S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 256–260 (2012) УДК 514.13
MSC 51M09

О ПЛОЩАДИ ТРАПЕЦИИ НА ПЛОСКОСТИ ЛОБАЧЕВСКОГО

Д.Ю. СОКОЛОВА

Abstract. In this paper we give a formula for the area of a hyperbolic trapezoid in terms of its side lengths.

Keywords: trapezoid, hyperbolic geometry, area.

1. Введение

Из элементарной геометрии известна формула Герона, выражающая площадь треугольника S через длины его сторон a, b и c. Она может быть представлена в следующем виде:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)p,$$

где $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника. Площадь четырехугольника, вообще говоря, не определяется через длины его сторон. Однако, это справедливо в некоторых частных случаях, например, когда четырехугольник является вписанным, либо когда он представляет собой трапецию. В первом случае его площадь описывается формулой Брахмагупты:

$$S^2 = (p-a)(p-b)(p-c)(p-d),$$

где a, b, c, d — длины сторон четырехугольника, а $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ — его полупериметр. Формулу Брахмагупты и ее доказательство можно найти в книге Я.П. Понарина ([5], стр. 90). Во втором случае площадь трапеции находится через длины ее сторон элементарными вычислениями по формуле, приведенной ниже.

Sokolova, D.Yu., On trapezoid area on the Lobachevskii plane.

Работа поддержана РФФИ (гранты 12-01-00210).
Поступила 18 декабря 2011 г., опубликована 14 мая 2012 г.

Перейдем теперь к геометрии Лобачевского или, что то же самое, к гиперболической геометрии. Все приведенные ниже результаты будут сформулированы для плоскости Лобачевского с гауссовой кривизной $k = -1$. Необходимые сведения по гиперболической геометрии приведены в книгах [3] и [6]. В частности, там установлено, что площадь треугольника на плоскости Лобачевского может быть выражена через длины его сторон несколькими разными способами. Это же справедливо и для формулы Брахмагупты для вписанного гиперболического четырехугольника. Она имеет несколько вариантов, представленых в работе [2].

Цель настоящей работы — получить формулу площади для гиперболической трапеции через длины ее сторон.

2. Основной результат

Определение. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ называется трапецией, если для его внутренних углов справедливо соотношение

$$\angle A + \angle B = \angle C + \angle D. \tag{1}$$

В этом случае стороны AD и BC называются основаниями трапеции, а AB и CD - ее боковыми сторонами. Длины сторон AB, BC, CD, AD будем обозначать, соответственно, буквами a, b, c, d; длины диагоналей AC и BD - буквами e и f. (См. Рис. 1.)

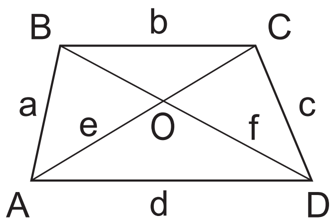

Рис. 1. Трапеция.

Замечание. Данное определение трапеции справедливо во всех трех геометриях: евклидовой, гиперболической и сферической.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $b \neq d$. При $b = d$, как и в евклидовой геометрии (случай параллелограма), площадь трапеции не определяется по длинам ее сторон.

Ф.В. Петров в работе [4] установил следующий факт.

Теорема 1. *Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник на плоскости Лобачевского. Тогда следующие два свойства эквивалентны:*

$$(i)\, \angle BAD + \angle ABC = \angle ADC + \angle DCB;$$

$$(ii)\, \angle CAD + \angle CBD = \angle BCA + \angle BDA.$$

Заметим, что каждое из свойств (i) и (ii) равносильно тому, что четырехугольник $ABCD$ является трапецией с основаниями BC и AD. Вычитая из первого равенства второе, получим, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для трапеции $ABCD$ справедливо соотношение*
$$\angle CAB + \angle ABD = \angle ACD + \angle BDC.$$

В силу формулы Гаусса-Бонне площади треугольников AOB и COD находятся по формулам
$$S_{AOB} = \pi - \angle CAB - \angle ABD - \angle AOB,$$
$$S_{COD} = \pi - \angle ACD - \angle CDB - \angle COD.$$
Учитывая утверждение леммы и равенство вертикальных углов $\angle AOB = \angle COD$, получим, что $S_{AOB} = S_{COD}$.

Отсюда непосредственно заключаем, что имеют место равенства площадей $S_{ADB} = S_{ADC}$ и $S_{ABC} = S_{BCD}$. Обозначим через $S(a,b,c)$ площадь гиперболического треугольника с длинами сторон a, b и c. Переписывая полученные два равенства в терминах длин сторон, установим, что справедливо

Следствие 1. *Для площадей треугольников с соответствующими сторонами выполнены равенства*
$$\begin{cases} S(a,d,f) = S(c,d,e), \\ S(b,a,e) = S(b,c,f). \end{cases} \tag{2}$$

Согласно работе [1] справедлива следующая формула для площади S гиперболического треугольника со сторонами a, b и c :
$$\cos\frac{S(a,b,c)}{2} = \frac{\cosh(a)+\cosh(b)+\cosh(c)+1}{4\cosh(\frac{a}{2})\cosh(\frac{b}{2})\cosh(\frac{c}{2})}. \tag{3}$$

Положим $c(a) = \cosh(\frac{a}{2})$ и $s(a) = \sinh(\frac{a}{2})$. Подставляя равенство $\cosh(a) = 2c^2(a) - 1$ в уравнение (3), получим, что система уравнений (2) эквивалентна следующей
$$\begin{cases} \dfrac{c^2(a)+c^2(d)+c^2(f)-1}{c(a)c(f)} = \dfrac{c^2(c)+c^2(d)+c^2(e)-1}{c(c)c(e)}, \\ \dfrac{c^2(a)+c^2(b)+c^2(e)-1}{c(a)c(e)} = \dfrac{c^2(c)+c^2(b)+c^2(f)-1}{c(c)c(f)}. \end{cases} \tag{4}$$

Решая эту систему на компьютере относительно $c(e)c(f)$ и $\frac{c(e)}{c(f)}$, получим

Предложение 1. *Длины сторон и диагонали трапеции связаны соотношениями*
$$\begin{cases} c(e)c(f) = c(a)c(c) + s(b)s(d), \\ \dfrac{c(e)}{c(f)} = \dfrac{c(c)s(b) - c(a)s(d)}{c(a)s(b) - c(c)s(d)}. \end{cases} \tag{5}$$

Из данной системы уравнений находятся выражения для длин диагоналей трапеции $ABCD$:
$$c^2(e) = \frac{c(c)s(b) - c(a)s(d)}{c(a)s(b) - c(c)s(d)}(c(a)c(c) + s(b)s(d)), \tag{6}$$

$$c^2(f) = \frac{c(a)s(b) - c(c)s(d)}{c(c)s(b) - c(a)s(d)}(c(a)c(c) + s(b)s(d)). \tag{7}$$

Сформулированное предложение потребуется для доказательства теоремы о площади трапеции.

Теорема 2. *Площадь S гиперболической трапеции $ABCD$ со сторонами a, b, c, d находится из соотношения*

$$\tan^2 \frac{S}{4} = \frac{\sinh^2 \frac{b+d}{2} \sinh \frac{a+b-c-d}{4} \sinh \frac{a+b+c-d}{4} \sinh \frac{-a+b+c-d}{4} \sinh \frac{a-b+c+d}{4}}{\sinh^2 \frac{b-d}{2} \cosh \frac{a-b-c-d}{4} \cosh \frac{a-b+c-d}{4} \cosh \frac{a+b-c+d}{4} \cosh \frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Евклидов вариант формулы, выражающий квадрат площади трапеции через ее стороны находится элементарными вычислениями из геометрических соображений и имеет вид:

$$S_E^2 = \frac{(b+d)^2(a+b-c-d)(a+b+c-d)(-a+b+c-d)(a-b+c+d)}{16(b-d)^2}.$$

Отметим также, что $\tan^2 \frac{S}{4} \approx (\frac{S_E}{4})^2$ при достаточно малых величинах a, b, c, d.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$, изображенную на Рис. 1. Для вычисления ее площади воспользуемся формулой: $S = 2\pi - A - B - C - D$. Рассмотрим величину $\sin^2 \frac{S}{4}$. Учитывая равенство (1) из определения трапеции, получим, что

$\frac{S}{2} = \pi - A - B$ и $2\sin^2 \frac{S}{4} = 1 - \cos \frac{S}{2} = 1 + \cos(A+B)$.

Откуда имеем

$$2\sin^2 \frac{S}{4} = 1 + \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B). \tag{8}$$

Выразим величины $\cos(A), \cos(B)$ и $\sin(A)\sin(B)$ через длины сторон a, b, c, d. Воспользуемся теоремой косинусов для гиперболического треугольника ABD:

$$\cosh(f) = \cosh(a)\cosh(d) - \sinh(a)\sinh(d)\cos(A).$$

Тогда для $\cos(A)$ имеем

$$\cos(A) = \frac{\cosh(a)\cosh(d) - \cosh(f)}{\sinh(a)\sinh(d)}. \tag{9}$$

Для определения величины $\cos(A)$ через длины сторон a, b, c, d подставим выражение $\cosh(f) = 2c^2(f) - 1$ в формулу (9) и, применив к ней соотношение (7), получим

$$\cos(A) = \frac{1 - \cosh(b) + \cosh(c) - \cosh(a)\cosh(d) + 4c(a)c(c)s(b)s(d)}{4s(a)c(d)(c(c)s(b) - c(a)s(d))}. \tag{10}$$

Аналогично,

$$\cos(B) = \frac{1 - \cosh(d) + \cosh(c) - \cosh(a)\cosh(b) + 4c(a)c(c)s(b)s(d)}{4s(a)c(b)(c(c)s(d) - c(a)s(b))}. \tag{11}$$

Вычислим выражение $\sin^2(A)\sin^2(B) = (1 - \cos^2(A))(1 - \cos^2(B))$, используя приведенные выше формулы. После извлечения положительного квадратного корня, для величины $Q = \sin(A)\sin(B)$ имеем следующее выражение

$$Q = \frac{(c(c) + c(a-b-d))(c(c) - c(a+b-d))(c(c) - c(a-b+d))(c(c) + c(a+b+d))}{4s^2(a)c(b)c(d)(c(a)s(d) - c(c)s(b))(c(a)s(b) - c(c)s(d))}. \tag{12}$$

Подставляя в (8) результаты (10), (11), (12), после упрощения, получим

$$\sin^2 \frac{S}{4} = \frac{\sinh^2 \frac{b+d}{2} \sinh \frac{a+b-c-d}{4} \sinh \frac{a+b+c-d}{4} \sinh \frac{a-b-c+d}{4} \sinh \frac{a-b+c+d}{4}}{c(b)c(d)(c(c)s(b)-c(a)s(d))(c(c)s(d)-c(a)s(b))}. \tag{13}$$

Далее,

$$\cos^2 \frac{S}{4} = \frac{\sinh^2 \frac{b-d}{2} \cosh \frac{a-b-c-d}{4} \cosh \frac{a-b+c-d}{4} \cosh \frac{a+b-c+d}{4} \cosh \frac{a+b+c+d}{4}}{c(b)c(d)(c(c)s(b)-c(a)s(d))(c(a)s(b)-c(c)s(d))}. \tag{14}$$

Поделив (13) на (14), имеем утверждение теоремы

$$\tan^2 \frac{S}{4} = \frac{\sinh^2 \frac{b+d}{2} \sinh \frac{a+b-c-d}{4} \sinh \frac{a+b+c-d}{4} \sinh \frac{-a+b+c-d}{4} \sinh \frac{a-b+c+d}{4}}{\sinh^2 \frac{b-d}{2} \cosh \frac{a-b-c-d}{4} \cosh \frac{a-b+c-d}{4} \cosh \frac{a+b-c+d}{4} \cosh \frac{a+b+c+d}{4}}.$$

Список литературы

[1] Bilinski S. *Zur Begründung der elementaren Inhaltslehre in der hyperbolischen Ebene*, Math. Ann., **180** (1969), 256–268. MR0256259

[2] Mednykh A. D. *Brahmahupta formula for cyclic quadrilaterals in the hyperbolic plane*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **9** (2012), 247–255.

[3] Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. *Геометрия пространств постоянной кривизны.*, В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1988, Т. 29. MR1254932

[4] Петров Ф. В. *Вписанные четырехугольники и трапеции в абсолютной геометрии*, Матеметическое просвещение. Третья серия, Вып. 13 (2009), 149–154.

[5] Понарин Я. П. *Элементарная геометрия. Т.1. Планиметрия*, М.: МЦНМО, 2004.

[6] Прасолов В. В. *Геометрия Лобачевского.*, 3-е изд., М.: МЦНМО, 2004.

Соколова Дарья Юрьевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: from_dasha@mail.ru