S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 346–359 (2012) УДК 519.1
MSC 68R05

АНТИМОНОТОННЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ

М.А. МАКАРОВ

Abstract. The paper is devoted to a class of infinite permutations. One of the properties of these permutations is their avoiding monotone subsequences of elements with numbers forming an arithmetical progression of length 3. We find the complexity of these permutations, their Rauzy graphs, their maximal pattern complexity, their arithmetical complexity with odd differences, and also we find the lower and upper bounds for their arithmetical complexity and show that these bounds are attained.

Keywords: infinite permutations, combinatorics on words, Rauzy graphs, maximal pattern complexity, arithmetical complexity.

1. Введение

Бесконечные перестановки (в нашем смысле) были введены в 2005 году в [7], [8], и далее изучались в статьях [26], [27], [16], [17], [3], [13]. Краткий обзор результатов и направлений исследования по бесконечным перестановкам дан в [10].

Однако некоторые проблемы, связанные с бесконечными перестановками, исследовались и ранее. В частности, в статье [6] 1977 года рассматривалось избегание длинных монотонных арифметических паттернов. Комбинаторные свойства одного из классов бесконечных перестановок, возникших в [6], мы и исследуем в настоящей статье.

Под *бесконечной перестановкой* π мы понимаем линейный порядок $\preceq_\pi$ на некотором счётном множестве X (обычно на множестве целых неотрицательных чисел $\mathbb{N} \cup \{0\}$) по отношению к «обычному» линейному порядку $\leq$ на X. Более точно, каждая бесконечная перестановка — это упорядоченная тройка

Makarov, M.A., Antimonotone permutations.

Поступила 26 мая 2012 г., опубликована 30 июля 2012 г.

$\pi = (X, \leq, \preceq_\pi)$, где $\leq$ и $\preceq_\pi$ — линейные порядки на X. Вместо записи $x \preceq_\pi y$ для $x, y \in X$ мы используем более удобную запись $\pi(x) \leq \pi(y)$.

Нетрудно понять, что любую биекцию $p\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ можно мыслить как линейный порядок на $\{1, \dots, n\}$ и наоборот. Тем самым, классическое определение конечных перестановок как биекций эквивалентно нашему определению через линейные порядки. Этим, в частности, оправдывается такое название. Конечная перестановка π, соотвествующая биекции $p\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$, в алгебре часто записывается в виде

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ p(1) & p(2) & \dots & p(n) \end{pmatrix},$$

мы же будем записывать лишь нижнюю строку: $\pi = p(1)p(2)\dots p(n)$. При этом число n мы будем называть *длиной* перестановки π. Множество всех конечных перестановок длины n обозначаем через $\mathcal{S}_n$.

Отметим, что в отличие от конечного случая, для бесконечного множества X наше определение бесконечной перестановки через пару линейных порядков на X вовсе не эквивалентно существованию соответствующей биекции X на себя.

Для каждой перестановки π (конечной или бесконечной) и $x, y \in X$, $x \neq y$, определим символ $\gamma_\pi(x, y) \in (0, 1)$ (или просто $\gamma(x, y)$, если ясно, о какой перестановке идёт речь) следующим образом:

$$\gamma_\pi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \pi(x) < \pi(y), \\ 1, & \text{если } \pi(x) > \pi(y). \end{cases}$$

Ясно, что перестановка π полностью определяется символами $\gamma_\pi(x, y)$. В частности, если π_1 и π_2 — перестановки на одном и том же носителе X, то $\pi_1 = \pi_2$ тогда и только тогда, когда $\gamma_{\pi_1}(x, y) = \gamma_{\pi_2}(x, y)$ при всех $x, y \in X$, $x \neq y$.

Пример 1. Для конечная перестановки $\pi = 2431$ длины 4 имеем $\gamma_\pi(1, 2) = 0$, $\gamma_\pi(2, 3) = 1$, $\gamma_\pi(3, 4) = 1$, $\gamma_\pi(1, 3) = 0$, $\gamma_\pi(2, 4) = 1$, $\gamma_\pi(1, 4) = 1$.

Линейные порядки на X индуцируют линейные порядки на подмножествах X, следовательно естественным образом можно определить понятие подперестановки. Дадим формальное определение. Для перестановки $\pi = (X, \leq, \preceq_\pi)$ (конечной или бесконечной) и конечного набора $y_1, \dots, y_n \in X$, где $y_1 < \dots < y_n$, обозначим через $\pi\{y_1, \dots, y_n\}$ перестановку на $\{1, \dots, n\}$, определённую равенством $\gamma_{\pi\{y_1, \dots, y_n\}}(i, j) = \gamma_\pi(y_i, y_j)$ при $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$. Особенно интересен случай, когда $y_1, \dots, y_n$ — последовательные целые числа (и соответственно когда $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ или $X = \{1, \dots, n\}$). Итак, пусть заданы числа m_1 и m_2, причём $m_1 < m_2$. Тогда перестановку $\pi\{m_1, m_1 + 1, \dots, m_2\}$ будем обозначать через $\pi[m_1, m_2]$. Иными словами, $\pi[m_1, m_2]$ — это такая перестановка длины $m_2 - m_1 + 1$, что при $1 \leq i \leq m_2 - m_1 + 1$ и $1 \leq j \leq m_2 - m_1 + 1$ выполнено $\gamma_{\pi[m_1, m_2]}(i, j) = \gamma_\pi(m_1 + i - 1, m_1 + j - 1)$. Будем говорить, что конечная перестановка $\xi \in \mathcal{S}_n$ является подперестановкой конечной или бесконечной перестановки π, если $\xi = \pi[m_1, m_2]$ для некоторых m_1 и m_2.

Пример 2. Перестановка 321 является подперестановкой перестановки $\pi = 2431$, так как $\pi[2, 4] = 321$.

Будем пользоваться аналогичным обозначением для символьных последовательностей: запись $w[m_1, m_2]$ будет означать подслово $w(m_1)w(m_1{+}1)\dots w(m_2)$ слова w.

Через λ будем обозначать пустое слово.

Пусть задана бесконечная перестановка π. Множество различных её подперестановок будем обозначать через F_π. Кроме того, для фиксированной длины n обозначим через $F_\pi(n)$ множество подперестановок π длины n, а их количество обозначим через $f_\pi(n)$ (т.е. $f_\pi(n) = |F_\pi \cap \mathcal{S}_n|$). Последовательность $\{f_\pi(n)\}_{n=2}^{\infty}$ называется *комбинаторной сложностью* бесконечной перестановки π. Легко видеть, что $f_\pi(n) \le |\mathcal{S}_n| = n!$.

Помимо комбинаторной сложности, при исследовании структуры конечных подслов бесконечного слова иногда бывает удобно рассматривать последовательность графов *графами Рози* [25], [4]. Можно ввести аналог графов Рози для бесконечных перестановок. Для бесконечной перестановки π и $n \ge 2$ обозначим через $G_\pi(n)$ ориентированный мультиграф, в котором $f_\pi(n)$ вершин, помеченных подперестановками π длины n, и $f_\pi(n+1)$ дуг, помеченных подперестановками π длины $n+1$. Каждой $\eta \in F_\pi(n+1)$ соответствует дуга, помеченная η и ведущая из вершины, помеченной $\eta[1, n]$ в вершину, помеченную $\eta[2, n+1]$. Граф $G_\pi(n)$ будем называть *графом Рози* перестановки π порядка n.

В отличии от графов Рози для слов, графы Рози для перестановок могут иметь параллельные дуги. Например, вершины, помеченные перестановками 312 и 123, могут быть соединены двумя параллельными дугами, помеченными перестановками 4123 и 3124. Однако, нетрудно показать, что для каждой пары вершин (v_1, v_2) количество дуг, ведущих из v_1 в v_2, меньше либо равно 2.

Помимо комбинаторной сложности и графов Рози, мы исследуем также максимальную шаблонную сложность и арифметическую сложность. Определения даны в соответствующих разделах.

2. Определения

Ниже будет формально описана конструкция, дающая континуальное семейство бесконечных перестановок. Идея этой конструкции состоит в следующем. При определении антимонотонной перестановки $(\mathbb{N} \cup \{0\}, \le, \preceq)$ будем мыслить себе, что на первом шаге все целые неотрицательные числа делятся на два множества по чётности. Договоримся, что наше отношение линейного порядка $\preceq$ между числами из разных множеств не зависит от выбора этих чисел, т.е. $\gamma(x, y) = \gamma(x', y')$ при любых чётных x и x' и нечётных y и y'. Т.е. либо все чётные числа больше (по линейному порядку $\preceq$) всех нечётных, либо наоборот — все нечётные числа больше всех чётных. Выберем какой-то из этих двух вариантов. На следующем шаге каждое из множеств аналогично разделим ещё на два и договоримся, что отношение линейного порядка $\preceq$ между числами из разных множеств зависит только от этих множеств, но не от выбранных элементов. И так далее. В конечном счёте, каждые два числа рано или поздно окажутся в разных множествах, и потому отношение между ними будет определено. Бесконечную перестановку, соответствующую построенному таким образом линейному порядку $\preceq$, будем называть *антимонотонной*.

Перейдём к формальному определению.

Для целого неотрицательного числа x будем обозначать через $(x)_2$ бесконечное слово над алфавитом $\{0,1\}$, соответствующее двоичному разложению числа x, записанному в обратном порядке. Другими словами, $x = \sum_{k=0}^{\infty}(x)_2(k)\cdot 2^k$, где $(x)_2(k)\in\{0,1\}$ — цифры двоичного разложения (причём понятно, что $(x)_2(k)=0$ для $k>\log_2 x$).

Пусть задана произвольная функция $t\colon \{0,1\}^*\to\{0,1\}$. По ней определим перестановку π_t на $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Зафиксируем произвольные целые неотрицательные x и y, $x\neq y$. Поскольку $x\neq y$, то существует такое p, что $(x)_2[0,p-1] = (y)_2[0,p-1]$ и $(x)_2(p)\neq(y)_2(p)$. Положим

$$\gamma_{\pi_t}(x,y) = (x)_2(p)\oplus t((x)_2[0,p-1]),$$

где $\oplus$ означает сложение по модулю 2. (Подразумевается, что при $p=0$ под t стоит пустое слово λ.)

Пример 3. Для $x=6$, $y=14$ имеем $(x)_2[0,2]=(y)_2[0,2]=011$, $(x)_2(3)=0\neq(y)_2(3)=1$. Если $t(011)=0$, то $\pi_t(6)<\pi_t(14)$. Если же $t(011)=1$, то $\pi_t(6)>\pi_t(14)$.

Покажем, что такое определение $\gamma_{\pi_t}(x,y)$ корректно задаёт перестановку π_t. Имеем $\gamma_{\pi_t}(x,y)\neq\gamma_{\pi_t}(y,x)$, потому что для p такого, что $(x)_2[0,p-1] = (x)_2[0,p-1]$ и $(x)_2(p)\neq(y)_2(p)$, имеем $(x)_2(p)\oplus t((x)_2[0,p-1]) = (x)_2(p)\oplus t((y)_2[0,p-1])\neq(y)_2(p)\oplus t((y)_2[0,p-1])$. Остаётся проверить транзитивность. Пусть $\pi_t(x)<\pi_t(y)$ и $\pi_t(y)<\pi_t(z)$. Покажем, что тогда $\pi_t(x)<\pi_t(z)$. Пусть $(x)_2[0,p-1]=(y)_2[0,p-1]$, $(x)_2(p)\neq(y)_2(p)$; $(y)_2[0,q-1]=(z)_2[0,q-1]$, $(y)_2(q)\neq(z)_2(q)$. Если допустить, что $p=q$, то $0=\gamma_{\pi_t}(x,y)=(x)_2(p)\oplus t((x)_2[0,p-1]) = (x)_2(p)\oplus t((y)_2[0,p-1])\neq(y)_2(p)\oplus t((y)_2[0,p-1]) = (y)_q\oplus t((y)_2[0,q-1])=\gamma_{\pi_t}(y,z)=0$, противоречие. Следовательно, $p\neq q$. Если $p<q$, то имеем $(x)_2[0,p-1]=(y)_2[0,p-1]=(z)_2[0,p-1]$, $(x)_2(p)\neq(y)_2(p)=(z)_2(p)$, откуда $\gamma_{\pi_t}(x,z)=(x)_2(p)\oplus t((x)_2[0,p-1])=\gamma_{\pi_t}(x,y)=0$, т.е. $\pi_t(x)<\pi_t(z)$, что и требовалось. Если же $p>q$, то имеем $(x)_2[0,q-1]=(y)_2[0,q-1]=(z)_2[0,q-1]$, $(x)_2(q)=(y)_2(q)\neq(z)_2(q)$, откуда $\gamma_{\pi_t}(x,z)=(x)_2(q)\oplus t((x)_2[0,q-1])=(y)_2(q)\oplus t((y)_2[0,q-1])=\gamma_{\pi}(y,z)=0$, т.е. $\pi_t(x)<\pi_t(z)$, что и требовалось. Таким образом, наше определение действительно корректно задаёт перестановку.

Определение. Перестановку π будем называть *антимонотонной*, если существует такая функция t, что $\pi=\pi_t$.

Разумеется, антимонотонными перестановками не исчерпывается всё множество бесконечных перестановок на $\mathbb{N}\cup\{0\}$. Нижеследующая лемма показывает, какого рода запреты имеют место для класса антимонотонных перестановок.

Лемма 1 (см. статью [6])**.** *Если числа x, y, z образуют нетривиальную (с ненулевой разностью) арифметическую прогрессию длины* 3, *то $\gamma_{\pi_t}(x,y)\neq\gamma_{\pi_t}(y,z)$.*

Доказательство. Пусть $(x)_2[0,p-1]=(y)_2[0,p-1]$, $(x)_2(p)\neq(y)_2(p)$. Пусть также $(y)_2[0,q-1]=(z)_2[0,q-1]$, $(y)_2(q)\neq(z)_2(q)$. Число $y-x$ делится на 2^p и не делится на 2^{p+1}, а число $z-y$ делится на 2^q и не делится на 2^{q+1}. Поскольку числа x, y, z образуют арифметическую прогрессию, то $y-x=z-y$. Из этого вытекает, что $p=q$. Теперь имеем $\gamma_{\pi_t}(x,y)=(x)_2(p)\oplus t((x)_2[0,p-1])=(x)_2(p)\oplus t((y)_2[0,p-1])=(x)_2(q)\oplus t((y)_2[0,q-1])\neq(y)_2(q)\oplus t((y)_2[0,q-1])=\gamma_{\pi_t}(y,z)$, что и требовалось. $\square$

Свойство, утверждаемое в лемме 1, означает, что три числа x, y, z, образующие нетривиальную арифметическую прогрессию, не могут быть упорядочены в перестановке монотонно, т.е. не может быть $\pi_t(x) < \pi_t(y) < \pi_t(z)$ и не может быть $\pi_t(x) > \pi_t(y) > \pi_t(z)$ (этим можно оправдать название «антимонотонные»). Это свойство рассматривалось в статье [6]. На самом деле, это свойство является характеризационным для класса антимонотонных перестановок. Т.е. можно доказать, что для всякой бесконечной перестановки π, обладающей указанным свойством, существует такая функция t, что $\pi = \pi_t$. См. статью [6].

3. Комбинаторная сложность и графы Рози

Теорема 1. *Комбинаторная сложность антимонотонной перестановки π_t не зависит от t и равна*

$$f_{\pi_t}(n) = 2^{\lceil \log_2 n \rceil}.$$

Больше того, последовательность графов Рози $G_{\pi_t}(n)$ также не зависит от t и имеет следующий вид. Если n не является степенью двойки, то $G_\pi(n)$ — цикл длины $2^{\lceil \log_2 n \rceil}$. Если же $n = 2^h$, то $G_\pi(n)$ — цикл длины 2^h, в котором каждые две последовательные вершины соединены двумя параллельными дугами.

Доказательство. Пусть $2^{h-1} < n \le 2^h$. Докажем, что $f_{\pi_t}(n) = 2^h$.

Пусть $|x - y| < 2^h$. Тогда существует такое $p < h$, что $(x)_2(p) \ne (y)_2(p)$ и $(x)_2[0, p-1] = (y)_2[0, p-1]$. Кроме того, $(x + 2^h)_2[0, h-1] = (x)_2[0, h-1]$ и $(y+2^h)_2[0, h-1] = (y)_2[0, h-1]$. Следовательно, $\gamma_{\pi_t}(x, y) = (x)_2(p) \oplus t((x)_2[0, p-1]) = (x + 2^h)_2(p) \oplus t((x + 2^h)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_t}(x + 2^h, y + 2^h)$.

Из этого вытекает, что $\pi_t[m+1, m+n] = \pi_t[m + 2^h + 1, m + 2^h + n]$ при любом m. И, больше того, имеем $\pi_t[m+1, m+n] = \pi_t[m + q \cdot 2^h + 1, m + q \cdot 2^h + n]$ при любых m и q. А поскольку любое $m \in \mathbb{Z}$ можно представить в виде $m = m' + q \cdot 2^h$, где $0 \le m' \le 2^h - 1$, (деление с остатком на 2^h), то имеем $\pi_t[m+1, m+n] = \pi_t[m' + q \cdot 2^h + 1, m' + q \cdot 2^h + n] = \pi_t[m' + 1, m' + n]$. Таким образом, каждая подперестановка длины n перестановки π_t равна одной из 2^h перестановок $\pi_t[1, n]$, $\pi_t[2, n+1]$, …, $\pi_t[2^h, 2^h + n - 1]$.

Докажем, что все 2^h перестановок $\pi_t[m+1, m+n]$ при $0 \le m \le 2^h - 1$ попарно различны. Пусть $0 \le m < m' \le 2^h - 1$. Покажем, что $\pi_t[m+1, m+n] \ne \pi_t[m'+1, m'+n]$. Пусть $m' - m = 2^p \cdot q$, где $p < h$, а q нечётно. Легко видеть, что $(m+1)_2(p) \ne (m+1+2^p)_2(p)$, $(m'+1)_2(p) \ne (m'+1+2^p)_2(p)$, $(m+1)_2(p) \ne (m'+1)_2(p)$ и $(m+1)_2[0, p-1] = (m+1+2^p)_2[0, p-1] = (m'+1)_2[0, p-1] = (m'+1+2^p)_2[0, p-1]$. Отсюда имеем $\gamma_{\pi_t}(m+1, m+1+2^p) = (m+1)_2(p) \oplus t((m+1)_2[0, p-1]) \ne (m'+1)_2(p) \oplus t((m'+1)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_t}(m'+1, m'+1+2^p)$, откуда $\pi_t[m+1, m+n] \ne \pi_t[m'+1, m'+n]$. Таким образом, $F_{\pi_t}(n) = \{\pi_t[m+1, m+n] | 0 \le m \le 2^h - 1\}$ и $f_{\pi_t}(n) = 2^h$.

Перейдём к графам Рози.

Пусть $2^{h-1} < n < 2^h$. Из доказанного вытекает, что граф Рози $G_{\pi_t}(n)$ имеет 2^h вершин, помеченных перестановками $\pi_t[1, n], \pi_t[2, n+1], \ldots, \pi_t[2^h, 2^h + n - 1]$. Обозначим их соответственно через $v_1, \ldots, v_{2^h}$. Кроме того, в этом графе 2^h дуг, помеченных перестановками $\pi_t[1, n+1]$, $\pi_t[2, n+2]$, …, $\pi_t[2^h, 2^h + n]$. При этом, дуга, помеченная перестановкой $\pi_t[m+1, m+n+1]$, где $0 \le m \le 2^h - 2$, выходит из вершины, помеченной перестановкой $\pi_t[m+1, m+n]$, т.е. из вершины v_{m+1}, и входит в вершину, помеченную перестановкой $\pi_t[m+2, m+n+$

$1]$, т.е. в вершину v_{m+2}. А последняя дуга, помеченная перестановкой $\pi_t[2^h, 2^h + n]$, выходит из вершины, помеченной перестановкой $\pi_t[2^h, 2^h + n - 1]$, т.е. из вершины v_{2^h}, и входит в вершину, помеченную перестановкой $\pi_t[2^h+1, 2^h+n] = \pi_t[1, n]$, т.е. в вершину v_1. Таким образом, граф $G_{\pi_t}(n)$ является циклом длины 2^h.

Осталось разобрать случай $n = 2^h$. Из доказанного выше, граф $G_{\pi_t}(2^h)$ имеет 2^h вершин, помеченных перестановками $\pi_t[1, 2^h]$, $\pi_t[2, 2^h + 1]$, $\ldots$, $\pi_t[2^h, 2^{h+1} - 1]$. Обозначим эти вершины соответственно через $v_1, \ldots, v_{2^h}$. Кроме того, этот граф имеет 2^{h+1} дуг, помеченных перестановками $\pi_t[1, 2^h + 1]$, $\pi_t[2, 2^h + 2]$, $\ldots$, $\pi_t[2^{h+1}, 3 \cdot 2^h]$. При этом, дуга, помеченная перестановкой $\pi_t[m + 1, m + 2^h + 1]$, где $0 \le m \le 2^h - 2$, выходит из вершины, помеченной перестановкой $\pi_t[m+1, m+2^h]$, т.е. из вершины v_{m+1}, и входит в вершину, помеченную перестановкой $\pi_t[m+2, m+2^h+1]$, т.е. в вершину v_{m+2}. Дуга же, помеченная перестановкой $\pi_t[m+2^h+1, m+2^{h+1}+1]$, где $0 \le m \le 2^h-2$, выходит из вершины, помеченной перестановкой $\pi_t[m+2^h+1, m+2^{h+1}] = \pi_t[m+1, m+2^h]$, т.е. тоже из вершины v_{m+1}, и входит в вершину, помеченную перестановкой $\pi_t[m + 2^h + 2, m + 2^{h+1} + 1] = \pi_t[m + 2, m + 2^h + 1]$, т.е. тоже в вершину v_{m+2}. Т.е. вершины v_{m+1} и v_{m+2} соединены двумя параллельными дугами. Остаётся заметить, что оставшиеся две дуги, помеченные перестановками $\pi_t[2^h, 2^{h+1}]$ и $\pi_t[2^{h+1}, 3 \cdot 2^h]$, обе выходят из вершины, помеченной перестановкой $\pi_t[2^h, 2^{h+1} - 1] = \pi_t[2^{h+1}, 3 \cdot 2^h - 1]$, т.е. из вершины v_{2^h}, и обе входят в вершину, помеченную перестановкой $\pi_t[2^h + 1, 2^{h+1}] = \pi_t[2^{h+1} + 1, 3 \cdot 2^h]$, т.е. в вершину v_1. Таким образом, граф $G_{\pi_t}(2^h)$ представляет из себя «двойной цикл» — цикл, в котором каждые две последовательные вершины соединены двумя параллельными дугами. $\square$

4. Максимальная шаблонная сложность

Максимальная шаблонная сложность для слов была введена в статье [24] и далее исследовалась в статьях [23], [20], [21], [14], [19], [22], [18]. Аналогичное понятие можно рассмотреть и для бесконечных перестановок. Максимальная шаблонная сложность для перестановок Штурма рассматривалась в статье [27].

Набор целых неотрицательных чисел $D = (D_0, D_1, \ldots, D_{n-1})$ условимся называть *окном* длины n, если $D_0 = 0$ и $D_0 < D_1 < \ldots < D_n$. Будем говорить, что конечная перестановка τ длины n встречается в бесконечной перестановке π по окну D, если существует такое m, что $\tau = \pi\{m + D_0, \ldots, m + D_{n-1}\}$, т.е. $\gamma_\tau(i, j) = \gamma_\pi(m + D_{i-1}, m + D_{j-1})$ при всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \ne j$. Множество перестановок, встречающихся в π по окну D, обозначим через $F_\pi(D)$, а их количество — через $f_\pi(D)$. В частности, для окна $D = (0, 1, \ldots, n-1)$, то получается комбинаторная сложность: $f_\pi(D) = f_\pi(n)$. Обозначим $k_\pi(n) = \sup_D f_\pi(D)$, где супремум берётся по всем окнам D длины n. Последовательность $(k_\pi(n))_{n \ge 2}$ будем называть *максимальной шаблонной сложностью* (или *сложностью Камаэ*) перестановки π.

В статье [3] доказано, что $k_\pi(n) \ge n$ для любой существенно непериодической перестановки π.

Теорема 2. *Максимальная шаблонная сложность антимонотонной перестановки π_t не зависит от t и равна*

$$k_{\pi_t}(n) = 2^{n-1}.$$

Доказательство. Сначала докажем, что $f_{\pi_t}(D) \leq 2^{n-1}$ для любого окна D длины n и для любого t. Зафиксируем окно $D = (D_0, \dots, D_{n-1})$. Пусть p — максимальное число, для которого выполнено $m + D_0 \equiv \dots \equiv m + D_{n-1} \pmod{2^p}$. Тогда $(m+D_0)_2[0, p-1] = \dots = (m+D_{n-1})_2[0, p-1]$ и среди чисел $(m+D_0)_2(p), \dots, (m+D_{n-1})_2(p)$ не все равны между собой. Заметим, что p не зависит от m (потому что если $m+D_i \equiv m+D_j \pmod{2^p}$, то при любом m' имеем $m'+D_i = (m'-m)+(m+D_i) \equiv (m'-m)+(m+D_j) = m'+D_j \pmod{2^p}$). Числа $D_0, \dots, D_{n-1}$ разобьём на два множества: $U = \{D_j | (m+D_j)_2(p) = (m+D_0)_2(p)\}$ и $V = \{D_j | (m+D_j)_2(p) \neq (m+D_0)_2(p)\}$. Отметим, что это разбиение тоже не зависит от m. В самом деле, если $(m+D_j)_2(p) = (m+D_0)_2(p)$, то $m + D_j \equiv m + D_0 \pmod{2^{p+1}}$, откуда при любом m' выполнено $m' + D_j = (m'-m) + (m+D_j) \equiv (m'-m) + (m+D_0) = m' + D_0 \pmod{2^{p+1}}$, откуда в свою очередь $(m'+D_j)_2(p) = (m'+D_0)_2(p)$. Итак, множества U и V не зависят от m. Для удобства дальнейшего изложения перенумеруем элементы этих двух множеств в порядке возрастания: $U = \{D'_0, \dots, D'_{n'-1}\}$, $D'_0 < \dots < D'_{n'-1}$; $V = \{D''_0, \dots, D''_{n''-1}\}$, $D''_0 < \dots < D''_{n''-1}$; $n' + n'' = n$. Если $D_i \in U$, $D_j \in V$, то $(m+D_i)_2(p) \neq (m+D_j)_2(p)$, а следовательно имеем $\gamma_{\pi_t}(m+D_i, m+D_j) = (m+D_i)_2(p) \oplus t((m+D_i)_2[0, p-1]) = (m+D_0)_2(p) \oplus t((m+D_0)_2[0, p-1])$. Последнее выражение не зависит ни от i, ни от j (в предположении что $D_i \in U$ и $D_j \in V$). Это означает, что при варьировании m количество различных наборов символов $\gamma_{\pi_t}(m+D_i, m+D_j)$, где $D_i \in U$ и $D_j \in V$, не больше 2 (при каждом m либо все эти символы одновременно равны 0, либо все одновременно равны 1). Далее, количество различных наборов символов $\gamma_{\pi_t}(m+D_i, m+D_j)$, где $D_i \in U$ и $D_j \in U$, равно количеству перестановок, встречающихся в π_t по окну $D' = (0, D'_1 - D'_0, \dots, D'_{n'-1} - D'_0)$ длины n', т.е. равно $f_{\pi_t}(D')$. Аналогично, количество различных наборов символов $\gamma_{\pi_t}(m+D_i, m+D_j)$, где $D_i \in V$ и $D_j \in V$, равно $f_{\pi_t}(D'')$, где $D'' = (0, D''_1 - D''_0, \dots, D''_{n''-1} - D''_0)$. Но вспомним, что $f_{\pi_t}(D)$ равно количеству различных наборов символов $\gamma_{\pi_t}(m+D_i, m+D_j)$, где $D_i \in U \cup V$ и $D_j \in U \cup V$. Поэтому из последних трёх результатов получаем $f_{\pi_t}(D) \leq 2 \cdot f_{\pi_t}(D') \cdot f_{\pi_t}(D'')$. Полученное неравенство позволяет воспользоваться индукцией по n. База индукции при $n = 1$ очевидна. Если же $n \geq 2$, то по индукции имеем $f_{\pi_t}(D) \leq 2 \cdot f_{\pi_t}(D') \cdot f_{\pi_t}(D'') \leq 2 \cdot 2^{n'-1} \cdot 2^{n''-1} = 2^{n'+n''-1} = 2^{n-1}$, что и требовалось.

Теперь мы приведём пример окна D, для которого $f_{\pi_t}(D) = 2^{n-1}$. Из этого уже будет следовать утверждение теоремы. Итак, рассмотрим окно $D = (2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^{n-1} - 1)$, т.е. $D_j = 2^j - 1$ при $0 \leq j \leq n-1$. Докажем, что $\pi_t\{m+D_0, \dots, m+D_{n-1}\} \neq \pi_t\{m'+D_0, \dots, m'+D_{n-1}\}$ для произвольных m, m' таких, что $0 \leq m < m' \leq 2^{n-1}-1$. Пусть $m'-m = 2^p \cdot q$, где q нечётно. Поскольку $m' - m \leq 2^{n-1} - 1$, то $p \leq n-2$. Тогда рассмотрим $\gamma_{\pi_t}(m+D_p, m+D_{p+1})$ и $\gamma_{\pi_t}(m'+D_p, m'+D_{p+1})$. Имеем $\gamma_{\pi_t}(m+D_p, m+D_{p+1}) = (m+2^p-1)_2(p) \oplus t((m+2^p-1)_2[0, p-1]) = (m+2^p-1)_2(p) \oplus t((m'+2^p-1)_2[0, p-1]) \neq (m'+2^p-1)_2(p) \oplus t((m'+2^p-1)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_t}(m'+D_p, m'+D_{p+1})$, откуда вытекает, что $\pi_t\{m+D_0, \dots, m+D_{n-1}\} \neq \pi_t\{m'+D_0, \dots, m'+D_{n-1}\}$. Таким образом, по окну D встретится как минимум 2^{n-1} попарно различных перестановок: $\big\{\pi_t\{m+D_0, \dots, m+D_{n-1}\} | 0 \leq m \leq 2^{n-1}-1\big\}$, т.е. $f_{\pi_t}(D) = 2^{n-1}$. □

5. Арифметическая сложность

Арифметическая сложность для бесконечных слов была введена в работе [2] и далее исследовалась в статьях [9], [12], [11], [1], [28], [5]. По аналогии арифметическую сложность можно определить и для бесконечных перестановок. Арифметическая сложность перестановок Штурма исследовалась в статье [27].

Будем говорить, что перестановка ξ длины n встречается в бесконечной перестановке π по арифметической прогрессии с разностью d, если существуют такие числа m и d, что $\xi = \pi\{m+d, m+2d, \ldots, m+nd\}$. Обозначим через $A_\pi(n)$ множество перестановок длины n, встречающихся в π по арифметическим прогрессиям, а их количество обозначим через $a_\pi(n) = |A_\pi(n)|$. Последовательность $(a_\pi(n))_{n\geq 2}$ будем называть *арифметической сложность* бесконечной перестановки π.

Отметим, что свойство избегания монотонных арифметических паттернов, сформулированное в лемме 1 (и которое, как отмечалось выше, для класса антимонотонных перестановок является характеризационным), теперь можно сформулировать так: $123 \notin A_{\pi_t}(3)$ и $321 \notin A_{\pi_t}(3)$.

Помимо арифметической сложности, рассмотрим ещё арифметическую сложность по нечётным разностям. А именно, обозначим через $A'_\pi(n)$ множество перестановок длины n, встречающихся в бесконечной перестановке π по нечётным разностям (т.е. множество таких перестановок ξ, что существуют m и нечётное d, что $\xi = \pi\{m+d, m+2d, \ldots, m+nd\}$), а их количество обозначим через $a'_\pi(n)$. Последовательность $(a'_\pi(n))_{n\geq 2}$ будем называть *арифметической сложностью по нечётным разностям* бесконечной перестановки π.

Отметим, что нечётные разности возникли также в статье [15], где, помимо прочего, рассматриваются бесконечные перестановки со свойством: $1234 \notin A'_\pi(4)$ и $4321 \notin A'_\pi(4)$.

Заметим, что комбинаторная сложность $f_\pi(n)$ — это ни что иное как количество перестановок длины n, встречающихся в π по арифметическим прогрессиям с разностью 1. Имеем $a_\pi(n) \geq a'_\pi(n) \geq f_\pi(n)$.

Лемма 2. *Пусть d_1 и d_2 нечётны. Тогда $\pi_t\{m_1, m_1+d_1, m_1+2d_1, \ldots, m_1+(2^h-1)d_1\} = \pi_t\{m_2, m_2+d_2, m_2+2d_2, \ldots, m_2+(2^h-1)d_2\}$ тогда и только тогда, когда $m_1 \equiv m_2 \pmod{2^h}$ и $d_1 \equiv d_2 \pmod{2^h}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $\xi_1\colon \{1,\ldots,2^h\} \to \{1,\ldots,2^h\}$, определив его так: $\xi_1(x) \equiv m_1 + (x-1)d_1 \pmod{2^h}$ и $1 \leq \xi_1(x) \leq 2^h$ при $1 \leq x \leq 2^h$. Заметим, что числа m_1, m_1+d_1, $\ldots$, $m_1+(2^h-1)d_1$ имеют попарно различные остатки при делении на 2^h (это следует из того, что в циклической группе $\mathbb{Z}/2^h\mathbb{Z}$ элемент d_1 имеет порядок 2^h, поскольку d_1 взаимно просто с 2^h). Тогда $\xi_1(1)\ldots\xi_1(2^h)$ — перестановка длины 2^h. Аналогично построим отображение ξ_2. Легко видеть, что $\xi_1 = \xi_2$ тогда и только тогда, когда $m_1 \equiv m_2 \pmod{2^h}$ и $d_1 \equiv d_2 \pmod{2^h}$. Для $1 \leq i \leq 2^h$, $1 \leq j \leq 2^h$, $i \neq j$, пусть $(m_1+(i-1)d_1)_2[0,p-1] = (m_1+(j-1)d_1)_2[0,p-1]$ и $(m_1+(i-1)d_1)_2(p) \neq (m_1+(j-1)d_1)_2(p)$. Поскольку разность $(m_1+(i-1)d_1)-(m_1+(j-1)d_1) = (i-j)d_1$ не может делиться на 2^h, то имеем $p < h$. Следовательно, $(\xi_1(i))_2[0,p] = (m_1+(i-1)d_1)_2[0,p]$. Кроме того, имеем $(\xi_1(i))_2[0,p-1] = (\xi_1(j))_2[0,p-1]$ и $(\xi_1(i))_2(p) \neq (\xi_1(j))_2(p)$. Тогда получаем $\gamma_{\pi_t}(m_1+(i-1)d_1, m_1+(j-1)d_1) = (m_1+(i-1)d_1)_2(p) \oplus t((m_1+(i-1)d_1)_2[0,p-1]) = (\xi_1(i))_2(p) \oplus t((\xi_1(i))_2[0,p-1]) = \gamma_{\pi_t}(\xi_1(i), \xi_1(j))$. Аналогично получаем $\gamma_{\pi_t}(m_2+(i-1)d_2, m_2+(j-1)d_2) = \gamma_{\pi_t}(\xi_2(i), \xi_2(j))$.

Таким образом, если $\pi_t\{m_1, m_1 + d_1, \ldots, m_1 + (2^h - 1)d_1\} = \pi_t\{m_2, m_2 + d_2, \ldots, m_2 + (2^h - 1)d_2\}$, то получается $\gamma_{\pi_t}(\xi_1(i), \xi_1(j)) = \gamma_{\pi_t}(m_1 + (i-1)d_1, m_1 + (j-1)d_1) = \gamma_{\pi_1}(m_2 + (i-1)d_2, m_2 + (j-1)d_2) = \gamma_{\pi_t}(\xi_2(i), \xi_2(j))$ при $1 \le i \le 2^h$, $1 \le j \le 2^h$. Из этого вытекает, что $\xi_1 = \xi_2$, откуда, в свою очередь, вытекает, что $m_1 \equiv m_2 \pmod{2^h}$ и $d_1 \equiv d_2 \pmod{2^h}$.

Обратно, пусть $m_1 \equiv m_2 \pmod{2^h}$ и $d_1 \equiv d_2 \pmod{2^h}$. Тогда $\xi_1 = \xi_2$ и $\gamma_{\pi_t}(m_1 + (i-1)d_1, m_1 + (j-1)d_1) = \gamma_{\pi_t}(\xi_1(i), \xi_1(j)) = \gamma_{\pi_t}(\xi_2(i), \xi_2(j)) = \gamma_{\pi_1}(m_2 + (i-1)d_2, m_2 + (j-1)d_2)$ при $1 \le i \le 2^h$, $1 \le j \le 2^h$. Это означает, что $\pi_t\{m_1, m_1 + d_1, \ldots, m_1 + (2^h - 1)d_1\} = \pi_t\{m_2, m_2 + d_2, \ldots, m_2 + (2^h - 1)d_2\}$. □

Будем говорить, что перестановка ξ длины n продолжается вправо до перестановки ξ' длины $n+1$, если $\xi'[1, n] = \xi$.

Пусть $\mathcal{F}(n) = \cup_t F_{\pi_t}(n)$ — множество всех подперестановок длины n бесконечных антимонотонных подперестановок.

Лемма 3. *Каждая перестановка из $\mathcal{F}(n)$ имеет не более двух продолжений вправо из $\mathcal{F}(n+1)$.*

Доказательство. Пусть $\xi = \pi_t[m+1, m+n]$. Покажем, что $\gamma_{\pi_t}(m+j, m+n+1)$ не зависит от t и m при всех j кроме одного. В самом деле, пусть p таково, что $(m+j)_2[0, p-1] = (m+n+1)_2[0, p-1]$ и $(m+j)_2(p) \ne (m+n+1)_2(p)$. Если $j - 2^p \ge 1$, то положим $j' = j - 2^p$. Если это не так, но $j + 2^p \le n$, то положим $j' = j + 2^p$. Заметим, что в обоих случаях имеем $1 \le j' \le n$, $(m+j')_2[0, p-1] = (m+j)_2[0, p-1]$ и $(m+j')_2(p) \ne (m+j)_2(p)$. Следовательно, $\gamma_{\pi_t}(m+j, m+n+1) = (m+j)_2(p) \oplus t((m+j)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_t}(m+j, m+j') = \gamma_\xi(j, j')$, т.е. символ $\gamma_{\pi_t}(m+j, m+n+1)$ не зависит ни от t, ни от m, а зависит только от ξ.

Остаётся только случай когда $j - 2^p < 1$ и $j + 2^p > n$. Это означает, что $2^{p+1} > n$. При этом $n + 1 - j$ делится на 2^p, откуда $2^p \le n + 1 - j \le n$. Таким образом, $p = \lfloor \log_2(n) \rfloor$. Больше того, заметим, что $n + 1 - j$ не просто делится на 2^p, но равно 2^p, ведь в противном случае мы бы имели $n + 1 - j \ge 2 \cdot 2^p$, откуда $2^{p+1} \le n + 1 - j \le n$, противоречие. Итак, $n + 1 - j = 2^p$, откуда $j = n + 1 - 2^p = n + 1 - 2^{\lfloor \log_2(n) \rfloor}$, т.е. такое j существует только одно.

Итак, мы показали, что при любом продолжении $\pi_t[m+1, m+n+1]$ перестановки ξ вправо все символы $\gamma_{\pi_t}(m+j, m+n+1)$ определены однозначно кроме, может быть, одного. Следовательно, ξ имеет не более двух продолжений вправо из $\mathcal{F}(n+1)$. □

Лемма 4. *Если конечная перестановка встречается в антимонотонной перестановке π_t по арифметической прогрессии, то она встречается в какой-то, вообще говоря, другой антимонотонной перестановке $\pi_{t'}$ как подперестановка (т.е. по арифметической прогрессии с разностью 1). Другими словами, при любом t и при любом n выполнено включение $A_{\pi_t}(n) \subseteq \mathcal{F}(n)$.*

Доказательство. Пусть задана перестановка $\xi = \pi_t\{m+d, \ldots, m+nd\}$. Покажем, что можно так подобрать t', что будет $\xi = \pi_{t'}[1, n]$. Т.е. надо так подобрать t', чтобы при любых x, y было $\gamma_{\pi_{t'}}(x, y) = \gamma_{\pi_t}(m + xd, m + yd)$. Для определения $t'(u)$ для заданного слова u длины p возьмём произвольные x и y такие, что $(x)_2[0, p-1] = (y)_2[0, p-1] = u$ и $(x)_2(p) \ne (y)_2(p)$, и положим $t'(u) = \gamma_{\pi_t}(m + xd, m + yd) \ominus (x)_2(p)$.

Докажем корректность такого определения, т.е. что оно не зависит от выбора x и y. В самом деле, возьмём помимо x и y с указанными свойствами ещё x' и y', что $(x')_2[0,p-1] = (y')_2[0,p-1] = u$ и $(x')_2(p) \neq (y')_2(p)$, и покажем, что $\gamma_{\pi_t}(m+xd, m+yd) \ominus (x)_2(p) = \gamma_{\pi_t}(m+x'd, m+y'd) \ominus (x')_2(p)$. Из того, что последние p цифр двоичного представления чисел x, y, x', y' одинаковы (слово u), вытекает, что при делении с остатком этих чисел на 2^p остаток у всех четырёх чисел получается одинаковый. Таким образом, имеет место представление $x = X2^p + R$, $y = Y2^p + R$, $x' = X'2^p + R$, $y' = Y'2^p + R$ для некоторых X, Y, X', Y' и некоторого $R < 2^p$. При этом имеем $(x)_2(p) = (X)_2(0)$, $(y)_2(p) = (Y)_2(0)$, $(x')_2(p) = (X')_2(0)$, $(y')_2(p) = (Y')_2(0)$. Пусть ещё $d = d'2^q$, d' — нечётно. Тогда будем иметь $m + xd = m + (X2^p + R)d = Xd'2^{p+q} + m + Rd$, $m + yd = m + (Y2^p + R)d = Yd'2^{p+q} + m + Rd$, $m + x'd = m + (X'2^p + R)d = X'd'2^{p+q} + m + Rd$, $m + y'd = m + (Y'2^p + R)d = Y'd'2^{p+q} + m + Rd$. Из такого представления вытекает, что $(m+xd)_2[0,p+q-1] = (m+yd)_2[0,p+q-1] = (m+x'd)_2[0,p+q-1] = (m+y'd)_2[0,p+q-1] = v$ для некоторого слова v длины $p+q$, а также $(m+xd)_2(p+q) \neq (m+yd)_2(p+q)$ и $(m+x'd)_2(p+q) \neq (m+y'd)_2(p+q)$. Тогда имеем $\gamma_{\pi_t}(m+xd, m+yd) \ominus (x)_2(p) = (m+xd)_2(p+q) \oplus t((m+xd)_2[0,p+q-1]) \ominus (X)_2(0) = ((X)_2(0) \oplus (m+Rd)_2(p+q)) \oplus t(v) \ominus (X)_2(0) = (m+Rd)_2(p+q) \oplus t(v)$. Аналогично, имеем $\gamma_{\pi_t}(m+x'd, m+y'd) \ominus (x')_2(p) = (m+x'd)_2(p+q) \oplus t((m+x'd)_2[0,p+q-1]) \ominus (X')_2(0) = ((X')_2(0) \oplus (m+Rd)_2(p+q)) \oplus t(v) \ominus (X')_2(0) = (m+Rd)_2(p+q) \oplus t(v)$. Таким образом, получаем $\gamma_{\pi_t}(m+xd, m+yd) \ominus (x)_2(p) = \gamma_{\pi_t}(m+x'd, m+y'd) \ominus (x')_2(p)$, что завершает доказательство корректности определения $t'(u)$.

Итак, при таком определении t' получается $\gamma_{\pi_{t'}}(x,y) = (x)_2(p) \oplus t'((x)_2[0,p-1]) = (x)_2(p) \oplus \gamma_{\pi_t}(m+xd, m+yd) \ominus (x)_2(p) = \gamma_{\pi_t}(m+xd, m+yd)$. В частности, получаем $\pi_t\{m+d, \ldots, m+nd\} = \pi_{t'}[1,n]$. Таким образом, все конечные перестановки, встречающиеся в π_t по арифметическим прогрессиям, встречаются также в каких-то, вообще говоря, других антимонотонных перестановках $\pi_{t'}$ как подперестановки. Т.е. выполнено включение $A_{\pi_t}(n) \subseteq \mathcal{F}(n)$. $\square$

Теорема 3. *Арифметическая сложность по нечётным разностям антимонотонной перестановки π_t не зависит от t и равна*

$$a'_{\pi_t}(n) = \begin{cases} 2^{2h}, & \text{если } n = 2^h + 1; \\ 2^{2h+1}, & \text{если } 2^h + 2 \leq n \leq 2^{h+1}; \end{cases}$$

Доказательство. Из леммы 2 вытекает, что количество перестановок вида $\pi_t\{m, m+d, \ldots, m+(2^h-1)d\}$ равно $2^h \cdot 2^{h-1} = 2^{2h-1}$. Следовательно, имеем $a'_{\pi_t}(2^h) = 2^{2h-1}$.

Теперь покажем, что $a'_{\pi_t}(2^h+1) = 2^{2h}$. Возьмём произвольную перестановку длины 2^h, встречающуюся в π_t по арифметической прогрессии: $\xi = \pi_t\{m, m+d, \ldots, m+(2^h-1)d\}$. Рассмотрим также две перестановки $\xi_1 = \pi_t\{m, m+d, \ldots, m+(2^h-1)d, m+2^h d\}$ и $\xi_2 = \pi_t\{m+2^h d, m+(2^h+1)d, \ldots, m+(2^{h+1}-1)d, m+2^{h+1}d\}$. Покажем, что ξ_1 и ξ_2 обе являются продолжениями ξ вправо, причём различными. По лемме 2, имеем $\pi_t\{m, m+d, \ldots, m+(2^h-1)d\} = \pi_t\{m+2^h d, m+(2^h+1)d, \ldots, m+(2^{h+1}-1)d\} = \xi$, т.е. ξ_1 и ξ_2 действительно являются продолжениями ξ. С другой стороны, по лемме 1, имеем $\gamma_{\pi_t}(m, m+2^h d) \neq \gamma_{\pi_t}(m+2^h d, m+2^{h+1}d)$, т.е. $\xi_1 \neq \xi_2$. Итак, произвольно выбранная из $A'_{\pi_t}(2^h)$ перестановка ξ имеет два продолжения вправо из

$A'_{\pi_t}(2^h+1)$. По лемме 4, имеем $\xi \in \mathcal{F}(2^h)$, а оба продолжения ξ вправо — перестановки ξ_1 и ξ_2 принадлежат $\mathcal{F}(2^h+1)$. По лемме 3, других продолжений вправо в $\mathcal{F}(2^h+1)$ у ξ нет. А поскольку по лемме 4 $A_{\pi_t}(2^h+1) \subseteq \mathcal{F}(2^h+1)$, то нет у ξ других продолжений вправо и в $A'_{\pi_t}(2^h+1)$. Из этого вытекает, что $a'_{\pi_t}(2^h+1) = 2 \cdot a'_{\pi_t}(2^h) = 2 \cdot 2^{2h-1} = 2^{2h}$.

Покажем, что $a'_{\pi_t}(2^h+2) = 2^{2h+1}$. Возьмём произвольную перестановку ξ из $A'_{\pi_t}(2^h+1)$, пусть $\xi = \pi_t\{m, m+d, m+2d, \ldots, m+2^h d\}$. Положим $d' = d + 2^h$ и рассмотрим две перестановки $\xi_1 = \pi_t\{m, m+d, m+2d, \ldots, m+(2^h+1)d\}$ и $\xi_2 = \pi_t\{m, m+d', m+2d', \ldots, m+(2^h+1)d'\}$. Покажем, что ξ_1 и ξ_2 обе являются продолжениями ξ вправо, причём различными. По лемме 2, имеем $\pi_t\{m, m+d, \ldots, m+(2^h-1)d\} = \pi_t\{m, m+d', \ldots, m+(2^h-1)d'\}$, т.е. $\xi_1[1, 2^h] = \xi_2[1, 2^h]$. Далее, для $0 \le j \le 2^h - 1$ покажем, что $\gamma_{\pi_t}(m+jd, m+2^h d) = \gamma_{\pi_t}(m+jd', m+2^h d')$. Имеем $(m+2^h d') - (m+jd') = (2^h-j)d' = (2^h-j)d + (2^h-j)2^h \equiv (2^h-j)d = (m+2^h d) - (m+jd) \pmod{2^h}$. Кроме того, заметим, что число $(2^h-j)d$ не делится на 2^{h+1}. Таким образом, разности $(m+2^h d) - (m+jd)$ и $(m+2^h d') - (m+jd')$ не делятся на 2^{h+1} и при этом сравнимы по модулю 2^h. Следовательно, максимальная степень двойки, на которую делится $(m+2^h d) - (m+jd)$, совпадает с максимальной степенью двойки, на которую делится $(m+2^h d') - (m+jd')$, причём эта степень двойки не больше 2^h. Из этого вытекает, что существует $p \le h$, что $(m+jd)_2[0, p-1] = (m+2^h d)_2[0, p-1] = (m+jd')_2[0, p-1] = (m+2^h d')_2[0, p-1]$, $(m+jd)_2(p) \ne (m+2^h d)_2(p)$, $(m+jd')_2(p) \ne (m+2^h d')_2(p)$, причём поскольку $(m+2^h d') - (m+2^h d) = 2^{2h}$, то $(m+2^h d)_2(p) = (m+2^h d')_2(p)$. Следовательно, имеем $\gamma_{\pi_t}(m+2^h d, m+jd) = (m+2^h d)_2(p) \oplus t((m+2^h d)_2[0, p-1]) = (m+2^h d')_2(p) \oplus t((m+2^h d')_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_t}(m+2^h d', m+jd')$. Таким образом, мы доказали, что $\pi_t\{m, m+d, \ldots, m+2^h d\} = \pi_t\{m, m+d', \ldots, m+2^h d'\}$, т.е. что $\xi_1[1, 2^h+1] = \xi_2[1, 2^h+1] = \xi$. Покажем теперь, что $\xi_1 \ne \xi_2$. Заметим, что $(m+d)_2[0, h-1] = (m+(2^h+1)d)_2[0, h-1] = (m+d')_2[0, h-1] = (m+(2^h+1)d')_2[0, h-1]$ и $(m+d)_2(h) \ne (m+(2^h+1)d)_2(h)$, $(m+d')_2(h) \ne (m+(2^h+1)d')(h)$, $(m+d)_2(h) \ne (m+d')_2(h)$. Следовательно, $\gamma_{\pi_t}(m+d, m+(2^h+1)d) = (m+d)_2(h) \oplus t((m+d)_2[0, h-1]) \ne (m+d')_2(h) \oplus t((m+d')_2[0, h-1]) = \gamma_{\pi_t}(m+d', m+(2^h+1)d')$, откуда $\xi_1 \ne \xi_2$. Итак, произвольно выбранная из $A'_{\pi_t}(2^h+1)$ перестановка ξ имеет два продолжения вправо из $A'_{\pi_t}(2^h+2)$. По лемме 4, имеем $\xi \in \mathcal{F}(2^h+1)$, а оба продолжения ξ вправо — перестановки ξ_1 и ξ_2 принадлежат $\mathcal{F}(2^h+2)$. По лемме 3, других продолжений вправо в $\mathcal{F}(2^h+2)$ у ξ нет. А поскольку по лемме 4 $A_{\pi_t}(2^h+2) \subseteq \mathcal{F}(2^h+2)$, то нет у ξ других продолжений вправо и в $A'_{\pi_t}(2^h+2)$. Из этого вытекает, что $a'_{\pi_t}(2^h+2) = 2 \cdot a'_{\pi_t}(2^h+1) = 2 \cdot 2^{2h} = 2^{2h+1}$.

Остаётся заметить, что для $2^h+3 \le n \le 2^{h+1}-1$ из доказанного имеем $2^{2h+1} = a'_{\pi_t}(2^h+2) \le a'_{\pi_t}(n) \le a'_{\pi_t}(2^{h+1}) = 2^{2h+1}$, откуда получаем $a'_{\pi_t}(n) = 2^{2h+1}$. □

Теорема 4. *Для арифметической сложности антимонотонных перестановок выполнены нижняя и верхняя оценки*

$$a'_{\pi_t}(n) \le a_{\pi_t}(n) \le 2^{n-1},$$

где $a'_{\pi_t}(n)$ вычислено в теореме 3. Причём обе оценки достигаются при некоторых t, т.е. существует t_0, что $a_{\pi_{t_0}}(n) = a'_{\pi_t}(n)$ при всех $n \ge 2$, и существует t_1, что $a_{\pi_{t_1}}(n) = 2^{n-1}$ при всех $n \ge 2$.

Доказательство. Нижняя оценка $a_{\pi_t}(n) \geq a'_{\pi_t}(n)$ очевидна. Для доказательства того, что она достигается, рассмотрим антимонотонную перестановку π_{t_0}, где $t_0(u) = 0$ при любом u.

Для x, y, $x \neq y$, пусть $(x)_2[0, p-1] = (y)_2[0, p-1]$ и $(x)_2(p) \neq (y)_2(p)$. Тогда нетрудно видеть, что $(2x)_2[0, p] = (2y)_2[0, p]$ и $(2x)_2(p+1) \neq (2y)_2(p+1)$, а также $(2x+1)_2[0, p] = (2y+1)_2[0, p]$ и $(2x+1)_2(p+1) \neq (2y+1)_2(p+1)$. Тогда имеем $\gamma_{\pi_{t_0}}(2x, 2y) = (2x)_2(p+1) \oplus t((2x)_2[0, p]) = (2x)_2(p+1) \oplus 0 = (x)_2(p) \oplus 0 = (x)_2(p) \oplus t((x)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_{t_0}}(x, y)$. Кроме того, имеем $\gamma_{\pi_{t_0}}(2x+1, 2y+1) = (2x+1)_2(p+1) \oplus t((2x+1)_2[0, p]) = (2x+1)_2(p+1) \oplus 0 = (x)_2(p) \oplus 0 = (x)_2(p) \oplus t((x)_2[0, p-1]) = \gamma_{\pi_{t_0}}(x, y)$.

Из этого вытекает, что $\pi_{t_0}\{2m+2d, 2m+4d, \ldots, 2m+2dn\} = \pi_{t_0}\{2m+1+2d, 2m+1+4d, \ldots, 2m+1+2dn\} = \pi_{t_0}\{m+d, m+2d, \ldots, m+dn\}$ при любых m, d, n. Это означает, что любая конечная перестановка, встречающаяся в π_{t_0} по арифметической прогрессии с чётной разностью $2d$, встречается в ней и с вдвое меньшей разностью d. Если d чётно, то можем ещё раз применить это свойство. И так далее. В итоге получается, что все конечные перестановки, встречающиеся в π_{t_0} по арифметическим прогрессиям, встречаются в ней и по арифметическим прогрессиям с нечётной разностью. Т.е. имеем $a_{\pi_{t_0}}(n) = a'_{\pi_{t_0}}(n)$.

Перейдём к верхней оценке на арифметическую сложность $a_{\pi_t}(n)$. По лемме 4, имеем $A_{\pi_t}(n) \subseteq \mathcal{F}(n) = \cup_{t'} F_{\pi_{t'}}(n)$. Из леммы 3 вытекает (применением индукции), что $|\mathcal{F}(n)| \leq 2^{n-1}$. Отсюда и получается верхняя оценка $a_{\pi_t}(n) = |A_{\pi_t}(n)| \leq |\mathcal{F}(n)| \leq 2^{n-1}$.

Покажем, что эта верхняя оценка достигается. Мы построим отображение t_1 так, чтобы в перестановке π_{t_1} встречались по арифметическим прогрессиям 2^{n-1} различных перестановок длины n при каждом n. Для перестановки ξ длины n назовём *базисными* следующие $n-1$ символов: $\gamma_\xi(j, j + 2^{\lfloor \log_2 (n-j) \rfloor})$ при $1 \leq j \leq n-1$. Идея состоит в том, чтобы так подобрать отображение t_1, чтобы в π_{t_1} встретилась по арифметической прогрессии перестановка с любым наперёд заданным набором базисных символов. Перенумеруем все конечные слова над алфавитом $\{0, 1\}$ в каком-нибудь порядке: u_1 длины $n_1 - 1$, u_2 длины $n_2 - 1$, u_3 длины $n_3 - 1$, $\ldots$. Зафиксируем также какую-нибудь достаточно быстро растущую последовательность натуральных чисел h_k (ниже будет уточнено какие именно ограничения накладываются на h_k). Определим t_1 так, чтобы при каждом k перестановка $\pi_{t_1}\{2^{h_k}, 2 \cdot 2^{h_k}, \ldots, n_k \cdot 2^{h_k}\}$ имела базисные символы, соответствующие слову u_k, т.е. чтобы $\gamma_{\pi_{t_1}}(j2^{h_k}, (j + 2^{p_j})2^{h_k}) = u_k(j)$ при $1 \leq j \leq n_k - 1$, где $p_j = \lfloor \log_2 (n_k - j) \rfloor$. Ясно, что $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1] = ((j+2^{p_j})2^{h_k})_2[0, h_k+p_j-1]$ и $(j2^{h_k})_2(h_k+p_j) \neq ((j+2^{p_j})2^{h_k})_2(h_k+p_j)$. Определим $t_1((j2^{h_k})_2[0, h_k+p_j-1]) = u_k(j) \ominus (j2^{h_k})_2(h_k+p_j)$, и $t_1(v)$ определим произвольно, если $v \neq (j2^{h_k})_2[0, h_k+p_j-1])$ ни при каких j, k. При таком определении получим то, что нужно: $\gamma_{\pi_{t_1}}(j2^{h_k}, (j+2^{p_j})2^{h_k}) = (j2^{h_k})_2(h_k+p_j) \oplus t_1((j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1]) = (j2^{h_k})_2(h_k + p_j) \oplus u_k(j) \ominus (j2^{h_k})_2(h_k + p_j) = u_k(j)$. Нужно лишь удостовериться в корректности такого определения t_1, т.е. что при разных парах чисел (k, j) не будут заданы разные значения t_1 на одном и том же слове. Мы покажем, что при разных парах чисел (k, j) слова $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1]$, на которых задаются значения t_1, все различны.

Допустим сначала, что при одном и том же k и двух разных j слова, на которых задаются значения t_1, совпадают, т.е. $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1] =$

$(j'2^{h_k})_2[0, h_k + p_{j'} - 1]$. Из совпадения их длин $h_k + p_j = h_k + p_{j'}$ вытекает, что $p_j = p_{j'}$. Кроме того, тогда разность $j'2^{h_k} - j2^{h_k}$ должна делится на $2^{h_k+p_j}$, откуда вытекает, что разность $j' - j$ делится на 2^{p_j}. Пусть, скажем, $j < j'$. Тогда $j \le j' - 2^{p_j} \le (n_k - 2^{p_j}) - 2^{p_j} = n_k - 2^{p_j+1}$, откуда $n_k - j \ge 2^{p_j+1}$, что противоречит определению p_j. Итак, при фиксированном k слова $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1]$, на которых задаются значения t_1, все разные при разных j. Теперь выбором h_k сделаем, чтобы при разных k слова $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1]$ имели заведомо разную длину. Длина слова $(j2^{h_k})_2[0, h_k + p_j - 1]$ равна $h_k + p_j$. Заметим, что $0 \le p_j \le \lfloor \log_2 (n_k - 1) \rfloor$. Следовательно, достаточно взять любую последовательность h_k, удовлетворяющую условию $h_{k+1} + 0 > h_k + \lfloor \log_2 (n_k - 1) \rfloor$ при всех k. Таким образом, определение t_1 корректно.

Как показано выше, мы определили t_1 так, что при каждом k перестановка $\pi_{t_1}\{2^{h_k}, 2{\cdot}2^{h_k}, \ldots, n_k{\cdot}2^{h_k}\}$ длины n_k имеет базисные символы, наперёд заданные словом u_k длины $n_k - 1$. Ясно, что при разных наборах базисных символов и перестановки получаются разными. Всего слов длины $n-1$ существует 2^{n-1} (и все они встречаются в последовательности u_k). Следовательно, при каждом n в перестановке π_{t_1} встречаются по арифметическим прогрессиям как минимум 2^{n-1} разных перестановок длины n, т.е. $a_{\pi_{t_1}}(n) = 2^{n-1}$. $\square$

Заметим, что при доказательстве достижимости верхней оценки $a_{\pi_t}(n) \le 2^{n-1}$ попутно мы доказали, что $|\mathcal{F}(n)| = 2^{n-1}$. В самом деле, поскольку по лемме 4 имеет место включение $A_{\pi_{t_1}}(n) \subseteq \mathcal{F}(n)$, то $|\mathcal{F}(n)| \ge |A_{\pi_{t_1}}(n)| = a_{\pi_{t_1}}(n) = 2^{n-1}$, что в совокупности с неравенством $|\mathcal{F}(n)| \le 2^{n-1}$, вытекающим из леммы 3 (применением индукции), даёт в итоге равенство $|\mathcal{F}(n)| = 2^{n-1}$. Больше того, теперь из этого вытекает, что каждая перестановка из $\mathcal{F}(n)$ имеет не просто не более двух продолжений вправо из $\mathcal{F}(n{+}1)$, как утверждается в лемме 3, а ровно два таких продолжения.

Список литературы

[1] S. Avgustinovich, J. Cassaigne, A. Frid, *Sequences of low arithmetical complexity*, Theoretical Informatics and Applications, **40** (2006), 569–582. MR2277050

[2] S. Avgustinovich, D. Fon-Der-Flaass, A. Frid, *Arithmetical complexity of infinite words*, Words, Languages & Combinatorics III, World Scientific Publishing, 2003, pp. 51–62. MR2028864

[3] S. Avgustinovich, A. Frid, T. Kamae, P. Salimov, *Infinite permutations of lowest maximal pattern complexity*, Theoretical Computer Science, **412** (2011), 2911–2921. MR2830255

[4] J. Cassaigne, *On a conjecture of J. Shallit*, Proceedings of the 24th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, Lecture Notes in Computer Science, Bologna, Springer, vol. 1256, 1997, pp. 693–784. MR1616227

[5] J. Cassaigne, A. Frid, *On arithmetical complexity of Sturmian words*, Theoretical Computer Science, **380** (2007), 304–316. MR2331000

[6] J. Davis, R. Entringer, R. Graham, G. Simmons, *On permutations containing no long arithmetic progressions*, Acta Arithmetica, **34** (1977), 81–90. MR0491459

[7] D. Fon-Der-Flaass, A. Frid, *On periodicity and low complexity of infinite permutations*, in 2005 European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb'05), Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science Proceedings volume AE, 267–272.

[8] D. Fon-Der-Flaass, A. Frid, *On periodicity and low complexity of infinite permutations*, European Journal of Combinatorics, **28** (2007), 2106–2114. MR2351513

[9] A. Frid, *Arithmetical complexity of symmetric D0L words*, Theoretical Computer Science, **306** (2003), 535–542. MR2000191

[10] A. Frid, *Infinite permutations vs. infinite words*, Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science, **63** (2011), 13–19.
[11] A. Frid, *On possible growths of arithmetical complexity*, Theoretical Informatics and Applications, **40** (2006), 443–458. MR2269203
[12] A. Frid, *Sequences of linear arithmetical complexity*, Theoretical Computer Science, **339** (2005), 68–87. MR2142075
[13] A. Frid, L. Zamboni, *On automatic infinite permutations*, RAIRO Theoretical Informatics and Applications, **46** (2012), 77–85.
[14] N. Gjini, T. Kamae, Bo Tan, Yu-Mei Xue, *Maximal pattern complexity for Toeplitz words*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **26** (2006), 1073–1086. MR2246592
[15] T. LeSaulnier, S. Vijay, *On permutations avoiding arithmetic progressions*, Discrete Mathematics, **311** (2011), 205–207. MR2739925
[16] M. Makarov, *On an infinite permutation similar to the Thue-Morse word*, Discrete Mathematics, **309** (2009), 6641–6643. MR2558629
[17] M. Makarov, *On the infinite permutation generated by the period doubling word*, European Journal of Combinatorics, **31** (2010), 368–378. MR2552616
[18] T. Kamae, *Behavior of various complexity functions*, Theoretical Computer Science, **420** (2012), 36–47. MR2887629
[19] T. Kamae, H. Rao, *Maximal pattern complexity of words over ℓ letters*, European Journal of Combinatorics, **27** (2006), 125–137. MR2186423
[20] T. Kamae, H. Rao, Bo Tan, Yu-Mei Xue, *Language structure of pattern Sturmian word*, Discrete Mathematics, **306** (2006), 1651–1668. MR2251099
[21] T. Kamae, H. Rao, Yu-Mei Xue, *Maximal pattern complexity of two-dimensional words*, Theoretical Computer Science, **359** (2006), 15–27. MR2251597
[22] T. Kamae, P. Salimov, *On maximal pattern complexity of some automatic words*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **31** (2011), 1463–1470. MR2832253
[23] T. Kamae, L. Zamboni, *Maximal pattern complexity for discrete systems*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22** (2002), 1201–1214. MR1926283
[24] T. Kamae, L. Zamboni, *Sequence entropy and the maximal pattern complexity of infinite words*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **22** (2002), 1191–1199. MR1926282
[25] G. Rauzy, *Suites à termes dans un alphabet fini*, Séminaire de Théorie des nombres de Bordeaux, exposé 25, 1983, pp. 2501–2516. MR0750326
[26] М. Макаров, *О перестановках, порождённых бесконечными бинарными словами*, Сибирские электронные математические известия, **3** (2006), 304–311. MR2276028
[27] М. Макаров, *О перестановках, порождённых словами Штурма*, Сибирский математический журнал, **50** (2009), 850–857. MR2583623
[28] А. Фрид, *Нижняя оценка на арифметическую сложность слов Штурма*, Сибирские электронные математические известия, **2** (2005), 14–22. MR2131762

Михаил Александрович Макаров
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: mike_mak@ngs.ru