S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 266–284 (2012) УДК 512.554.3+510.67
MSC 17B99+08C10

АКСИОМЫ МЕТАБЕЛЕВЫХ Q-АЛГЕБР И U-АЛГЕБР ЛИ

Э.Ю. ДАНИЯРОВА

Abstract. This is the third paper in the series of three, which are in the series of papers, the aim of which is to construct algebraic geometry over metabelian Lie algebras. We give the recursive set of universal formulas, axiomatizing universal class of all matabelian Lie U-algebras, and the recursive set of quasiidentities, axiomatizing quasivariety of all matabelian Lie Q-algebras. We have come to the characterization of finite generated objects from these universal classes. We show connections between such algebras and diophantine projective varieties over a field.

Keywords: matabelian Lie algebra over a field, Q-algebra, U-algebra, U-primary algebra, Q-semiprimary algebra, quasivariety, universal closure, diophantine projective variety over a field.

Введение

Данная статья является заключительной в цикле из трёх статей — “Метабелевы U-алгебры Ли” [1], “Метабелевы Q-алгебры Ли” [2], “Аксиомы метабелевых U-алгебр и Q-алгебр Ли”. Эти работы написаны в рамках проекта по построению алгебраической геометрии над метабелевыми алгебрами Ли. Для понимания данной статьи необходимо знакомство с предыдущими работами [1, 2]. Общее введение к трём работам цикла написано в первой статье [1]. Мы предполагаем, что читатель с ним знаком.

В двух предыдущих работах определены метабелевы U-алгебры и Q-алгебры Ли над полем k, исследованы свойства таких алгебр, построено вложение произвольной конечно порождённой Q-алгебры в прямую сумму U-алгебр. В этой работе мы даём новое описание класса всех U-алгебр и Q-алгебр — описание на аксиоматическом языке.

Daniyarova, E.Yu., Axioms of Metabelian Lie Q-algebras and U-algebras.

Работа поддержана РФФИ (грант 11-01-00081а).

Поступила 11 сентября 2008 г., опубликована 26 мая 2012 г.

Напомним обозначения для исследуемых классов алгебр Ли. Через $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ мы обозначаем класс всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k и через $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ — класс всех конечно порождённых метабелевых Q-алгебр Ли над полем k; через $\mathfrak{U}$ — универсальное замыкание класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, через $\mathfrak{Q}$ — квазимногообразие, порождённое классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$.

В этой статье построены удовлетворительные списки аксиом для классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$, а также описаны конечно порождённые алгебры этих классов. Полученные результаты различны в случаях конечной и бесконечной мощности основного поля k.

Работа разбита на два параграфа. В первом параграфе дано описание универсального класса $\mathfrak{U}$. Построен список универсальных формул, аксиоматизирующих этот класс. Во втором параграфе найден список квазитождеств, аксиоматизирующих квазимногообразие $\mathfrak{Q}$. Аксиомы, которые мы пишем, являются универсальными формулами в стандартном языке $\mathcal{L}$ первой ступени теории алгебр Ли над фиксированным полем k. В случае, если поле k конечно, найденные списки аксиом являются рекурсивными множествами, поэтому универсальная и квазиэквациональная теории класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ метабелевых U-алгебр Ли над конечным полем k алгоритмически разрешимы (утверждения 1.10 и 2.5).

Кратко резюмируем полученные в работе результаты по описанию конечно порождённых алгебр из классов $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{Q}$. Если поле k конечно, то любая алгебра из универсального класса $\mathfrak{U}$ является метабелевой U-алгеброй Ли (теорема 1.9), а любая конечно порождённая алгебра из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ является метабелевой Q-алгеброй Ли (теорема 2.4). В случае бесконечного поля k конечно порождёнными объектами в универсальном классе $\mathfrak{U}$ являются U-примарные метабелевы алгебры Ли и только они (теорема 1.15), а в квазимногообразии $\mathfrak{Q}$ — Q-полупримарные метабелевы алгебры Ли и ничего более (теорема 2.9).

Всюду в этой работе будем полагать, что характеристика поля k не равна двум, поскольку в случае $\mathrm{char}(k) = 2$ класс k-алгебр Ли вырождается в подкласс коммутативных алгебр.

1. Универсальная теория класса метабелевых U-алгебр Ли

Задачей этого параграфа является описание класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ с помощью универсальных аксиом сигнатуры теории алгебр Ли над полем k. Определение соответствующей сигнатуры и других необходимых здесь логических терминов можно найти в разделе 1.1.

Аксиомы, которые мы напишем, разделяются на три класса: первый класс аксиом не зависит от поля k, второй класс аксиом имеет смысл только в случае конечного поля k, в третий класс входят аксиомы, которые мы напишем для случая бесконечного поля k. В соответствии с этим разбиением параграф подразделяется на разделы 1.2, 1.3, 1.4.

1.1. **Сигнатура и универсальные классы.** Определим сигнатуру $\mathcal{L}$, в которой мы будем работать, и приведём необходимый минимум теоретико-модельных терминов. За подробностями мы отсылаем к [3, 4, 5].

Пусть $\mathcal{L}$ — стандартный язык первой ступени теории алгебр Ли над фиксированным полем k. Язык $\mathcal{L}$ состоит из символа сложения "$+$", символа "0" для обозначения нуля, символа лиева умножения "$\circ$", а также набора символов $\{k_\alpha \mid \alpha \in k\}$ для задания унарных операций умножения на коэффициенты поля

k:

$$\mathcal{L} \;=\; \langle +^{(2)},\ \circ^{(2)},\ \{k^{(1)}_{\alpha} \,|\, \alpha \in k\},\ 0\rangle.$$

Универсальное предложение (с матрицей в ДНФ) в языке $\mathcal{L}$ — это формула вида

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \qquad \bigvee_{j=1}^{m} \ (\bigwedge_{i=1}^{q_j} r_{ij}(\bar{x}) = 0 \quad \wedge \quad \bigwedge_{i=1}^{p_j} s_{ij}(\bar{x}) \neq 0),$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ — n-вектор переменных, $r_{ij}(\bar{x})$ и $s_{ij}(\bar{x})$ — термы языка $\mathcal{L}$. Тождество в языке $\mathcal{L}$ — это формула вида

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \qquad r(\bar{x}) = 0,$$

где $r(\bar{x})$ — терм языка $\mathcal{L}$ от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Квазитождество — формула вида

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \qquad \bigwedge_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}) = 0 \quad \to \quad s(\bar{x}) = 0,$$

где $r_i(\bar{x})$ и $s(\bar{x})$ — термы языка $\mathcal{L}$.

Отметим, что произвольное тождество $\forall\, \bar{x}\ (r(\bar{x}) = 0)$ эквивалентно квазитождеству $\forall\, \bar{x}\ (0 = 0 \to r(\bar{x}) = 0)$, а любая универсальная формула вида

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \qquad \bigwedge_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}) = 0 \quad \to \quad \bigwedge_{j=1}^{p} s_j(\bar{x}) = 0,$$

где $r_i(\bar{x})$ и $s_j(\bar{x})$ — термы, эквивалентна системе p квазитождеств:

$$\forall\, x_1 \ldots \forall\, x_n \qquad \bigwedge_{i=1}^{m} r_i(\bar{x}) = 0 \quad \to \quad s_j(\bar{x}) = 0, \quad j = 1, \ldots, p.$$

Пусть $\mathcal{K}$ — произвольный класс алгебр Ли над полем k. Классу $\mathcal{K}$ сопоставим два теоретико-модельных класса:

- $\mathrm{qvar}(\mathcal{K})$ — *квазимногообразие, порождённое классом* $\mathcal{K}$, — класс, состоящий из всех алгебр Ли над полем k, удовлетворяющих всем квазитождествам языка $\mathcal{L}$, выполненным на всех алгебрах класса $\mathcal{K}$;
- $\mathrm{ucl}(\mathcal{K})$ — *универсальное замыкание класса* $\mathcal{K}$, — класс, состоящий из всех алгебр Ли над полем k, на которых выполнены все универсальные предложения языка $\mathcal{L}$, верные на всех алгебрах из $\mathcal{K}$.

Имеет место включение $\mathrm{ucl}(\mathcal{K}) \subseteq \mathrm{qvar}(\mathcal{K})$.

Символ ω будем использовать для обозначения конечно порождённых объектов, то есть $\mathcal{K}_\omega$ — класс всех конечно порождённых алгебр Ли из класса $\mathcal{K}$.

Напомним, что k-алгебра Ли A аппроксимируется классом k-алгебр Ли $\mathcal{K}$, если для любого элемента $0 \neq a \in A$ найдётся алгебра $B_a \in \mathcal{K}$ и гомоморфизм алгебр Ли $\lambda_a : A \to B_a$, такой, что $\lambda_a(a) \neq 0$. Если для любого конечного подмножества X ненулевых элементов алгебры A найдётся такая алгебра B_X и гомоморфизм $\lambda_X : A \to B_X$, что $\lambda_X(x) \neq 0$ для всех $x \in X$, то говорят, что алгебра A дискриминируется классом $\mathcal{K}$.

Следующая лемма является известным результатом (см., например, [3, 6]).

Лемма 1.1. *Пусть A — алгебра Ли над полем k и $\mathcal{K}$ — класс алгебр Ли над полем k. Если алгебра A аппроксимируется классом $\mathcal{K}$, то $A \in \mathrm{qvar}(\mathcal{K})$. Если алгебра A дискриминируется классом $\mathcal{K}$, то $A \in \mathrm{ucl}(\mathcal{K})$.*

Для сокращения записи некоторых формул языка $\mathcal{L}$ мы будем пользоваться следующими договорёнными:

- Вместо одноместной операции $k_\alpha(x)$ умножения x на элемент поля $\alpha \in k$ будем писать просто αx; вместо $k_{-1}(x)$ будем писать $-x$;
- Будем пользоваться модульной сигнатурой, то есть писать выражения вида $z \cdot f(x_1, \dots, x_m)$, где f — многочлен кольца $k[x_1, \dots, x_m]$. Для расшифровки такой записи представим многочлен f в виде суммы одночленов:
$$f = \sum \alpha_{d_1,\dots,d_m} x_1^{d_1} \cdot \dots \cdot x_m^{d_m}, \quad \alpha_{d_1,\dots,d_m} \in k.$$
И договоримся, что запись $z \cdot f(x_1, \dots, x_m)$ означает следующий терм сигнатуры $\mathcal{L}$:
$$\sum \alpha_{d_1,\dots,d_m} (\dots(\dots(\dots((z \circ \underbrace{x_1) \circ x_1) \circ \dots \circ x_1)}_{d_1} \circ \dots \circ \underbrace{x_m) \circ \dots \circ x_m)}_{d_m}.$$

1.2. **Аксиомы, не зависящие от поля.** Пусть $\mathfrak{U}$ — универсальное замыкание в сигнатуре $\mathcal{L}$ класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k: $\mathfrak{U} = \mathrm{ucl}(\mathcal{K}_{\mathrm{U}})$. Мы хотим найти удовлетворительный список универсальных формул языка $\mathcal{L}$, порождающих класс $\mathfrak{U}$, и описать алгебры этого класса.

В этом разделе будет написана та часть аксиом искомого списка, в формулах которых не встречаются операции умножения на коэффициенты поля k, то есть эти аксиомы не зависят от поля k.

По определению все U-алгебры являются метабелевыми алгебрами Ли, поэтому запишем аксиому метабелевости.

$\mathbf{U_0}$: (*аксиома метабелевости*)
$$\forall\, z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4 \quad (z_1 \circ z_2) \circ (z_3 \circ z_4) = 0.$$

Напомним, что любая конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли вкладывается в специальную матричную метабелеву алгебру Ли [7, теорема 3.2.1] (или [1, теорема 2.1]), а на всякой специальной матричной метабелевой алгебре Ли справедливы следующие аксиомы [7, лемма 3.1.4].

$\mathbf{U_1}$: (*аксиома абелевости нильпотентных подалгебр*)
$$\forall\, x,\, y \quad x \circ y \circ y = 0 \ \wedge\ y \circ x \circ x = 0 \ \to\ x \circ y = 0.$$

$\mathbf{U_2}$: (*аксиома коммутативной транзитивности*)
$$\forall\, x,\, y,\, z \quad x \neq 0 \ \wedge\ x \circ y = 0 \ \wedge\ x \circ z = 0 \ \to\ y \circ z = 0.$$

Лемма 1.2. *Любая метабелева U-алгебра Ли U над полем k удовлетворяет аксиомам* $\mathbf{U_1}$ *и* $\mathbf{U_2}$.

Доказательство. Фактически, доказательство леммы следует из результатов работы [7], но там оно получено, как итог долгих рассуждений. Покажем, что существует более простое и естественное доказательство.

Пусть $x, y \in U$ и $x \circ y \neq 0$. Тогда $x \notin \mathrm{Fit}(U)$ или $y \notin \mathrm{Fit}(U)$, следовательно, $x \circ y \circ x \neq 0$ или $x \circ y \circ y \neq 0$. В любом случае справедливо утверждение аксиомы $\mathbf{U_1}$.

Возьмём тройку ненулевых элементов $x, y, z \in U$ и обозначим через U_0 подалгебру алгебры U, порождённую этими элементами. Тогда U_0 суть конечно порождённая метабелева U-алгебра Ли [1, лемма 2.4]. Пусть выполняется посылка импликации из формулы $\mathbf{U_2}$. Если $x \in \mathrm{Fit}(U_0)$, то $y, z \in \mathrm{Fit}(U_0)$, следовательно, $y \circ z = 0$. Если $x \notin \mathrm{Fit}(U_0)$, то по тождеству Якоби $y \circ z \circ x = x \circ z \circ y + x \circ y \circ z = 0$. Следовательно, $y \circ z = 0$, то есть заключение импликации формулы $\mathbf{U_2}$ истинно. Что и требовалось показать. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{U}_1$ универсальный класс алгебр Ли над полем k, удовлетворяющих аксиомам $\mathbf{U_0}$ и $\mathbf{U_1}$, и через $\mathfrak{U}_2$ — универсальный класс алгебр Ли над полем k, удовлетворяющих аксиомам $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$. Справедливы включения $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1$.

Лемма 1.3. *Если алгебра Ли A принадлежит универсальному классу $\mathfrak{U}_1$, то A — метабелева алгебра Ли и радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ — абелев идеал.*

Доказательство. В статье [8] показано, что если на метабелевой алгебре Ли A справедлива аксиома $\mathbf{U_1}$, то любая её нильпотентная подалгебра абелева. В статье [7] доказано, что если любая нильпотентная подалгебра алгебры A абелева, то радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ тоже абелев. $\square$

В работе [1] мы обозначили через $\mathfrak{M}$ многообразие всех метабелевых алгебр Ли над полем k и через $\mathfrak{M}'$ — подкласс в $\mathfrak{M}$ метабелевых алгебр Ли с абелевым радикалом Фиттинга. Согласно лемме 1.3, универсальный класс $\mathfrak{U}_1$ содержится в классе $\mathfrak{M}'$ ($\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{M}'$). Но это включение строгое: не на любой алгебре из класса $\mathfrak{M}'$ справедлива аксиома $\mathbf{U_1}$. Это следует, например, из того, что класс $\mathfrak{M}'$ не замкнут относительно взятия подалгебр [1, пример 4], следовательно, он не является универсальным классом.

Лемма 1.4. *Пусть A — неабелева алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}_2$. Тогда $\mathrm{C}(A) = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $x \in \mathrm{C}(A)$. Если $x \neq 0$, то по аксиоме коммутативной транзитивности $\mathbf{U_2}$ получаем, что алгебра A абелева, что противоречит предположению. $\square$

Следствие 1.1. *Пусть A — алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}_2$. Тогда $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$.*

Доказательство. Если A — неабелева алгебра Ли из класса $\mathfrak{U}_2$, то $\mathrm{C}(A) = 0$. Если же A — абелева алгебра Ли, то $A^2 = 0$. $\square$

Напомним, что метабелевы U-алгебры Ли определяются двумя свойствами: абелевостью радикала Фиттинга и отсутствием кручения на нём как на модуле над коммутативным кольцом многочленов. Для аксиоматического описания кручений на радикале Фиттинга введём следующую универсальную формулу сигнатуры $\mathcal{L}$, зависящую от одной свободной переменной z:

$$fit(z) \;\equiv\; \forall\, x\ (x \circ z \circ z = 0).$$

Лемма 1.5. *На любой метабелевой алгебре Ли A над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$, область истинности предиката $fit(z)$ совпадает с радикалом Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$.*

Доказательство. Действительно, если $z \in \mathrm{Fit}(A)$, то для любого $x \in A$ элемент $x \circ z$ лежит в коммутанте A^2. Так как радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, то $x \circ z \circ z = 0$ и утверждение $fit(z)$ истинно. Обратно, если элемент $z \in A$ лежит в области истинности предиката $fit(z)$, то для любого элемента $x \in A$ верно, что $x \circ z \circ z = 0$, следовательно, $z \in \mathrm{Fit}(A)$ [1, лемма 1.1]. □

С этого места в описании универсального класса $\mathfrak{U}$ начинается развилка: в случае конечного поля k мы можем с помощью универсальных формул выразить отсутствие кручения на радикале Фиттинга, что и будет сделано в разделе 1.3 ниже; в случае же бесконечного поля k радикалы Фиттинга алгебр Ли из класса $\mathfrak{U}$ могут иметь кручение, этот случай будет разобран в разделе 1.4.

1.3. **Случай конечного поля.** Всюду в этом разделе будем предполагать, что основное поле k конечно, и пользоваться этим при записи аксиом. Мы докажем, что при таком ограничении на мощность поля k справедливо равенство $\mathfrak{U} = \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, то есть любая k-алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$, порождённого метабелевыми U-алгебрами Ли над полем k, сама является метабелевой U-алгеброй Ли. Кроме того, универсальная теория метабелевых U-алгебр Ли над конечным полем k алгоритмически разрешима.

Используя предикат $fit(z)$, определённый в разделе 1.2, напишем формулу, выражающую линейную зависимость элементов по модулю радикала Фиттинга:

$$lin(x_1, \ldots, x_m) \equiv \bigvee_{\bar{0} \neq (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in k^m} fit(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m).$$

Формула $lin(x_1, \ldots, x_m)$ — это универсальная формула m свободных переменных $x_1, \ldots, x_m$ в сигнатуре $\mathcal{L}$. По построению $lin(x_1, \ldots, x_m)$ — это объединение формул $fit(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m)$ по всем ненулевым векторам $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ пространства k^m. Выражение $lin(x_1, \ldots, x_m)$ является формулой исчисления предикатов первого порядка лишь в случае конечного поля k.

Лемма 1.6. *Пусть A — метабелева алгебра Ли над конечным полем k, $A \in \mathfrak{M}'$. Тогда набор элементов $x_1, \ldots, x_m \in A$ лежит в области истинности формулы $lin(x_1, \ldots, x_m)$ в том и только том случае, если элементы $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы по модулю радикала Фиттинга* $\mathrm{Fit}(A)$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из леммы 1.5. □

$\mathbf{U_3}$: (*аксиома об отсутствии кручения в радикале Фиттинга*) Для каждого натурального числа m и каждого ненулевого многочлена f кольца многочленов $k[x_1, \ldots, x_m]$ пишем:

$$\forall\, x_1, \ldots, x_m \quad \forall\, z_1, z_2 \qquad z_1 \circ z_2 \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = 0 \ \wedge\ z_1 \circ z_2 \neq 0 \ \to$$
$$\to\ lin(x_1, \ldots, x_m).$$

После приведения формулы аксиомы $\mathbf{U_3}$ к пренексной нормальной форме с помощью эквивалентных преобразований исчисления предикатов получим универсальную формулу языка $\mathcal{L}$.

Лемма 1.7. *Любая метабелева U-алгебра Ли U над конечным полем k удовлетворяет аксиоме* $\mathbf{U_3}$.

Доказательство. Покажем, что при подстановке в формулу аксиомы $\mathbf{U_3}$ произвольных элементов $c_1, \ldots, c_m$, $z_1, z_2 \in U$ мы получим верное утверждение. Предположим, что после подстановки выполнена посылка импликации из формулы $\mathbf{U_3}$. Тогда $z_1 \circ z_2$ — ненулевой элемент радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(U)$ и, так как $z_1 \circ z_2 \cdot f(c_1, \ldots, c_m) = 0$, то по определению U-алгебры отсюда следует, что элементы $c_1, \ldots, c_m$ линейно зависимы по модулю $\mathrm{Fit}(U)$. В соответствии с леммой 1.6 заключаем, что утверждение $lin(c_1, \ldots, c_m)$ истинно. Таким образом, на элементах $c_1, \ldots, c_m$, z_1, z_2 формула $\mathbf{U_3}$ подтверждается. □

Пусть $\mathfrak{U}_3$ — универсальный класс алгебр Ли над конечным полем k, порождённый аксиомами $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_3}$. Справедливы включения $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subseteq \mathfrak{U}_3 \subset \mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{M}'$.

Лемма 1.8. *Пусть A — алгебра Ли над конечным полем k из универсального класса $\mathfrak{U}_3$. Тогда A является метабелевой U-алгеброй Ли.*

Доказательство. Если A — абелева алгебра, то доказывать нечего, поэтому будем считать, что A неабелева, тогда, по лемме 1.4, $\mathrm{C}(A) = 0$. Поскольку $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{M}'$, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ алгебры A абелев. Необходимо показать, что $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов R_A не имеет кручения. Предположим противное, то есть $z \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = 0$ для некоторого $0 \neq z \in \mathrm{Fit}(A)$ и ненулевого многочлена $f \in R_A$. Поскольку $\mathrm{C}(A) = 0$, найдётся такой элемент $y \in A$, что $z \circ y \neq 0$. Тогда $z \circ y \cdot f = (z \cdot f) \circ y = 0$. Отсюда по аксиоме $\mathbf{U_3}$ получаем, что элементы $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы по модулю радикала Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$, что является противоречием. □

Подведём итог проведённых рассуждений.

Теорема 1.9. *Пусть поле k конечно. Тогда для любой алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является метабелевой U-алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A удовлетворяет универсальным аксиомам $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_3}$;*
(3) *Алгебра A лежит в универсальном классе $\mathfrak{U}$, порождённом классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k.*

Или коротко, $\mathfrak{U} = \mathcal{K}_{\mathrm{U}} = \mathfrak{U}_3$.

Доказательство. То, что любая метабелева U-алгебра Ли над конечным полем k удовлетворяет аксиомам $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_3}$, доказано в леммах 1.2 и 1.7. Следовательно, $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subseteq \mathfrak{U}_3$ и $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{U}_3$. По лемме 1.8, $\mathfrak{U}_3 \subseteq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, следовательно, $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} = \mathfrak{U}_3$. По определению класса $\mathfrak{U}$ выполняется включение $\mathfrak{U} \supseteq \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$, следовательно, $\mathfrak{U} = \mathcal{K}_{\mathrm{U}} = \mathfrak{U}_3$. □

Следствие 1.2. *Универсальные формулы $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_3}$ аксиоматизируют универсальный класс $\mathfrak{U}$, порождённый всеми метабелевыми U-алгебрами Ли над конечным полем k.*

Включение $\mathfrak{U} \supset \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ является строгим, если поле k бесконечно и $\mathrm{char}(k) \neq 2$, что будет показано в разделе 1.4 ниже.

Утверждение 1.10. *Универсальная теория класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над конечным полем k алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Согласно следствию 1.2, $\mathrm{ucl}(\mathcal{K}_{\mathrm{U}}) = \mathfrak{U}_3$. Универсальный класс $\mathfrak{U}_3$ порождают аксиомы $\mathbf{U_0}, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_3}$. Рекурсивность множества $\{\mathbf{U_0}, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}\}$ не вызывает сомнений. Аксиомы серии $\mathbf{U_3}$ определены только в случае конечного поля k. Очевидно, что при этом серия аксиом $\mathbf{U_3}$ образует рекурсивное множество. Следовательно, универсальная теория класса $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ алгоритмически разрешима. □

1.4. **Случай бесконечного поля.** Универсальные формулы $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$ из раздела 1.2 не зависят от поля k. Иная ситуация с серией аксиом $\mathbf{U_3}$. Формулы этой серии имеют смысл только в случае, если поле k конечно. Серия формул $\mathbf{U_3}$ выражает отсутствие кручения на радикале Фиттинга. Когда поле k имеет бесконечную мощность, в универсальном классе $\mathfrak{U}$ присутствуют алгебры, радикалы Фиттинга которых имеют кручение. В этом разделе мы покажем, что соответствующее кручение не может быть произвольным, а только Q-радикальным.

Результаты этого раздела справедливы для произвольного поля k — конечного или бесконечного — поэтому мы не делаем никаких ограничений на мощность поля. Если поле k конечно, то все проведённые здесь рассуждения будут справедливы, но не дадут новой информации к той, что была получена в разделе 1.3.

Пусть m — натуральное число. Через R_m будем обозначать кольцо многочленов $k[x_1, \ldots, x_m]$, через Δ_m — максимальный линейный идеал кольца R_m, $\Delta_m = \mathrm{id}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$. Напомним, что Q-радикалом $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(S)$ множества $S \subseteq R_m$ мы называем пересечение всех линейных идеалов, содержащих S, если $S \subseteq \Delta_m$, и $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(S) = R_m$, если $S \nsubseteq \Delta_m$ [9]. Идеал I кольца многочленов R_m называется Q-радикальным, если $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(I) = I$ и $I \neq R_m$ [2].

$\mathbf{U_{3.1}}$: (*аксиома о Q-радикальности аннуляторов*) Для каждого натурального числа m, каждого ненулевого многочлена f кольца R_m и каждого многочлена $f' \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(\{f\})$ пишем:

$$\forall\, x_1,\, \ldots,\, x_m \quad \forall\, z_1,\, z_2 \qquad z_1 \circ z_2 \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = 0 \;\to$$
$$\to\; z_1 \circ z_2 \cdot f'(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Лемма 1.11. *На любой метабелевой U-алгебре Ли U над полем k выполнены все аксиомы серии* $\mathbf{U_{3.1}}$.

Доказательство. Покажем, что при подстановке в формулу аксиомы $\mathbf{U_{3.1}}$ произвольных элементов $c_1, \ldots, c_m$, $z_1, z_2 \in U$ мы получим верное утверждение. Пусть $z = z_1 \circ z_2$. Если $z = 0$, то доказывать нечего. Поэтому будем считать, что $z \neq 0$, и допустим, что посылка квазитождества $\mathbf{U_{3.1}}$ справедлива: $z \cdot f(c_1, \ldots, c_m) = 0$.

Обозначим через U_0 подалгебру метабелевой алгебры Ли U, порождённую элементами $c_1, \ldots, c_m$, z_1, z_2. Пусть $\{d_1, \ldots, d_s\}$ — линейный базис факторпространства $U_0/\mathrm{Fit}(U_0)$. Разложение элементов $c_i + \mathrm{Fit}(U_0)$ по базису $\{d_1, \ldots, d_s\}$ определяет линейный гомоморфизм колец многочленов $\varphi : R_m \to R_{U_0}$. Так как кольцо R_{U_0} действует на радикале Фиттинга $\mathrm{Fit}(U_0)$ без кручения [1, лемма 2.4], то $f \subseteq \ker\varphi$. Ядро $\ker\varphi$ является линейным идеалом кольца R_m [9, лемма 1.3]. Следовательно, $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(\{f\}) \subseteq \ker\varphi$. Отсюда заключаем, что для любого многочлена $f' \in \mathrm{Rad_Q}(\{f\})$ выполнено тождество $z \cdot f' = 0$ и аксиома $\mathbf{U_{3.1}}$ истинна на алгебре U. □

Напишем квазитождество, которое является частным случаем аксиомы $\mathbf{U_{3.1}}$. Если многочлен $f \in R_m$ лежит вне идеала Δ_m, то $\mathrm{Rad_Q}(\{f\}) = R_m$, поэтому предложение $\mathbf{U_{3.1}}$ принимает следующую форму.

$\mathbf{U_{3.0}}$: Для каждого натурального числа m и каждого многочлена $f \in R_m \setminus \Delta_m$ пишем:

$$\forall\, x_1, \ldots, x_m \quad \forall\, z_1, z_2 \qquad z_1 \circ z_2 \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = 0 \;\to\; z_1 \circ z_2 = 0.$$

Лемма 1.12. *Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$, причём $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$. Предположим, что на алгебре A выполнены все предложения серии аксиом $\mathbf{U_{3.0}}$ при $R_m = R_A$. Тогда для любого элемента $0 \neq z \in \mathrm{Fit}(A)$ справедливы следующие утверждения:*

1. $\mathrm{Ann}(z) \subseteq \Delta_m$;
2. $\mathrm{Ann}(z) = \Delta_m$ *тогда и только тогда, когда* $z \in \mathrm{C}(A)$;
3. *если* $z \notin \mathrm{C}(A)$, *то аннулятор* $\mathrm{Ann}(z)$ *равен конечному пересечению аннуляторов некоторых ненулевых коммутаторов, а именно:*

$$\mathrm{Ann}(z) = \mathrm{Ann}(z \circ z_1) \cap \ldots \cap \mathrm{Ann}(z \circ z_s)$$

для некоторых $z_1, \ldots, z_s \in A \setminus \mathrm{Fit}(A)$, таких, что $z \circ z_j \neq 0$, $j = \overline{1, s}$.

Доказательство. По условию $A \in \mathfrak{M}'$, следовательно, $\mathrm{Ann}(z) = \Delta_m$ тогда и только тогда, когда $z \in \mathrm{C}(A)$ [1, лемма 1.2]. Из аксиомы $\mathbf{U_{3.0}}$ следует включение $\mathrm{Ann}(z) \subseteq \Delta_m$ для случая, если z — ненулевой коммутатор, то есть $z = z_1 \circ z_2$. Для доказательства справедливости этого включения в случае произвольного элемента $0 \neq z \in \mathrm{Fit}(A)$ достаточно доказать пункт 3 леммы.

Пусть $z \notin \mathrm{C}(A)$ и $\{a_1, \ldots, a_m\}$ — базис алгебры A по модулю $\mathrm{Fit}(A)$. Тогда множество индексов $J = \{j \in \{1, \ldots, m\} \mid z \circ a_j \neq 0\}$ не пусто. Без ограничения общности можно считать, что $J = \{1, 2, \ldots, s\}$, $s \leqslant m$. Пусть $I_j = \mathrm{Ann}(z \circ a_j)$, $j = \overline{1, s}$. Обозначим через I пересечение $I_1 \cap \ldots \cap I_s$. Заметим, что $I \subseteq \Delta_m$. Покажем, что имеет место равенство $\mathrm{Ann}(z) = I$.

Пусть $f \in I$. Тогда $z \circ a_1 \cdot f = \ldots = z \circ a_m \cdot f = 0$, следовательно, $z \cdot f \in \mathrm{C}(A)$. Так как $f \in \Delta_m$, то $z \cdot f \in A^2$. Получаем, что $z \cdot f \in \mathrm{C}(A) \cap A^2$, следовательно, $z \cdot f = 0$ и $f \in \mathrm{Ann}(z)$. Обратно, если $f \in \mathrm{Ann}(z)$, то для любого $j = \overline{1, s}$ произведение $z \circ a_j \cdot f$ равно нулю, следовательно, $f \in I_j$ и $f \in I$. □

Следствие 1.3. *Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли над полем k, $A \in \mathfrak{M}'$, причём $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$. Предположим, что на алгебре A выполнены все предложения серии аксиом $\mathbf{U_{3.1}}$ при $R_m = R_A$. Тогда аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ любого ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ является Q-радикальным идеалом кольца R_A.*

Доказательство. Пусть $0 \neq z \in \mathrm{Fit}(A)$. Если $z \in \mathrm{C}(A)$, то $\mathrm{Ann}(z) = \Delta_m$, в частности, $\mathrm{Ann}(z)$ — Q-радикальный идеал. Если $z \notin \mathrm{C}(A)$, то $\mathrm{Ann}(z) = I_1 \cap \ldots \cap I_s$, где $I_j = \mathrm{Ann}(z \circ z_j)$, $j = \overline{1, s}$. Так как $\mathrm{Rad_Q}(I_j) = \bigcap\limits_{f \in I_j} \mathrm{Rad_Q}(\{f\})$, то ввиду справедливости на алгебре A аксиомы $\mathbf{U_{3.1}}$, имеем равенство $I_j = \mathrm{Rad_Q}(I_j)$;

кроме того, $I_j \subseteq \Delta_m$, поэтому I_j — Q-радикальный идеал, $j = \overline{1,s}$. Таким образом, аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ представим в виде пересечения Q-радикальных идеалов, следовательно, сам является Q-радикальным идеалом. □

В работе [1] введено понятие примарной метабелевой алгебры Ли, как обобщение понятия метабелевой U-алгебры Ли. С помощью следующей серии аксиом мы выразим примарность радикала Фиттинга как модуля над кольцом многочленов.

$\mathbf{U_{3.2}}$: (*аксиома примарности радикала Фиттинга*) Для каждого натурального числа m и каждого ненулевого многочлена f кольца R_m пишем:

$$\forall\, x_1,\,\ldots,\,x_m \quad \forall\, z_1,\,z_2,\,z_3,\,z_4 \qquad z_1\circ z_2 \neq 0 \;\wedge\; z_3\circ z_4 \neq 0 \;\rightarrow$$
$$\rightarrow \quad (z_1\circ z_2\cdot f(x_1,\ldots,x_m)=0 \;\longleftrightarrow\; z_3\circ z_4\cdot f(x_1,\ldots,x_m)=0).$$

Лемма 1.13. *На любой метабелевой U-алгебре Ли U над полем k выполнены все аксиомы серии* $\mathbf{U_{3.2}}$.

Доказательство. Пусть $c_1,\ldots,c_m,\ z_1,z_2,z_3,z_4$ — произвольные элементы алгебры U, на которых справедлива посылка импликации из формулы $\mathbf{U_{3.2}}$. Обозначим порождённую ими подалгебру через U_0. Будем рассуждать, как при доказательстве леммы 1.11. Разложение элементов $c_i + \mathrm{Fit}(U_0)$ по базису $\{d_1,\ldots,d_s\}$ факторпространства $U_0/\mathrm{Fit}(U_0)$ определяет линейный гомоморфизм конец многочленов $\varphi : R_m \to R_{U_0}$. Если $f \in \ker\varphi$, то $z_1\circ z_2\cdot f(c_1,\ldots,c_m) = 0$ и $z_3\circ z_4\cdot f(c_1,\ldots,c_m) = 0$. Если же $f \notin \ker\varphi$, то $z_1\circ z_2\cdot f(c_1,\ldots,c_m) \neq 0$ и $z_3\circ z_4\cdot f(c_1,\ldots,c_m) \neq 0$. В любом случае заключение импликации формулы $\mathbf{U_{3.2}}$ принимает истинное значение. □

Обозначим через $\mathfrak{U}_{3.0}$ универсальный класс алгебр Ли над полем k, порождённый аксиомами $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_{3.0}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$, и через $\mathfrak{U}_3$ — универсальный класс алгебр Ли над полем k, порождённый аксиомами $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_{3.1}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$. Поскольку серия аксиом $\mathbf{U_{3.0}}$ является подмножеством серии $\mathbf{U_{3.1}}$, то имеет место включение $\mathfrak{U}_{3.0} \subset \mathfrak{U}_3$.

Напомним, что в разделе 1.3 нами был определён универсальный класс $\mathfrak{U}_3$ над конечным полем k. Ниже мы покажем, что в случае $|k| < \infty$ множества аксиом $\{\mathbf{U_0},\mathbf{U_1},\mathbf{U_2},\mathbf{U_3}\}$ и $\{\mathbf{U_0},\mathbf{U_1},\mathbf{U_2},\mathbf{U_{3.1}},\mathbf{U_{3.2}}\}$ эквивалентны (то есть порождают один и тот же универсальный класс). В частности, данное здесь определение класса $\mathfrak{U}_3$ совпадает с определением из раздела 1.3.

Лемма 1.14. *Любая алгебра Ли A из универсального класса $\mathfrak{U}_{3.0}$ является примарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. Если алгебра A абелева, то доказывать нечего, поэтому будем считать, что $A^2 \neq 0$. Необходимо показать, что аннуляторы $\mathrm{Ann}(z)$ всех ненулевых элементов $z \in \mathrm{Fit}(A)$ совпадают. Из аксиомы $\mathbf{U_{3.2}}$ следует, что совпадают аннуляторы $\mathrm{Ann}(z_1\circ z_2)$ всех ненулевых коммутаторов $z_1\circ z_2 \in A^2$. По лемме 1.4, $\mathrm{C}(A) = 0$, следовательно, алгебра A удовлетворяет условиям леммы 1.12, поэтому аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ произвольного ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ представим в виде пересечения аннуляторов некоторых ненулевых коммутаторов. Таким образом, аннуляторы всех ненулевых элементов $z \in \mathrm{Fit}(A)$ совпадают. □

Замечание. Можно показать, что алгебра Ли A над полем k принадлежит универсальному классу $\mathfrak{U}_{3.0}$ тогда и только тогда, когда A — примарная метабелева алгебра Ли и $\mathrm{Ann}(A) \subseteq \Delta_A$, где Δ_A — максимальный линейный идеал кольца многочленов R_A.

Следствие 1.4. *Любая конечно порождённая алгебра Ли A из универсального класса $\mathfrak{U}_3$ является U-примарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. По лемме 1.14 алгебра A является примарной метабелевой алгеброй Ли. В частности, $A \in \mathfrak{M}'$ и $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$ [1, следствие 2.3], поэтому справедлив результат следствия 1.3 — аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ любого ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ является Q-радикальным идеалом кольца многочленов R_A. Таким образом, всё доказано. $\square$

Следствие 1.5. *Если поле k конечно, то множества аксиом $\{\mathbf{U_0}, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_3}\}$ и $\{\mathbf{U_0}, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_{3.1}}, \mathbf{U_{3.2}}\}$ порождают один и тот же универсальный класс k-алгебр Ли.*

Доказательство. Действительно, если алгебра Ли A над конечным полем k удовлетворяет аксиомам $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_3}$, то, по лемме 1.8, A является метабелевой U-алгеброй Ли. Согласно леммам 1.11 и 1.13, на любой метабелевой U-алгебре Ли справедливы аксиомы $\mathbf{U_{3.1}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$.

В другую сторону, предположим, что алгебра Ли A удовлетворяет аксиомам $\mathbf{U_0}, \mathbf{U_1}, \mathbf{U_2}, \mathbf{U_{3.1}}, \mathbf{U_{3.2}}$, тогда, согласно следствию 1.4, A является U-примарной метабелевой алгеброй Ли. Но всякая U-примарная алгебра над конечным полем k является U-алгеброй [2, раздел 3.4]. То, что любая метабелева U-алгебра Ли над конечным полем k удовлетворяет аксиоме $\mathbf{U_3}$, доказано в лемме 1.7. $\square$

Итогом подведённых рассуждений является следующая теорема.

Теорема 1.15. *Для любой конечно порождённой алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является U-примарной метабелевой алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A удовлетворяет универсальным аксиомам $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_{3.1}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$;*
(3) *Алгебра A лежит в универсальном классе $\mathfrak{U}$, порождённом классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k.*

В частности, $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_3$.

Доказательство. Предположим, что A — U-примарная метабелева алгебра Ли. Тогда A дискриминируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ [2, предложение 3.6], следовательно, по лемме 1.1, $A \in \mathfrak{U}$. Если A — алгебра Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$, то она удовлетворяет универсальным аксиомам $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_{3.1}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$, поскольку эти универсальные формулы справедливы на любой метабелевой U-алгебре Ли над полем k. И заключительно, если алгебра Ли A принадлежит универсальному классу $\mathfrak{U}_3$, то, согласно следствию 1.4, она является U-примарной метабелевой алгеброй Ли. Таким образом, универсальные классы $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}_3$ совпадают на конечно порождённых объектах, следовательно, они равны. $\square$

Следствие 1.6. *Универсальные формулы $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_2}$, $\mathbf{U_{3.1}}$, $\mathbf{U_{3.2}}$ аксиоматизируют универсальный класс $\mathfrak{U}$, порождённый всеми метабелевыми U-алгебрами Ли над полем k.*

Как показано в разделе 1.3, если поле k конечно, то справедливо равенство $\mathfrak{U} = \mathcal{K}_{\mathrm{U}}$. Если поле k бесконечно и $\mathrm{char}(k) \neq 2$, то в универсальном классе $\mathfrak{U}$ всегда присутствуют U-примарные метабелевы алгебра Ли, отличные от U-алгебр [2, пример 4].

2. Квазиэквациональная теория класса метабелевых Q-алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{Q}$ — квазимногообразие, порождённое классом метабелевых Q-алгебр $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ над полем k в языке $\mathcal{L}$: $\mathfrak{Q} = \mathrm{qvar}(\mathcal{K}_{\mathrm{Q}})$. В этом параграфе будет найден список аксиом, порождающих квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, и описаны конечно порождённые алгебры класса $\mathfrak{Q}$.

Отметим, что в действительности интересующее нас квазимногообразие $\mathfrak{Q}$ порождается классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ всех метабелевых U-алгебр Ли над полем k: $\mathfrak{Q} = \mathrm{qvar}(\mathcal{K}_{\mathrm{U}})$. Это следует из того, что $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ и любая Q-алгебра вкладывается в конечную прямую сумму U-алгебр [2, следствие 2.1].

В первом параграфе при описании универсально класса $\mathfrak{U}$ проводимые рассуждения с некоторого момента разветвляются на случаи конечного и бесконечного поля k. При описании квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ ситуация аналогична. По этой причине данный параграф, как и предыдущий, разбит на три раздела: общий часть, случай конечного поля, случай бесконечного поля.

2.1. **Общий случай.**

Среди универсальных формул первого параграфа довольно много квазитождеств, а именно, $\mathbf{U_0}$, $\mathbf{U_1}$, $\mathbf{U_{3.1}}$ (в том числе $\mathbf{U_{3.0}}$) — квазитождества языка $\mathcal{L}$. Все эти предложения справедливы на любой метабелевой U-алгебре Ли над полем k. Но, чтобы породить квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, данных формул недостаточно, поэтому далее мы к уже найденным квазитождествам допишем новые.

Прежде всего, повторим аксиому метабелевости $\mathbf{U_0}$.

$\mathbf{Q_0}$: (*аксиома метабелевости*)

$$\forall\, z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4 \quad (z_1 \circ z_2) \circ (z_3 \circ z_4) = 0.$$

Предложение $\mathbf{U_1}$ запишем в более общем виде. По определению центр любой метабелевой Q-алгебры Ли имеет тривиальное пересечение с её коммутантом. Этот факт выражается с помощью следующей серии аксиом.

$\mathbf{Q_1}$: (*аксиомы о тривиальном пересечении центра и коммутанта*) Для каждого натурального числа s пишем:

$$\forall\, x_1,\, \ldots,\, x_s \quad \forall\, y_1,\, \ldots,\, y_s \quad \forall\, z \qquad z = x_1 \circ y_1 + \ldots + x_s \circ y_s \wedge$$
$$\wedge\, z \circ x_1 = 0 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, z \circ x_s = 0 \,\wedge\, z \circ y_1 = 0 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, z \circ y_s = 0 \;\to\; z = 0.$$

Ясно, что формула $\mathbf{U_1}$ является частным случаем аксиомы из серии $\mathbf{Q_1}$ при $s = 1$.

Лемма 2.1. *На любой метабелевой U-алгебре Ли U над полем k выполнены все аксиомы серии $\mathbf{Q_1}$.*

Доказательство. Действительно, пусть на элементах $x_1, \dots, x_s$, $y_1, \dots, y_s$, $z \in U$ выполнена посылка импликации из аксиомы $\mathbf{Q_1}$. Обозначим через U_0 подалгебру алгебры U, порождённую этими элементами. Тогда U_0 — метабелева U-алгебра Ли [1, лемма 2.4]. Заметим, что элемент z лежит как в коммутанте U_0^2, так и в центре $\mathrm{C}(U_0)$ [1, лемма 1.2], поэтому $z = 0$ [1, следствие 2.3], что и требовалось показать. □

Пусть $\mathfrak{Q}_1$ — квазимногообразие алгебр Ли над полем k, порождённое аксиомами $\mathbf{Q_0}$ и $\mathbf{Q_1}$. Справедливы включения: $\mathcal{K}_{\mathrm{U}} \subset \mathfrak{Q}_1 \subset \mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{M}'$.

Лемма 2.2. *Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}_1$. Тогда* $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$.

Доказательство. Пусть $z \in A^2$. Тогда найдутся такие элементы $x_1, \dots, x_s$, $y_1, \dots, y_s \in A$, что $z = x_1 \circ y_1 + \ldots + x_s \circ y_s$. Если, кроме того, $z \in \mathrm{C}(A)$, то $z \circ x_i = 0$ и $z \circ y_i = 0$, $i = \overline{1, s}$. Следовательно, $z = 0$. □

Лемма 2.3. *Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}_1$. Тогда для любого линейного идеала p кольца многочленов R_A справедливо равенство* $\mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A) \cdot p = 0$.

Доказательство. Пусть линейный идеал p порождается линейными многочленами $v_1, \dots, v_s$ кольца R_A. Предположим, что $z \in \mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A) \cdot p$. Так как $z \in \mathrm{Fit}(A) \cdot p$, то найдутся такие элементы $y_1, \dots, y_s \in \mathrm{Fit}(A)$, что $z = y_1 \circ v_1 + \ldots + y_s \circ v_s$. Поскольку $z \in \mathrm{Fit}(A)[p]$, имеем $z \circ v_i = 0$ для всех $i = \overline{1, s}$. Справедливо включение $\mathfrak{Q}_1 \subset \mathfrak{M}'$, следовательно, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев, поэтому $z \circ y_i = 0$ для всех $i = \overline{1, s}$. Применим аксиому $\mathbf{Q_1}$ к элементам v_i, y_i, z и получим, что $z = 0$. □

Квазитождество $\mathbf{U_{3.1}}$ из раздела 1.4 перепишем без изменений.

$\mathbf{Q_{3.1}}$: (*аксиома о Q-радикальности аннуляторов*) Для каждого натурального числа m, каждого ненулевого многочлена f кольца R_m и каждого многочлена $f' \in \mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(\{f\})$ пишем:

$$\forall\, x_1, \dots, x_m \quad \forall\, z_1, z_2 \qquad z_1 \circ z_2 \cdot f(x_1, \dots, x_m) = 0 \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ z_1 \circ z_2 \cdot f'(x_1, \dots, x_m) = 0.$$

Замечание. Если поле k конечно, то количество линейных идеалов кольца R_m конечно, поэтому существует простой алгоритм вычисления Q-радикалов $\mathrm{Rad}_{\mathrm{Q}}(\{f\})$ и серия аксиом $\mathbf{Q_{3.1}}$ составляет рекурсивное множество.

Если основное поле k конечно, то написанных аксиом уже достаточно, чтобы сделать необходимые выводы.

2.2. **Случай конечного поля.** В этом разделе будет доказано, что в случае конечного поля k справедливо равенство $\mathfrak{Q}_\omega = \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ и квазиэквациональная теория метабелевых Q-алгебр Ли над полем k алгоритмически разрешима.

Теорема 2.4. *Пусть поле k конечно. Тогда для любой конечно порождённой алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является метабелевой Q-алгеброй Ли;*

(2) *Алгебра A вкладывается в конечную прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых конечно порождённых метабелевых U-алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k;*
(3) *Алгебра A удовлетворяет квазитождествам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$;*
(4) *Алгебра A принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{Q}$, порождённому классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ всех метабелевых Q-алгебр Ли над полем k.*

В частности, $\mathfrak{Q}_\omega = \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$.

Доказательство. Эквивалентность первых двух пунктов доказана в [1, следствие 2.1]. Обозначим через $\mathfrak{Q}'$ квазимногообразие алгебр Ли над полем k, порождённое аксиомами $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$. Эти аксиомы выполняются на любой метабелевой U-алгебре Ли, и любое квазимногообразие замкнуто относительно декартовых произведений и взятия подсистем, следовательно, каждая метабелева Q-алгебра Ли принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{Q}'$, то есть $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}} \subset \mathfrak{Q}'$. Отсюда же следует, что $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{Q}'$. Включение $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}} \subset \mathfrak{Q}$ выполняется по определению. Осталось доказать, что в случае конечного поля k справедливо включение $\mathfrak{Q}'_\omega \subseteq \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$.

Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}'$. Необходимо показать, что A является метабелевой Q-алгеброй Ли. Для этого требуется проверить три условия: что радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ абелев (лемма 1.3); что он является Q-модулем и $\mathrm{C}(A) \cap A^2 = 0$ (лемма 2.2). В свою очередь, чтобы показать, что радикал Фиттинга является Q-модулем, нужно проверить два условия: что аннулятор любого ненулевого элемента из $\mathrm{Fit}(A)$ является Q-идеалом и что $\mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A) \cdot p = 0$ для любого линейного идеала p кольца R_A (лемма 2.3). Как видно, осталось проверить только утверждение об аннуляторах. Однако, согласно следствию 1.3, аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ любого ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ является Q-радикальным идеалом, а в случае конечного поля k понятия Q-радикального идеала и Q-идеала совпадают. □

Следствие 2.1. *Квазитождества $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$ аксиоматизируют квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, порождённое классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ всех метабелевых Q-алгебр Ли над конечным полем k.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 2.4 показано, что $\mathfrak{Q}_\omega = \mathfrak{Q}'_\omega = \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$. Квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}'$ совпадают на конечно порождённых объектах, следовательно, они равны. □

Утверждение 2.5. *Квазиэквациональная теория класса $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ всех метабелевых Q-алгебр Ли над конечным полем k алгоритмически разрешима.*

Доказательство. Согласно следствию 2.1, квазимногообразие $\mathrm{qvar}(\mathcal{K}_{\mathrm{Q}})$ порождается аксиомами $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$. Очевидно, что множество аксиом $\mathbf{Q_0} \cup \mathbf{Q_1}$ является рекурсивным вне зависимости от поля k. Если поле k конечно, то список аксиом $\mathbf{Q_{3.1}}$ также образует рекурсивное множество. Следовательно, квазиэквациональная теория класса $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ алгоритмически разрешима. □

2.3. **Случай бесконечного поля.** При написании квазитождеств $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$ мы не делали никаких ограничений на мощность поля k. Данные предложения справедливы на любой метабелевой Q-алгебре Ли над полем k произвольной мощности. Однако, если поле k бесконечно, то обратное утверждение уже неверно: из написанных аксиом не следует, что удовлетворяющая им алгебра является Q-алгеброй. И причина этого в том, что в случае бесконечного поля k понятия Q-радикального идеала и Q-идеала кольца многочленов не совпадают.

В этом разделе будет показано, что конечно порождённые алгебры из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ над полем k произвольной мощности являются Q-полупримарными метабелевыми алгебрами Ли. Такой результат согласуется со случаем конечного поля, так над конечным полем понятия Q-полупримарных алгебр и Q-алгебр совпадают [2, раздел 3.5].

По определению радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ любой полупримарной метабелевой алгебры Ли A удовлетворяет требованию: $\mathrm{Fit}(A)[p\,] \cap \mathrm{Fit}(A){\cdot}p = 0$ для любого идеала $p \in \mathrm{Ass}(A)$. Это свойство записывается с помощью следующей серии квазитождеств.

$\mathbf{Q_2}$: *(аксиома полупримарного модуля)* Для каждой пары натуральных чисел m, s и каждого набора ненулевых многочленов $f_1, \ldots, f_s \in \Delta_m$ пишем:

$$\forall\, x_1,\, \ldots,\, x_m \quad \forall\, y_1,\, \ldots,\, y_s \quad \forall\, z_1,\, z_2$$
$$\bigwedge_{i=1}^{s} z_1 \circ z_2 \cdot f_i(x_1, \ldots, x_m) = 0 \ \wedge\ \bigwedge_{i=1}^{s} z_1 \circ z_2 \circ y_s = 0\ \wedge$$
$$\wedge\ z_1 \circ z_2 = y_1 \cdot f_1(x_1, \ldots, x_m) + \ldots + y_s \cdot f_s(x_1, \ldots, x_m)\ \to$$
$$\to\ z_1 \circ z_2 = 0.$$

Лемма 2.6. *На любой метабелевой U-алгебре Ли U над полем k выполнены все аксиомы серии $\mathbf{Q_2}$.*

Доказательство. Пусть на элементах $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_s, z_1, z_2 \in U$ выполнена посылка импликации из аксиомы $\mathbf{Q_2}$. Обозначим через U_0 подалгебру алгебры U, порождённую этими элементами. Тогда U_0 — метабелева U-алгебра Ли [1, лемма 2.4]. Предположим противное: $z_1 \circ z_2 \neq 0$. Тогда $y_1, \ldots, y_s \in \mathrm{Fit}(U_0)$. Рассуждая, как при доказательстве леммы 1.11, получаем, что $f_1, \ldots, f_s \in \ker\varphi$, где $\varphi : R_m \to R_{U_0}$ — линейный гомоморфизм конец многочленов. Следовательно, $y_1 \cdot f_1 + \ldots y_s \cdot f_s = 0$, что противоречит предположению $z_1 \circ z_2 \neq 0$. Таким образом, аксиома $\mathbf{Q_2}$ на элементах $x_1, \ldots, x_m,\, y_1, \ldots, y_s,\, z_1,\, z_2$ алгебры U подтверждается. □

Любой Q-идеал кольца многочленов R_m является полупростым идеалом [9], поэтому мы пишем следующую серию квазитождеств.

$\mathbf{Q_{3.2}}$: *(аксиома о полупростоте аннуляторов)* Для каждой пары натуральных чисел m, n и каждого ненулевого многочлена $f \in R_m$ пишем:

$$\forall\, x_1,\, \ldots,\, x_m \quad \forall\, z_1,\, z_2 \qquad z_1 \circ z_2 \cdot f^n(x_1, \ldots, x_m) = 0\ \to$$
$$\to\ z_1 \circ z_2 \cdot f(x_1, \ldots, x_m) = 0.$$

Лемма 2.7. *На любой метабелевой U-алгебре Ли U над полем k выполнены все аксиомы серии $\mathbf{Q_{3.2}}$.*

Доказательство. Пусть $c_1, \ldots, c_m, z_1, z_2$ — произвольные элементы алгебры U и U_0 — порождённая ими подалгебра алгебры U. Снова будем рассуждать, как при доказательстве леммы 1.11. Если справедлива посылка квазитождества $\mathbf{Q_{3.2}}$ и $z_1 \circ z_2 \neq 0$, то $f^n \in \ker\varphi$. Идеал $\ker\varphi$ линеен, следовательно, прост, поэтому $f \in \ker\varphi$ и справедливо заключение квазитождества $\mathbf{Q_{3.2}}$. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{Q}_{3.0}$ квазимногообразие алгебр Ли над полем k, удовлетворяющих аксиомам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{U_{3.0}}$, $\mathbf{Q_{3.2}}$, и через $\mathfrak{Q}_3$ — квазимногообразие алгебр Ли над полем k, удовлетворяющих аксиомам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$, $\mathbf{Q_{3.2}}$. Справедливы включения $\mathfrak{Q}_3 \subset \mathfrak{Q}_{3.0}$.

Лемма 2.8. *Любая конечно порождённая алгебра Ли A из универсального класса $\mathfrak{Q}_{3.0}$ является полупримарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. В силу лемм 1.3 и 2.2, достаточно показать, радикал Фиттинга $\mathrm{Fit}(A)$ как модуль над кольцом многочленов R_A полупримарен. Пусть $R_m = R_A$. Покажем, что аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ каждого ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ является полупростым идеалом. В силу аксиом серии $\mathbf{Q_{3.2}}$, это так для случая, когда z — ненулевой коммутатор, то есть $z = z_1 \circ z_2$. Если $z \in \mathrm{C}(A)$, то $\mathrm{Ann}(z) = \Delta_m$, в частности, $\mathrm{Ann}(z)$ — полупростой идеал. Предположим теперь, что z — произвольный элемент из $\mathrm{Fit}(A) \setminus \mathrm{C}(A)$. По лемме 1.12, аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ представим в виде пересечения аннуляторов некоторых ненулевых коммутаторов, следовательно, он является полупростым идеалом.

Теперь докажем, что $\mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A){\cdot}p = 0$ для любого идеала $p \in \mathrm{Ass}(A)$. Пусть идеал p порождается многочленами $f_1, \ldots, f_s$ и $z \in \mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A){\cdot}p$. Тогда $\mathrm{Ann}(z) \supseteq p$, следовательно, по лемме 1.12, $f_1, \ldots, f_s \in \Delta_m$, следовательно, $z \in A^2$. Если $z \in \mathrm{C}(A)$, то сразу заключаем, что $z = 0$. Если $z \in \mathrm{Fit}(A) \setminus \mathrm{C}(A)$ и $z \neq 0$, то найдётся такой элемент $y \in A$, что $z \circ y \neq 0$. Тогда $y \circ z \in \mathrm{Fit}(A)[p] \cap \mathrm{Fit}(A){\cdot}p$, что противоречит аксиоме серии $\mathbf{Q_2}$. $\square$

Замечание. Можно показать, что алгебра Ли A над полем k принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{Q}_{3.0}$ тогда и только тогда, когда A — полупримарная метабелева алгебра Ли и любой идеал ассоциатора $\mathrm{Ass}(A)$ лежит в максимальном линейном идеале Δ_A кольца многочленов R_A.

Следствие 2.2. *Любая конечно порождённая алгебра Ли A из квазимногообразия $\mathfrak{Q}_3$ является Q-полупримарной метабелевой алгеброй Ли.*

Доказательство. По лемме 2.8, алгебра A является полупримарной метабелевой алгеброй Ли. Кроме того, для алгебры A справедлив результат следствия 1.3 — аннулятор $\mathrm{Ann}(z)$ любого ненулевого элемента $z \in \mathrm{Fit}(A)$ является Q-радикальным идеалом кольца многочленов R_A. $\square$

Следствие 2.3. *Если поле k конечно, то множества аксиом $\{\mathbf{Q_0}, \mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_{3.1}}\}$ и $\{\mathbf{Q_0}, \mathbf{Q_1}, \mathbf{Q_2}, \mathbf{Q_{3.1}}, \mathbf{Q_{3.2}}\}$ порождают одно и то же квазимногообразие.*

Доказательство. Действительно, если алгебра Ли A над конечным полем k удовлетворяет квазитождествам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$, то, по теореме 2.4, A является метабелевой Q-алгеброй Ли. Согласно леммам 2.6 и 2.7, на любой метабелевой U-алгебре Ли справедливы аксиомы $\mathbf{Q_2}$ и $\mathbf{Q_{3.2}}$, следовательно, они справедливы на любой Q-алгебре. $\square$

Итогом подведённых рассуждений является следующая теорема.

Теорема 2.9. *Для любой конечно порождённой алгебры Ли A над полем k следующие условия эквивалентны:*

(1) *Алгебра A является Q-полупримарной метабелевой алгеброй Ли;*
(2) *Алгебра A вкладывается в конечную прямую сумму $A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ некоторых U-примарных метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k;*
(3) *Алгебра A удовлетворяет квазитождествам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$, $\mathbf{Q_{3.2}}$;*
(4) *Алгебра A лежит в квазимногообразии $\mathfrak{Q}$, порождённом классом $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$ всех метабелевых Q-алгебр Ли над полем k.*

В частности, $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_3$.

Доказательство. Эквивалентность первых двух пунктов доказана в [1, утверждение 3.7]. Предположим, что A — Q-полупримарная метабелева алгебра Ли. Тогда A аппроксимируется классом $\mathcal{K}_{\mathrm{U}}$ [2, предложение 3.8], следовательно, по лемме 1.1, $A \in \mathfrak{Q}$. Если A — алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$, то она удовлетворяет квазитождествам $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$, $\mathbf{Q_{3.2}}$, поскольку они справедливы на любой метабелевой U-алгебре Ли над полем k. И заключительно, если алгебра Ли A принадлежит квазимногообразию $\mathfrak{Q}_3$, то, согласно следствию 2.2, она является Q-полупримарной метабелевой алгеброй Ли. Таким образом, квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ и $\mathfrak{Q}_3$ совпадают на конечно порождённых объектах, следовательно, они равны. □

Следствие 2.4. *Квазитождества $\mathbf{Q_0}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$, $\mathbf{Q_{3.1}}$, $\mathbf{Q_{3.2}}$ аксиоматизируют квазимногообразие $\mathfrak{Q}$, порождённое всеми метабелевыми Q-алгебрами Ли над полем k.*

Если поле k конечно, что справедливо равенство $\mathfrak{Q}_\omega = \mathcal{K}_{\mathrm{Q}}$. Если поле k бесконечно и $\mathrm{char}(k) \neq 2$, то включение $\mathcal{K}_{\mathrm{Q}} \subset \mathfrak{Q}_\omega$ является строгим, так как $(\mathcal{K}_{\mathrm{U}})_\omega \subsetneq \mathfrak{U}_\omega$ [2, пример 4].

Следствие 2.5. *Любая конечно порождённая алгебра Ли из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ вкладывается в конечную прямую сумму конечно порождённых алгебр Ли из универсального класса $\mathfrak{U}$.*

Доказательство. Пусть A — конечно порождённая алгебра Ли над полем k из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$. Согласно теореме 2.9, алгебра A изоморфна подалгебре конечной прямой суммы U-примарных метабелевых алгебр Ли $A_1, \ldots, A_n$ над полем k. В силу теоремы 1.15, алгебры $A_1, \ldots, A_n$ принадлежат универсальному классу $\mathfrak{U}$. □

Заключение

Завершая цикл из трёх статей, поясним, как полученные результаты могут быть применены в построении алгебраической геометрии над метабелевыми алгебрами Ли.

Во введении к первой статье цикла [1] мы уже упоминали, что основная задача алгебраической геометрии над любой конечно порождённой метабелевой алгеброй Ли A над полем k эквивалентна задаче описания конечно порождённых алгебр из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(A)$: конечно порождённые алгебры из $\mathrm{qvar}(A)$ составляют класс всех координатных алгебр над A. Как правило, при классификации конечно порождённых алгебр из квазимногообразия $\mathrm{qvar}(A)$ оказывается полезной предварительная классификация конечно порождённых алгебр из универсального замыкания $\mathrm{ucl}(A)$, то есть неприводимых координатных алгебр.

К моменту написания данного цикла работ эти задачи полностью были решены для случая, когда A — это конечно порождённая свободная метабелева алгебра Ли F над конечным полем k. Соответствующие результаты представлены в работах [7, 8, 10]. В перспективе нам бы хотелось распространить результаты работ [7, 8, 10] в следующих двух направлениях:

(1) Во-первых, в этих статьях был разобран только случай конечного поля k. Теперь мы хотим доказать аналогичные результаты для случая бесконечного поля k.
(2) Во-вторых, мы хотим перенести результаты работ [7, 8, 10] со случая свободной метабелевой алгебры Ли F на более широкий класс алгебр, а именно, на класс конечно порождённых метабелевых U-алгебр Ли, частным случаем которых является алгебра F [1, следствие 2.1].

Перечислим, какие основания существуют для намеченных нами обобщений. В статье [8] доказано, что при $|k| < \infty$ любая неприводимая координатная алгебра $\Gamma(Y)$ над F является U-алгеброй, то есть радикал Фиттинга алгебры $\Gamma(Y)$ как модуль над кольцом многочленов не имеет кручения. Теперь мы знаем, что в случае бесконечного поля k любая неприводимая координатная алгебра $\Gamma(Y)$ над F является U-примарной алгеброй, то есть в радикале Фиттинга алгебры $\Gamma(Y)$ может быть кручение, при этом классификация всех возможных кручений сводится к классификации диофантовых проективных многообразий над полем k.

Что касается второго направления для обобщения результатов работ [7, 8, 10], то тут следует отметить такие факты:

- Класс конечно порождённых метабелевых U-алгебр Ли совпадает с классом конечно порождённых специальных матричных метабелевых алгебр Ли [1, теорема 2.1], а последние алгебры являются вполне конструктивными объектами, в них удобно проводить вычисления. По существу, в работах [7, 8, 10] мы пользовались не столько спецификой свободной метабелевой алгебры Ли F, сколько её свойствами как специальной матричной метабелевой алгебры Ли.
- Аксиомы, построенные в данной статье, являются общими для всех U-алгебр. В текущем цикле из трёх статей очерчен круг, внутри которого могут быть координатные алгебры над произвольной U-алгеброй, а именно: все координатные алгебры принадлежат квазимногообразию $\mathfrak{Q}$, причём неприводимые координатные алгебры попадают в универсальный класс $\mathfrak{U}$. При построении алгебраической геометрии над фиксированной метабелевой U-алгеброй Ли A этот круг неизбежно сужается.
- В этой статье доказано, что любая конечно порождённая алгебра из квазимногообразия $\mathfrak{Q}$ вкладывается в конечную прямую сумму конечно порождённых алгебр из универсального класса $\mathfrak{U}$ (следствие 2.5). Соответствующий результат является базовым для доказательства вложения в частных случаях, например, на его основе строится вложение произвольной координатной алгебры над F в прямую сумму неприводимых координатных алгебр [10].

Список литературы

[1] Э. Ю. Даниярова, *Метабелевы U-алгебры Ли*, Сибирские электронные математические известия, **5** (2008), 355–382,
http://semr.math.nsc.ru/v5/p355-382.pdf MR2586643

[2] Э. Ю. Даниярова, *Метебелевы Q-алгебры Ли*, Сибирские электронные математические известия, **6** (2009), 26–48,
http://semr.math.nsc.ru/v6/p26-48.pdf MR2586678

[3] А. И. Мальцев, *Алгебраические системы*, Наука, Москва, 1970.

[4] В. А. Горбунов, *Алгебраическая теория квазимногообразий*, Научная книга, Новосибирск, 1999. Zbl 0986.08002

[5] *Справочная книга по математической логике. Часть 1. Теория моделей*, Наука, Москва, 1982.

[6] Э. Ю. Даниярова, *Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли*, Вестник Омского университета, Комбинаторные методы алгебры и сложность вычислений (2007), 8–39.

[7] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли I: U-алгебры и универсальные классы*, Фундам. и прикл. мат., **9(3)** (2003), 37–63,
http://mech.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03304h.htm MR2094329

[8] Э. Ю. Даниярова, И. В. Казачков, В. Н. Ремесленников, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли II: Случай конечного поля*, Фундам. и прикл. мат., **9(3)** (2003), 65–87,
http://mech.math.msu.su/~fpm/rus/k03/k033/k03305h.htm MR2094330

[9] Э. Ю. Даниярова, *Q-идеалы в кольцах многочленов и Q-модули над кольцами многочленов*, Сибирские электронные математические известия, **4** (2007), 64–84,
http://semr.math.nsc.ru/v4/p64-84.pdf MR2465415

[10] Э. Ю. Даниярова, *Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли III: Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств*, Препринт, Омск: Изд-во ОмГУ, 130 с., 2005.

Даниярова Эвелина Юрьевна
Омский филиал Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН,
ул. Певцова 13,
644099, Омск, Россия
E-mail address: evelina.omsk@list.ru