldsymbol{x})\big)(1-\chi(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{V}$, и слабо в $L_2(Q_T)$ к функции $\boldsymbol{v}_s = (1-\zeta)\langle\boldsymbol{V}\rangle_{Y_s}$. Следовательно, предельные функции $\boldsymbol{v}_f$, $\boldsymbol{v}_s$ и p_s удовлетворяют усредненному уравнению баланса импульса (3.7), граничному и начальному условиям (3.3) – (3.5) и уравнению неразрывности (3.6).

Чтобы получить усредненное уравнение баланса импульса (3.8) для твердой компоненты, перейдем к пределу в тождестве (2.11) при $\varepsilon \searrow 0$ с пробными функциями вида $\boldsymbol{\varphi} = h(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$, где $h(\boldsymbol{x},t)$ есть финитная в области Ω функция для всех $t\in(0,T)$, а $\boldsymbol{\varphi}_0(\boldsymbol{y})$ – 1-периодическая гладкая финитная в Y_s соленоидальная функция.

В результате имеем для функции

$$\boldsymbol{W}_s = \int_0^t \boldsymbol{V}_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},\tau)d\tau$$

микроскопическое уравнение баланса импульса

$$\varrho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{W}_s}{\partial t^2} = \lambda_1\triangle\,\boldsymbol{W}_s - \nabla_y\Pi^{(s)} - \frac{1}{(1-m)}p_s(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{y}\in Y_s,\ t\in(0,T) \tag{4.21}$$

начальные условия

$$\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},0) = \frac{\partial\boldsymbol{W}_s}{\partial t}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},0) = 0,\ \boldsymbol{y}\in Y_s, \tag{4.22}$$

для почти всех $(\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T$.

Дополним систему (4.21) – (4.22) уравнением неразрывности (4.4) и краевым условием

$$\boldsymbol{W}_s(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,\ \boldsymbol{y}\in\gamma,\ (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_T, \tag{4.23}$$

которое является следствием соотношения (4.5) и условия регулярности $\boldsymbol{V}\in L_2\big(Q_T;W_2^1(Y)\big)$.

Решение вышеприведенной системы будем искать в следующем виде

$$\boldsymbol{W}_s = \int_0^t \boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},\tau)d\tau + \sum_{i=1}^3\int_0^t \boldsymbol{W}_i^{(s)}(\boldsymbol{y},t-\tau)z_i(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

$$\Pi^{(s)} = \sum_{i=1}^3\int_0^t \Pi_i^{(s)}(\boldsymbol{y},t-\tau)z_i(\boldsymbol{x},\tau)d\tau,$$

где

$$\boldsymbol{z}=\frac{1}{(1-m)}\nabla p_s(\boldsymbol{x},t)+\varrho_s\frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}(\boldsymbol{x},t),\ \boldsymbol{z}=\sum_{i=1}^{3}z_i(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_i.$$

Тогда периодические по переменной $\boldsymbol{y}$ функции $\boldsymbol{W}_i^{(s)}$, $\Pi_i^{(s)}$ при $i=1,2,3$ есть решения следующих периодических начально-краевых задач

$$\left.\begin{aligned}
&\varrho_s\frac{\partial^2\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t^2}=\lambda_1\triangle\boldsymbol{W}_i^{(s)}-\nabla\Pi_i^{(s)},\ (\boldsymbol{y},t)\in Y_s\times(0,T),\\
&\nabla_y\cdot\boldsymbol{W}_i^{(s)}=0,\ (\boldsymbol{y},t)\in Y_s\times(0,T),\\
&\boldsymbol{W}_i^{(s)}(\boldsymbol{y},t)=0,\ (\boldsymbol{y},t)\in\gamma\times(0,T),\\
&\boldsymbol{W}_i^{(s)}(\boldsymbol{y},0)=0,\ \varrho_s\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},0)=-\boldsymbol{e}_i,\ \boldsymbol{y}\in Y_s.
\end{aligned}\right\}\tag{4.24}$$

Корректность задач (4.24) следует из энергетических равенств

$$\int_{Y_s}\Big(\varrho_s|\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)|^2+\lambda_1|\nabla\boldsymbol{W}_i^{(s)}(\boldsymbol{y},t)|^2\Big)dy=\frac{(1-m)}{\varrho_s}.$$

Заметим, что задачи (4.24) для соленоидальных функций $\boldsymbol{W}_i^{(s)}$, исчезающих на γ и при $t=0$, следует понимать как интегральные тождества

$$\int_0^T\int_{Y_s}\Big(\varrho_s\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}-\lambda_1\nabla\boldsymbol{W}_i^{(s)}:\nabla\boldsymbol{\varphi}\Big)dydt=-\int_{Y_s}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y},0)dy$$

для соленоидальных 1 – периодических функций $\boldsymbol{\varphi}$, исчезающих на γ и при $t=T$.

По определению

$$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},t)=\int_{Y_s}\frac{\partial\boldsymbol{W}^{(s)}}{\partial t}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})dy=$$

$$(1-m)\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)+\int_0^t\Big(\sum_{i=1}^{3}\big(\int_{Y_s}\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t-\tau)dy\big)\otimes\boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\boldsymbol{z}(\boldsymbol{x},\tau)d\tau=$$

$$(1-m)\boldsymbol{v}_f(\boldsymbol{x},t)+\int_0^t\mathbb{B}^s(\infty,\lambda_1;t-\tau)\cdot\big(\frac{1}{(1-m)}\nabla p_s(\boldsymbol{x},\tau)+\varrho_s\frac{\partial\boldsymbol{v}_f}{\partial\tau}(\boldsymbol{x},\tau)\big)d\tau,$$

где

$$\mathbb{B}^s(\infty,\lambda_1;t)=\sum_{i=1}^{3}\big(\int_{Y_s}\frac{\partial\boldsymbol{W}_i^{(s)}}{\partial t}(\boldsymbol{y},t)dy\big)\otimes\boldsymbol{e}_i,\tag{4.25}$$

и для функции $\boldsymbol{v}_s$ справедливо равенство (3.8), которое влечет начальное условие

$$\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{x},0)=0,\ \boldsymbol{x}\in\Omega.$$

Последнее, в свою очередь, вместе с (4.7) гарантирует начальное условие (3.5).

Краевое условие (3.10) следует из (3.4) и (4.2).

4.2.2. *Случай* $\lambda_1 = 0$. Для этого случая верны все те же рассуждения, что и при $\lambda_1 > 0$, исключая следующее:

1) двухмасштабную сходимость последовательности $\{\varepsilon \nabla \boldsymbol{w}^{\varepsilon}\}$ и

2) вывод уравнения баланса импульса для твердой компоненты.

При $\lambda_1 = 0$ микроскопическое уравнение баланса импульса для твердой компоненты имеет вид

$$\varrho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(s)}}{\partial t^2} = -\nabla_y \Pi^{(s)} - \frac{1}{(1-m)} \nabla_x p_s. \tag{4.26}$$

Вместо условия (4.23) на границе γ имеем условие

$$\big(\boldsymbol{W}^{(s)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x}, t)\big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = 0, \tag{4.27}$$

которое является следствием микроскопического уравнения неразрывности (4.4) и представления

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \chi(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{w}_f(\boldsymbol{x}, t) + \big(1 - \chi(\boldsymbol{y})\big) \boldsymbol{W}^{(s)}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}), \ \boldsymbol{y} \in Y.$$

Чтобы решить (4.26), подействуем на это уравнение оператором $\nabla_y \cdot$ и снова воспользуемся (4.4):

$$0 = \nabla_y \cdot (\varrho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{W}^{(s)}}{\partial t^2}) = -\nabla_y \cdot (\nabla_y \Pi^{(s)}). \tag{4.28}$$

Граничное условие (4.27) и уравнение (4.26) доставляют краевое условие на γ для давления $\Pi^{(s)}$:

$$\nabla_y \Pi^{(s)} \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = -\Big(\frac{1}{(1-m)} \nabla_x p_s + \varrho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}\Big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}). \tag{4.29}$$

Используя представление

$$\Pi^{(s)} = -\big(\sum_{i=1}^{3} \Pi_i^{(s)}(\boldsymbol{y}) \boldsymbol{e}_i\big) \cdot \Big(\frac{1}{(1-m)} \nabla_x p_s + \varrho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}\Big),$$

где $\Pi_i^{(s)}$, $i = 1, 2, 3$, есть решения периодических краевых задач

$$\triangle_y \Pi_i^{(s)} = 0, \ \boldsymbol{y} \in Y_s, \ \big(\nabla_y \Pi_i^{(s)} - \boldsymbol{e}_i\big) \cdot \boldsymbol{n}(\boldsymbol{y}) = 0, \ \boldsymbol{y} \in \gamma,$$

мы получим

$$\nabla_y \Pi^{(s)} = -\big(\sum_{i=1}^{3} \nabla_y \Pi_i^{(s)} \otimes \boldsymbol{e}_i\big) \cdot \Big(\frac{1}{(1-m)} \nabla_x p_s + \varrho_s \frac{\partial \boldsymbol{v}_f}{\partial t}\Big).$$

Интегрируя уравнение (4.26) по области Y_s, мы получим желаемое уравнение баланса импульса (3.9) для твердой компоненты, если положим

$$\varrho_s \mathbb{B}^{(s)}(\infty, 0) = \mathbb{I} - \Big(\sum_{i=1}^{3} \int_{Y_s} \nabla_y \Pi_i^{(s)}(\boldsymbol{y}) dy \otimes \boldsymbol{e}_i\Big). \tag{4.30}$$

Список литературы

[1] J.I. Adachi, E. Detournay, A.P. Peirce, *Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers*, Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences, **47** (2010), 625–630.

[2] Y. Kovalyshen, E. Detournay, *A Reexamination of the Classical PKNModel of Hydraulic Fracture*, Transp. Porous Med., **81** (2010), 317–339.

[3] Liang Weiguoab, Zhao Yangshenga, *A mathematical model for solid liquid and mass transfer coupling and numerical simulation for hydraulic fracture in rock salt*, Progress in Natural Science, **15**:8 (2005), 742–748.

[4] Т.Т. Гарипов, *Моделирование процесса гидроразрыва пласта в пороупругой среде*, Мат. Моделирование, **18**:6 (2006), 53–69. MR2255948

[5] A.M. Meirmanov, *Double porosity models in incompressible poroelastic media*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, **20**:4 (2010), 635–659. MR2647035

[6] R. Burridge and J.B. Keller, *Poroelasticity equations derived from microstructure*, Journal of Acoustic Society of America, **70**:4 (1981), 1140–1146. Zbl 0519.73038

[7] А.М. Мейрманов, *Метод двухмаситабной сходимости Нгуетсенга в задачах фильтрации и сейсмоакустики в упругих пористых средах*, Сиб. Мат. Журнал, **48**:3 (2007), 645–667. MR2347913

[8] A.M. Meirmanov, *A description of seismic acoustic wave propagation in porous media via homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **40**:3 (2008), 1272–1289. MR2452887

[9] A.M. Meirmanov, *Derivation of equations of seismic and acoustic wave propagation and equations of filtration via homogenization of periodic structures, Journal of Mathematical Sciences*, **163**:2 (2009), 111–172. Zbl 1185.35195

[10] G. Nguetseng, *A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*, SIAM J. Math. Anal., **20**:3 (1989), 608–623. MR0990867

[11] E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, D. Percivale, *An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains*, Nonlinear Anal., **18** (1992), 481–496. MR1152723

[12] G. Nguetseng,*Asymptotic analysis for a stiff variational problem arising in mechanics*, SIAM J. Math. Anal., **21** (1990), 1394–1414.

[13] C. Conca, *On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics*, J. math. pures et appl., **64** (1985), 31–75. MR0802383

[14] О.А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, Наука. Москва, 1970. Zbl 0215.29004

Ирина Викторовна Некрасова
Белгородский государственный университет,
ул.Победы, 85,
308015, г. Белгород, Россия
E-mail address: *nekrasova_i@bsu.edu.ru*