

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

---

*Том 9, стр. 329–345 (2012)*

УДК 519.626.1

MSC 49M27

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ  
СИСТЕМОЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

В.М. АЛЕКСАНДРОВ

ABSTRACT. The problem of translating a linear system in condition of dynamic balance under simultaneous action of an unknown disturbance and time-optimal control is considered. The optimal control is computed along the phase trajectory and periodically updated for the discrete phase coordinate values. It is proved that the phase trajectory comes into the dynamic equilibrium point and performs undamped periodic motion (stable limit cycle). Location of the dynamic equilibrium point and the limit cycle form are considered as a function of different parameters. With the disturbance computed in carrying out the control, accuracy of the falling into required final state increases. The method of evaluating attainable accuracy is given. Results of modeling and numerical calculation are presented.

**Key words:** optimal control, speed, computing time, disturbance, phase trajectory, dynamic balance, limit cycle, translating accuracy, linear system.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Синтез оптимального управления динамическими системами представляет значительный теоретический и практический интерес, однако синтез в общем

---

ALEKSANDROV, V.M. OPTIMAL CONTROL OF DYNAMIC SYSTEM UNDER INSUFFICIENT INFORMATION.

© 2012 Александров В.М.

Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения РАН (междисциплинарный проект № 80) и Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 10-01-00035).

*Поступила 16 января 2012г., опубликована 23 июля 2012г.*

случае аналитически неразрешим и сопряжен с принципиальными и вычислительными трудностями [1],[2]. Не имеется эффективных методов синтеза оптимального управления за исключением линейно-квадратичных задач без ограничений на управления и простейших систем. Одним из возможных подходов к решению задачи синтеза является реализация оптимального управления в реальном времени в процессе сопровождения фазовой траектории движения динамической системы, когда управление формируется в функции текущих дискретных значений фазовых координат (последовательный синтез) [3],[4]. Оптимальное управление вычисляется в процессе движения системы. Время, затрачиваемое каждый раз на вычисление оптимального управления, равно  $T_*$ . Через интервал  $T_*$  измеряются текущие значения фазовых координат и для них вычисляется новое оптимальное управление. На управляемую систему одновременно действует неизвестное возмущение, препятствующее переводу системы в требуемое конечное состояние. Возникает задача нахождения фазового состояния, в которое переводится динамическая система при одновременном действии на систему неизвестного возмущения и оптимального управления. Оптимальное управление вычисляется с дискретностью  $T_*$  и не учитывает неизвестное возмущение. Оптимальное управление стремится перевести фазовое состояние системы в заданное конечное состояние, а возмущение противодействует этому переводу. В результате фазовое состояние системы переходит в некоторое состояние динамического равновесия, в котором система может находиться сколь угодно долго. Исследуемая задача является одной из актуальных задач теории равновесия [5]. В связи с широким применением теории оптимального управления в технике, экономике, биологии, медицине, экологии и многих других областях представляет не только теоретический, но и практический интерес вычисление состояния динамического равновесия и исследование влияния на него величины дискретности  $T_*$ , структуры и величины возмущения.

Вычисление возмущения в процессе сопровождения фазовой траектории движения системы на основе измерения фазовых координат возмущенной и невозмущенной систем, его экстраполяция и учет возмущения в алгоритме формирования оптимального управления значительно повышает точность перевода и позволяет перевести систему в  $\epsilon$ -окрестность требуемого конечного состояния.

Если возмущение **известно**, то существует большое количество работ (например, [6]–[12]), в которых возмущение учитывается в алгоритме оптимального управления и достигается перевод системы в требуемое конечное состояние.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + F, \quad x(t_0) = x_0, \quad x_0 \in D, \quad D \subset V, \quad (2.1)$$

где  $x$  —  $n$ -мерный вектор фазового состояния;  $A(t)$  и  $B(t)$  — непрерывные матрицы размера  $n \times n$  и  $n \times m$  соответственно;  $u$  —  $m$ -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad M_j > 0, \quad j = \overline{1, m}; \quad (2.2)$$

$F$  —  $n$ -мерный вектор неизвестных непрерывных ограниченных возмущений, относительно которых будем делать различные предположения. Это могут быть внешние детерминированные воздействия, структура и величина которых неизвестна; различного рода нелинейности, неучтенные при линеаризации; параметрические возмущения, вызванные несоответствием параметров объекта и его математической модели либо различием размерности математического описания модели и управляемого объекта и т.д.

Предполагается, что линейная модель объекта без возмущения  $F$

$$\dot{x}_m = A(t)x_m + B(t)u, \quad x_m(t_i) = x_{(i)}, \quad x_{(i)} \in D, \quad D \subset V, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

полностью управляема, т.е.

$$\text{rank} \left[ \int_{t_i}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_k^{(i)}, \tau) d\tau \right] = n, \quad (2.4)$$

и переводима в заданное конечное состояние (начало координат) из ограниченной области начальных условий  $D$ , т.е.  $x_{(i)}$  принадлежит области управляемости  $V$ . В (2.4)  $\Phi(t, t_0)$  — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения  $\dot{x} = A(t)x$ , которая находится из решения матричного дифференциального уравнения  $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$  с начальным условием  $\Phi(t_0, t_0) = I$ , где  $I$  — единичная матрица; \* — знак транспонирования.

Предполагается также, что оптимальное управление  $u^0(t)$  для системы (2.3) вычисляется за время  $T_*$  и алгоритм его задан [13],[14].

Оптимальное управление переводит фазовое состояние системы из любого начального состояния, принадлежащего области управляемости, в требуемое конечное состояние (начало координат) и вычисляется за время  $T_*$  в процессе сопровождения фазовой траектории движения системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u^0(t) + F, \quad x(t_i) \in V, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

т.е. начальные условия измеряются и периодически обновляются через время  $T_* = t_i - t_{i-1}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Оптимальное управление стремится перевести фазовое состояние системы (2.5) в начало координат, а возмущение противодействует этому переводу. В результате фазовое состояние системы (2.5) переводится в некоторое состояние динамического равновесия.

**Задача.** Найти конечное фазовое состояние, в которое переводится фазовое состояние системы (2.5) при одновременном действии неизвестного непрерывного ограниченного возмущения  $F$  и оптимального управления  $u^0(t)$ , которое вычисляется без учета возмущения  $F$  и обновляется через интервал  $T_*$  в процессе движения и сопровождения системы.

**Замечание.** Перевод линейной системы в любое конечное состояние (принимаемое за новое начало координат) преобразованием координат сводится без потери общности к переводу системы из нового начального состояния в начало координат.

### 3. ПЕРЕВОД СИСТЕМЫ В СОСТОЯНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ

Управляемый объект (2.5) за время вычисления  $T_* = t_1 - t_0$  оптимальным управлением  $u^0(t), t \in [t_0, t_1]$ , вычисленным без учета возмущения  $F$ , переводится в некоторое состояние  $x(t_1)$ . Линейная модель системы без возмущения (2.3) переводится в состояние  $x_m(t_1)$ , отличное от  $x(t_1)$ . На рис. 1 приведены фазовые траектории движения объекта и модели: 1 - фазовая траектория движения объекта; 2,3,4,... - фазовые траектории движения модели.

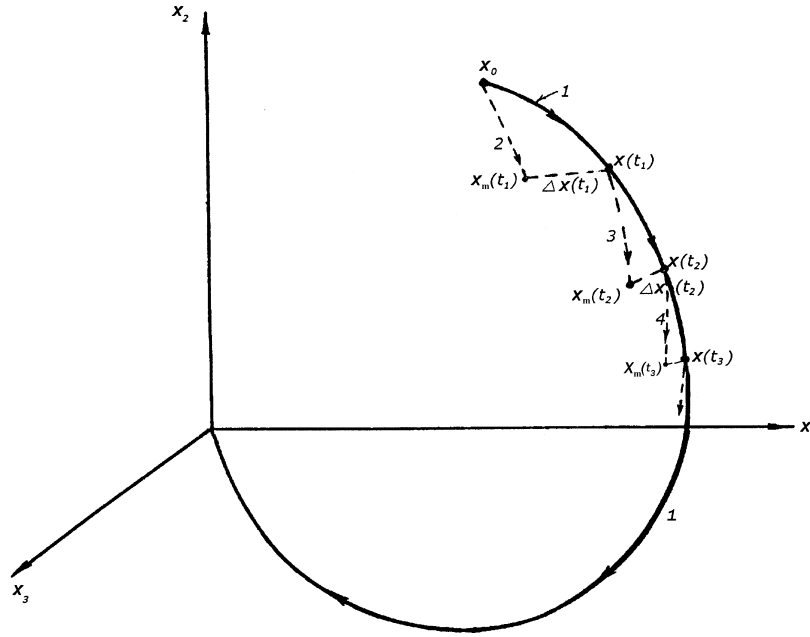


Рис. 1. Фазовые траектории движения объекта и модели

**Теорема.** Фазовая траектория движения линейной системы (2.5) при одновременном действии возмущения  $F$  и оптимального по быстрдействию управления  $u^0(t)$ , вычисляемого за время  $T_*$  для периодически обновляемых через время  $T_*$  значений фазовых координат, приходит в точку динамического равновесия  $x_*$  и совершает незатухающие периодические движения. Фазовая траектория системы выходит из точки динамического равновесия  $x_*$  и возвращается в точку динамического равновесия (устойчивый предельный цикл). Период колебаний равен  $T_*$ . Координаты точки динамического равновесия равны

$$x_* = - \left[ \Phi(t_{i+1}, t_i) - I \right]^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) \left[ B(\tau) u^{(0)}(\tau) + F \right] d\tau$$

**Доказательство.**

Для линейных систем справедлив принцип суперпозиции. Движение системы (2.5) можно рассматривать как суперпозицию движений двух систем

$$\dot{x}^{(1)} = A(t)x^{(1)} + B(t)u^0(t), \quad x^{(1)}(t_i) = x(t_i), \quad (3.1)$$

$$\dot{x}^{(2)} = A(t)x^{(2)} + F, \quad x^{(2)}(t_i) = 0, \quad (3.2)$$

где  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots$ . Фазовое состояние системы (3.1) оптимальным управлением  $u^0(t)$  переводится из начального состояния  $x^{(1)}(t_i) = x(t_i)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  в нулевое конечное состояние  $x^{(1)}(t_k^{(1)}) = 0$  за время  $T^{(i)} = t_k^{(i)} - t_i$ . За время  $T_* = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  система (3.1) переводится в фазовое состояние

$$x^{(1)}(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)x^{(1)}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)B(\tau)u^0(\tau)d\tau, \quad (3.3)$$

а система (3.2) перейдет в состояние

$$x^{(2)}(t_{i+1}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)F d\tau. \quad (3.4)$$

Суммируем (3.3) и (3.4). Получаем

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t_{i+1}) + x^{(2)}(t_{i+1}) &= \Phi(t_{i+1}, t_i)x^{(1)}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)B(\tau)u^0(\tau)d\tau + \\ &+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)F d\tau. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Наличие точки динамического равновесия  $x_*$  означает, что фазовая траектория системы (2.5) в момент  $t = t_i$  выходит из точки  $x_*$ , а в момент  $t = t_{i+1}$  приходит в ту же точку  $x_*$ , т.е. справедливо соотношение

$$x_* = \Phi(t_{i+1}, t_i)x_* + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)B(\tau)u^0(\tau)d\tau + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)F d\tau. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что точка динамического равновесия находится из соотношения

$$x_* = -[\Phi(t_{i+1}, t_i) - I]^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau)[B(\tau)u^0(\tau) + F]d\tau. \quad (3.7)$$

Таким образом, перейдя в точку динамического равновесия фазовая траектория движения линейной системы совершает незатухающие периодические движения (устойчивый предельный цикл). Период колебаний равен времени вычисления  $T_*$  оптимального управления.

**Теорема доказана.**

**Определение 1.** Точкой динамического равновесия  $x_*$  называется точка фазового пространства  $X$ , в которую переходит фазовая траектория движения линейной динамической системы (2.5) при одновременном действии

возмущения  $F$  и оптимального по быстрдействию управления  $u^0(t)$ , вычисляемого периодически с периодом равным  $T_*$  для дискретно обновляемых значений фазовых координат. Если  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  и  $F = \text{const}$ , то имеем стационарную точку динамического равновесия.

Таким образом, оптимальное управление  $u^0(t)$  переводит фазовое состояние системы (3.1) из положения  $x^{(1)}(t_i) = x_*$  в некоторое состояние  $x^{(1)}(t_{i+1})$ , а возмущение  $F$  переводит фазовое состояние системы (3.2) из  $x^{(2)}(t_i) = 0$  в состояние  $x^{(2)}(t_{i+1}) = -[x^{(1)}(t_i) - x_*]$ . В результате фазовая траектория движения системы (2.5) совершает незатухающие периодические движения (устойчивый предельный цикл), период которых равен времени вычисления  $T_*$  оптимального управления.

**Определение 2.** Состоянием динамического равновесия называется циклическая (периодическая) фазовая траектория движения линейной динамической системы (2.5) при одновременном действии возмущения и периодически вычисляемого оптимального по быстрдействию управления  $u^0(t)$ , начинающаяся из точки динамического равновесия  $x_*$  и приходящая через время  $t = T_*$  в точку динамического равновесия. Если  $A(t) = A$ ,  $B(t) = B$  и  $F = \text{const}$ , то точка  $x_*$  является стационарной точкой динамического равновесия, а состояние динамического равновесия является стационарным.

Итак, каково бы не было начальное условие  $x(t_0) = x_0 \in V$  под действием оптимального управления динамическая система движется по многообразиям переключений. Допустим, что изображающая точка принадлежит  $(n-1)$ -мерному многообразию переключений  $\sigma^{(n-1)}$ . Это множество точек пространства  $X$ , из которого переход в начало координат линейной системы при  $F \equiv 0$  достигается за  $(n-1)$  интервалов постоянства оптимального управления.

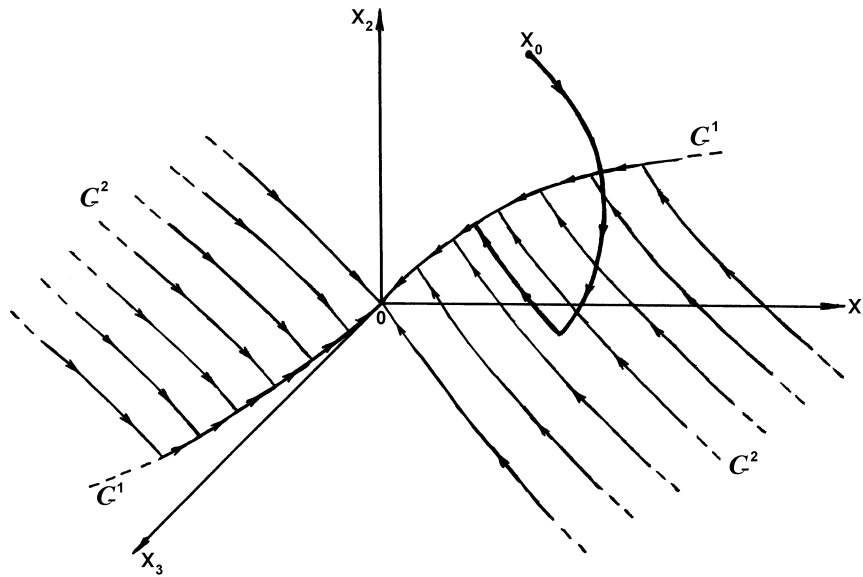


Рис. 2. Фрагмент многообразий переключений и фазовая траектория движения системы

Если  $F \equiv 0$ , то изображающая точка линейной системы попав на многообразии  $\sigma^{(n-1)}$  последовательно движется вначале по  $(n-1)$ -мерному многообразию  $\sigma^{(n-1)}$ , затем достигнув второго момента после переключения управления движется по многообразию  $\sigma^{(n-2)}$  и т.д. и, наконец, по  $\sigma^{(1)}$ . Это линия переключения, достигнув которой управление переключается последний раз и дальнейшее движение по линии переключения в начало координат происходит уже без переключений.

На рис. 2 показан фрагмент многообразий переключений в трехмерном пространстве и фазовая траектория движения системы из точки  $X_0$ .

Последнее многообразие переключений – это линия переключения, по которой изображающая точка переводится в заданное конечное состояние (начало координат). Если  $T_* = 0$ , то точка динамического равновесия  $x_*$  находится на  $(n-1)$ -мерном многообразии  $\sigma^{(n-1)}$  переключений оптимального управления. Если  $T_*$  стремится к нулю, то  $x_*$  стремится к  $(n-1)$ -мерному многообразию переключений  $\sigma^{(n-1)}$ . Так как время вычисления оптимального управления предполагается достаточно малым, то точка динамического равновесия  $x_*$  находится вблизи  $(n-1)$ -мерного многообразия  $\sigma^{(n-1)}$  переключений оптимального управления и может быть вычислена итерационно следующим образом, если **допустить**, что возмущение известно. Допущение позволяет исследовать влияние различных параметров на расположение точки динамического равновесия и форму предельного цикла. Оптимальное управление в режиме реального времени адекватно **синтезу** оптимального управления, если время  $T_*$ , затрачиваемое на вычисление, стремится к нулю. Это предельный случай, который также рассмотрен в работе.

Возьмем в начальный момент времени  $t = t_0$  произвольную точку  $x(t_0) = x^0$ . Для линейной системы  $\dot{x} = A(t)x + B(t)u$ ,  $x(t_0) = x^0$  вычисляем оптимальное по быстродействию управление  $u^0(t)$  [13], переводящее эту систему за минимальное время  $T^0 = t_k - t_0$  из начального состояния  $x(t_0) = x^0$  в начало координат  $x(t_k^0) = 0$ . Находим решение дифференциального уравнения в момент  $t = t_0 + T_*$ :

$$x(t_0 + T_*) = \Phi(t_0 + T_*, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_0 + T_*} \Phi(t_0 + T_*, \tau)B(\tau)u^{(0)}(\tau)d\tau. \quad (3.8)$$

Суммируем (3.8) со слагаемым от действия возмущения  $F$  на интервале  $t \in [t_0, t_0 + T_*]$  и получаем значение  $x^1$

$$x^1 = \Phi(t_0 + T_*, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t_0 + T_*} \Phi(t_0 + T_*, \tau)[B(\tau)u^{(0)}(\tau) + F]d\tau, \quad (3.9)$$

которое принимаем за новое начальное условие. Отклонение нового начального условия ( $x^1$ ) от прежнего начального значения ( $x^0$ ) равно  $\Delta x^0 = (x^1 - x^0)$ :

$$(x^1 - x^0) = [\Phi(t_0 + T_*, t_0) - I]x^0 + \int_{t_0}^{t_0 + T_*} \Phi(t_0 + T_*, \tau)[B(\tau)u^{(0)}(\tau) + F]d\tau. \quad (3.10)$$

Для нового начального условия ( $x^1$ ) вычисляем новое значение оптимального управления  $u^1(t)$ , моменты переключения ( $\nu_j^p$ ) которого и время оптимального процесса уже отличны от моментов переключения и времени оптимального

управления  $u^0(t)$ . Это отличие может быть найдено из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений [13]:

$$\begin{aligned} \Phi(t_k, t_0)(x^1 - x^0) + 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p + \\ + \sum_{j=1}^m B_j(t_k) M_j S_j(r_j) \Delta t_k = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

На следующем шаге принимаем в качестве начальной полученную точку  $x^i$ ,  $i = 2, 3, \dots$  и т.д. В точке динамического равновесия  $(x^{i+1} - x^i) = 0$ . Поэтому итерационный вычислительный процесс заканчивается, когда  $\|x^{i+1} - x^i\| \leq \epsilon$ , где  $0 < \epsilon \ll 1$  и задано.

Конкретное расположение точки динамического равновесия  $x_*$  в фазовом пространстве зависит от величины возмущения  $F$ , его структуры и времени  $T_*$  вычисления оптимального управления  $u^0(t)$ .

#### 4. ПЕРЕВОД СИСТЕМЫ В $\epsilon$ -ОКРЕСТНОСТЬ ЗАДАННОГО КОНЕЧНОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НЕИЗВЕСТНОМ ВОЗМУЩЕНИИ

Выше показано, что если не учитывать возмущение в алгоритме оптимального по быстродействию управления, то система переходит в состояние динамического равновесия. Покажем, что учет возмущения в алгоритме оптимального управления позволяет существенно повысить точность и перевести систему в  $\epsilon$ -окрестность заданного конечного состояния (начала координат).

**Задача.** Для линейной динамической системы (2.1) с неизвестным непрерывным ограниченным возмущением  $F$  найти оптимальное по быстродействию управление  $\hat{u}^0(t)$ , переводящее фазовое состояние системы (2.1) из начального состояния  $x(t_0) = x_0$  в  $\epsilon$ -окрестность начала координат.

**4.1. Вычисление возмущения.** Неизвестное возмущение  $F$ , действующее на систему, может быть вычислено следующим образом. Возмущение вызывает на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  отклонение фазовой траектории на величину

$$\Delta x(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau. \quad (4.1)$$

Для определения возмущения будем измерять в моменты времени  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$  значения фазовых координат объекта (2.1) и модели объекта (2.3) при одинаковых управлениях. Тогда

$$x(t_i) - x_m(t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

Так как  $F$  непрерывная ограниченная функция, то справедливо соотношение

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) F d\tau = \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right] \hat{F}_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.3)$$



где  $\hat{F}_i$  – среднее значение возмущения на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$ . Из (4.2) имеем

$$\hat{F}_i = \left[ \int_{t_{i-1}}^{t_i} \Phi(t_i, \tau) d\tau \right]^{-1} \left[ x(t_i) - x_m(t_i) \right], \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4)$$

**4.2. Формирование оптимального управления с учетом вычисленного возмущения.** Известно оптимальное управление, переводящее систему без возмущения (2.3) за минимальное время  $T = t_k^{(1)} - t_0$  из начального состояния  $x_m(t_0) = x_0$  в начало координат  $x(t_k^{(1)}) = 0$ . Следовательно, известно оптимальное управление, переводящее систему (2.3) из точки  $x_m(t_1)$  в начало координат  $x(t_k^{(1)}) = 0$  за время  $T^{(1)} = t_k^{(1)} - t_1$ . Необходимо найти оптимальное управление, переводящее систему с возмущением (2.5) из другой начальной точки  $x(t_1)$ , отстоящей от  $x_m(t_1)$  на величину  $\Delta x(t_1)$  (Рис. 1). Справедливо уравнение баланса отклонений: отклонение фазовых координат  $\Delta \bar{x}(t_k^{(1)})$  в конечный момент  $t = t_k^{(1)}$ , вызванное действием на систему возмущения и отличием начального условия, должно быть скомпенсировано отклонением фазовых координат  $\Delta \tilde{x}(t_k^{(1)})$ , вызванным отклонениями  $(\Delta \nu_j^p)$  моментов переключений  $(\nu_j^p)$  управления и изменением  $(\Delta t_k^{(1)})$  конечного момента  $(t_k^{(1)})$ :

$$\Delta \bar{x}(t_k^{(1)}) + \Delta \tilde{x}(t_k^{(1)}) = 0. \quad (4.5)$$

Отклонение  $\Delta \bar{x}(t_k^{(1)})$  может быть записано так

$$\Delta \bar{x}(t_k^{(1)}) = \Phi(t_k^{(1)}, t_1) \Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] \hat{F}_1. \quad (4.6)$$

Отклонения моментов переключений управления и конечного момента вызывают следующее отклонение фазовых координат в конечный момент:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x}(t_k^{(1)}) = & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где  $S_j(p) = \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t)$ ,  $t \in [\nu_j^{p-1}, \nu_j^p]$ . Подставим (4.6) и (4.7) в (4.5). Получим уравнение, связывающее отклонения фазовых координат в конечный момент с отклонениями моментов переключений управления и отклонением конечного момента:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \Delta \nu_j^p + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^{(1)} + \\ & + \Phi(t_k^{(1)}, t_1) \Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] \hat{F}_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для нахождения оптимального управления (а не просто допустимого управления) необходимо перейти к определению числа и расположения моментов

переключений  $\nu_j^p$ ,  $j = \overline{1, m}$ ;  $p = \overline{1, r_j - 1}$  с помощью сопряженной системы. Для этого необходимо установить связь между отклонениями моментов переключений управления и отклонениями начальных условий нормированной сопряженной системы. Такая связь была найдена [3]:

$$\Delta \nu_j^p \cong \left\{ [B_j(\nu_j^p)]^* A^*(\nu_j^p) \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) - [\dot{B}_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \hat{\psi}(t_0) \right\}^{-1} \times \\ \times [B_j(\nu_j^p)]^* \hat{\Phi}(\nu_j^p, t_0) \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (4.9)$$

Следует отметить, что, несмотря на кажущуюся сложность, выражение (4.9) имеет простой вид благодаря матрицам размера  $(1 \times n)$  и  $(n \times 1)$ , входящим в (4.9).

Запишем (4.9) в компактном виде

$$\Delta \nu_j^p \cong \mathcal{L} \Delta \hat{\psi}(t_0), \quad j = \overline{1, m}; \quad p = \overline{1, r_j - 1}, \quad (4.10)$$

и подставим в (4.8). Получим систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными, которыми являются  $(n - 1)$  отклонений  $\Delta \hat{\psi}(t_1)$  нормированного вектора начальных условий  $\hat{\psi}(t_1)$  и отклонение  $\Delta t_k^{(1)}$  конечного момента  $t_k^{(1)}$ :

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(1)}, \nu_j^p) B_j(\nu_j^p) M_j S_j(p) \mathcal{L} \Delta \hat{\psi}(t_1) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(1)}) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^{(1)} + \\ + \Phi(t_k^{(1)}, t_1) \Delta x(t_1) + \left[ \int_{t_1}^{t_k^{(1)}} \Phi(t_k^{(1)}, \tau) d\tau \right] \hat{F}_1 = 0. \quad (4.11)$$

Решив (4.11), находим  $\Delta \hat{\psi}(t_1)$  и  $\Delta t_k^{(1)}$ . В результате находим оптимальное по быстродействию управление  $u^0(t)$ , переводящее систему с возмущением (2.1) из точки  $x(t_1)$  в начало координат  $x(t_k^{(1)}) = 0$  за минимальное время  $T^{(1)} = t_k^{(1)} - t_1$ .

Система (2.1) под действием вычисленного к моменту  $t = t_1$  оптимального управления и неизвестного возмущения  $F$  перейдет в точку  $x(t_2)$  (см. рис. 1), а модель системы без возмущения (2.3) перейдет в точку  $x_m(t_2)$ . Требуется найти оптимальное управление, переводящее линейную систему (2.5) из другой начальной точки  $[x_m(t_2) + \Delta x(t_2)]$  с другим возмущением  $F_2$  в начало координат  $x(t_k^{(2)}) = 0$ . Важно подчеркнуть, что если на интервале  $t \in [t_1, t_2]$  возмущение  $F$  не изменяется, то  $\Delta x(t_2) = 0$ ,  $(F_2 - F_1) = 0$  и вычисленное оптимальное управление переводит систему (2.5) из точки  $x(t_2)$  в начало координат  $x(t_k^{(2)}) = 0$  за минимальное время  $T^{(2)} = t_k^{(2)} - t_2$ .

В результате для вычисления оптимального управления в процессе сопряжения фазовой траектории движения управляемой системы (2.5) имеем следующую систему из  $n$  линейных алгебраических уравнений с  $n$  неизвестными:

$$2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_k^{(i)}, \nu_j^p(t_i)) B_j(\nu_j^p(t_i)) M_j S_j(p) \mathcal{L} \Delta \hat{\psi}(t_i) + \sum_{j=1}^m B_j(t_k^{(i)}) M_j S_j(r_j) \Delta t_k^{(i)} +$$

$$+\Phi(t_k^{(i)}, t_i)\Delta x(t_i) + \left[ \int_{t_i}^{t_k^{(i)}} \Phi(t_k^{(i)}, \tau) d\tau \right] (\hat{F}_i - \hat{F}_{i-1}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.12)$$

где  $F_0 = 0$ .

Измеряя в моменты времени  $t = t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , отклонения фазовых траекторий движения систем с возмущением и без возмущения, вычисляем среднее значение возмущения на интервале  $[t_{i-1}, t_i]$ . Оно используется для вычисления оптимального управления возмущенной системой на следующем интервале  $[t_i, t_{i+1}]$ , т.е. имеем запаздывание в определении возмущения на величину  $\Delta \hat{F}_i = \hat{F}_{i+1} - \hat{F}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Следовательно, имеем погрешность в определении действующего на систему возмущения на величину  $\Delta \hat{F}_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ . А это приводит к переводу возмущенной системы лишь в  $\epsilon$ -окрестность заданного конечного состояния (начала координат). Величина  $\epsilon$ -окрестности согласно (3.7) определяется теперь выражением

$$x_* = - \left[ \Phi(t_{i+1}, t_i) - I \right]^{-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Phi(t_{i+1}, \tau) \left[ B(\tau)u^{(0)}(\tau) + \Delta \hat{F}_i \right] d\tau. \quad (4.13)$$

Таким образом, вычисление и учет возмущения в алгоритме управления позволяет повысить точность перевода системы в заданное конечное состояние. Дальнейшее повышение точности достигается экстраполяцией возмущения, т.е. уменьшением величины  $\Delta \hat{F}_i$ .

**Замечание 1.** Если  $F = \text{const}$ , то  $F_2 - F_1 = 0$ ,  $\Delta x(t_2) = 0$  и, следовательно,  $\Delta \hat{\psi}(t_2) = 0$  и  $\Delta t_k^{(2)} = 0$ . В процессе сопровождения нет необходимости, так как оптимальное управление вычислено на предыдущем этапе и в дальнейшем остается неизменным.

**Замечание 2.** Если  $F = F(x)$ , что характерно для нелинейных систем, и  $F(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , то достигим перевод системы в начало координат.

**Замечание 3.** Если  $F = \text{var}$ , то в процессе сопровождения фазовой траектории движения объекта вычисляется возмущение, измеряются отклонения и корректируются моменты переключений оптимального управления и конечный момент. Фазовое состояние объекта может быть переведено лишь в окрестность начала координат. Погрешность перевода при малых значениях  $T_*$  приближенно равна  $\Delta x \cong \Delta F T_*$ , где  $\Delta F$  – изменение возмущения  $F$  за время  $T_*$  вычисления оптимального управления. Погрешность перевода может быть уменьшена, если экстраполировать возмущение.

Так, например, при линейной экстраполяции возмущения имеем

$$\hat{F}_{i+1} = \hat{F}_i + \Delta \hat{F}_{i-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_i - t_{i-1}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.14)$$

что позволяет уменьшить величину  $\epsilon$ -окрестности при переводе системы в заданное конечное состояние.

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

Проиллюстрируем изложенный метод нахождения стационарной точки динамического равновесия для систем второго и четвертого порядка. Рассмотрим

систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + F, & |F| &\leq F^*, \\ \dot{x}_2 &= bu, & |u| &\leq M. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Фазовая траектория движения системы (5.1) при действии только одного возмущения  $F$  за время  $T_*$  приходит в точку  $x(T_*) = (FT_*, 0)$ . Время оптимального по быстрдействию перевода фазового состояния системы (5.1) (при  $F \equiv 0$ ) из этого состояния в нулевое конечное  $x(T_{opt}) = 0$  равно

$$T_{opt} = 2\sqrt{\frac{|F|T_*}{|b|M}}. \quad (5.2)$$

Из (5.2) следует, что существует такое граничное  $T_* = T_r$ , где  $T_r = 4\frac{|F|}{|b|M}$ , для которого  $T_* = T_{opt}$ . Если  $T_* \geq T_r$ , то стационарная точка динамического равновесия находится на оси  $x_1$ , которая является траекторией возмущенного движения, и имеет координаты  $x_* = (FT_*, 0)$ . Если  $T_* < T_r$ , то стационарная точка динамического равновесия не принадлежит оси  $x_1$ , а приближается к линии переключения  $|x_1| - \frac{x_2^2}{2|bM|} = 0$ .

На рис. 3 показаны предельные циклы для различных  $T_*$  при  $F = 3$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ . Граничное значение  $T_r = 0.6$ . Стационарная точка динамического равновесия для  $T_* = 0.6$  находится на оси  $x_1$  и имеет координаты  $x_*^3 = (1.8; 0)$ .

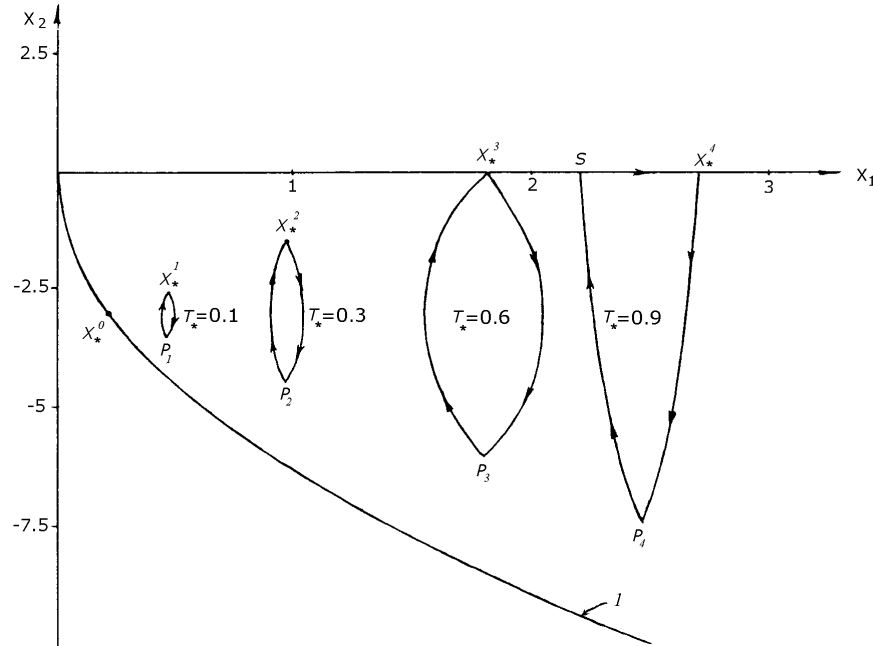


Рис. 3. Предельные циклы для системы второго порядка

Показаны предельные циклы и стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  для  $T_* = 0.1$ ;  $x_*^2$  для  $T_* = 0.3$ ;  $x_*^3$  для  $T_* = 0.6$ ;  $x_*^4$  для  $T_* = 0.9$ . Отрезок  $Sx_*^4$  — часть фазовой траектории предельного цикла, на которой  $u(t) \equiv 0$ . Траектория возмущенного движения совпадает с осью  $x_1$ , а отрезок  $Sx_*^4$  —

часть траектории возмущенного движения.  $P_1, P_2, P_3, P_4$  – точки переключения управления на соответствующих предельных циклах;  $x_*^o = (0.225; -3)$  – предельная стационарная точка динамического равновесия при  $T_* = 0$ . В предельном случае при  $T_* = 0$  стационарная точка динамического равновесия находится из условия  $\dot{x} = 0$  и удовлетворяет уравнению  $A(t)x_* + B(t)u^0 + F = 0$ . Управление  $u^0$  переключается через бесконечно малые времена (скользящий режим), а средняя величина может принимать любое необходимое значение из интервала  $[-M \leq u^0 \leq +M]$ . Точка динамического равновесия лежит на линии переключения (т.е. на многообразии  $\sigma^{(n-1)}$ , где  $n = 2$ ) и имеет координаты  $x_*^o = (\frac{F|F|}{2|b|M}, -F)$ . Следует отметить, что при  $T_* \rightarrow 0$  частота переключений оптимального управления, принимающего предельные значения  $\pm M$ , стремится к бесконечности.

Рассмотрим предельные циклы при другой структуре возмущения для той же системы второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= bu + F, \quad |u| \leq M, \quad |F| \leq F^*. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Под действием только одного постоянного возмущения (при  $u(t) \equiv 0$ ) за время  $t = T_*$  фазовая траектория системы (5.3) приходит в точку  $x(T_*) = (\frac{1}{2}FT_*^2; FT_*)$ . Время оптимального по быстродействию перевода фазовой траектории движения системы (5.3) (при  $F \equiv 0$ ) из этой точки  $x(T_*)$  в начало координат  $x(T_{opt}) = 0$  равно

$$T_{opt} = T_* \left\{ \left| \frac{F}{bM} \right| + \left[ 2 \left| \frac{F}{bM} \right| \left( 1 + \left| \frac{F}{bM} \right| \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (5.4)$$

Из (5.4) непосредственно следует, что возможен или нет перевод фазового состояния системы в нулевое конечное состояние за время, не превышающее  $T_*$ , не зависит от самого значения  $T_*$ . Если  $\left| \frac{F}{bM} \right| \leq \sqrt{5} - 2$ , то  $T_{opt} \leq T_*$ . Если  $1 \geq \left| \frac{F}{bM} \right| > \sqrt{5} - 2$ , то  $T_{opt} \geq T_*$ . Существует также предельно допустимое возмущение  $F^*$  при  $\left| \frac{F}{bM} \right| = 1$ . В этом случае предельный цикл вырождается в точку на оси  $x_1$  с координатами  $x_*^o = (T_*^2 F^* \text{sign} F; 0)$ .

На рис. 4 приведены фазовые траектории движения (предельные циклы) и стационарные точки динамического равновесия системы (5.3) при  $F = 3$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ .

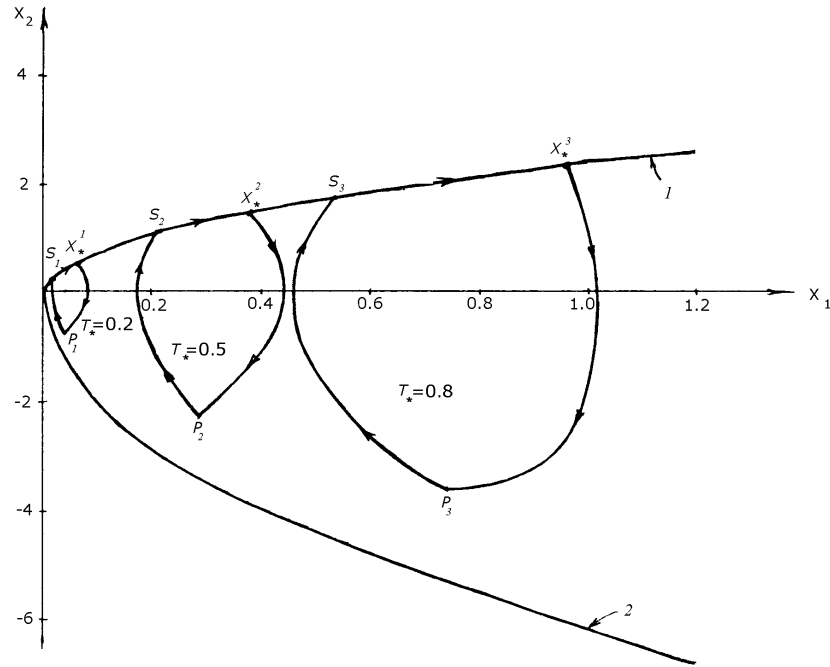


Рис. 4. Фазовые траектории движения и стационарные точки динамического равновесия

В этом случае  $\frac{F}{bM} = 0,15$  и, следовательно,  $T_{opt} < T_*$ . Стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  (при  $T_* = 0,2$ ),  $x_*^2$  (при  $T_* = 0,5$ ) и  $x_*^3$  (при  $T_* = 0,8$ ) лежат на траектории возмущенного движения (кривая 1) и имеют координаты  $x_* = (\frac{1}{2}FT_*^2; FT_*)$ . На рис. 4  $S_1x_*^1$ ,  $S_2x_*^2$ ,  $S_3x_*^3$  — отрезки фазовых траекторий предельных циклов (принадлежащих траектории возмущенного движения), на которых  $u(t) \equiv 0$ ;  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки переключения управления с  $u = -M$  на  $u = +M$  на предельных циклах. Кривая 2 — линия переключения управления.

На рис. 5 приведены предельные циклы для различных значений времени вычисления  $T_*$  при  $F = 5$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ . В этом случае  $\frac{F}{bM} = 0,25$  и, следовательно,  $T_{opt} > T_*$ . Стационарные точки динамического равновесия  $x_*^1$  (при  $T_* = 0,1$ ),  $x_*^2$  (при  $T_* = 0,3$ ),  $x_*^3$  (при  $T_* = 0,5$ ) уже не лежат на траектории возмущенного движения (кривая 1);  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — точки переключения управления. Кривая 2 — линия переключения управления.

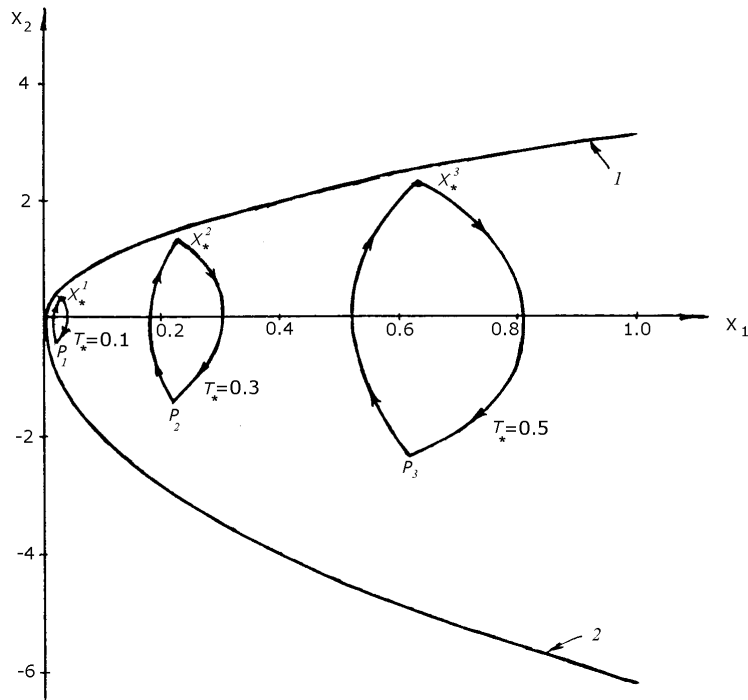


Рис. 5. Предельные циклы для различных значений времени вычисления оптимального управления

Для системы четвертого порядка

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= x_3, \\
 \dot{x}_3 &= x_4 + F, \\
 \dot{x}_4 &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + bu, \quad |u| \leq M,
 \end{aligned}
 \tag{5.5}$$

в табл.1 приведены значения фазовых координат предельного цикла для  $T_* = 0.3$  и  $F = 3$ .

Т а б л и ц а 1.

$t$	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$	$x_4(t)$	$u(t)$
0,00	0,2016200	-0,0018698	-0,0217082	-1,7603975	-5
0,03	0,2015592	-0,0020269	0,0091553	-2,1759362	-5
0,06	0,2015058	-0,0014397	0,0280935	-2,5556779	-5
0,09	0,2014769	-0,0004500	0,0361575	-2,9011340	-5
0,12	0,2014797	0,0006310	0,0343533	-3,2138018	-5
0,15	0,2015128	0,0015220	0,0236424	-3,4951618	-5
0,18	0,2015666	0,0019697	0,0049421	-3,7466756	-5
0,21	0,2016243	0,0017474	-0,0208739	-3,9697834	-5
0,24	0,2016629	0,0006926	-0,0466350	-3,4682019	+5
0,27	0,2016616	-0,0007788	-0,0469749	-2,5696826	+5
0,30	0,2016200	-0,0018698	-0,0217082	-1,7603975	+5

Приняты следующие численные значения параметров:  $a_{41} = -2.9684$ ;  $a_{42} = -5.84$ ;  $a_{43} = -6.33$ ;  $a_{44} = -3.4$ ;  $b = 4$ ;  $M = 5$ , при которых система (5.3) имеет

комплексно-сопряженные собственные значения матрицы  $A$ :  $\alpha_{1,2} = -0,784 \pm j0.986$ ;  $\alpha_{3,4} = -0,916 \pm j1.016$ . В момент  $t = 0,22201$  происходит переключение управления.

В табл.2 приведены координаты  $x_{i*}$ ,  $i = \overline{1,4}$  стационарных точек динамического равновесия для ряда значений  $F$  и  $T_*$

Т а б л и ц а 2.

$F$	$T_*$	$x_{1*}$	$x_{2*}$	$x_{3*}$	$x_{4*}$
1	0	0	0	0	-1
	0.1	0.0031306	-0.0000994	-0.0010359	-0.5102221
	0.3	0.0255793	-0.0027348	-0.0029272	0.4857461
	0.5	0.0763609	-0.0612952	0.1272822	2.8705691
3	0	0	0	0	-3
	0.1	0.0440349	-0.0000603	-0.0029305	-2.6164007
	0.3	0.2016200	-0.0018698	-0.0217082	-1.7603975
	0.5	0.4438678	-0.0098097	-0.0432418	-0.7860957
5	0	0	0	0	-5
	0.1	0.1586488	-0.0000121	-0.0021418	-4.8341573
	0.3	0.5645831	-0.0006333	-0.0218558	-4.3025557
	0.5	1.0900176	-0.0049910	-0.0609266	-3.4477394

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Фазовое состояние линейной динамической системы при одновременном действии неизвестного возмущения и оптимального по быстродействию управления, вычисляемого в процессе сопровождения фазовой траектории движения системы, переходит в состояние динамического равновесия. Если система автономна и возмущение постоянно, то фазовое состояние системы переводится в стационарное состояние динамического равновесия. Это состояние характеризуется тем, что фазовая траектория движения системы приходит в стационарную точку динамического равновесия и из этой точки совершает незатухающие периодические движения (устойчивый предельный цикл). Период колебаний равен времени, затрачиваемому на вычисление оптимального управления. Если возмущение переменное или система неавтономна, то фазовое состояние системы переходит в нестационарное состояние динамического равновесия, которое имеет подвижную (нестационарную) точку динамического равновесия. Расположение точки динамического равновесия в фазовом пространстве и форма предельного цикла зависят от структуры и величины возмущения, времени вычисления оптимального управления и параметров управляемой системы. Если время вычисления оптимального управления стремится к нулю, то предельный цикл стягивается в точку. При действии неизвестного возмущения точка динамического равновесия характеризует достижимую точность перевода системы. Вычисление величины неизвестного возмущения в процессе движения и его учет в алгоритме оптимального управления позволяют в случае постоянного возмущения перевести фазовое состояние системы в начало координат, а в случае переменного возмущения уменьшить величину отклонения от начала



координат. Экстраполяция возмущения приводит к увеличению точности перевода. Приведенный метод позволяет оценить достижимую точность перевода системы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Наука, 1976.
- [2] Болтянский В.Г. *Математические методы оптимального управления*. М.: Наука, 1969. MR0353082
- [3] Александров В.М. *Последовательный синтез оптимального управления* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 9. С. 1464–1478. Zbl 0974.49017
- [4] Александров В.М. *Сходимость метода последовательного синтеза оптимального управления* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1999. Т. 39, № 10. С. 1650–1661. Zbl 0974.49018
- [5] Нэш Д. *Бескоалиционные игры* // В сб.: Матричные игры / под редакцией Н.Н.Воробьева. М.: Физматгиз, 1961.
- [6] Белолипецкий А.А. *Численный метод решения линейной задачи оптимального управления сведением ее к задаче Коши* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1977. Т. 17, № 6. С. 1380–1386.
- [7] Киселев Ю.Н. *Быстросходящиеся алгоритмы для линейного оптимального быстрого действия* // Кибернетика. 1990. Т. 62, № 6. С. 47–57. MR1099300
- [8] Балашевич Н.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Численные методы программной и позиционной оптимизации линейных систем управления* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2000. Т. 40, № 6. С. 838–859. MR1804426
- [9] Габасов Р., Кириллова Ф.М. *Оптимальное управление в режиме реального времени* // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 г.). Пленарные доклады. М.: ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН. 2003. С. 20–47.
- [10] Федоренко Р.П. *Приближенное решение задач оптимального управления*. М.: Наука, 1978. MR0545338
- [11] Срочко В.А. *Итерационные методы решения задач оптимального управления*. М.: Физматлит, 2000.
- [12] Hartl R.E., Sethi S.P., Vickson R.G. *A survey of the maximum principle for optimal control problems with state constraints* // SIAM Review. 1995. V. 37. P. 181–218. MR1343211
- [13] Александров В.М. *Итерационный метод вычисления в реальном времени оптимального по быстрдействию управления* // Сибирский журнал вычислительной математики. 2007. Т. 10, № 1. С. 1–28. Zbl 1212.49046
- [14] Александров В.М. *Построение аппроксимирующей конструкции для вычисления и реализации оптимального по быстрдействию управления в реальном времени* // Сибирский журнал вычислительной математики. 2012. Т. 15, № 1. С. 1–19.

Владимир Михайлович Александров  
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,  
пр. академика Коптюга 4,  
630090, Новосибирск, Россия  
E-mail address: vladalex@math.nsc.ru