S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 294–305 (2012) УДК 512.542

MSC 20D20

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ВИЛАНДА ДЛЯ СПОРАДИЧЕСКИХ ГРУПП

Н.Ч. МАНЗАЕВА

Abstract. Let π be a set of primes. A finite group G is a D_π-group if all maximal π-subgroups of G are conjugate. In 1979 H. Wielandt posed the following problem: in which finite simple groups every subgroup is a D_π-group? We solve this problem for the sporadic groups.

Keywords: finite group, sporadic group, D_π-group.

1. Введение

Пусть π — некоторое множество простых чисел. Для конечной группы G через $\pi(G)$ обозначим множество простых делителей ее порядка. Группа G, для которой $\pi(G) \subseteq \pi$, называется π-группой. В 1979 г. на знаменитой конференции по конечным группам в г. Санта-Круз Х. Виланд поставил следующую проблему [1].

Проблема 1. *В каких известных простых группах верна «сильная π-теорема Силова»: для любых двух π-подгрупп A и B существует $t \in \langle A, B\rangle$ такой, что $\langle A, B^t\rangle$ является π-группой?*

Следуя Ф. Холлу [2], будем говорить, что конечная группа G обладает свойством D_π (или, короче, $G \in D_\pi$), если все её максимальные π-подгруппы сопряжены. Группу со свойством D_π будем также называть D_π-группой. Свойство D_π означает справедливость полного аналога теоремы Силова для π-подгрупп группы G. В «Коуровскую тетрадь» [3] под номером 17.43(a) записан вопрос, эквивалентный проблеме 1.

Manzaeva, N.Ch., A solution of Wielandt's problem for the sporadic groups.

Работа поддержана РФФИ (грант 10-01-00391), ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (гос. контракт №14.740.11.0346).

Поступила 18 апреля 2012 г., опубликована 16 июня 2012 г.

Проблема 2. [3, вопрос 17.43(a)] *В каких конечных простых D_π-группах любая подгруппа является D_π-группой?*

Покажем, что в конечной группе G выполнена сильная π-теорема Силова в том и только в том случае, когда любая подгруппа группы G является D_π-группой (в частности, проблема 1 и проблема 2 эквивалентны). Пусть G — конечная группа, для которой верна «сильная π-теорема Силова». Следует показать, что любая подгруппа K группы G, в том числе и сама G, обладает свойством D_π. Пусть A и B — две максимальные π-подгруппы группы K. Поскольку подгруппы A и B также являются π-подгруппами группы G, существует $t \in \langle A, B\rangle \leq K$ такой, что $\langle A, B^t\rangle$ является π-подгруппой группы K. Поскольку $\langle A, B^t\rangle$ содержит максимальную π-подгруппу A группы K, мы имеем $B^t = A$. Таким образом, любые две максимальные π-подгруппы группы K сопряжены и, следовательно K является D_π-группой. Теперь пусть G — конечная D_π-группа и каждая ее подгруппа является D_π-группой. Пусть A и B — две π-подгруппы группы G. Рассмотрим $\langle A, B\rangle \leq G$. Поскольку $\langle A, B\rangle$ является D_π-группой, существует такая максимальная π-подгруппа H группы $\langle A, B\rangle$ и такой элемент $x \in \langle A, B\rangle$, что $A \leq H$ и $B^x \leq H$. Следовательно, для $x \in \langle A, B\rangle$ группа $\langle A, B^x\rangle \leq H$ является π-подгруппой группы G.

Таблица 1. Спорадические группы, принадлежащие классу W_π

G	$\pi \cap \pi(G)$	$\lvert G\rvert_\pi$	G	$\pi \cap \pi(G)$	$\lvert G\rvert_\pi$
M_{11}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	$O'N$	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$
M_{12}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$		$\{5, 31\}$	$5 \cdot 31$
M_{22}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Ru	$\{7, 29\}$	$7 \cdot 29$
M_{23}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Ly	$\{11, 67\}$	$11 \cdot 67$
	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$	Co_1	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
M_{24}	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	Co_2	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$	Co_3	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
J_1	$\{3, 7\}$	$3 \cdot 7$	Fi_{23}	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{3, 19\}$	$3 \cdot 19$	Fi'_{24}	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11$	B	$\{11, 23\}$	$11 \cdot 23$
				$\{23, 47\}$	$23 \cdot 47$
J_4	$\{5, 11\}$	$5 \cdot 11^3$	M	$\{23, 47\}$	$23 \cdot 47$
	$\{5, 31\}$	$5 \cdot 31$		$\{29, 59\}$	$29 \cdot 59$
	$\{7, 29\}$	$7 \cdot 29$			
	$\{7, 43\}$	$7 \cdot 43$			

Обозначим через W_π класс всех конечных групп, в которых любая подгруппа является D_π-группой. В силу вышесказанного, множество простых групп из класса W_π является полным решением проблемы 1. С другой стороны, полное решение проблемы 1 дает нам описание всего класса W_π, поскольку верна

Теорема 1. [4, теорема 2] *Пусть π — некоторое множество простых чисел и G — конечная группа. Тогда $G \in W_\pi$ если и только если каждый композиционный фактор группы G принадлежит W_π.*

Также в [4] было доказано, что знакопеременные D_π-группы лежат в классе W_π (см. док-во [4, теорема 3]). Основным результатом этой работы является следующая

Теорема 2. *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — спорадическая группа. Тогда группа G принадлежит классу W_π, если и только если выполнено одно из условий:*

(1) $|\pi \cap \pi(G)| \leq 1$;
(2) $\pi(G) \subseteq \pi$;
(3) *пара $(G, \pi \cap \pi(G))$ представлена в таблице 1.*

Таким образом, теорема 2 дает решение проблем 1 и 2 для спорадических групп.

2. Обозначения и предварительные результаты

Всюду через π обозначается некоторое множество простых чисел. Мы будем использовать обозначения из атласа конечных групп [5]. В частности, для групп A и B через $A \times B$ обозначается их прямое произведение. Через $A:B$, $A{}^{\cdot}B$ и $A\,.\,B$ будем обозначать некоторые расщепляемое, нерасщепляемое и произвольное расширения группы A с помощью группы B, соответственно. Обозначение $H \leq G$, будет использоваться нами вместо слов «H — подгруппа группы G». Утверждения, доказательство которых использует классификацию конечных простых групп, помечены символом (mod CFSG).

Обозначим через B_π класс конечных групп, каждый композиционный фактор которых либо является π-группой, либо имеет порядок, делящийся не более чем на одно простое число из π (см. [6]). Легко заметить, что если $|\pi \cap \pi(G)| \leq 1$ или $\pi(G) \subseteq \pi$ для некоторой конечной группы G, то G принадлежит классу W_π. Таким образом, $B_\pi \subseteq W_\pi$ по теореме 1.

Таблица 2. Спорадические группы, обладающие свойством D_π

G	$\pi \cap \pi(G)$	$\lvert G\rvert_\pi$	G	$\pi \cap \pi(G)$	$\lvert G\rvert_\pi$
M_{11}	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$	$O'N$	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$
M_{12}	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$		$\{5,31\}$	$5 \cdot 31$
M_{22}	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$	Ru	$\{7,29\}$	$7 \cdot 29$
M_{23}	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$	Ly	$\{11,67\}$	$11 \cdot 67$
	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$	Co_1	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
M_{24}	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$	Co_2	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$	Co_3	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
J_1	$\{3,5\}$	$3 \cdot 5$	Fi_{23}	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{3,7\}$	$3 \cdot 7$	Fi'_{24}	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{3,19\}$	$3 \cdot 19$	B	$\{11,23\}$	$11 \cdot 23$
	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11$		$\{23,47\}$	$23 \cdot 47$
J_4	$\{5,7\}$	$5 \cdot 7$	M	$\{23,47\}$	$23 \cdot 47$
	$\{5,11\}$	$5 \cdot 11^3$		$\{29,59\}$	$29 \cdot 59$
	$\{5,31\}$	$5 \cdot 31$			
	$\{7,29\}$	$7 \cdot 29$			
	$\{7,43\}$	$7 \cdot 43$			

Лемма 1. [7, теорема 7.7], (mod CFSG) *Пусть G — конечная группа, $A \trianglelefteq G$ и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$ если и только если $A \in D_\pi$ и $G/A \in D_\pi$.*

Из леммы 1 вытекает

Лемма 2. (mod CFSG) *Пусть G — конечная группа и π — некоторое множество простых чисел. Тогда $G \in D_\pi$ если и только если каждый композиционный фактор группы G обладает свойством D_π.*

Лемма 3. [4, лемма 2] *Класс W_π замкнут относительно подгрупп, гомоморфных образов и расширений.*

Лемма 4. [8, теорема 3] *Пусть π — некоторое множество простых чисел, G — спорадическая группа и $G \notin B_\pi$. Тогда группа G принадлежит классу D_π, если и только если пара $(G, \pi \cap \pi(G))$ представлена в таблице 2.*

Лемма 5. [8, теорема 3] *Пусть π — некоторое множество простых чисел, $S = L_2(q)$, где $q = p^f$, и $S \notin B_\pi$. Группа S обладает свойством D_π тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

(1) $2 \notin \pi$, $p \in \pi$ *и* $(\pi \cap \pi(S)) \subseteq \pi(q-1) \cup \{p\}$;
(2) $2, p \notin \pi$ *и* $(\pi \cap \pi(S)) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, *где* $\varepsilon = \pm 1$;
(3) $2 \in \pi$, $3, p \notin \pi$ *и* $(\pi \cap \pi(S)) \subseteq \pi(q-\varepsilon)$, *где* $\varepsilon = \pm 1$ *таково, что* 4 *делит* $q-\varepsilon$.

Лемма 6. [9, теорема 8.27] *Любая подгруппа группы $L_2(p^f)$ лежит в следующем списке:*

(1) *элементарная абелева p-группа;*
(2) *циклическая группа порядка z, где $z \mid \frac{p^f \pm 1}{k}$, причем $k = (p^f - 1, 2)$;*
(3) *группа диэдра порядка $2z$, где z из* (2)*;*
(4) *знакопеременная группа A_4 (такая подгруппа существует при $p > 2$ или $p = 2$ и $f \equiv 0 \pmod 2$));*
(5) *симметрическая группа S_4 (такая подгруппа существует при $p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod{16}$));*
(6) *знакопеременная группа A_5 (такая подгруппа существует при $p = 5$ или $p^{2f} - 1 \equiv 0 \pmod 5$));*
(7) *полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка p^m и циклической группы порядка t, при этом $t \mid p^m - 1$ и $t \mid p^f - 1$;*
(8) *группа $L_2(p^m)$, если $m \mid f$, и группа $\mathrm{PGL}(2, p^m)$, если $2m \mid f$.*

Лемма 7. *Пусть $L_2(p)$ обладает свойством D_π для некоторого множества π и $L_2(p) \notin B_\pi$. Группа $L_2(p)$ принадлежит классу W_π тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

(1) $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$;
(2) *если* $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$, *то ни одно из множеств* $\{2, 5\}$ *и* $\{3, 5\}$ *не лежит в* π.

Доказательство. Рассмотрим все возможные подгруппы $L_2(p)$, которые перечислены в лемме 6. Очевидно, что в $L_2(p)$ не существует подгрупп из пункта (8) леммы 6, поскольку p — простое число. Таким образом, все подгруппы $L_2(p)$, за исключением A_5, разрешимы и, следовательно, обладают свойством D_π по теореме Холла. Рассмотрим подгруппу A_5. Она возникает в $L_2(p)$, когда либо

$p = 5$ и в этом случае $L_2(5) \simeq A_5$, либо $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$. Следовательно, если $p^2 - 1 \not\equiv 0 \pmod 5$, то $L_2(p) \in W_\pi$. Рассмотрим случай, когда $p^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$. Из [8, теорема 3] известно, что знакопеременная группа A_n обладает свойством D_π в двух случаях: либо $|\pi \cap \pi(A_n)| \leq 1$, либо $\pi(A_n) \subseteq \pi$. Рассмотрим первый случай. Поскольку $\pi(A_5) = \{2, 3, 5\}$, никакие два числа из этого множества не могут одновременно лежать в π. В условиях леммы исключаются случаи, когда $\{2, 5\}$ или $\{3, 5\}$ лежит в π. Случай, когда $\{2, 3\}$ является подмножеством π, невозможен в силу [6, предложение 7.22]. В этом случае $L_2(p)$ не обладает свойством D_π. По этой же причине исключается второй случай, когда $\pi(A_5) \subseteq \pi$. Лемма доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы 2

Доказательство. Необходимость. Пусть G — спорадическая группа и $G \in W_\pi$. Если $G \in B_\pi$, то выполняется либо условие (1), либо условие (2). Пусть теперь $G \in W_\pi \setminus B_\pi$. Так как $G \in W_\pi$, то G является D_π-группой. Напомним, что все спорадические группы, обладающие свойством D_π, представлены в таблице 2. Все спорадические D_π-группы лежат в классе W_π, за исключением следующих двух случаев. Пусть $G = J_1$ и $\pi \cap \pi(G) = \{3, 5\}$. Тогда группа G содержит подгруппу A_5, которая не обладает свойством $D_{\{3,5\}}$ и, следовательно, $G \notin W_\pi$. Пусть теперь $G = J_4$ и $\pi \cap \pi(G) = \{5, 7\}$. Тогда группа G содержит подгруппу M_{22}, которая не обладает свойством $D_{\{5,7\}}$ и, следовательно, $G \notin W_\pi$. Остальные случаи перечислены в таблице 1.

Достаточность. Ясно, что если выполнено условие (1) или (2), то группа $G \in B_\pi$ и, значит, G принадлежит классу W_π. Пусть теперь для группы G выполнено условие (3). Допустим $(G, \pi \cap \pi(G))$ одна из пар, приведенных в таблице 1. Покажем, что любая подгруппа группы G обладает свойством D_π. Поскольку любая подгруппа содержится в некоторой максимальной, достаточно доказать, что любая максимальная подгруппа M группы G принадлежит классу W_π, в частности, обладает свойством D_π. Ввиду теоремы 1, для доказательства утверждения $M \in W_\pi$ достаточно показать, что неабелевы композиционные факторы группы M лежат в классе W_π. Ниже в таблицах, согласно [5], перечислены максимальные подгруппы следующих спорадических D_π-групп: M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, J_1, J_4, $O'N$, Ru и Ly. Также в таблицах приведена причина, почему та или иная максимальная подгруппа обладает свойсвом D_π и принадлежит классу W_π.

Таблица 3. Максимальные подгруппы группы M_{11}

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(M_{11}) = \{5, 11\}$
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$M_{10} \simeq A_6 {}^{\cdot} 2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11)$	лемма 5, лемма 7
$2^4 \cdot 3^2$	$M_9 : 2 \simeq 3^2 : Q_8 . 2$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	S_5	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3$	$M_8 : S_3 \simeq 2 {}^{\cdot} S_4$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Таблица 4. Максимальные подгруппы группы M_{12}

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(M_{12}) = \{5, 11\}$
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	M_{11}	$M_{11} \in W_\pi$, см. выше
$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	$M_{10} : 2 \simeq A_6 {}^{\cdot} 2^2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11)$	лемма 5, лемма 7
$2^4 \cdot 3^3$	$M_9 : S_3 \simeq 3^2 : 2S_4$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \times S_5$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3$	$M_8 . S_4 \simeq 2^{1+4}_{+} . S_3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^6 \cdot 3$	$4^2 : D_{12}$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^6 \cdot 3$	$A_4 \times S_3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Таблица 5. Максимальные подгруппы группы M_{22}

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(M_{22}) = \{5, 11\}$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$L_3(4)$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^4 : A_6$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	A_7	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^7 \cdot 3 \cdot 5$	$2^4 : S_5$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3 \cdot 7$	$2^3 : L_3(2)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$	$M_{10} \simeq A_6 {}^{\cdot} 2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11)$	лемма 5, лемма 7

Таблица 6. Максимальные подгруппы группы M_{23}

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(M_{23}) = \{5, 11\}$	$\pi \cap \pi(M_{23}) = \{11, 23\}$
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	M_{22}	$M_{22} \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{23} = 1$, теорема Силова
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$L_3(4) : 2_2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^4 : A_7$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	A_8	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	M_{11}	$M_{11} \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{23} = 1$, теорема Силова
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^4 : (3 \times A_5) : 2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$11 \cdot 23$	$23 : 11$	$\lvert M\rvert_5 = 1$, теорема Силова	разрешима, теорема Холла

Таблица 7. Максимальные подгруппы группы M_{24}

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(M_{24}) = \{5, 11\}$	$\pi \cap \pi(M_{24}) = \{11, 23\}$
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	M_{23}	$M_{23} \in W_\pi$, см. выше	$M_{23} \in W_\pi$, см. выше
$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$M_{22} : 2$	$M_{22} \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{23} = 1$, теорема Силова
$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^4 : A_8$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11$	$M_{12} : 2$	$M_{12} \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{23} = 1$, теорема Силова
$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5$	$2^6 : 2 {}^{\cdot} S_6$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^7 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	$L_3(4) : S_3$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7$	$2^6 : (L_3(2) \times S_3)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$
$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23)$	$\lvert M\rvert_5 = 1$, теорема Силова	лемма 5, лемма 7
$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$L_2(7)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$	$\lvert M\rvert_{11} = \lvert M\rvert_{23} = 1$

Таблица 8. Максимальные подгруппы группы J_1, $\pi \cap \pi(J_1) = \{3,7\}$ и $\{3,19\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_1) = \{3,7\}$	$\pi \cap \pi(J_1) = \{3,19\}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11)$	$\lvert M\rvert_7 = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{19} = 1$, теорема Силова
$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$2^3 : 7 : 3$	разрешима, теорема Холла	$\lvert M\rvert_{19} = 1$, теорема Силова
$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \times A_5$	$\lvert M\rvert_7 = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{19} = 1$, теорема Силова
$2 \cdot 3 \cdot 19$	$19 : 6$	$\lvert M\rvert_7 = 1$, теорема Силова	разрешима, теорема Холла
$2 \cdot 5 \cdot 11$	$11 : 10$	$\lvert M\rvert_3 = \lvert M\rvert_7 = 1$	$\lvert M\rvert_3 = \lvert M\rvert_{19} = 1$
$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$D_6 \times D_{10}$	$\lvert M\rvert_7 = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{19} = 1$, теорема Силова
$2 \cdot 3 \cdot 7$	$7 : 6$	разрешима, теорема Холла	$\lvert M\rvert_{19} = 1$, теорема Силова

Таблица 9. Максимальные подгруппы группы J_1, $\pi \cap \pi(J_1) = \{5,11\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_1) = \{5,11\}$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11)$	лемма 5, лемма 7
$2^3 \cdot 3 \cdot 7$	$2^3 : 7 : 3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \times A_5$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2 \cdot 3 \cdot 19$	$19 : 6$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2 \cdot 5 \cdot 11$	$11 : 10$	разрешима, теорема Холла
$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	$D_6 \times D_{10}$	$\lvert M\rvert_7 = 1$, теорема Силова
$2 \cdot 3 \cdot 7$	$7 : 6$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Таблица 10. Максимальные подгруппы группы J_4, $\pi \cap \pi(J_4) = \{5,11\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_4) = \{5,11\}$
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^{11} : M_{24}$	$M_{24} \in W_\pi$, см. выше
$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$2^{10} : L_5(2)$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$2_+^{1+12} {}^{\cdot} 3M_{22} : 2$	$M_{22} \in W_\pi$, см. выше
$2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{3+12} {}^{\cdot} (S_5 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 37$	$U_3(11) : 2$	см. ниже
$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$M_{22} : 2$	$M_{22} \in W_\pi$, см. выше
$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^3$	$11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$	разрешима, теорема Холла
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	$L_2(32) : 5$	$\lvert L_2(32)\rvert_5 = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23) : 2$	$\lvert M\rvert_5 = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$U_3(3)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^2 \cdot 7 \cdot 29$	$29 : 28$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2 \cdot 7 \cdot 43$	$43 : 14$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^2 \cdot 3 \cdot 37$	$37 : 12$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Группа $U_3(11) \simeq {}^2A_2(11)$ обладает свойством D_π при $\pi \cap \pi(U_3(11)) = \{5, 11\}$ по [8, теорема 3] (условие III). Ниже приведена таблица 11 максимальных подгрупп группы $U_3(11)$, из которой следует, что группа $U_3(11)$ принадлежит классу W_π.

Таблица 11. Максимальные подгруппы группы $U_3(11)$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(U_3(11)) = \{5, 11\}$
$2^3 \cdot 5 \cdot 11^3$	$11_+^{1+2} : 40$	разрешима, теорема Холла
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$2(L_2(11) \times 2) . 2$	лемма 5, лемма 7
$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$	$L_2(11) : 2$	лемма 5, лемма 7
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$	A_6	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3^2$	$(4^2 \times 3) : S_3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$3 \cdot 37$	$37 : 3$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$
$2^3 \cdot 3^2$	$3^2 : Q_8$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$

Таблица 12. Максимальные подгруппы группы J_4, $\pi \cap \pi(J_4) = \{5, 31\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_4) = \{5, 31\}$
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^{11} : M_{24}$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$2^{10} : L_5(2)$	см. ниже
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$2_+^{1+12} \cdot 3M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{3+12} \cdot (S_5 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 37$	$U_3(11) : 2$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^3$	$11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	$L_2(32) : 5$	$\lvert L_2(32)\rvert_5 = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23) : 2$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$U_3(3)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2^2 \cdot 7 \cdot 29$	$29 : 28$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2 \cdot 7 \cdot 43$	$43 : 14$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2^2 \cdot 3 \cdot 37$	$37 : 12$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$

Группа $L_5(2) \simeq A_4(2) \in D_\pi$ при $\pi \cap \pi(L_5(2)) = \{5, 31\}$ по [8, теорема 3] (условие IV). Ниже приведена таблица 13 максимальных подгрупп группы $L_5(2)$, из которой следует, что группа $L_5(2) \in W_\pi$.

Таблица 13. Максимальные подгруппы группы $L_5(2)$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(L_5(2)) = \{5, 31\}$
$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^4 : L_4(2)$	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7$	$2^6 : (S_3 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$5 \cdot 31$	$31 : 5$	разрешима, теорема Холла

Таблица 14. Максимальные подгруппы группы J_4, $\pi \cap \pi(J_4) = \{7, 29\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_4) = \{7, 29\}$
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^{11} : M_{24}$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$2^{10} : L_5(2)$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$2_+^{1+12} {}^{\cdot} 3M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{3+12} {}^{\cdot} (S_5 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 37$	$U_3(11) : 2$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{29} = 1$
$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^3$	$11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{29} = 1$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	$L_2(32) : 5$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{29} = 1$
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23) : 2$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{29} = 1$
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$U_3(3)$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 7 \cdot 29$	$29 : 28$	разрешима, теорема Холла
$2 \cdot 7 \cdot 43$	$43 : 14$	$\lvert M\rvert_{29} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 3 \cdot 37$	$37 : 12$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{29} = 1$

Таблица 15. Максимальные подгруппы группы J_4, $\pi \cap \pi(J_4) = \{7, 43\}$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(J_4) = \{7, 43\}$
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	$2^{11} : M_{24}$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^{20} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$	$2^{10} : L_5(2)$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$2_+^{1+12} {}^{\cdot} 3M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^{21} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^{3+12} {}^{\cdot} (S_5 \times L_3(2))$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 37$	$U_3(11) : 2$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{43} = 1$
$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	$M_{22} : 2$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11^3$	$11_+^{1+2} : (5 \times 2S_4)$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{43} = 1$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 31$	$L_2(32) : 5$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{43} = 1$
$2^4 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23) : 2$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{43} = 1$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 7$	$U_3(3)$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 7 \cdot 29$	$29 : 28$	$\lvert M\rvert_{43} = 1$, теорема Силова
$2 \cdot 7 \cdot 43$	$43 : 14$	разрешима, теорема Холла
$2^2 \cdot 3 \cdot 37$	$37 : 12$	$\lvert M\rvert_7 = \lvert M\rvert_{43} = 1$

Таблица 16. Максимальные подгруппы группы $O'N$

$\lvert M\rvert$	M	$\pi \cap \pi(O'N) = \{5, 11\}$	$\pi \cap \pi(O'N) = \{5, 31\}$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^3 \cdot 19$	$L_3(7) : 2$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$	J_1	$J_1 \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$4_2 {}^{\cdot} L_3(4) : 2_1$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	$(3^2 : 4 \times A_6) {}^{\cdot} 2$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^4 \cdot 5$	$3^4 : 2_-^{1+4} D_{10}$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$	$L_2(31)$	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	лемма 5, лемма 7
$2^9 \cdot 3 \cdot 7$	$4^3 {}^{\cdot} L_3(2)$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{11} = 1$	$\lvert M\rvert_5 = \lvert M\rvert_{31} = 1$
$2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$	M_{11}	$M_{11} \in W_\pi$, см. выше	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова
$2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	A_7	$\lvert M\rvert_{11} = 1$, теорема Силова	$\lvert M\rvert_{31} = 1$, теорема Силова

Таблица 17. Максимальные подгруппы группы Ly

$\|M\|$	M	$\pi \cap \pi(Ly) = \{11, 67\}$
$2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 31$	$G_2(5)$	$\|M\|_{11} = \|M\|_{67} = 1$
$2^8 \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$	$3^{\cdot}McL:2$	$\|M\|_{67} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3 \cdot 5^6 \cdot 31$	$5^{3\cdot}L_3(5)$	$\|M\|_{11} = \|M\|_{67} = 1$
$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$	$2^{\cdot}A_{11}$	$\|M\|_{67} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^6$	$5_+^{1+4}:4S_6$	$\|M\|_{11} = \|M\|_{67} = 1$
$2^5 \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 11$	$3^5:(2 \times M_{11})$	$\|M\|_{67} = 1$, теорема Силова
$2^6 \cdot 3^7 \cdot 5$	$3^{2+4}:2A_5 . D_8$	$\|M\|_{11} = \|M\|_{67} = 1$
$2 \cdot 11 \cdot 67$	$67:22$	разрешима, теорема Холла
$2 \cdot 3^2 \cdot 37$	$37:18$	$\|M\|_{11} = \|M\|_{67} = 1$

Таблица 18. Максимальные подгруппы группы Ru

$\|M\|$	M	$\pi \cap \pi(Ru) = \{7, 29\}$
$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$F_2(2)$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 7$	$(2^6:U_3(3)):2$	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^8 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$	$(2^2 \times Sz(8)):3$	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^{14} \cdot 3 \cdot 7$	$2^{3+8}:L_3(2)$	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 7$	$U_3(5)2$	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^{14} \cdot 3 \cdot 5$	$2^{\cdot}2^{4+6}:S_5$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 13$	$L_2(25)^{\cdot}2^2$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	A_8	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 29$	$L_2(29)$	лемма 5, лемма 7
$2^5 \cdot 3 \cdot 5^3$	$5^2:4S_5$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^5 \cdot 3^3 \cdot 5$	$3^{\cdot}A_6{}^{\cdot}2^2$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^5 \cdot 3^3$	$5_+^{1+2}:[2^5]$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13$	$L_2(13):2$	$\|M\|_{29} = 1$, теорема Силова
$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5$	$A_6{}^{\cdot}2^2$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$
$2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$	$5:4 \times A_5$	$\|M\|_7 = \|M\|_{29} = 1$

Таким образом, нам осталось рассмотреть следующие спорадические группы: Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{23}, Fi'_{24}, B и M. Для доказательства принадлежности этих групп классу W_π для соответствующего множества π воспользуемся статьей А. В. Заварницина [10]. В ней перечислены все неабелевы простые группы S такие, что все простые делители $|S|$ не превосходят 1000. Через $\mathfrak{S}_p$ обозначается множество неабелевых конечных простых групп S, таких что $p \in \pi(S) \subseteq \{2, 3, 5, \dots p\}$. Ясно, что множество всех неабелевых конечных простых групп есть объединение непересекающихся конечных множеств $\mathfrak{S}_p$ для всех простых чисел p. Пусть G — простая D_π-группа, где $\pi \cap \pi(G) = \{r, q\}$, $r < q$. Любая группа S из $\mathfrak{S}_p$, при $p < q$, обладает свойством $D_{\{r,q\}}$ по теореме Силова, поскольку $q \notin \pi(S)$. Таким образом, рассмотрев все неабелевые простые группы S, начиная с $\mathfrak{S}_q$ вплоть до нашей группы G такие, что $|S|_\pi \leq |G|_\pi$, и проверив, что они обладают свойством D_π, мы докажем, что $G \in W_\pi$. Например, пусть $G = B \in D_\pi$, где $\pi \cap \pi(G) = \{11, 23\}$. Ниже в таблице 19 приведен список групп, начиная с групп из класса $\mathfrak{S}_{23}$ и до группы B, такие что $|S|_\pi = |G|_\pi = 11 \cdot 23$, а также приведена причина, по которой они обладают свойством D_π.

Таблица 19.

$\|S\|$	S	D_π
$2^3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 23$	$L_2(23)$	лемма 5
$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	M_{23}	лемма 4
$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	M_{24}	лемма 4
$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Co_3	лемма 4
$2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	Co_2	лемма 4
$2^{21} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$	Co_1	лемма 4
$2^{18} \cdot 3^{13} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23$	Fi_{23}	лемма 4
$2^{21} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 23 \cdot 29$	Fi'_{24}	лемма 4
$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$	B	лемма 4

Таким образом, группа B принадлежит классу W_π. Кроме того, из таблицы 19 следует, что группы Co_3, Co_2, Co_1, Fi_{23}, Fi'_{24} также принадлежат классу W_π. Теперь пусть группа $G = M \in D_\pi$, где $\pi \cap \pi(G) = \{23, 47\}$. В таблице 20 приведен список групп, начиная с $\mathfrak{S}_{47}$ и до группы M, такие что $|S|_\pi = 23 \cdot 47$, а также приведена причина, по которой они обладают свойством D_π.

Таблица 20.

$\|S\|$	S	D_π
$2^4 \cdot 3 \cdot 23 \cdot 47$	$L_2(47)$	лемма 5
$2^{41} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 31 \cdot 47$	B	лемма 4
$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$	M	лемма 4

Из таблицы 20 следует, что группы B, M принадлежат классу W_π. Теперь рассмотрим случай, когда $G = M \in D_\pi$, где $\pi \cap \pi(G) = \{29, 59\}$. В таблице 21 приведен список групп, начиная с $\mathfrak{S}_{59}$ и до группы M, такие что $|S|_\pi = 29 \cdot 59$, а также приведена причина, по которой они обладают свойством D_π.

Таблица 21.

$\|S\|$	S	D_π
$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 \cdot 59$	$L_2(59)$	лемма 5
$2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$	M	лемма 4

Группа M лежит в классе W_π, где $\pi \cap \pi(M) = \{29, 59\}$. Теорема доказана. $\square$

Список литературы

[1] H. Wielandt, *Zusammengesetzte Gruppen: Hölders Programm heute*, The Santa Cruz Conference on Finite Groups, Santa Cruz, 1979, ed. B. Cooperstein and G. Mason, Proc. Sympos. Pure Math., **37** (1980), 161–173. MR0604575

[2] P. Hall, *Theorems like Sylow's*, Proc. London Math. Soc, Ser. III, **6** №22 (1956), 286–304. MR0077533

[3] V.D. Mazurov, E.I. Khukhro (editors), *The Kourovka notebook. Unsolved problems in group theory*, **17**, Russian Academy of Sciences Siberian Division, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2010. Zbl 1211.20001

[4] Е.П. Вдовин, Н.Ч. Манзаева, Д.О. Ревин, *О наследуемости свойства D_π подгруппами*, Труды ИММ УрО РАН, **17** № 4 (2011), 44–52.

[5] J.H. Conway [et al.], *Atlas of finite groups*, Oxford: Clarendon Press, 1985. Zbl 0568.20001

[6] Е.П. Вдовин, Д.О. Ревин, *Теоремы силовского типа*, Успехи математических наук, **66** №5 (2011), 3–46. Zbl pre06009244

[7] D.O. Revin, E.P. Vdovin, *Hall subgroups of finite groups*, Contemporary Mathematics, **402** (2006), 229–265. MR2258669

[8] Д.О. Ревин, *Свойство D_π в конечных простых группах*, Алгебра и логика, **47** вып. 3 (2008), 364–394. MR2450888

[9] B. Huppert, *Endliche Gruppen I*, Springer, Berlin, 1967. MR0224703

[10] A.V. Zavarnitsine, *Finite Simple groups with narrow prime spectrum*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **6** (2009), 1–12. MR2586673

Номина Чингизовна Манзаева
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: manzaeva@mail.ru