S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 306–328 (2012) УДК 517.958:533.7
MSC 35B06, 35Q35

ИЕРАРХИЯ ПОДМОДЕЛЕЙ УРАВНЕНИЯ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УРАВНЕНИЕМ СОСТОЯНИЯ С РАЗДЕЛЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Е.В. МАКАРЕВИЧ

Abstract. We consider the gasdynamics equations with the state equation of the separated density. The optimal system of subalgebras for 12 dimentional Lie algebra admitted by the gasdynamics equations is constructed. For each subalgebra from the optimal system of subalgebras a submodel (invariant, partially invariant, differential invariant) can be constructed. The solutions of the submodel can be particular solutions of another submodels. In this case the submodel subalgebra include the subalgebra of another submodel, that is overalgebra. We consider submodels hierarchy for 5 dimentional self-normalized subalgebra. The graph of inserted subalgebras is constructed. The invariants for subalgebras from graph are calculated. All invariant submodels are constructed.

Keywords: optimal system of subalgebras, invariant submodel, graph of inserted subalgebras.

1. Введение

Рассмотрим модель газовой динамики

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \quad D\rho + \rho\nabla\cdot\vec{u} = 0, \quad Dp + A\nabla\cdot\vec{u} = 0, \tag{1}$$

где $D = \partial_t + \vec{u}\cdot\nabla$ – полная производная, $\vec{u}$ – вектор скорости, p – давление, ρ – плотность, ∇ – градиент, $A = \rho c^2$, c^2 – квадрат скорости звука.

Makarevich, E.V., Gasdynamics equations submodels hierarchy in case of state equation with separated density.

Работа выполнена при поддержке гранта №11.G34.31.0042 правительства РФ по постановлению №220.

Поступила 5 декабря 2011 г., опубликована 22 июля 2012 г.

Для уравнения состояния $p = f(\rho, S)$ имеем $c^2 = f_\rho$, где S – энтропия [1]. Система уравнений (1) в случае уравнения состояния с разделенной плотностью $\rho = h(p)k(S)$ допускает алгебру Ли операторов L_{12}, со следующим базисом в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
&X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = \partial_z, \quad X_4 = t\partial_x + \partial_u,\\
&X_5 = t\partial_y + \partial_v, \quad X_6 = t\partial_z + \partial_w, \quad X_7 = y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v,\\
&X_8 = z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w, \quad X_9 = x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u,\\
&X_{10} = \partial_t, \quad X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z,\\
&X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho.
\end{aligned} \tag{2}$$

В дальнейшем вместо операторов X_i будем писать их номера i. Оптимальная система неподобных подалгебр L_{12} приведена в [2].

2. Система вложенных подалгебр

Для оптимальной системы подалгебр L_{12} составим систему вложенных подалгебр и изобразим ее в виде графа. Для этого рассмотрим подалгебры из таблицы 3, начиная с 12-ти мерной подалгебры 12.1, которая является конечной вершиной графа [2]. В подалгебру 12.1 вкладываются подалгебры 11.1 и 11.2, которые составляют второй ярус графа. Подалгебры 10.1 и 10.2 для удобства и сокращения запишем в виде $10.1 - 2$: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, a11 + 12\}$, где параметр a может принимать любое значение. Подалгебра $10.1 - 2$ вкладывается в подалгебры 11.1 и 11.2. Подалгебры 10.3 и 10.4 вкладываются только в 11.2. Подалгебры 9.5 и 9.6 объединим в одну $9.5 - 6$ с произвольным параметром a. Подалгебры $9.2, 9.4, 9.5 - 6$ вкладываются в 10.4. Подалгебра 9.3 вкладывается в 10.4 (где присутствует оператор X_{10}) и в 11.1 (где оператора X_{10} нет). Подалгебра 9.1 вкладывается только в 12.1. Подобным образом обозримо прослеживаются вложения всех подалгебр до размерности 7 (см. рис.1).

Наблюдаются следующие свойства графа. Подалгебры разбиваются на два сорта: содержащие оператор X_{10} и не содержащие его. Подалгебры, не содержащие X_{10}, могут вкладываться в подалгебры любого сорта. Подалгебры, содержащие X_{10} вкладываются только в подалгебры, которые также содержат X_{10}. Большинство подалгебр вкладывается в подалгебры предыдущего уровня (то есть в подалгебры размерности на единицу больше). Некоторые подалгебры "перепрыгивают" через один уровень, а некоторые – через два (см. рис.1).

Параметрических семейств 6-ти мерных неподобных подалгебр 40 в оптимальной системе алгебры L_{12}, поэтому их все сложно изобразить на графе. Возникает проблема представления графа в целом. Для подалгебр размерности меньше либо равной 6 рассмотрим только самонормализованные подалгебры и построим граф вложенных самонормализованных подалгебр. Для этого выберем все 6-ти мерные самонормализованные подалгебры из таблицы 3. Разделим их на два сорта: подалгебры, содержащие оператор X_{10}, изобразим на графе справа, подалгебры, не содержащие X_{10}, изобразим слева. Так же на графе пунктиром изобразим подалгебры, в которые вкладываются 6-ти мерные самонормализованные подалгебры. Подобным образом поступим с самонормализованными подалгебрами размерности 5. Если самонормализованная 5-ти мерная подалгебра не вкладывается ни в одну из самонормализованных 6-ти мерных подалгебр, то найдем подалгебру большей размерности, в которую она вкладывается, и изобразим ее на графе. Аналогично поступим с самонормализованными подаглебрами размерности 4,3,2 (см. рис.2). В результате получим представление о графе в целом.

Замечание. Некоторые стрелки в графе на рис.2 могут проходить через подалгебры промежуточной размерности, которые не являются самонормализованными.

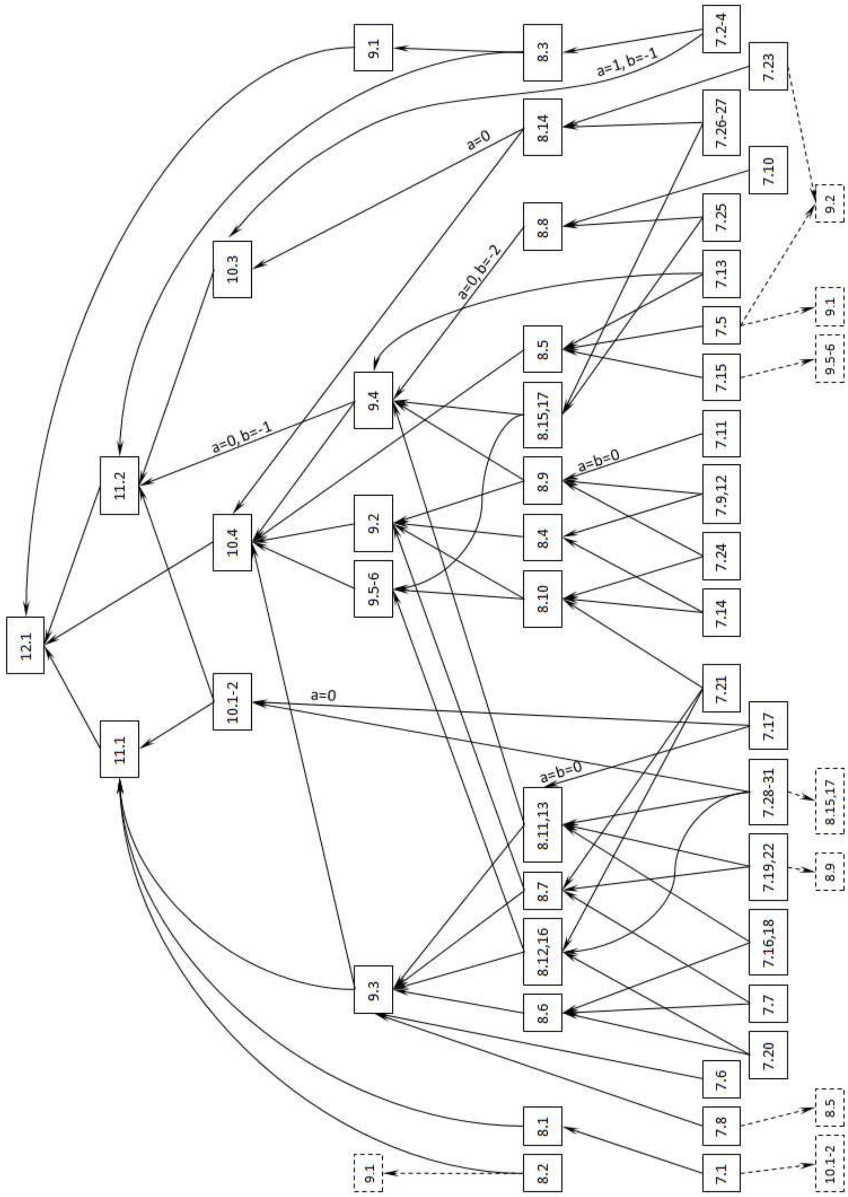

Рис. 1. Граф вложенных подалгебр размерностей от 7 до 12.

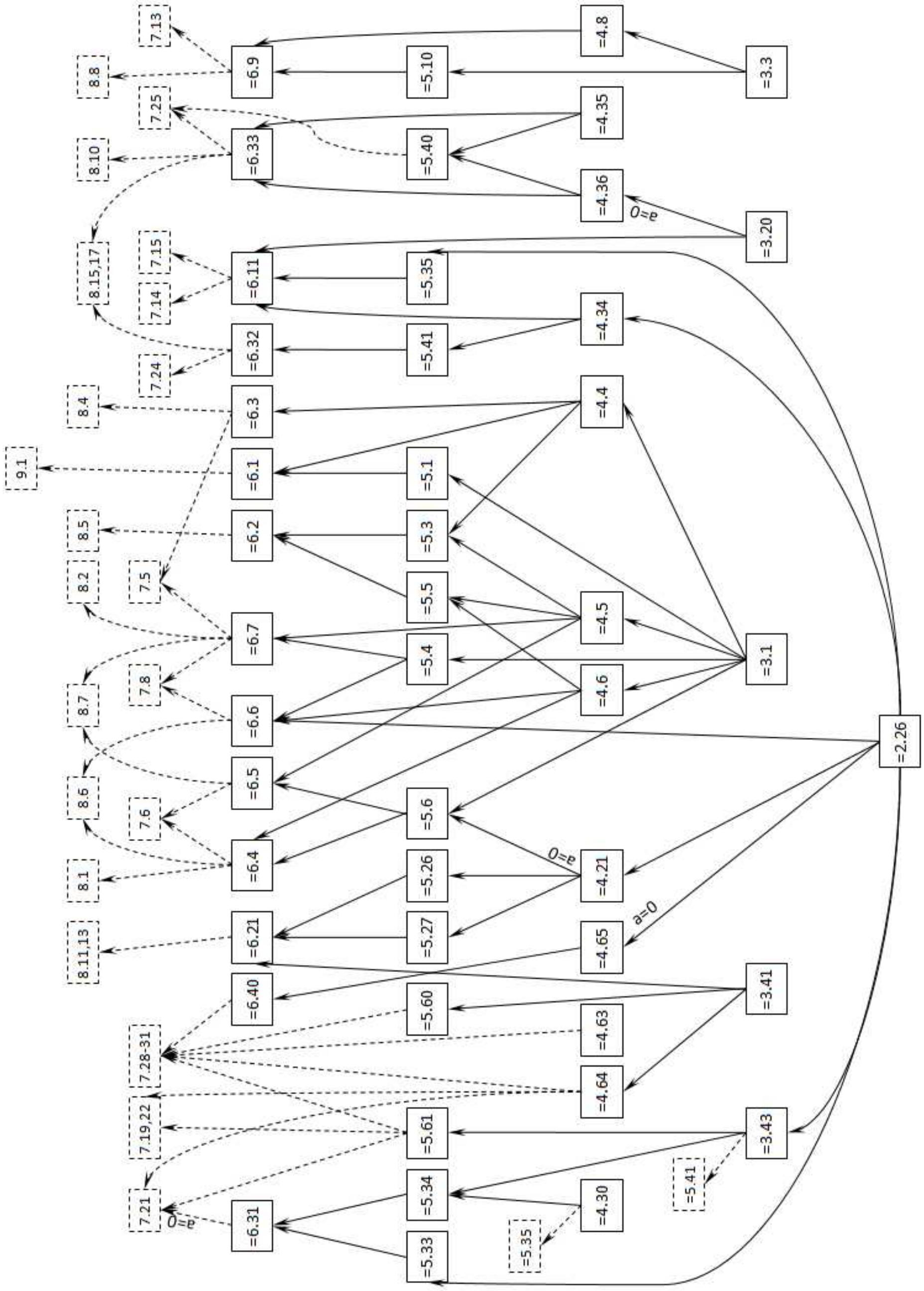

Рис. 2. Граф вложенных самонормализованных подалгебр размерностей от 2 до 6.

Иерархию подмоделей мы рассмотрим на примере самонормализованной подалгебры 5.33. Составим граф Γ_5 всех вложенных в нее подалгебр. При построении графа подалгебры приводились к согласованному виду с помощью преобразований подобия.

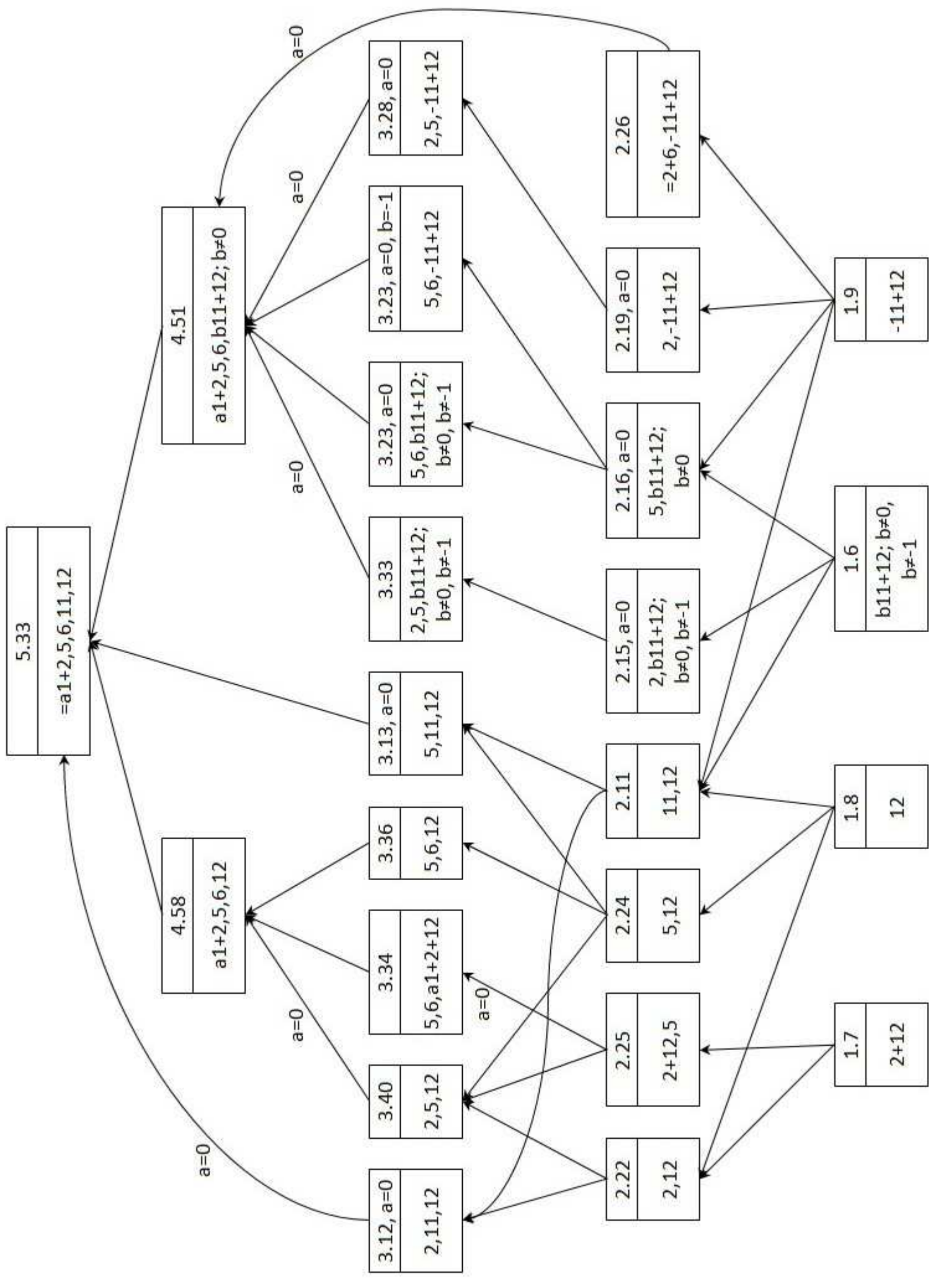

Рис. 3. Граф Γ_5.

3. Дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования

Для всех подалгебр графа Γ_5 вычислим дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования. Общие правила вычисления заключаются в следующем. Рассмотрим оператор $\tilde{X}$ общего вида $\tilde{X} = \xi^i(x,u)\partial_{x^i}$, который действует в пространстве независимых $(x = (x^i))$ и зависимых $u = (u^k)$ переменных. Действие этого оператора продолжается на расширенное пространство, содержащее производные $u^k_j = u^k_{x^j}(x)$ по следующему правилу [3].

$$\tilde{X} = \xi^i(x,u)\partial_{x^i} + \eta^k(x,u)\partial_{u^k} + (D_i\eta^k - u^k_j D_i \xi^j)\partial_{u^k_i}, \tag{3}$$

где $D_i = \partial_{x^i} + u^k_i\partial_{u^k} + u^k_{ji}\partial_{u^k_j} + ...$ – оператор полного дифференцирования. Инвариант подалгебры есть функция от всех переменных, которая аннулируется любым оператором из подалгебры. Инвариант относительно оператора $\tilde{X}$, действующего в расширенном пространстве $x = (x^i)$, $u = (u^k)$, $u_{(1)} = (u^k_j)$, называется дифференциальным инвариантом (ДИ) первого порядка. Линейный дифференциальный оператор, действие которого на произвольный дифференциальный инвариант снова дает дифференциальный инвариант, называется оператором инвариантного дифференцирования (ОИД). На примере подалгебры 5.33 покажем, как просто вычисляются ОИД.

Продолжим действие операторов, входящих в подалгебру 5.33 : $\{a1+2, 5, 6, 11, 12\}$ на первые производные по правилу (3).

$$\begin{gathered}
X_1 = \partial_x, \qquad X_2 = \partial_y, \\
X_5 = t\partial_y + \partial_v - p_y\partial_{p_t} - v_y\partial_{v_t} + \dots, \\
X_6 = t\partial_z + \partial_w - p_z\partial_{p_t} - v_z\partial_{v_t} + \dots, \\
X_{11} = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z - p_t\partial_{p_t} - p_x\partial_{p_x} - p_y\partial_{p_y} - \\
- p_z\partial_{p_z} - v_t\partial_{v_t} - v_x\partial_{v_x} - v_y\partial_{v_y} - v_z\partial_{v_z} + \dots, \\
X_{12} = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho - p_t\partial_{p_t} - \\
-2v_t\partial_{v_t} - v_x\partial_{v_x} - v_y\partial_{v_y} - v_z\partial_{v_z} + \dots
\end{gathered} \tag{4}$$

Многоточием обозначены слагаемые, которые не используются при вычислении дифференциальных инвариантов. Сначала вычислим ДИ и ОИД для одномерных подалгебр. Затем от них перейдем к ДИ и ОИД для подалгебр большей размерности.

Примеры вычисления согласованных ДИ и ОИД. Рассмотрим цепочку вложенных подалгебр $\{X_{12}\} \to \{X_5, X_{12}\} \to \{X_5, X_6, X_{12}\} \to \{X_2, X_5, X_6, X_{12}\} \to \{X_2, X_5, X_6, X_{11}, X_{12}\}$. Найдем ДИ и ОИД для одномерной подалгебры X_{12}. Для этого запишем действие продолженного оператора X_{12}, аннулирующее функцию F:

$$\begin{aligned}
X_{12}F = (t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho - p_t\partial_{p_t} - \\
-2v_t\partial_{v_t} - v_x\partial_{v_x} - v_y\partial_{v_y} - v_z\partial_{v_z} + \dots)F = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Получим линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка. Общее решение есть произвольная функция от функционально независимого набора интегралов (инвариантов) характеристического уравнения

$$\frac{dt}{t} = \frac{du}{-u} = \frac{dv}{-v} = \frac{dw}{-w} = \frac{d\rho}{2\rho} = \frac{dp_t}{-p_t} = \frac{dv_t}{-2v_t} = \frac{dv_x}{-v_x} = \frac{dv_y}{-v_y} = \frac{dv_z}{-v_z} =$$
$$= \frac{dx}{0} = \frac{dy}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{dp}{0} = \frac{dp_x}{0} = \frac{dp_y}{0} = \frac{dp_z}{0}.$$

Полный набор функционально независимых интегралов таков:

$$\vec{x},\ t\vec{u},\ t^{-2}\rho,\ p,\ tp_t,\ \nabla p,\ t^2 v_t,\ t\nabla v. \tag{6}$$

Отсюда видно, что инварианты $tp_t, \nabla p$ получаются из инварианта p действием операторов tD_t, D_x, D_y, D_z, где D_i – оператор полного дифференцирования $(i = t, x, y, z)$. По теореме [4] других ОИД нет с точностью до взятия функции от инвариантов (над полем инвариантов).

Вычислим ДИ и ОИД для двумерной подалгебры $\{X_5, X_{12}\}$, согласованные с ДИ и ОИД подалгебры $\{X_{12}\}$. Для этого решим систему $X_5F = 0, X_{12}F = 0$. Решение $X_{12}F = 0$ найдено выше. Возьмем ДИ (6) оператора X_{12} в качестве новых переменных.

$$\begin{gathered} t,\ x,\ y,\ z,\ u_1 = tu,\ v_1 = tv,\ w_1 = tw,\ \rho_1 = t^{-2}\rho,\ p,\ p_{1t} = tp_t, \\ p_x,\ p_y,\ p_z,\ v_{1t} = t^2 v_t,\ v_{1x} = tv_x,\ v_{1y} = tv_y,\ v_{1z} = tv_z. \end{gathered} \tag{7}$$

Тогда в новых переменных $X_{12} = t\partial_t$ и

$$\begin{aligned} X_{12}F &= tF_t = 0 \\ X_5F &= (t\partial_y + \partial_v - p_y\partial_{p_t} - v_y\partial_{v_t} + \ldots)F = \\ &= t(\partial_y + \partial_{v_1} - p_y\partial_{p_{t_1}} - v_{1y}\partial_{v_{1_t}} + \ldots)F = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Составим характеристическое уравнение для (8)

$$\frac{dy}{1} = \frac{dv_1}{1} = \frac{dp_{1t}}{-p_y} = \frac{dv_{1t}}{-tv_y} = \frac{dx}{0} = \frac{dz}{0} = \frac{du_1}{0} = \frac{dw_1}{0} = \frac{d\rho_1}{0} =$$
$$= \frac{dp}{0} = \frac{dp_x}{0} = \frac{dp_y}{0} = \frac{dp_z}{0} = \frac{dv_{1x}}{0} = \frac{dv_{1y}}{0} = \frac{dv_{1z}}{0}.$$

Полный набор функционально независимых интегралов таков:

$$x, z, u_1, v_1 - y, w_1, \rho_1, p, p_{1t} + yp_y, p_x, p_y, p_z, v_{1t} + tyv_y, v_{1x}, v_{1y}, v_{1z}, \tag{9}$$

Вернемся к исходным переменным, получим ДИ для подалгебры $\{X_5, X_{12}\}$:

$$x,\ z,\ tu,\ tv - y,\ tw,\ t^{-2}\rho,\ p,\ tp_t + yp_y,\ \nabla p,\ t(tv_t + yv_y),\ t\nabla v. \tag{10}$$

Из вида ДИ первого порядка для p следуют ОИД для двумерной подалгебры $tD_t + yD_y, D_x, D_y, D_z$.

Найдем ДИ и ОИД для подалгебры $\{X_5, X_6, X_{12}\}$. Решим систему $X_5F = 0, X_6F = 0, X_{12}F = 0$. Решение $X_5F = 0, X_{12}F = 0$ найдено выше. Как и в предыдущем случае, выберем интегралы (10) системы $X_5F = 0, X_{12}F = 0$ в качестве новых переменных для оператора X_6. Решая характеристическое уравнение, получим интегралы:

$$x, tu, tv - y, tw - z, t^{-2}\rho, p, tp_t + yp_y + zp_z, p_x, p_y, p_z, t(tv_t + yv_y + zv_z), tv_x, tv_y, tv_z.$$

Отсюда находим ОИД: $tD_t + yD_y + zD_z, D_x, D_y, D_z$. Аналогично находим ДИ и ОИД для подалгебр $\{X_2, X_5, X_6, X_{12}\}$ и $\{X_2, X_5, X_6, X_{11}, X_{12}\}$:

$$\begin{aligned}\{X_2, X_5, X_6, X_{12}\} :\ & x, tu, tw - z, t^{-2}\rho, p, t(p_t + vp_y) + zp_z, p_x, p_y, p_z,\\ & t^2(v_t + vv_y) + tzv_z, tv_x, tv_y, tv_z;\\ & t(D_t + vDy) + zD_z, D_x, D_y, D_z;\\ \{X_2, X_5, X_6, X_{11}, X_{12}\} :\ & x^{-1}tu, x^{-1}(tw - z), x^2t^{-2}\rho, p, t(p_t + vp_y) + zp_z,\\ & xp_x, xp_y, xp_z, x^{-1}t^2(v_t + vv_y) + x^{-1}tzv_z, tv_x, tv_y, tv_z;\\ & t(D_t + vDy) + zD_z, xD_x, xD_y, xD_z.\end{aligned}$$

Замечание. Такое пошаговое вычисление инвариантов дает согласованные инварианты для цепочки подалгебр: инварианты надалгебры есть функции инвариантов подалгебры. Те же самые ДИ и ОИД можно получить, следуя по другой цепочке. Например $\{X_{12}\} \to \{X_2, X_{12}\} \to \{X_2, X_5, X_{12}\} \to$ $\to \{X_2, X_5, X_6, X_{12}\} \to \{X_2, X_5, X_6, X_{11}, X_{12}\}$. Результаты вычислений запишем в виде таблицы.

Таблица 1: ДИ и ОИД для подалгебр графа Γ_5

I – значение параметров семейства подалгебр, p – общий инвариант для всех подалгебр.

r	k	I	ДИ: p	ОИД
1	6,8	$b \neq -1$	$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}\vec{x}; \|t\|^{\frac{1}{b+1}}\vec{u}, \|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho$	$tD_t, \|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	7		$x, y - \ln\|t\|, z; t\vec{u}, t^{-2}\rho$	tD_t, D_i
	9		$t, x^{-1}y, x^{-1}z; x^{-1}\vec{u}, x^2\rho$	D_t, xD_i
2	11		$x^{-1}y, x^{-1}z; x^{-1}t\vec{u}, t^{-2}x^2\rho$	tD_t, xD_i
	15	$a = 0$	$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}x, \|t\|^{-\frac{b}{b+1}}z; \|t\|^{\frac{1}{b+1}}\vec{u}, \|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho$	$tD_t, \|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	16	$a = 0,$ $b \neq -1$	$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}x, \|t\|^{-\frac{b}{b+1}}z; \|t\|^{\frac{1}{b+1}}u,$ $\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}(tv - y), \|t\|^{\frac{1}{b+1}}w, \|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho$	$tD_t + yD_y, \|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	16	$a = 0,$ $b = -1$	$t, x^{-1}z; x^{-1}u, x^{-1}(tv - y),$ $x^{-1}w, x^2\rho$	$tD_t + yD_y, xD_i$
	19	$a = 0$	$t, x^{-1}z; x^{-1}\vec{u}, x^2\rho$	D_t, xD_i
	22		$x, z; t\vec{u}, t^{-2}\rho$	tD_t, D_i
	24		$x, z; tu, tv - y, tw, t^{-2}\rho$	$tD_t + yD_y, D_i$
	25		$x, z; tu, tv - y + \ln\|t\|, tw, t^{-2}\rho$	$tD_t + (y - \ln\|t\|)D_y,$ D_i
	26		$t, x^{-1}(z-ty); x^{-1}u, x^{-1}v, x^{-1}(w - y),$ $x^2\rho$	$D_t + yD_z, xD_i$
3	12	$a = 0$	$x^{-1}z; x^{-1}t\vec{u}, t^{-2}x^2\rho$	tD_t, xD_i
	13	$a = 0$	$x^{-1}z; x^{-1}tu, x^{-1}(tv-y), x^{-1}tw, t^{-2}x^2\rho$	$tD_t + yD_y, xD_i$
	23	$a = 0,$ $b \neq -1$	$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}x; \|t\|^{\frac{1}{b+1}}u, \|t\|^{-\frac{b}{b+1}}(tv - y),$ $\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}(tw - z), \|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho$	$tD_t + yD_y + zD_z,$ $\|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	23	$a = 0,$ $b = -1$	$t; x^{-1}u, x^{-1}(tv - y), x^{-1}(tw - z), x^2\rho$	$tD_t + yD_y + zD_z,$ xD_i
	28	$a = 0$	$t, x^{-1}z; x^{-1}u, x^{-1}w, x^2\rho,$ $x^{-1}(t^2(v_t + vv_y)), t\nabla v$	$t(D_t + vD_y), xD_i$
	33		$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}x, \|t\|^{-\frac{b}{b+1}}z; \|t\|^{\frac{b+2}{b+1}}(v_t+vv_y), t\nabla v$	$t(D_t+vD_y), \|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	34		$x - a\ln\|t\|; tu, tv - y + \ln\|t\|,$	$tD_t+(y-\ln\|t\|)D_y+$

			$tw-z, t^{-2}\rho$	$+zD_z, D_i$
	36		$x; tu, tv-y, tw-z, t^{-2}\rho$	$tD_t+yD_y+zD_z,$ D_i
	40		$x, z; tu, tw, t^{-2}\rho, t^2(v_t+vv_y), t\nabla v$	$t(D_t+vD_y), D_i$
4	51	$a\neq 0,$ $b\neq -1$	$\|t\|^{\frac{1}{b+1}}u, \|t\|^{-\frac{b}{b+1}}(a^{-1}x+tv-y),$ $\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}(tw-z), \|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho$	$a(tD_t+yD_y+zD_z)-$ $-xD_y, \|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	51	$a=0,$ $b\neq -1$	$\|t\|^{-\frac{b}{b+1}}x; \|t\|^{\frac{1}{b+1}}u, \|t\|^{\frac{1}{b+1}}(tw-z),$ $\|t\|^{-\frac{2}{b+1}}\rho, \|t\|^{\frac{b+2}{b+1}}(v_t+vv_y+t^{-1}zv_z), t\nabla v$	$t(D_t+vD_y)+zD_z,$ $\|t\|^{\frac{b}{b+1}}D_i$
	51	$a\neq 0,$ $b=-1$	$t; u\rho^{\frac{1}{2}}, (a^{-1}x+tv-y)\rho^{\frac{1}{2}}, (tw-z)\rho^{\frac{1}{2}},$ $\rho^{-1}(t\rho_t+y\rho_y+z\rho_z-a^{-1}x\rho_y), \rho^{-\frac{3}{2}}\nabla\rho$	$a(tD_t+yD_y+zD_z)-$ $-xD_y, \rho^{-\frac{1}{2}}D_i$
	51	$a=0,$ $b=-1$	$t; x^{-1}u, x^{-1}(tw-z), x^2\rho, t\nabla v$ $x^{-1}(t^2(v_t+vv_y)+tzv_z)$	$tD_t+tvD_y+zD_z,$ xD_i
	58	$a\neq 0$	$tu, x+a(tv-y), tw-z, t^{-2}\rho$	$a(tD_t+yD_y+$ $+zD_z)-xD_y, D_i$
	58	$a=0$	$x; tu, tw-z, t^{-2}\rho, t^2(v_t+vv_y)+tzv_z,$ $t\nabla v$	$tD_t+tvD_y+zD_z,$ D_i
5	33	$a\neq 0$	$u\rho^{\frac{1}{2}}, (a^{-1}x+tv-y)\rho^{\frac{1}{2}}, (tw-z)\rho^{\frac{1}{2}},$ $\rho^{-1}(t\rho_t+y\rho_y+z\rho_z-a^{-1}x\rho_y), t\rho^{-1}\nabla\rho$	$a(tD_t+yD_y+zD_z)-$ $-xD_y, t\rho^{-\frac{1}{2}}D_i$
	33	$a=0$	$x^{-1}tu, x^{-1}(tw-z), t^{-2}x^2\rho, t\nabla v,$ $x^{-1}(t^2(v_t+vv_y)+tzv_z)$	$t(D_t+vD_y)+zD_z,$ xD_i

В таблице введены следующие обозначения: r – размерность подалгебры, k – порядковый номер подалгебры данной размерности. В третьем столбце указаны значения a, b инвариантов автоморфизмов. В четвертом столбце сначала указаны инварианты, зависящие от независимых переменных, а после точки с запятой указаны инварианты, зависящие от функций. D_i – оператор полного дифференцирования $(i = x, y, z)$.

Из таблицы 1 можно заметить, что для подалгебр графа Γ_5 выполняются следующие утверждения.

Утверждение 1. Операторы инвариантного дифференцирования надалгебры получаются как линейная комбинация операторов инвариантного дифференцирования подалгебры с коэффициентами над полем дифференциальных инвариантов подалгебры.

Утверждение 2. Инварианты надалгебры есть функции от инвариантов подалгебры.

4. Подмодели: инвариантные, частично инвариантные, дифференциально-инвариантные

Система уравнений газовой динамики, записанная через инварианты подалгебры, называется подмоделью для данной подалгебры. Представление решения подмодели получается следующим образом. Инварианты подалгебры, зависящие от функций, назначаются новыми функциями от инвариантов, зависящих от независимых переменных. Если из инвариантов подалгебры, содержащих функции, можно определить все газодинамические функции, то подмодель называется инвариантной (ИП). Инвариантное решение есть решение инвариантной подмодели. Если инвариантов, содержащих функции, меньше, чем искомых функций, то представление инвариантного решения нет. Рассматривают частично инвариантные подмодели [4], когда в качестве новых независимых переменных выбирают инварианты, зависящие от независимых переменных и от некоторых инвариантов, зависящих от функций. Общее число новых независимых переменных меньше числа исходных независимых переменных. Оставшиеся инварианты назначаются новыми функциями от новых независимых переменных. Отсюда определяется часть искомых функций (представление решения). Те функции, которые не определены (общего вида), называются "лишними". Полученное представление подставляется в уравнения газовой динамики, что дает частично инвариантную подиодель (ЧИП). Если в представлении решения нет лишних функций, то получаем регулярную частично инвариантную подмодель (РЧИП). В противном случае получаем нерегулярную частично инвариатаную подмодель (НЧИП). Число новых независимых переменных называется рангом подмодели. Число функций общего вида ("лишних" функций) называется дефектом [4]. Дифференциально-инвариантной подмоделью (ДИП) ранга $r+r_1$ называется представление уравнений газовой динамики как многообразия размерности $r+r_1$ в пространстве независимых дифференциальных инвариантов, проекция которого в пространство инвариантов нулевого порядка имеет размерность r [5].

Получены все инвариантные подмодели графа Γ_5.

1°. Подмодели ранга 3.

Подалгебра **1.6,8**: $\{b11+12; b \neq -1\}$. Из таблицы 5 инвариантов следует представление решения

$$\begin{aligned} &\vec{u} = |t|^{-\frac{1}{b+1}}\vec{u}_1(x_1,y_1,z_1), \rho = |t|^{\frac{2}{b+1}}\rho_1(x_1,y_1,z_1), \\ &p = p(x_1,y_1,z_1), S = |t|^{\frac{2}{b+1}}S_1(x_1,y_1,z_1), \vec{x}_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}}\vec{x}. \end{aligned} \tag{11}$$

Подставим (11) в уравнения газовой динамики (УГД), получим инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} &D_1\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}\nabla_1 p_1 = -(b+1)^{-1}\vec{u}_1, \\ &D_1\rho_1 + \rho_1\nabla_1\cdot\vec{u}_1 = 2(b+1)^{-1}\rho_1, \\ &D_1 S_1 = 2(b+1)^{-1}S_1, \\ &\quad \rho_1 = h(p)S_1, \end{aligned} \tag{12}$$

где $D_1 = (u_1 + \frac{b}{b+1}x_1)\partial_{x_1} + (v_1 + \frac{b}{b+1}y_1)\partial_{y_1} + (w_1 + \frac{b}{b+1}z_1)\partial_{z_1}, \nabla_1 = (\partial_{x_1}, \partial_{y_1}, \partial_{z_1})$.

Подалгебра **1.7**: $\{2+12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned} &\vec{u} = t^{-1}\vec{u}_1(x,y_1,z), \rho = t^2\rho_1(x,y_1,z), p = p(x,y_1,z), \\ &S = t^2 S_1(x,y_1,z), y_1 = y - \ln|t|. \end{aligned} \tag{13}$$

Подстановка (13) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} &D_1\vec{u}_1 + \rho_1^{-1}\nabla_1 p_1 = \vec{u}_1, \\ &D_1\rho_1 + \rho_1\nabla_1\cdot\vec{u}_1 = -2\rho_1, \\ &D_1 S_1 = -2S_1, \\ &\quad \rho_1 = h(p)S_1, \end{aligned} \tag{14}$$

где $D_1 = u_1\partial_x + (v_1-1)\partial_{y_1} + w_1\partial_z, \nabla_1 = (\partial_x, \partial_{y_1}, \partial_z)$.
Подалгебра **1.9**: $\{-11+12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned}&\vec{u} = x\vec{u}_1(t,y_1,z_1), \rho = x^{-2}\rho_1(t,y_1,z_1), p = p(t,y_1,z_1),\\ &S = x^{-2}S_1(t,y_1,z_1), y_1 = x^{-1}y, z_1 = x^{-1}z.\end{aligned} \tag{15}$$

Подстановка (15) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{gathered}u_{1t} + (v_1 - y_1u_1)u_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)u_{1z_1} - \frac{y_1p_{y_1}}{\rho_1} - \frac{z_1p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1^2,\\ v_{1t} + (v_1 - y_1u_1)v_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)v_{1z_1} + \frac{p_{y_1}}{\rho_1} = -u_1v_1,\\ w_{1t} + (v_1 - y_1u_1)w_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1w_1,\\ \rho_{1t} + (v_1 - y_1u_1)\rho_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)\rho_{1z_1} +\\ +\rho_1(-y_1u_{1y_1} - z_1u_{1z_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho_1u_1,\\ S_{1t} + (v_1 - y_1u_1)S_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)S_{1z_1} = 2u_1S_1,\\ \rho_1 = h(p)S_1.\end{gathered} \tag{16}$$

2°. Подмодели ранга 2.
Подалгебра **2.11**: $\{11, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned}&\vec{u} = xt^{-1}\vec{u}_1(y_1,z_1), \rho = t^2x^{-2}\rho_1(y_1,z_1), p = p(y_1,z_1),\\ &S = t^2x^{-2}S_1(y_1,z_1), y_1 = x^{-1}y, z_1 = x^{-1}z.\end{aligned} \tag{17}$$

Подстановка (17) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{gathered}(v_1 - y_1u_1)u_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)u_{1z_1} - \frac{y_1p_{y_1}}{\rho_1} - \frac{z_1p_{z_1}}{\rho_1} = u_1(1-u_1),\\ (v_1 - y_1u_1)v_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)v_{1z_1} + \frac{p_{y_1}}{\rho_1} = v_1(1-u_1),\\ (v_1 - y_1u_1)w_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = w_1(1-u_1),\\ (v_1 - y_1u_1)\rho_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)\rho_{1z_1} +\\ +\rho_1(-y_1u_{1y_1} - z_1u_{1z_1} + v_{1y_1} + w_{1z_1}) = \rho_1(u_1-2),\\ (v_1 - y_1u_1)S_{1y_1} + (w_1 - z_1u_1)S_{1z_1} = 2S_1(u_1-1),\\ \rho_1 = h(p)S_1.\end{gathered} \tag{18}$$

Подалгебра **2.15**: $\{2, b11+12; b \neq 0, b \neq -1\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned}&\vec{u} = |t|^{-\frac{1}{b+1}}\vec{u}_1(x_1,z_1), \rho = |t|^{\frac{2}{b+1}}\rho_1(x_1,z_1), p = p(x_1,z_1),\\ &S = |t|^{\frac{2}{b+1}}S_1(x_1,z_1), x_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}}x, z_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}}z.\end{aligned} \tag{19}$$

Подстановка (19) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(20)\quad
\begin{aligned}
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)u_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)u_{1z_1}+\frac{p_{x_1}}{\rho_1}=-\frac{1}{b+1}u_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)v_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)v_{1z_1}=-\frac{1}{b+1}v_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)w_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)w_{1z_1}+\frac{p_{z_1}}{\rho_1}=-\frac{1}{b+1}w_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)\rho_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)\rho_{1z_1}+\rho_1(u_{1x_1}+w_{1z_1})=\frac{2}{b+1}\rho_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)S_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)S_{1z_1}=\frac{2}{b+1}S_1,\\
&\qquad\qquad\rho_1=h(p)S_1.
\end{aligned}
$$

Подалгебра **2.16**: $\{5, b11+12; b\neq 0, b\neq -1\}$. Представление решения имеет вид

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
&u=|t|^{-\frac{1}{b+1}}u_1(x_1,z_1), v=t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}v_1(x_1,z_1)+y),\\
&w=|t|^{-\frac{1}{b+1}}w_1(x_1,z_1), \rho=|t|^{\frac{2}{b+1}}\rho_1(x_1,z_1), p=p(x_1,z_1),\\
&S=|t|^{\frac{2}{b+1}}S_1(x_1,z_1), x_1=|t|^{-\frac{b}{b+1}}x, z_1=|t|^{-\frac{b}{b+1}}z.
\end{aligned}
$$

Подстановка (21) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)u_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)u_{1z_1}+\frac{p_{x_1}}{\rho_1}=-\frac{1}{b+1}u_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)v_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)v_{1z_1}=\frac{b}{b+1}v_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)w_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)w_{1z_1}+\frac{p_{z_1}}{\rho_1}=-\frac{1}{b+1}w_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)\rho_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)\rho_{1z_1}+\rho_1(u_{1x_1}+w_{1z_1})=(\frac{2}{b+1}+1)\rho_1,\\
&(u_1+\frac{b}{b+1}x_1)S_{1x_1}+(w_1+\frac{b}{b+1}z_1)S_{1z_1}=\frac{2}{b+1}S_1,\\
&\rho_1=h(p)S_1.
\end{aligned}
$$

Подалгебра **2.16**: $\{5, -11+12\}$. Представление решения имеет вид

$$
(23)\quad
\begin{aligned}
&u=xu_1(t,z_1), v=t^{-1}(xv_1(t,z_1)+y), w=xw_1(t,z_1),\\
&\rho=x^{-2}\rho_1(t,z_1), p=p(t,z_1), S=x^{-2}S_1(t,z_1), z_1=x^{-1}z.
\end{aligned}
$$

Подстановка (23) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(24)\quad
\begin{aligned}
&u_{1t}+(w_1-z_1u_1)u_{1z_1}-\frac{z_1p_{z_1}}{\rho_1}=-u_1^2,\\
&v_{1t}+(w_1-z_1u_1)v_{1z_1}=-u_1v_1,\\
&w_{1t}+(w_1-z_1u_1)w_{1z_1}+\frac{p_{z_1}}{\rho_1}=-u_1w_1,\\
&\rho_{1t}+(w_1-z_1u_1)\rho_{1z_1}+\rho_1(-z_1u_{1z_1}+w_{1z_1})=\rho_1(u_1-\frac{1}{t}),\\
&S_{1t}+(w_1-z_1u_1)S_{1z_1}=2u_1S_1,\\
&\rho_1=h(p)S_1.
\end{aligned}
$$

Подалгебра **2.19**: $\{2, -11+12\}$. Представление решения имеет вид

$$\vec{u} = x\vec{u}_1(t, z_1), \rho = x^{-2}\rho_1(t, z_1), p = p(t, z_1), S = x^{-2}S_1(t, z_1), z_1 = x^{-1}z. \tag{25}$$

Подстановка (25) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned}
&u_{1t} + (w_1 - z_1u_1)u_{1z_1} - \frac{z_1p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1^2,\\
&v_{1t} + (w_1 - z_1u_1)v_{1z_1} = -u_1v_1,\\
&w_{1t} + (w_1 - z_1u_1)w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1w_1,\\
&\rho_{1t} + (w_1 - z_1u_1)\rho_{1z_1} + \rho_1(-z_1u_{1z_1} + w_{1z_1}) = \rho_1u_1,\\
&S_{1t} + (w_1 - z_1u_1)S_{1z_1} = 2u_1S_1,\\
&\rho_1 = h(p)S_1.
\end{aligned} \tag{26}$$

Подалгебра **2.22**: $\{2, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$\vec{u} = t^{-1}\vec{u}_1(x, z), \rho = t^2\rho_1(x, z), p = p(x, z), S = t^2S_1(x, z). \tag{27}$$

Подстановка (27) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned}
&u_1u_{1x} + w_1u_{1z} + \frac{p_x}{\rho_1} = u_1,\\
&u_1v_{1x} + w_1v_{1z} = v_1,\\
&u_1w_{1x} + w_1w_{1z} + \frac{p_z}{\rho_1} = w_1,\\
&u_1\rho_{1x} + w_1\rho_{1z} + \rho_1(u_{1x} + w_{1z}) = -2\rho_1,\\
&u_1S_{1x} + w_1S_{1z} = -2S_1,\\
&\rho_1 = h(p)S_1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Подалгебра **2.24**: $\{5, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned}
&u = t^{-1}u_1(x, z), v = t^{-1}(v_1(x, z) + y), w = t^{-1}w_1(x, z),\\
&\rho = t^2\rho_1(x, z), p = p(x, z), S = t^2S_1(x, z).
\end{aligned} \tag{29}$$

Подстановка (29) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned}
&u_1u_{1x} + w_1u_{1z} + \frac{p_x}{\rho_1} = u_1,\\
&u_1v_{1x} + w_1v_{1z} = 0,\\
&u_1w_{1x} + w_1w_{1z} + \frac{p_z}{\rho_1} = w_1,\\
&u_1\rho_{1x} + w_1\rho_{1z} + \rho_1(u_{1x} + w_{1z}) = -3\rho_1,\\
&u_1S_{1x} + w_1S_{1z} = -2S_1,\\
&\rho_1 = h(p)S_1.
\end{aligned} \tag{30}$$

Подалгебра **2.25**: $\{5, 2+12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned}
&u = t^{-1}u_1(x, z), v = t^{-1}(v_1(x, z) + y - \ln|t|), w = t^{-1}w_1(x, z),\\
&\rho = t^2\rho_1(x, z), p = p(x, z), S = t^2S_1(x, z).
\end{aligned} \tag{31}$$

Подстановка (31) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
\begin{aligned}
&u_1 u_{1x} + w_1 u_{1z} + \frac{p_x}{\rho_1} = u_1,\\
&u_1 v_{1x} + w_1 v_{1z} = 1,\\
&u_1 w_{1x} + w_1 w_{1z} + \frac{p_z}{\rho_1} = w_1,\\
&u_1 \rho_{1x} + w_1 \rho_{1z} + \rho_1(u_{1x} + w_{1z}) = -3\rho_1,\\
&u_1 S_{1x} + w_1 S_{1z} = -2S_1,\\
&\quad \rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Подалгебра **2.26**: $\{2+6, -11+12\}$. Представление решения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u = xu_1(t,z_1), v = xv_1(t,z_1), w = xw_1(t,z_1) + y, \rho = x^{-2}\rho_1(t,z_1),\\
&p = p(t,z_1), S = x^{-2}S_1(t,z_1), z_1 = x^{-1}(z - ty).
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Подстановка (33) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
\begin{aligned}
&u_{1t} + (w_1 - z_1u_1 - tv_1)u_{1z_1} - \frac{z_1 p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1^2,\\
&v_{1t} + (w_1 - z_1u_1 - tv_1)v_{1z_1} - \frac{t p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1 v_1,\\
&w_{1t} + (w_1 - z_1u_1 - tv_1)w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = -u_1 w_1 - v_1,\\
&\rho_{1t} + (w_1 - z_1u_1 - tv_1)\rho_{1z_1} + \rho_1(w_{1z_1} - z_1 u_{1z_1} - tv_{1z_1}) = \rho_1 u_1,\\
&S_{1t} + (w_1 - z_1u_1 - tv_1)S_{1z_1} = 2u_1 S_1,\\
&\quad \rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

3°. Подмодели ранга 1.

Подалгебра **3.12**: $\{2, 11, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$
\vec{u} = xt^{-1}\vec{u}_1(z_1), \rho = t^2x^{-2}\rho_1(z_1), p = p(z_1), S = t^2x^{-2}S_1(z_1), z_1 = x^{-1}z. \tag{35}
$$

Подстановка (35) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
\begin{aligned}
&(w_1 - z_1u_1)u_{1z_1} - \frac{z_1 p_{z_1}}{\rho_1} = u_1(1 - u_1),\\
&(w_1 - z_1u_1)v_{1z_1} = v_1(1 - u_1),\\
&(w_1 - z_1u_1)w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = w_1(1 - u_1),\\
&(w_1 - z_1u_1)\rho_{1z_1} + \rho_1(-z_1 u_{1z_1} + w_{1z_1}) = \rho_1(u_1 - 2),\\
&(w_1 - z_1u_1)S_{1z_1} = 2S_1(u_1 - 1),\\
&\quad \rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

Замечены интегралы системы в случае $w_1 \neq z_1u_1$: $S_1{v_1}^2 = C$, $\rho_1 e^{2s}(w_1 - z_1u_1) = D, S_1({u_1}^2 + {w_1}^2) + 2\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{h(p)} = 0$, где $(w_1 - z_1u_1)ds = dz_1$. Если $w_1 = z_1u_1$, то $\rho_1 = 0$ и решение не имеет физического смысла.

Подалгебра **3.13**: $\{5, 11, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u = xt^{-1}u_1(z_1), v = t^{-1}(xv_1(z_1) + y), w = xt^{-1}w_1(z_1),\\
&\rho = t^2x^{-2}\rho_1(z_1), p = p(z_1), S = t^2x^{-2}S_1(z_1), z_1 = x^{-1}z.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Подстановка (37) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(38)\qquad
\begin{aligned}
&(w_1 - z_1 u_1) u_{1z_1} - \frac{z_1 p_{z_1}}{\rho_1} = u_1(1-u_1),\\
&(w_1 - z_1 u_1) v_{1z_1} = -v_1 u_1,\\
&(w_1 - z_1 u_1) w_{1z_1} + \frac{p_{z_1}}{\rho_1} = w_1(1-u_1),\\
&(w_1 - z_1 u_1) \rho_{1z_1} + \rho_1(-z_1 u_{1z_1} + w_{1z_1}) = \rho_1(u_1 - 3),\\
&(w_1 - z_1 u_1) S_{1z_1} = 2S_1(u_1 - 1),\\
&\ \rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
$$

Интеграл системы: $\rho_1 e^{3s}(w_1 - z_1 u_1) = C, S_1({u_1}^2 + {w_1}^2) + 2\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{h(p)} = 0$, где $(w_1 - z_1 u_1)ds = dz_1$.
Подалгебра **3.23**: $\{5, 6, b11 + 12\}; b \neq 0, b \neq -1$. Представление решения имеет вид

$$
(39)\qquad
\begin{aligned}
&u = |t|^{-\frac{1}{b+1}} u_1(x_1), v = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} v_1(x_1) + y), w = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}} w_1(x_1) + z),\\
&\rho = |t|^{\frac{2}{b+1}} \rho_1(x_1), p = p(x_1), S = |t|^{\frac{2}{b+1}} S_1(x_1), x_1 = |t|^{-\frac{b}{b+1}} x.
\end{aligned}
$$

Подстановка (39) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(40)\qquad
\begin{aligned}
&(u_1 + \frac{b}{b+1} x_1) u_{1x_1} + \frac{p_{x_1}}{\rho_1} = -\frac{1}{b+1} u_1,\\
&(u_1 + \frac{b}{b+1} x_1) v_{1x_1} = \frac{b}{b+1} v_1,\\
&(u_1 + \frac{b}{b+1} x_1) w_{1x_1} = \frac{b}{b+1} w_1,\\
&(u_1 + \frac{b}{b+1} x_1) \rho_{1x_1} + \rho_1 u_{1x_1} = (\frac{2}{b+1} + 2)\rho_1,\\
&(u_1 + \frac{b}{b+1} x_1) S_{1x_1} = \frac{2}{b+1} S_1,\\
&\ \rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
$$

Интегралы системы: $v_1 = C w_1, S_1 = D|w|^{\frac{2}{b}}, (u_1 + \frac{b}{b+1} x_1)\rho_1 = E|w|^{\frac{4+3b}{b}}$.
Подалгебра **3.23**: $\{5, 6, -11 + 12\}$. Представление решения имеет вид

$$
(41)\qquad
\begin{aligned}
&u = x u_1(t), v = t^{-1}(x v_1(t) + y), w = t^{-1}(x w_1(t) + z),\\
&\rho = x^{-2} \rho_1(t), p = p(t), S = x^{-2} S_1(t).
\end{aligned}
$$

Подстановка (41) в УГД дает инвариантную подмодель

$$
(42)\qquad
\begin{aligned}
&u_{1t} = -u_1^2,\\
&v_{1t} = -u_1 v_1,\\
&w_{1t} = -u_1 w_1,\\
&\rho_{1t} = \rho_1(u_1 - \frac{2}{t}),\\
&S_{1t} = 2u_1 S_1,\\
&\rho_1 = h(p) S_1,
\end{aligned}
$$

которая интегрируется: $u_1 = t^{-1}, v_1 = v_0 t^{-1}, w_1 = w_0 t^{-1}, \rho_1 = \rho_0 t^{-1}$, $S_1 = S_0 t^2, \rho_0 = t^3 S_0 h(p)$.

Подалгебра **3.34**: $\{5, 6, a1 + 2 + 12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned} &u = t^{-1}u_1(x_1) = t^{-1}(\bar{u_1}(x_1) + a), v = t^{-1}(v_1(x_1) + y - \ln|t|), \\ &w = t^{-1}(w_1(x_1) + z), \rho = t^2\rho_1(x_1), p = p(x_1), S = t^2 S_1(x_1), x_1 = x - a\ln|t|. \end{aligned} \tag{43}$$

Подстановка (43) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} &\bar{u_1}\bar{u_1}_{x_1} + \frac{p_{x_1}}{\rho_1} = \bar{u_1} + a, \\ &\bar{u_1}v_{1x_1} = 1, \\ &\bar{u_1}w_{1x_1} = 0, \\ &\bar{u_1}\rho_{1x_1} + \rho_1\bar{u_1}_{x_1} = -4\rho_1, \\ &\bar{u_1}S_{1x_1} = -2S_1, \\ &\rho_1 = h(p)S_1. \end{aligned} \tag{44}$$

Получены следующие интегралы системы: $v_1 + \frac{1}{2}\ln|S_1| = v_0, w_1 = w_0, \bar{u_1}\rho_1 = C{S_1}^2$. Система (44) сводится к одному дифференциальному уравнению

$$\frac{d\bar{u_1}}{dp} = -\frac{(h^2)'\bar{u_1}^2(\bar{u_1} + a) + 4C}{2h^2\bar{u_1}(3\bar{u_1} + a)}$$

и квадратуре

$$dx_1 = \frac{2C - \bar{u_1}^3(h^2)'}{2h^2\bar{u_1}(3\bar{u_1} + a)}.$$

Подалгебра **3.36**: $\{5, 6, 12\}$. Представление решения имеет вид

$$\begin{aligned} &u = t^{-1}u_1(x), v = t^{-1}(v_1(x) + y), w = t^{-1}(w_1(x) + z), \\ &\rho = t^2\rho_1(x), p = p(x), S = t^2 S_1(x). \end{aligned} \tag{45}$$

Подстановка (45) в УГД дает инвариантную подмодель

$$\begin{aligned} &u_1 u_{1x} + \frac{p_x}{\rho_1} = u_1, \\ &u_1 v_{1x} = 0, \\ &u_1 w_{1x} = 0, \\ &u_1\rho_{1x} + \rho_1 u_{1x} = -4\rho_1, \\ &u_1 S_{1x} = -2S_1, \\ &\rho_1 = h(p)S_1. \end{aligned} \tag{46}$$

Интегралы системы:

1) $u_1 = 0, \rho_1 = 0, S_1 = 0, p = p_0, v_1(x), w_1(x)$ – произвольные функции;

2) $u_1 \neq 0, v_1 = v_0, w_1 = w_0, u_1\rho_1 = C{S_1}^2, h = \phi'(p)^{-1}, {S_1}^3 = -2\phi(C\phi')^{-2}$ и уравнение принимает вид

$$3 \cdot 2^{2/3}dx = C^{1/3}(\phi\phi')^{-2/3}({\phi'}^2 - 2\phi\phi'')dp.$$

4°. Подмодели с линейным полем скоростей.

Для четырехмерных подалгебр из инвариантов видно, что представление для скоростей линейно по x, y, z. Чтобы получить нетривиальное решение ($\rho \neq 0$), будем искать ЧИР ранга 0, дефекта 2, в котором ρ и p – произвольные функции.

Подалгебра **4.51, 4.58**: $\{a1+2, 5, 6, b11+12; a \neq 0, b \neq -1\}$. Представление решения имеет вид

$$u = |t|^{-\frac{1}{b+1}}U_0, v = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}V_0 - a^{-1}x + y), w = t^{-1}(|t|^{\frac{b}{b+1}}W_0 + z), \quad \rho, p - \text{общего вида.} \tag{47}$$

Получим решение

$$u = 0, v = t^{-1}(-a^{-1}x + y), w = t^{-1}z, \rho = t^{-2}R(x, v, w), h(p) = t^{-2}H_0. \tag{48}$$

Все инвариантные подмодели построены. Приведем примеры других групповых решений.

Замечание. Инвариантные подмодели можно привести к канонической форме [6], но мы не делаем этого, потому что в нашем случае легче проследить вложенние подмоделей не приводя их к каноническому виду.

Пример РЧИП (ранг $r=1$, дефект $\delta=1$) на подалгебре $\{2, 5, 6, -11+12\}$. Из таблицы 5 следует представление решения:

$$u = xu_1(t), w = t^{-1}(xw_1(t) + z), \rho = x^{-2}\rho_1(t), p = p(t), S = x^{-2}S_1(t). \tag{49}$$

Считаем $v(t, x, y, z)$ функцией общего вида. Подставим (49) и $v(t, x, y, z)$ в уравнения газовой динамики.

$$u_{1t} = -u_1{}^2, \tag{50}$$

$$v_t + xu_1v_x + vv_y + t^{-1}(xw_1 + z)v_z = 0, \tag{51}$$

$$w_{1t} = -u_1w_1, \tag{52}$$

$$\rho_{1t} = \rho_1(u_1 - v_y - t^{-1}), \tag{53}$$

$$S_{1t} = 2S_1u_1, \tag{54}$$

$$\rho_1 = h(p)S_1. \tag{55}$$

Из уравнения (50) найдем $u_1 = t^{-1}$. Тогда $w_1 = t^{-1}w_0, S_1 = t^2S_0, v_y = -\rho_1{}^{-1}\rho_{1t}$. Из последнего уравнения следует

$$v = -\frac{\rho_{1t}}{\rho_1}y + v_1(t, x, z). \tag{56}$$

Подставим (56) в (51):

$$-\left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_1}\right)_t y + v_{1t} + \frac{x}{t}v_{1x} + \left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_1}y - v_1\right)\frac{\rho_{1t}}{\rho_1} + \left(\frac{xw_0}{t^2} + \frac{z}{t}\right)v_{1z} = 0. \tag{57}$$

Из (57) следует $\left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_1}\right)_t - \left(\frac{\rho_{1t}}{\rho_1}\right)^2 = 0$. Интегрируем последнее уравнение:

$$\frac{\rho_{1t}}{\rho_1} = \frac{1}{-t + C_1}. \tag{58}$$

Из (58) найдем $\rho_1 = C_2(t - C_1)^{-1}$. Перепишем (57), учитывая (58):

$$v_{1t} + \frac{x}{t}v_{1x} + \left(\frac{xw_0}{t^2} + \frac{z}{t}\right)v_{1z} = \frac{1}{-t + C_1}v_1. \tag{59}$$

Решение линейного уравнения (59) имеет вид $v_1 = (t - C_1)^{-1} g\left(\frac{x}{t}, \frac{xw_0}{t^2} + \frac{z}{t}\right)$. Итак, получили решение:

$$u_1 = t^{-1}, v_1 = (t - C_1)^{-1} g\left(\frac{x}{t}, \frac{xw_0}{t^2} + \frac{z}{t}\right), w_1 = t^{-1} w_0,$$
$$\rho_1 = C_2 (t - C_1)^{-1}, S_1 = t^2 S_0.$$

Пример НЧИП (ранг $r = 1$, дефект $\delta = 1$) на подалгебре $\{a1{+}2, 5, 6, 12\}, a \neq 0$. Назначим все инварианты функциями от $p = p(t, x, y, z)$. Из таблицы 5 следует представление решения:

$$u = t^{-1} u_1(p), v = t^{-1}(v_1(p) - a^{-1}x + y), w = t^{-1}(w_1(p) + z),$$
$$\rho = t^2 \rho_1(p), S = t^2 S_1(p). \tag{60}$$

Подставим (60) в уравнения газовой динамики.

$$u_{1p} D_1 p + {\rho_1}^{-1} p_x = u_1, \tag{61}$$

$$v_{1p} D_1 p + {\rho_1}^{-1} p_y = a^{-1} u_1, \tag{62}$$

$$w_{1p} D_1 p + {\rho_1}^{-1} p_z = 0, \tag{63}$$

$$\rho_{1p} D_1 p + \rho_1 (u_{1p} p_x + v_{1p} p_y + w_{1p} p_z) = -4\rho_1, \tag{64}$$

$$S_{1p} D_1 p = -2S_1, \tag{65}$$

$$\rho_1 = h(p) S_1. \tag{66}$$

где $D_1 = t\partial_t + u_1 \partial_x + (v_1 - a^{-1}x + y)\partial_y + (w_1 + z)\partial_z$. Из уравнений (61)-(63) выразим p_x, p_y, p_z и подставим в (64):

$$p_x = \rho_1 (u_1 - {u_1}' D_1 p), \tag{67}$$

$$p_y = \rho_1 (a^{-1} u_1 - {v_1}' D_1 p), \tag{68}$$

$$p_z = -\rho_1 {w_1}' D_1 p, \tag{69}$$

$$\rho_1' D_1 p + {\rho_1}^2 (-\vec{u}_1'^2 D_1 p + u_1 (u_1' + a^{-1} v_1')) = -4\rho_1. \tag{70}$$

Из уравнения (65) найдем $D_1 p$:

$$D_1 p = -\frac{2S_1}{{S_1}'}. \tag{71}$$

Перепишем уравнения (67)-(69), учитывая (71):

$$p_x = \rho_1 (u_1 + 2{u_1}' \frac{S_1}{{S_1}'}) = p_1(p), \tag{72}$$

$$p_y = \rho_1 (a^{-1} u_1 + 2{v_1}' \frac{S_1}{{S_1}'}) = p_2(p), \tag{73}$$

$$p_z = 2\rho_1 {w_1}' \frac{S_1}{{S_1}'} = p_3(p). \tag{74}$$

Продифференцируем (72) по y, (73) по x и приравняем смешанные производные p_{xy}. Получим уравнение ${p_1}' p_2 = {p_2}' p_1$. Аналогично, приравнивая выражения для смешанных производных p_{xz}, p_{yz}, получим уравнения ${p_1}' p_3 = {p_3}' p_1$, ${p_2}' p_3 = {p_3}' p_2$ соответственно. Перепишем последние уравнения в виде $\frac{{p_1}'}{p_1} = \frac{{p_2}'}{p_2} = \frac{{p_3}'}{p_3}$. Отсюда следует $G(p) = \vec{p_0} \cdot \vec{x} + b(t)$, где $\vec{p_0} = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$.

Подставим полученное выражение в (71). Получим уравнение:

$$tb'(t) + \vec{u_1}(p)\cdot\vec{p_0} + (y - a^{-1}x)p_{02} + zp_{03} = -\frac{2S_1(p)G'(p)}{S_1'(p)}. \tag{75}$$

Новые переменные p, t и две переменные из набора x, y, z. Возможны следующие случаи.
1) Если $p_{03} \neq 0$, тогда из замены переменных следует $z = \frac{G(p)-p_{01}x-p_{02}y-b(t)}{p_{03}}$,где t, p, x, y – независимые переменные. В (75) x, y – свободные переменные. Отсюда следует $p_{02} = -ap_{01}$. Уравнение (75) принимает вид

$$tb'(t) - b(t) = -G(p) - \vec{u_1}(p)\cdot\vec{p_0} - \frac{2S_1(p)G'(p)}{S_1'(p)}. \tag{76}$$

Из (76) определяется $b = b_0t - C$ и уравнение системы

$$S_1'(p)(C + G(p) + \vec{u_1}(p)\cdot\vec{p_0}) + 2S_1(p)G'(p) = 0.$$

Уравнения (67)–(70) переписываются в виде

$$\begin{gathered}
p_{01} = \rho_1(u_1 + u_1'\frac{2S_1}{S_1'})G',\\
-ap_{01} = \rho_1(a^{-1}u_1 + v_1'\frac{2S_1}{S_1'})G',\\
p_{03} = \rho_1 w_1'\frac{2S_1}{S_1'}G',\\
2S_1(\rho_1' - \rho_1^2\cdot\vec{u_1}^{\,2}) = S_1'\rho_1(4 + \rho_1u_1(u_1' + a^{-1}v_1')).
\end{gathered}$$

Исключая $G'(p) = p_{03}\frac{S_1'}{2S_1\rho_1w_1'}$, получим подмодель

$$\begin{aligned}
&2(au_1' + v_1') + (a + a^{-1})u_1\frac{S_1'}{S_1} = 0,\\
&2\left(\frac{p_{01}}{p_{03}}w_1' - u_1'\right) = \frac{S_1'}{S_1}u_1,\\
&2(\rho_1' - \rho_1^2\cdot\vec{u_1}^{\,2}) = \frac{S_1'}{S_1}\rho_1(4 + \rho_1u_1(u_1' + a^{-1}v_1')),\\
&\rho_1w_1'(C + \vec{u_1}\cdot\vec{p_0}) + p_{03} + p_{03}\frac{S_1'}{2S_1} = 0,\\
&\rho_1 = h(p)S_1.
\end{aligned} \tag{77}$$

с интегралом $(a + a^{-1})p_{01}w_1 + p_{03}(v_1 - a^{-1}u_1) = C_1$.
2) Если $p_{03} = 0, p_{02} \neq 0$, тогда из (73) следует $w_1 = w_0$. Из замены переменных следует $y = \frac{G(p)-p_{01}x-b(t)}{p_{02}}$, где t, p, x – независимые переменные. В (75) x – свободная переменная. Отсюда следует $p_{02} = -ap_{01}$. Уравнение (75) принимает вид

$$tb'(t) - b(t) = -G(p) - (u_1(p) + av_1(p))p_{01} - \frac{2S_1(p)G'(p)}{S_1'(p)}. \tag{78}$$

Из (78) определяется $b = b_0 t - C$ и получаем НЧИП:

$$
\begin{aligned}
&2(au_1' + v_1') + (a + a^{-1})u_1 \frac{S_1'}{S_1} = 0,\\
&\rho_1 \left(u_1 + 2u_1' \frac{S_1}{S_1'} \right) (C + (u_1 + av_1)p_{01}) + 1 = -2p_{01} \frac{S_1'}{S_1},\\
&2(\rho_1' - \rho_1^2 \cdot \vec{u_1}^{\,2}) = \frac{S_1'}{S_1} \rho_1 (4 + \rho_1 u_1 (u_1' + a^{-1} v_1')),\\
&\rho_1 w_1' (C + \vec{u_1} \cdot \vec{p_0}) + p_{03} + p_{03} \frac{S_1'}{2S_1} = 0,\\
&\rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

3) Если $p_{02} = p_{03} = 0, p_{01} \neq 0$, тогда тогда из (73) следует $w_1 = w_0$. Из замены переменных следует, что $x = \frac{G(p) - b(t)}{p_{01}}$, где t, p – независимые переменные. Уравнение (75) принимает вид

$$
tb'(t) = -u_1(p)p_{01} - \frac{2S_1(p)G'(p)}{S_1'(p)}. \tag{80}
$$

Из (80) определяется $b = C \ln |t| + b_0$ и получаем НЧИП:

$$
\begin{aligned}
&\rho_1 (u_1' - av_1')(C + u_1 p_{01}) + p_{01} = 0,\\
&\frac{S_1'}{S_1} = -\frac{2av_1'}{u_1},\\
&\rho_1' - \rho_1^2 \cdot \vec{u_1}^{\,2} = -\frac{av_1'}{u_1} \rho_1 (4 + \rho_1 u_1 (u_1' + a^{-1} v_1')),\\
&\rho_1 = h(p) S_1.
\end{aligned}
\tag{81}
$$

Если $p_{01} = 0$, то функция p зависит только от $t : p = p(t)$. Получим инвариантное решение.

Пример ДИП (ранг 1+0) на подалгебре $\{2, 5, 6, 11, 12\}$. Все инварианты есть функции от $p = p(t, x, y, z)$. Из таблицы 5 следует представление решения:

$$
\begin{gathered}
u = t^{-1} x U(p), w = t^{-1}(xW(p) + z), \rho = t^2 x^{-2} R(p),\\
tx^{-1}(tv_t + tvv_y + zv_z) = V_0(p),\\
v_x = t^{-1} V_1(p), v_y = t^{-1} V_2(p), v_z = t^{-1} V_3(p).
\end{gathered}
\tag{82}
$$

Для того, чтобы исследовать совместность, нужно воспользоваться коммутационными соотношениями:

$$
\begin{gathered}
[tD_t + tvD_y + zD_z, xD_x] = -tv_x x D_y,\\
[tD_t + tvD_y + zD_z, xD_y] = -tv_y x D_y,\\
[tD_t + tvD_y + zD_z, xD_z] = -tv_z x D_y - xD_z,\\
[xD_x, xD_y] = xD_y, [xD_x, xD_z] = xD_z, [xD_y, xD_z] = 0.
\end{gathered}
\tag{83}
$$

Подействуем операторами инвариантного дифференцирования на инвариант $p = p(t, x, y, z)$. Снова получим инварианты, которые зависят от p:

$$
\begin{gathered}
(tD_t + tvD_y + zD_z)p = P_0(p),\\
xD_x p = P_1(p), xD_y p = P_2(p), xD_z p = P_3(p).
\end{gathered}
\tag{84}
$$

Действуя коммутационными соотношениями (83) на v, получим выражения

$$
\begin{aligned}
&V_1'P_0 - V_0'P_1 = V_1 + V_0 - V_1V_2,\\
&V_2'P_0 - V_0'P_2 = V_2(1 - V_2),\\
&V_3'P_0 - V_0'P_3 = -V_2V_3,\\
&V_1'P_2 = V_2'P_1, V_1'P_3 = V_3'P_1, V_2'P_3 = V_3'P_2.
\end{aligned}
\tag{85}
$$

Действуя коммутационными соотношениями (83) на p, получим выражения

$$
\begin{aligned}
&P_1'P_0 - P_0'P_1 = -V_1P_2,\\
&P_2'P_0 - P_0'P_2 = -V_2P_2,\\
&P_3'P_0 - P_0'P_3 = -V_3P_2 - P_3,\\
&P_2'P_1 - P_1'P_2 = P_2, P_3'P_1 - P_1'P_3 = P_3, P_2'P_3 = P_3'P_2.
\end{aligned}
\tag{86}
$$

Уравнения (85) и (86) образуют переопределенную инволютивную систему уравнений, то есть не порождают новых уравнений в силу того, что операторы инвариантного дифференцирования (83) образуют алгебру. Общее решение этих уравнений выразим через произвольную функцию $\phi(p)$:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \frac{T}{|\phi''|^{1/2}}, P_1 = -\frac{\phi}{\phi'}, P_2 = -\frac{1}{\phi'}, P_3 = -\frac{K}{\phi'},\\
&V_0 = P_0\phi'(1 - P_0'), V_1 = P_0'\phi + P_0(\frac{\phi''\phi}{\phi'} - \phi'),\\
&V_2 = P_0' + P_0\frac{\phi''}{\phi'}, V_3 = K(P_0' + P_0\frac{\phi''}{\phi'} - 1),
\end{aligned}
\tag{87}
$$

где K и T – произвольные постоянные. Запишем уравнения газовой динамики через инварианты:

$$
\begin{aligned}
&U'(P_0 + UP_1 + WP_3) - U + U^2 + P_1R^{-1} = 0,\\
&V_0 + UV_1 + WV_3 + P_2R^{-1} = 0,\\
&W'(P_0 + UP_1 + WP_3) + UW + P_3R^{-1} = 0,\\
&R'(P_0 + UP_1 + WP_3) + R(-U + U'P_1 + V_2 + W'P_3 + 3) = 0,\\
&P_0 + UP_1 + WP_3 + hh'^{-1}(U + U'P_1 + V_2 + W'P_3 + 1) = 0.
\end{aligned}
\tag{88}
$$

При подстановке (87) в (88) получим автономную вполне определенную систему уравнений на неизвестные функции $U(p), W(p), R(p), \phi(p), h(p)$, которая сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнения шестого порядка.

5. Вложенные инвариантные подмодели графа Γ_5.

Рассмотрим две подалгебры из графа Γ_5 такие, что одна подалгебра вкладывается в другую. Подалгебра большей размерности есть надалгебра для подалгебры меньшей размерности. При вычислении дифференциальных инвариантов и операторов инвариантного дифференцирования были сформулированы утверждения 1,2: инварианты надалгебры есть функции от инвариантов подалгебры; операторы инвариантного дифференцирования надалгебры есть линейная комбинация операторов инвариантного дифференцирования подалгебры с коэффициентами над полем дифференциальных инвариантов подалгебры. Инвариантные функции представления инвариантного решения для надалгебры есть частный случай инвариантных функций представления инвариантного решения для подалгебры. Поэтому, инвариантное решение подмодели надалгебры может являться решением подмодели подалгебры. Проверим это на примерах. Сравним представление решения (15) подалгебры $\{-11+12\}$ и представление решения (33) надалгебры $\{2+6, -11+12\}$. Получим выражения:

$$\begin{aligned}
u_1(t,y_1,z_1) &= \tilde{u}_1(t,z_1),\\
v_1(t,y_1,z_1) &= \tilde{v}_1(t,z_1),\\
w_1(t,y_1,z_1) &= \tilde{w}_1(t,z_1)+y_1,\\
\rho_1(t,y_1,z_1) &= \tilde{\rho}_1(t,z_1),\\
p(t,y_1,z_1) &= \tilde{p}(t,z_1),\\
S_1(t,y_1,z_1) &= \tilde{S}_1(t,z_1),\\
y_1 = x^{-1}y, z_1 = x^{-1}z, \tilde{z}_1 &= x^{-1}(z-ty) = z_1 - ty_1.
\end{aligned} \tag{89}$$

где $\vec{u}_1, \rho_1, p, S_1, y_1, z_1$ – инварианты подалгебры, $\vec{\tilde{u}}_1, \tilde{\rho}_1, \tilde{p}, \tilde{S}_1, \tilde{z}_1$ – инварианты надалгебры. Подставим (89) в инвариантную подмодель (16) и после приведения подобных слагаемых получим инвариантную подмодель надалгебры.

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_{1t} + (\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1 - t\tilde{v}_1)\tilde{u}_{1\tilde{z}_1} - \frac{\tilde{z}_1\tilde{p}_{\tilde{z}_1}}{\tilde{\rho}_1} = -\tilde{u}_1^2,\\
&\tilde{v}_{1t} + (\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1 - t\tilde{v}_1)\tilde{v}_{1\tilde{z}_1} - \frac{t\tilde{p}_{\tilde{z}_1}}{\tilde{\rho}_1} = -\tilde{u}_1\tilde{v}_1,\\
&\tilde{w}_{1t} + (\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1 - t\tilde{v}_1)\tilde{w}_{1\tilde{z}_1} + \frac{\tilde{p}_{\tilde{z}_1}}{\tilde{\rho}_1} = -\tilde{u}_1\tilde{w}_1 - \tilde{v}_1,\\
&\tilde{\rho}_{1t} + (\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1 - t\tilde{v}_1)\tilde{\rho}_{1\tilde{z}_1} + \tilde{\rho}_1(\tilde{w}_{1\tilde{z}_1} - \tilde{z}_1\tilde{u}_{1\tilde{z}_1} - t\tilde{v}_{1\tilde{z}_1}) = \tilde{\rho}_1\tilde{u}_1,\\
&\tilde{S}_{1t} + (\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1 - t\tilde{v}_1)\tilde{S}_{1\tilde{z}_1} = 2\tilde{u}_1\tilde{S}_1,\\
&\qquad \tilde{\rho}_1 = h(p)\tilde{S}_1.
\end{aligned} \tag{90}$$

Приведем еще один пример. Сравним представление решения (17) подалгебры $\{11, 12\}$ и преставление решения (35) надалгебры $\{2, 11, 12\}$. Получим выражения:

$$\begin{gathered}
\vec{u}_1(y_1,z_1) = \vec{\tilde{u}}_1(z_1), \rho_1(y_1,z_1) = \tilde{\rho}_1(z_1),\\
p(y_1,z_1) = \tilde{p}(z_1), S_1(y_1,z_1) = \tilde{S}_1(z_1),\\
y_1 = x^{-1}y, z_1 = \tilde{z}_1 = x^{-1}z.
\end{gathered} \tag{91}$$

где $\vec{u}_1, \rho_1, p, S_1, y_1, z_1$ – инварианты подалгебры, $\vec{\tilde{u}}_1, \tilde{\rho}_1, \tilde{p}, \tilde{S}_1, \tilde{z}_1$ – инварианты надалгебры. Подставим (91) в инвариантную подмодель (18) и после приведения подобных слагаемых получим инвариантную подмодель надалгебры.

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1)\tilde{u}_{1\tilde{z}_1} - \frac{\tilde{z}_1\tilde{p}_{\tilde{z}_1}}{\tilde{\rho}_1} = \tilde{u}_1(1-\tilde{u}_1),\\
&(\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1)\tilde{v}_{1\tilde{z}_1} = \tilde{v}_1(1-\tilde{u}_1),\\
&(\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1)\tilde{w}_{1\tilde{z}_1} + \frac{\tilde{p}_{\tilde{z}_1}}{\rho_1} = \tilde{w}_1(1-\tilde{u}_1),\\
&(\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1)\tilde{\rho}_{1\tilde{z}_1} + \tilde{\rho}_1(-\tilde{z}_1\tilde{u}_{1\tilde{z}_1} + \tilde{w}_{1\tilde{z}_1}) = \tilde{\rho}_1(\tilde{u}_1 - 2),\\
&(\tilde{w}_1 - \tilde{z}_1\tilde{u}_1)\tilde{S}_{1\tilde{z}_1} = 2\tilde{S}_1(\tilde{u}_1 - 1),\\
&\tilde{\rho}_1 = h(p)\tilde{S}_1.
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Подобным образом для всех вложенных инвариантных подмоделей графа Γ_5 было доказано, что решение инвариантной подмодели надалгебры является частым решением инвариантной подмодели подалгебры.

Заключение

В работе рассмотрена модель газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью. На примере 5-ти мерной самонормализованной подалгебры рассмотрена иерархия подмоделей уравнений газовой динамики. Составлен граф Γ_5 всех вложенных в нее подалгебр. Для всех подалгебр графа Γ_5 вычислены дифференциальные инварианты и операторы инвариантного дифференцирования. Получены все инвариантные подмодели графа Γ_5. Рассмотрены частные решения. Было показано, что решение инвариантной подмодели надалгебры является частым решением инвариантной подмодели подалгебры.

Список литературы

[1] Л. В. Овсянников, *Программа подмодели. Газовая динамика*, Прикладная математика и механика, Т. 58, Вып. 4 (1994), 30–55. MR1310991

[2] Е.В. Макаревич, *Оптимальная система подалгебр, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае уравнения состояния с разделенной плотностью*, Сибирские Электронные Математические Известия, **8** (2011), 19-38. MR2771621

[3] Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск. 1966. – 131с.

[4] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. – 400с. MR0511921

[5] Хабиров С. В. Классификация дифференциально инвариантных подмоделей.// СМЖ, Т.45, Вып.3, 2004. – С. 682-701. MR2078726

[6] Л.В. Овсянников, *Каноническая форма инвариантных подмоделей газовой динамики.*, Препринт №3-97, РАН, Сибирское отделение, Институт гидродинамики, Новосибирск, 1997, 41с.

Елена Владимировна Макаревич
Уфимский Государственный Авиационный Технический Университет,
ул. К. Маркса 12,
450000, Уфа, Россия
E-mail address: Makarevich_EV@mail.ru