S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 285–293 (2012) УДК 519.17
MSC 05C25

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$

Л.Ю. ЦИОВКИНА

Abstract. Prime divisors of the orders of automorphisms and their fixed point subgraphs are studied for a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$. It is proved that this graph is not arc-transitive.

Keywords: distance-regular graph, automorphism.

Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, то есть, подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, a, b — две вершины из Γ, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*). Если Γ — граф диаметра d, то через $\Gamma_{i_1,i_2,\ldots,i_t}$, где $i_j \leq d$ для всех $j = 1, \ldots, t$, обозначается граф с тем же множеством вершин, что и Γ, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ в Γ.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени k*, если степень любой вершины из Γ равна k.

L.Yu. Tsiovkina, On automorphisms of a distance-regular graph with intersection array $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 12-01-00012), программы отделения математических наук РАН (проект 12-T-1-1003) и программ совместных исследований УрО РАН с СО РАН (проект 12-C-1-1008) и с НАН Беларуси (проект 12-C-1-1009), и гранта УрО РАН для молодых ученых за 2012 год.

Поступила 21 мая 2012 г., опубликована 1 июня 2012 г.

Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a]\cap[b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом*. Если вершины u,w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0,b_1,\dots,b_{d-1};c_1,\dots,c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u,w на расстоянии i в Γ для любого $i=0,...,d$. Положим $a_i=k-b_i-c_i$. Заметим, что для дистанционно регулярного графа b_0 — это степень графа, $c_1=1$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x)\cap\Gamma_j(y)$ для вершин x,y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x,y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечения графа* Γ.

Граф называется *реберно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве его дуг (упорядоченных ребер).

В работе [1] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных локально циклических графов с числом вершин не большим 1000.

Предложение 1. *Пусть Γ является дистанционно регулярным графом диаметра, большего 2, на $v\le 1000$ вершинах. Если $\lambda=2$ и $\mu>1$, то верно одно из утверждений:*

(1) Γ *— примитивный граф с массивом пересечений* $\{15,12,6;1,2,10\}$, $\{19,16,8;1,2,8\}$, $\{24,21,3;1,3,18\}$, $\{35,32,8;1,2,28\}$, $\{51,48,8;1,4,36\}$*;*

(2) Γ *— антиподальный граф с* $\mu=2$ *и массивом пересечений* $\{2r+1,2r-2,1;1,2,2r+1\}$, $r\in\{3,4,...,21\}-\{10,16\}$ *и* $v=2r(r+1)$*;*

(3) Γ *— антиподальный граф с* $\mu\ge 3$ *и массивом пересечений*
$\{15,12,1;1,4,15\}$, $\{18,15,1;1,5,18\}$, $\{27,24,1;1,8,27\}$, $\{35,32,1;1,4,35\}$, $\{45,42,1;1,6,45\}$, $\{42,39,1;1,3,42\}$, $\{75,72,1;1,12,75\}$.

Предполагается исследование реберно симметричных графов с такими массивами пересечений. Окрестность вершины в таком графе является объединением изолированных многоугольников. В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$.

Граф Γ с массивом пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$ имеет $v=1+35+560+16=612$ вершин и спектр $35^1,\sqrt{35}^{288},-1^{35},-\sqrt{35}^{288}$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда $\pi(G)\subseteq\{2,3,5,7,17\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф и либо*

(*i*) $p=17$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=34$ *и* $\alpha_2(g)=544$ *или* $\alpha_3(g)=612$*, либо*

(*ii*) $p\in\{2,3\}$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_2(g)=576$ *и* $\alpha_1(g)=36$*;*

(2) Ω *лежит в антиподальном классе* Γ *и либо*

(*i*) $p=7$, $|\Omega|=3,17$, *либо*

(*ii*) $p=5$, $|\Omega|=7,17$;

(3) $p=3,5$ *и* Ω *— граф икосаэдра;*

(4) $p=2$, Ω *— объединение двух антиподальных классов,* $\alpha_3(g)=0$ *и* $\alpha_1(g)=34$.

Следствие 1. *Граф с массивом пересечений* $\{35,32,1;1,2,35\}$ *не является реберно симметричным.*

1. **Вспомогательные результаты**

В этом параграфе приведены результаты, используемые в доказательстве теоремы.

Лемма 1. *Пусть* O_K *— кольцо целых алгебраических чисел поля* K. *Если* d *— целое число, не делящееся на квадрат простого числа,* $K=\mathbf{Q}(d^{1/2})$ *— соответствующее квадратичное поле, то целочисленный базис кольца* O_K *равен* $(1,(1+d^{1/2})/2)$, *если* $d\equiv 1 \pmod 4$ *и равен* $(1,d^{1/2})$, *если* $d\equiv 2,3 \pmod 4$.

Доказательство. Это лемма 2 из [2].

Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [3]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\{R_0,...,R_d\})$, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i\geq 1$ класс R_i состоит из пар (u,w) таких, что $d(u,w)=i$. Для $u\in\Gamma$ положим $k_i=|\Gamma_i(u)|$, $v=|\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u,w смежны, если $(u,w)\in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i>0$ и $A_0=I$ — единичная матрица. Тогда $A_iA_j=\sum p^l_{ij}A_k$ для подходящих неотрицательных целых p^l_{ij}.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j,l) стоит p^l_{ij}. Тогда собственные значения $p_1(0),...,p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0=1,...,m_d$. Заметим, что матрица P_j является значением некоторого рационального многочлена от P_1, поэтому упорядочение собственных значений матрицы P_1 задает порядок на множестве собственных значений матрицы P_j. Матрицы P и Q, у которых на месте (i,j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i)=m_jp_i(j)/n_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ=QP=|X|I$.

Предложение 2. *Пусть* u_j *и* w_j *— левый и правый собственные векторы матрицы* P_1, *отвечающие собственному значению* $p_1(j)$ *и имеющие первую координату 1. Тогда кратность* m_j *собственного значения* $p_1(j)$ *равна* $v/\langle u_j,w_j\rangle$.

Доказательство. См. теорему 17.12 из [4].

Фактически, из доказательства теоремы 17.12 следует, что w_j являются столбцами матрицы P и m_ju_j являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(n, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^n$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств $W_0, ..., W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. § 3.7 [3]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = n^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $(x, x^g) \in R_j$. Заметим, что значения характеров являются целыми алгебраическими числами, и если правая часть выражения для $\chi_i(g)$ — число рациональное, то $\chi_i(g)$ — целое число.

Лемма 2. *Пусть* Γ *— дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. *Если* $g \in G$, χ_1 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 288 *(отвечающее собственному значению* θ_1*),* χ_2 *— характер проекции представления* ψ *на подпространство размерности* 35*, то*

$$\chi_1(g) = (16\alpha_0(g) + 16\alpha_1(g)/\sqrt{35} - \alpha_2(g)/\sqrt{35} - \alpha_3(g))/34,$$

$$\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/17 - 1.$$

Если $|g| = p$ *— простое число, то* $\chi_2(g) - 35$ *делится на* p.

Доказательство. Имеем

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 35 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 32 & 32 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим, например, $p_1(1) = \sqrt{35}$. Тогда

$$P_1 - \sqrt{35}I = \begin{pmatrix} -\sqrt{35} & 1 & 0 & 0 \\ 35 & 2 - \sqrt{35} & 2 & 0 \\ 0 & 32 & 32 - \sqrt{35} & 35 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{35} \end{pmatrix}.$$

Если $(1, x_2, x_3, x_4)$ — вектор-строка из ядра матрицы $P_1 - \sqrt{35}I$, то $x_2 = 1/\sqrt{35}$, $x_3 = -1/(16\sqrt{35})$ и $x_4 = -1/16$. Отсюда

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 288 & 288/\sqrt{35} & -18/\sqrt{35} & -18 \\ 35 & -1 & -1 & 35 \\ 288 & -288/\sqrt{35} & 18/\sqrt{35} & -18 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g) = (16\alpha_0(g) + 16\alpha_1(g)/\sqrt{35} - \alpha_2(g)/\sqrt{35} - \alpha_3(g))/34$.

Аналогично, $\chi_2(g) = (35\alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_2(g) + 35\alpha_3(g))/612$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 612 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/17 - 1$.

Остальные утверждения леммы следуют из леммы 1 [5].

2. Автоморфизмы графа с массивом пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$

В этом параграфе Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{35,32,1;1,2,35\}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$ и $\alpha_i(g)=pw_i$ для $i>0$.

Заметим, что Γ содержит 36 антиподальных классов, в каждом из которых 17 вершин.

Замечание. Если Ω пересекает антиподальные классы K,L, то $|K\cap\Omega|=|L\cap\Omega|$.

В самом деле, вершина из $L\cap\Omega$ попадает в окрестность единственной вершины из $K\cap\Omega$, поэтому $|K\cap\Omega|\le|L\cap\Omega|$. Симметрично $|L\cap\Omega|\le|K\cap\Omega|$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если g — автоморфизм Γ порядка $2,3$ или 5, то $16w_1=w_2$;*

(2) *если Ω — пустой граф, то либо*

(i) $p=17$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=34$ и $\alpha_2(g)=544$ или $\alpha_3(g)=612$, либо

(ii) $p\in\{2,3\}$, $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_2(g)=576$ и $\alpha_1(g)=36$.

Доказательство. Если g—элемент группы, то значение характера для g является суммой n корней из единицы степени $|\psi(g)|$, где n—размерность представления ψ.

Далее, в силу леммы 1 пара $(1,\sqrt{35})$ образует целочисленный базис кольца алгебраических целых чисел поля $\mathbf{Q}(\sqrt{35})$.

Заметим, что корни из единицы степени 2, 3 имеют рациональные вещественные части. Если $|g|=2,3$, то значение характера – вещественное число, поэтому оно является целым. Таким образом, если g — автоморфизм графа Γ порядка 2 или 3, то из леммы 2 следует, что $16w_1=w_2$.

В случае $|g|=5$ можно воспользоваться формулами $\cos 2\pi/5=(\sqrt{5}-1)/4$ и $\cos 4\pi/5=-(\sqrt{5}+1)/4$. Поэтому алгебраическое целое из $\mathbf{Q}(\sqrt{35})$ можно представить в виде $a+b(1+\sqrt{5})/2$, где a и b—целые числа. Поэтому ввиду леммы 2 снова $16w_1=w_2$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $612=2^2 3^2 17$, то $p=17,3$ или 2.

Пусть $p=17$. Тогда $\chi_1(g)=(\sqrt{35}(16w_1-w_2)/35-w_3)/2$ и $\chi_2(g)=w_3-1$. По лемме 2 число $\chi_2(g)-35=w_3-36$ делится на 17, поэтому $w_3=2,19$ или 36. Теперь из леммы 1 следует, что $w_3=2$ или 36. В первом случае имеем $w_1+w_2=34$, $\chi_1(g)=(\sqrt{35}(16w_1/35-w_2)/70-1=17\sqrt{35}(32-w_2)/70-1$ и отсюда $\alpha_2(g)=17\cdot 32=544$, $\alpha_1(g)=\alpha_3(g)=34$. Во втором случае $\alpha_3(g)=612$ и элемент g оставляет инвариантным каждый антиподальный класс графа Γ.

Если $p=2,3$ и $\alpha_3(g)\ne 0$, то g фиксирует вершину в соответствующем антиподальном классе, противоречие. Поэтому при $p=2,3$ имеем $\alpha_3(g)=0$, $\alpha_2(g)=576$, $\alpha_1(g)=36$.

Лемма доказана.

В леммах 4–6 предполагается, что Ω содержит вершину a. Заметим, что если $a,b\in\Omega$ и $p>2$, то $[a]\cap[b]\subset\Omega$, поэтому $\lambda_\Omega=\mu_\Omega=2$.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если $p\ne 2,5,7$, то Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$;*

(2) *если $p>13$, то $\Gamma_3(a)\subset\Omega$.*

Доказательство. Если $p \neq 2, 5, 7$, то p не делит $|\Gamma_i(a)|$, поэтому Ω содержит по вершине из $[a]$, из $\Gamma_2(a)$ и из $\Gamma_3(a)$.

Для любой вершины a из Ω подграф $\Gamma_3(a)$ является g-допустимым и в случае $p > 13$ имеем $\Gamma_3(a) \subset \Omega$.

Лемма 5. *Если $p > 2$, то выполняется одно из утверждений*

(1) Ω *лежит в антиподальном классе графа* Γ, $\alpha_3(g) = 17 - |\Omega|$ *и либо*

  (i) $p = 5$, $|\Omega| = 7, 17$ *и* $\alpha_1(g) = 35$, *либо*

  (ii) $p = 7$, $|\Omega| = 3, 17$ *и* $\alpha_1(g) = 35(2t + 1)$, $t \leq 8$;

(2) $p = 3, 5$, Ω *— граф икосаэдра,* $\alpha_3(g) = 90$ *и* $\alpha_1(g) = 30$.

Доказательство. Пусть $p > 2$. Допустим, что Ω содержит $[a]$, тогда вершина $u \in \Gamma_2(a)$ лежит в $[a_i] \cap [a_j]$ для некоторых вершин a_i, a_j из $[a]$, поэтому $u \in \Omega$. Отсюда $\Gamma_2(a) \subset \Omega$ и получим, что $\Gamma \subset \Omega$, противоречие.

Кроме того, в окрестности каждой вершины из $\Gamma - \Omega$ имеется не более одной вершины из Ω.

Пусть $p > 13$. Тогда $|\Omega| = 17r$, где r — число антиподальных классов, попадающих в Ω, Ω — регулярный граф степени $r - 1$ и p делит $36 - r$. Число ребер между Ω и $\Gamma - \Omega$ не меньше $17r(36 - r)$, но не больше $(612 - 17r)$, поэтому $r = 1$. Отсюда $|\Omega| = 17$ и p делит 35, противоречие.

Пусть теперь $p \leq 13$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$.

Рассмотрим множество вершин U, лежащих в антиподальных классах, не пересекающих Ω. Каждая вершина из U смежна в среднем с $st(36 - t)/(612 - 17t) = st/17$ вершинами из Ω, поэтому $st = |\Omega| \leq 17$.

Заметим, что если Ω содержит изолированную вершину, то Ω лежит в антиподальном классе графа Γ и либо $p = 5$ и $|\Omega| = 2, 7, 12$ или 17, либо $p = 7$ и $|\Omega| = 3, 10$ или 17. В любом случае $\alpha_3(g) = 17 - |\Omega|$. Далее, $\chi_1(g) = (|\Omega| - 1)/2 + (16\alpha_1(g)/\sqrt{35} - \alpha_2(g)/\sqrt{35})/34$, ввиду леммы 1 число $|\Omega|$ нечетно, $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 595$ и $16\alpha_1(g) - \alpha_2(g)$ делится на $34 \cdot 35$. Отсюда, либо $p = 5$, $\alpha_1(g) = 35$, либо $p = 7$, $\alpha_1(g) = 35(2r + 1)$, $r \leq 8$.

Если $t > 1$, то Ω — связный вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 2, 2)$ и $1 + k' + (k' - 3)k'/2 \leq 17$. Поэтому $k' \in \{3, ..., 6\}$. В случае $k' = 6$ число p делит 29, противоречие. В случае $k' = 5$ число p делит 30, поэтому $p = 3, 5$. Далее, Ω — локально 5-угольный граф, поэтому Ω — граф икосаэдра и $\alpha_3(g) = 90$. Так как $16w_1 = w_2$, то $\alpha_1(g) = 30$.

Лемма 6. *Если $p = 2$, то Ω — объединение двух антиподальных классов,* $\alpha_3(g) = 0$ *и* $\alpha_1(g) = 34$.

Доказательство. Пусть $p = 2$ и Γ содержит $t > 0$ антиподальных классов, пересекающих Ω по s вершинам. Тогда Ω — регулярный граф степени $t - 1$, число $|\Omega|$ четно, любой антиподальный класс пересекает Ω по $s = 2j + 1$ вершинам, $j \leq 8$ и t четно. Пусть K — антиподальный класс, содержащий вершину a. Тогда $K \cap \Omega = \{a, a_2, ..., a_s\}$. Если $d(u, u^g) \leq 2$ для некоторой вершины $u \in \Gamma - \Omega$, то $[u]$ содержит 0 или 2 вершины из Ω.

Как и выше доказывается, что $|\Omega| = st \leq 34$, кроме того, $|\Gamma_2(a) \cap \Omega| = (s - 1)(t - 1)$. В случае $s = 1$ граф Ω является t-кликой, поэтому $t \leq 4$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит по крайней мере 16 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^{\perp}$.

Допустим, что $s > 1$. Пусть $t = 2$. Тогда $s \leq 17$ и Ω — объединение s изолированных ребер. Далее, $\Gamma_2(a)$ содержит 16 вершин из Ω, смежных с парами вершин из $[a] - b^\perp$, переставляемых g. Поэтому $|\Omega| = 1+1+16+(s-1)$, $s = 17$, каждая вершина из $\Gamma - \Omega$ смежна точно с 2 вершинами из Ω, $\alpha_3(g) = 0$ и $\alpha_1(g) = 34$.

Если $t = 10$, то Ω — регулярный граф степени 9 и $|\Omega| \geq 1 + 9 + 9 \cdot 6/2 = 37$, противоречие.

Пусть $t = 8$. Тогда $s = 3$ и Ω — регулярный граф степени 7. Так как $\mu = 2$, то окрестность вершины в Ω не содержит четырехугольников и $\Omega(a)$ — либо 7-коклика, либо объединение треугольника и 4-коклики, либо объединение двух треугольников и изолированной вершины, либо объединение шестиугольника и изолированной вершины, либо семиугольник. В первом случае $|\Omega| \geq 1 + 7 + 7 \cdot 6/2 = 29$. Во втором и третьем случаях соответственно $|\Omega| \geq 1 + 7 + (3 \cdot 4 + 4 \cdot 6)/2 = 26$ и $|\Omega| \geq 1 + 7 + (6 \cdot 4 + 6)/2 + 2 = 25$. Если $\Omega(a)$ — объединение шестиугольника и изолированной вершины, то аналогично $|\Omega| \geq 1 + 7 + (6 \cdot 4 + 6)/2 + 2 = 25$. В любом случае имеем противоречие. Поэтому Ω— вполне регулярный локально семиугольный граф с параметрами $(24, 7, 2, 2)$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит по крайней мере 14 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Пусть $t = 4$. Тогда $s \leq 7$, Ω — регулярный граф степени 3 и связная компонента Δ графа Ω является графом $K_{4,4}$ с удаленным максимальным паросочетанием или 4-кликой. В первом случае $[a] - \Omega$ содержит 13 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$ и $3(s-1) = 13$. Во втором случае $[a] - \Omega$ содержит 16 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$ и $3(s-1) = 16$. В любом случае имеем противоречие.

Пусть $t = 6$. Тогда Ω — регулярный граф степени 5, а $s = 3$ или 5, причем в первом случае граф Ω связен, а во втором случае Ω имеет не более двух компонент связности. Далее, граф $\Omega(a)$ является либо объединением треугольника и 2-коклики, либо пятиугольником, либо 5-кокликой.

Если $\Omega(a)$ — пятиугольник, то компонента связности Δ графа Ω, содержащая вершину a, является графом икосаэдра, $|\Omega - \Delta| = 6s - 12 = 18$ и $s = 5$.

Пусть $\Omega(a)$ — объединение треугольника $\{b_1, b_2, b_3\}$ и 2-коклики $\{c_1, c_2\}$. Так как $\mu_\Omega = 2$, то $[c_1] \cap \Omega_2(a)$ содержит по вершине из $[b_1], [b_2], [b_3]$. Аналогично, $[c_2] \cap \Omega_2(a) - [c_1]$ содержит по вершине из $[b_1], [b_2], [b_3]$. Далее, вершина c_1 смежна с вершиной e из $\Omega_2(a) - [b_1] \cup [b_2] \cup [b_3]$, а поскольку $\mu_\Omega = 2$, то $[e] \cap [a] = \{c_1, c_2\}$. Теперь $[a] - \Omega$ содержит 13 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$ и снова $s = 5$.

Рассмотрим случай $s = 3$. Тогда $\Omega(a)$ является 5-кокликой для любой вершины $a \in \Omega$, поэтому Ω является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{5, 4, 1; 1, 2, 5\}$. Противоречие с тем, что $[a] - \Omega$ содержит 10 пар вершин вида $\{u, u^g\}$, смежных с вершинами из $\Omega - a^\perp$.

Значит, $s = 5$ и Ω содержит связную компоненту Δ' на v' вершинах, $v' \in \{18, 30\}$, в которой окрестность каждой вершины — либо объединение треугольника и 2-коклики, либо 5-коклика. При этом, если окрестность каждой вершины в Δ' — объединение треугольника и 2-коклики, то получим противоречие с тем, что число 4-клик в Δ' равно $v'/4$.

Поэтому для некоторой вершины из Δ' ее окрестность в Δ' является 5-кокликой. Если $v' = 18$, то, как и в случае $s = 3$, Δ' является дистанционно регулярным графом с массивом пересечений $\{5, 4, 1; 1, 2, 5\}$, противоречие с тем, что для собственных значений $n, -m$ этого графа верны равенства $k = mn = 5$, $\mu = (m-1)(n+1)/r$ и $\lambda = \mu + n - m$.

Пусть теперь $v' = 30$ и $\Omega(a)$ — коклика $\{b_1, b_2, .., b_5\}$. Тогда $\Sigma = \Gamma_2(a) \cap \Omega$ — объединение 10 вершин $\{c_i\}_{i=1}^{10} = C$ $(C = \Omega_2(a))$ из $[b_1] \cup [b_2] \cup [b_3] \cup [b_4] \cup [b_5]$ и 10 вершин $\{e_i\}_{i=1}^{10} = E$, смежных с парами вершин из $[a] - \Omega$, переставляемых g. При этом степень каждой вершины c_i в подграфе Σ равна 2, а степень каждой вершины e_i в Σ равна 4. Имеем $[b_1] \cap C = \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$, $[b_2] \cap C = \{c_1, c_5, c_6, c_7\}$, $[b_3] \cap C = \{c_2, c_5, c_8, c_9\}$, $[b_4] \cap C = \{c_3, c_6, c_8, c_{10}\}$, $[b_5] \cap C = \{c_4, c_7, c_9, c_{10}\}$.

Далее, для $j \geq 2$ число вершин в $[a_j] \cap \Sigma$ равно 3, 4 или 0. Действительно, если вершина a_j смежна с двумя вершинами c_1, c_2 из $[b_1]$, то, к тому же, либо $[a_j] \cap C = \{c_1, c_2, c_5\}$, либо $[a_j] \cap C = \{c_1, c_2, c_6, c_8\}$. Поэтому, при $j = 2, 3, 4$ подграф $[a_j]$ имеет непустое пересечение с C, и, не ограничивая общности, можно считать, что $\{c_1, c_2, c_5, e_1, e_2\} \subset [a_2]$, $\{c_8, c_9, c_{10}, e_3, e_4\} \subset [a_4]$, а вершина a_3 смежна с 4 вершинами $\{c_3, c_4, c_6, c_7\}$ и с вершиной e_5. Тогда $\Omega(a_5) = \{e_m\}_{m=6}^{10}$.

В силу связности графа Ω вершина e_6 смежна с некоторой вершиной c_r, $1 \leq r \leq 10$.

Достаточно рассмотреть случаи $r = 9, 10$.

Пусть $r = 10$. Так как $\mu = 2$, то либо $[e_6] \cap [b_5] = \{c_{10}, c_4\}$, либо $[e_6] \cap [b_5] = \{c_{10}, c_7\}$. Допустим, что $[e_6] \cap [b_5] = \{c_{10}, c_4\}$. Тогда $[e_6] \cap [b_4] = \{c_{10}, c_6\}$, $[e_6] \cap [b_1] = \{c_1, c_4\}$. Но $[e_6] \cap [a_4] = \{c_{10}, u\}$ для некоторой вершины $u \in \Omega$, противоречие с тем, что Ω — регулярный граф степени 5.

В случае $[e_6] \cap [b_5] = \{c_{10}, c_7\}$ получим противоречие аналогично.

Пусть теперь $r = 9$. Если $[e_6] \cap [b_5] = \{c_9, c_4\}$, то $[e_6] \cap [b_3] = \{c_2, c_9\}$. Но для вершин $u_1, u_2, u_3 \in \Omega$ имеем $[e_6] \cap [a_4] = \{c_9, u_1\}$, $[e_6] \cap [a_3] = \{c_4, u_2\}$, $[e_6] \cap [b_1] = \{c_2, u_3\}$, противоречие с тем, что Ω — регулярный граф степени 5. Аналогично получим противоречие в случае $[e_6] \cap [b_5] = \{c_9, c_7\}$.

Лемма, а вместе с ней и теорема доказаны.

3. Граф с массивом пересечений $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ не является реберно симметричным

Сначала приведем одну лемму об абелевых накрытиях клик.

Лемма 7. *[[6], теорема 2.5] Пусть* Γ *— дистанционно регулярный недвудольный граф с массивом пересечений* $\{k, \mu(r-1), 1; 1, \mu, k\}$, K *— абелева подгруппа из* $\mathrm{Aut}(\Gamma)$*, транзитивная на каждом антиподальном классе и* p *— простой делитель* r*. Тогда* p *делит* $k+1$ *и в случае* $k = r\mu + 1$ *число* r *— степень* 2.

Лемма 8. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{35, 32, 1; 1, 2, 35\}$ *не является реберно симметричным.*

Доказательство. Допустим, что группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве дуг графа Γ. Пусть $\{a, b\}$ — ребро графа Γ. Тогда $[a]$ — объединение изолированных n-угольников, $n \in \{5, 7, 35\}$, $|G : G_a| = 612$, $|G_a : G_{a,b}| = 35$, $|G_{\{a,b\}} : G_{a,b}| = 2$. Из теоремы следует, что $G_{a,b}$ является $\{2, 3, 5\}$-подгруппой. Пусть T — цоколь группы G.

Заметим, что G действует дважды транзитивно на множестве антиподальных классов графа Γ. Ввиду леммы 7 это действие точное. Так как 36 — не степень простого числа, то аффинный случай невозможен. В почти простом случае из [[3], таблица 7.4] следует, что либо $T = A_{36}$, либо $T = Sp_6(2)$ и $G = T$, либо $T = L_m(q)$ и $36 = (q^m - 1)/(q - 1)$. Простой перебор показывает, что последний случай невозможен. В первых двух случаях имеем противоречие с тем, что $\pi(G) = \{2, 3, 5, 7, 17\}$. Лемма и следствие доказаны.

Автор благодарит своего научного руководителя — члена-корреспондента РАН, профессора Александра Алексеевича Махнева — за постановку задачи, внимание к работе и ценные замечания.

Список литературы

[1] Буриченко В.П., Махнев А.А., *О вполне регулярных локально циклических графах*, Современные проблемы математики. Тезисы 42 Всероссийской молодежной конференции. ИММ УрО РАН, Екатеринбург, 2011, 181–183.

[2] Махнев А.А., Падучих Д.В., *Об автоморфизмах дистанционно-регулярного графа с массивом пересечений* $\{24, 21, 3; 1, 3, 18\}$, Доклады академии наук, **441**:1 (2011), 14–18.

[3] Cameron P.J., *Permutation Groups*, London Math. Soc. Student Texts **45** (1999), Cambridge University Press, Cambridge. MR1721031

[4] Cameron P.J., van Lint J.H., *Graphs, Codes and Designs*, London Math. Soc. Student Texts **22** (1991), Cambridge University Press, Cambridge. MR1148891

[5] Гаврилюк А.Л., Махнев А.А., *Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений* $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, Доклады академии наук, **432**:5 (2010), 583–587. MR2766516

[6] Godsil C.D., Liebler R.A., Praeger C.E., *Antipodal distance transitive covers of complete graphs*, Europ. J. Comb., **19**:4 (1998), 455-478. MR1630564

Людмила Юрьевна Циовкина
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16,
620990, Екатеринбург, Россия
E-mail address: l.tsiovkina@gmail.com