S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 382–432 (2012) УДК 517.9
MSC 35R30

ОБРАТИМОСТЬ ОТОБРАЖЕНИЙ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Ю.Е. АНИКОНОВ, Н.Б. АЮПОВА, В.Г. БАРДАКОВ, В.П. ГОЛУБЯТНИКОВ, М.В. НЕЩАДИМ

Abstract. We expose some selected results in finite-dimensional mapping theory and their connections with theory of inverse problems for evolution equations. We obtain new representations of solutions of multidimensional nonlinear evolution equations and those of their coefficients.

Keywords: inverse problems, evolution equations, ill-posed problems, representations of solutions, systems of differential equations, finite-dimensional mapping

1. Введение

В публикациях [1]–[6] разработаны конструктивные методы исследования задач нового математического моделирования эволюционных процессов в условиях неопределенности. К таким задачам относятся прямые и обратные задачи математической физики, задачи идентификации, управления, синтеза и другие.

Аналитическими методами получены многочисленные и разнообразные формулы в линейных и нелинейных задачах идентификации, в представлениях решений и коэффициентов эволюционных уравнений и систем, условия разрешимости, формулы определения конкретных и общих функций источников. Развиты принципы и алгоритмы одновременного построения решений и коэффициентов дифференциальных уравнений.

Anikonov, Yu.E., Ayupova, N.B., Bardakov, V.G., Golubyantikov, V.P., Neshchadim, M.V., Inversion of mapping and inverse problems.

Работа поддержана ОМН РАН (проект 1.3.1 2012), РФФИ (грант 12-01-00074), Междисциплинарными проектами СО РАН N 80 и N 136, Интеграционным грантом СО РАН N 40.

Поступила 16 апреля 2012 г., опубликована 26 августа 2012 г.

Данное конструктивное направление имеет не только теоретическое значение, но и прикладное. В частности, на основе полученных формул могут быть созданы быстродействующие программы расчёта как параметров среды, так и функций источников различных полей. Особую прикладную значимость представляет компьютерное аналитическое автоматизированное моделирование на базе созданных алгоритмов и формул с использованием логической системы символьных вычислений.

Особо отметим важность создания нового математического моделирования динамических процессов природы и общества на основе теории обратных задач в условиях частичной или полной неопределенности. Искомые модели и уравнения могут быть различной природы — алгебраическими, функциональными, дифференциальными, интегральными и другими, прогноз и мониторинг явлений и процессов, особенно опасных и кризисных, является суперзадачей теории и приложений обратных и некорректно-поставленных задач.

В данной работе приводятся некоторые примеры обратных задач для эволюционных уравнений, которые в той или иной мере связаны с отображениями и их обратимостью.

2. Полиномиальные отображения. Проблемы обратимости

В этом параграфе приводятся известные факты о полиномиальных отображениях. Ссылки на приводимые ниже результаты можно найти в книге [7].

Пусть k – произвольное поле и

$$F = (F_1, F_2, \dots, F_n) : k^n \longrightarrow k^n$$

– полиномиальное отображение, т. е. отображение вида

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longmapsto (F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)),$$

где $F_i \in k[x] = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Частным случаем полиномиального отображения является линейное отображение:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n, \quad a_{ij} \in k.$$

Из линейной алгебры хорошо известны следующие результаты.

Предложение 1. *Пусть $F : k^n \longrightarrow k^n$ – линейное отображение. Тогда*

1) *F биективно тогда и только тогда, когда F инъективно. При этом обратное отображение F^{-1} также линейно;*

2) *F обратимо тогда и только тогда, когда определитель $\det(a_{ij})$ лежит в $k^* = k \setminus \{0\}$;*

3) *если F обратимо, то оно является произведением конечного числа элементарных линейных отображений.*

Возникает естественный вопрос: какие из этих утверждений справедливы для полиномиальных отображений?

Следующий пример показывает, что если F – полиномиальное отображение, то оно не обязано быть биективным.

Пример 1. Пусть $F : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$, $F(x) = x^3$, – отображение поля рациональных чисел. Тогда F инъективно, но не является отображением *на*.

Тем не менее, если рассмотреть алгебраически замкнутое поле, то справедлива

Теорема 1 (Бьялински-Бурила, Розенлихт, 1962)**.** *Пусть k – алгебраически замкнутое поле поле характеристики 0 и $F : k^n \longrightarrow k^n$ – инъективное полиномиальное отображение. Тогда F – биективное и обратное отображение также является полиномиальным.*

Замечание 1. Обобщить эту теорему на множество аналитических функций уже нельзя, так как существует отображение $F = (F_1, F_2) : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ такое, что каждая функция F_i аналитическая на $\mathbb{C}^2$, F — инъективно, $\det\, JF = 1$, но множество $\mathbb{C}^2 \setminus F(\mathbb{C}^2)$ содержит не пустое открытое множество.

Напомним, что полиномиальное отображение $F : k^n \longrightarrow k^n$ называется *обратимым*, если существуют многочлены $G_1, G_2, \ldots, G_n$ из $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ такие, что $x_i = G_i(F_1, F_2, \ldots, F_n)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Нетрудно показать, что полиномиальное отображение $F : k^n \longrightarrow k^n$ обратимо тогда и только тогда, когда $k[x_1, x_2, \ldots, x_n] = k[F_1, F_2, \ldots, F_n]$.

Хорошо известно следующее

Предложение 2. *Если $F : k^n \longrightarrow k^n$ – обратимое полиномиальное отображение, то* $\det\, JF \in k^*$.

Доказательство. Пусть $\det\, JF$ — обратимое полиномиальное отображение и $G = (G_1, G_2, \ldots, G_n)$ — обратное к нему. Тогда $G(F(x)) = x$, где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Положим

$$JF = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \le i,j \le n}$$

– матрица Якоби (якобиан). Тогда

$$(JG)(F(x)) \cdot JF = I_n,$$

а потому

$$\det(JG)(F(x)) \cdot \det\, JF = 1.$$

Следовательно, $\det\, JF \in k^*$. Предложение доказано. □

Будет ли справедливо обратное утверждение, до сих пор неизвестно. Соответствующий вопрос был сформулирован Кэлером и в настоящее время называется *проблемой якобиана.*

Проблема якобиана. Пусть K – поле нулевой характеристики, $F : k^n \longrightarrow k^n$ – полиномиальное отображение и $\det\, JF \in k^*$. Будет ли F обратимым?

Отметим некоторые известные результаты, полученные в этом направлении. Ванг (1980) доказал, что если $F : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ и $\deg F_i \le 2$ при всех i, то из того, что $\det\, JF \in \mathbb{C}^*$ следует, что F обратимо.

А. Магнус (1955) изучал полиномиальные отображения

$$(z_1, z_2) \longrightarrow (f(z_1, z_2), g(z_1, z_2)), \quad f, g \in \mathbb{C}[z_1, z_2], \quad \det\, J(f, g) = 1,$$

и доказал, что если хотя бы одно из чисел $n = \deg f$ или $m = \deg g$ простое, то отображение (f, g) обратимо. Накай, Баба (1977) обобщили этот результат, доказав, что если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1) n или m простое;

2) n или m равно 4;

3) $m > n$, $m = 2p$, где p – нечетное простое,

то отображение (f, g) обратимо.

Аппелегат, Ониши (1985) и независимо Нагата (1988) доказали, что если n или m имеют не более двух простых множителей, то (f, g) обратимо. Мох (1983) доказал, что при $n = 2$ гипотеза якобиана справедлива, если

$$\max\{\deg f, \deg g\} \leq 100.$$

Ягжев и независимо Басс, Коннел и Врайт (1980) доказали, что гипотезу якобиана достаточно доказать для всех полиномиальных отображений степени не выше 3. Более точно, справедлива

Теорема 2. *Если гипотеза якобиана справедлива для всех полиномиальных отображений F, у которых $\deg F_i \leq 3$ для всех i и всех $n \geq 2$, то гипотеза якобиана справедлива.*

Более того, из результата Басса, Коннел и Райта (1982) следует, что гипотезу якобиана достаточно установить для всех отображений следующего вида

$$F = (x_1 + H_1, x_2 + H_2, \ldots, x_n + H_n), \tag{1}$$

где каждый H_i либо нуль, либо однородный многочлен степени 3. Наконец, Друзковский (1983) установил, что гипотезу якобиана достаточно доказать для полиномиальных отображений вида (1), где

$$H_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\, x_j \right)^3 ,$$

т. е. являются кубами линейных форм.

Отметим связь между гипотезой якобиана над полем $\mathbb{R}$ и полем $\mathbb{C}$. Если $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ – полиномиальное отображение, то положим

$$\widetilde{F} = (\operatorname{Re} F_1, \operatorname{Im} F_1, \ldots, \operatorname{Re} F_n, \operatorname{Im} F_n) : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Нетрудно проверить, что тогда $\det J\widetilde{F} = |\det JF|^2$. Следовательно,

$$\det JF \in \mathbb{C}^* \Leftrightarrow \det J\widetilde{F} \in \mathbb{R}^*.$$

Используя это наблюдение, Йу (1993) установил, что если $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ – отрицательное полиномиальное отображение и $\det JF = 1$, то F обратимо. С другой стороны, если для всех n и всех положительных полиномиальных отображений $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ с $\det JF = 1$ отображение F обратимо, то гипотеза якобиана справедлива.

При изучении полиномиальных отображений полезна следующая теорема, установленная Макеем и Вангом (1988).

Теорема 3. *Пусть $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n) : k^n \longrightarrow k^n$ – обратимое полиномиальное отображение. Тогда F полностью определяется своими n^2 граничными полиномами: $F_i|_{x_j=0}$, $1 \leq i, j \leq n$.*

3. Обратимость отображений и дифференцирования полиномиальных колец

Пусть D является k–дифференцированием на $k[x]$, т. е. D является k–линейным отображением, удовлетворяющее условию

$$D(ab) = aD(b) + D(a)b \text{ при всех } a, b \in k[x].$$

Тогда D называется *локально нильпотентным*, если для любого $g \in k[x]$ существует целое $m \geq 0$ такое, что $D^m(g) = 0$.

Пример 2. Частные производные

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : k[x] \longrightarrow k[x], \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

являются локально нильпотентными дифференцированиями.

Каждому локально нильпотентному дифференцированию D можно сопоставить автоморфизм

$$\exp\, D(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^k f$$

кольца $k[x]$. Это действительно автоморфизм, так как обратным будет $\exp\,(-D)$.

При этом, если D – локально нильпотентное дифференцирование и $a \in \ker D$, то aD также локально нильпотентное дифференцирование.

Пример 3. Частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ является локально нильпотентным дифференцированием на $k[x]$ и $a = a(x_1, \ldots, \widehat{x}_i, \ldots, x_n) \in \ker \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Следовательно, $a\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ — локально нильпотентное дифференцирование и

$$\exp\left(a\frac{\partial}{\partial x_i}\right) : (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + a, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

т. е. является элементарным автоморфизмом.

Пример 4. Рассмотрим автоморфизм Нагаты [7]

$$\sigma : \begin{cases} X \longmapsto X - 2(XZ + Y^2)Y - (XZ + Y^2)^2 Z, \\ Y \longmapsto Y + (XZ + Y^2)Z, \\ Z \longmapsto Z. \end{cases}$$

Определим дифференцирование

$$D_0 = -2Y\frac{\partial}{\partial X} + Z\frac{\partial}{\partial Y}$$

на $k[X, Y, Z]$. Тогда D_0 – локально нильпотентное дифференцирование. Действительно,

$$\begin{array}{ll} D_0(X) = -2Y, & D_0^2(X) = -2Z, \\ D_0(Y) = Z, & D_0^2(Y) = 0, \\ D_0(Z) = 0, & D_0^2(Z) = 0. \end{array}$$

Пусть $a = XZ + Y^2$. Тогда $a \in \ker D_0$, а потому D_0 – локально нильпотентное дифференцирование и легко проверить, что

$$\sigma = \exp(aD_0).$$

Обратным к автоморфизму Нагаты является автоморфизм:

$$\sigma^{-1} : \begin{cases} X \longmapsto X + 2Y(XZ + Y^2) - Z(XZ + Y^2)^2, \\ Y \longmapsto Y - Z(XZ + Y^2), \\ Z \longmapsto Z. \end{cases}$$

Известно [8], что автоморфизм Нагаты не является произведением элементарных.

Хуберс [7] показал, что всякое обратимое кубически однородное полиномиальное отображение от 4-х переменных является произведением не более двух отображений вида $\exp D$, где D – локально нильпотентное дифференцирование.

Напомним, что дифференцирование D на $k[x]$ называется *треугольным,* если $Dx_n \in k$ и $Dx_i \in k[x_{i+1}, \ldots, x_n]$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Как установил Смит, если D – треугольное дифференцирование и $a \in \ker D \bigcap k[x]$, то автоморфизм $(\exp D, t)$ является ручным автоморфизмом алгебры $k[x, t]$.

Задача о дискриминанте

Эта задача сформулирована в книге [9, с.261].

Пусть

$$f(x) = x^n + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \tag{2}$$

– нормированный многочлен, коэффициенты которого a_i, $2 \le i \le n$, суть рациональные функции на $\mathbb{C}$ (т. е. рациональные дроби из $\mathbb{C}(z)$)). Предположим, что дискриминант $D(f)$ многочлена f тождественно равен 1. Возможно ли при этом, чтобы не все коэффициенты a_i лежали в $\mathbb{C}$?

Перечислим известные результаты.

1) Если особенности (полюса) всех a_i расположены в точках 0 и ∞ (либо знаменатель q несократимой дроби $a_i = p/q$ делится на z, либо $\deg p > \deg q$), то a_i, $2 \le i \le n$, являются константами.

2) Если $n = 3$ или $n = 4$, то все a_i – константы.

Случай $n = 5$ остается без ответа.

Мы предполагаем, что справедлива

Гипотеза. Если уравнение (2) разрешимо в радикалах и $D(f) \equiv 1$, то все коэффициенты a_i принадлежат $\mathbb{C}$.

Представления групп

Следующие примеры можно найти в книге [10, с.5-6].

Экспоненциальная функция

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{ta}, \quad t \in \mathbb{R}$$

при любом $a \in \mathbb{R}$ является гомоморфизмом аддитивной группы $\mathbb{R}$ в мультипликативную группу $\mathbb{R}^*$. Существуют ли другие гомоморфизмы

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*?$$

Для ответа на этот вопрос ограничимся классом дифференцируемых функций. Из того, что f гомоморфизм, следует, что для всех $t, u \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$f(t+u) = f(t)f(u).$$

Дифференцируя его по u и подставляя $u = 0$, получаем

$$f'(t) = f(t)a,$$

где $a = f'(0)$. Общим решением этого дифференциального уравнения будет

$$f(t) = C\mathrm{e}^{ta},$$

однако из условия гомоморфности следует, что $f(0) = 1$ и, значит $C = 1$. Таким образом, всякий дифференцируемый гомоморфизм группы $\mathbb{R}$ в группу $\mathbb{R}^*$ является экспоненциальной функцией.

При решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами возникает экспоненциальная матричная функция

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{tA}, \quad t \in \mathbb{R}, A \in M_n(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Напомним, что она определяется как сумма ряда

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

или как решение матричного дифференциального уравнения

$$F'(t) = F(t)A, \quad F : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$$

с начальным условием $F(0) = E$. Экспоненциальная матричная функция обладает свойством

$$e^{(t+u)A} = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{uA} \text{ для всех } t, u \in \mathbb{R},$$

т. е. является гомоморфизмом группы $\mathbb{R}$ в группу $GL_n(\mathbb{R})$. Так же, как и выше, можно показать, что всякий дифференцируемый гомоморфизм группы $\mathbb{R}$ в группу $GL_n(\mathbb{R})$ имеет вид (3). Это является обобщением предыдущего результата, поскольку $\mathbb{R}^* = GL_1(\mathbb{R})$.

4. Разрешимость алгебраических уравнений с параметром и группы кос

Рассмотрим алгебраические уравнения относительно λ с параметром x

$$\lambda^n + a_1(x)\lambda^{n-1} + ... + a_n(x) = 0, \tag{4}$$

где $a_k(x)$ — комплексные непрерывные функции на некотором компакте X. Здесь обсуждаются условия, при которых это уравнение разрешимо в непрерывных функциях в целом на X, что чрезвычайно важно и для обратных задач. В работе [11] изучались уравнения (4), для которых при каждом $x_0 \in X$ соответствующее уравнение с числовыми коэффициентами не имеет кратных корней. Напомним некоторые результаты этой работы.

Класс всех уравнений вида (4) без кратных корней обозначается через $\mathfrak{U}_n(X)$, также обозначим $\overline{\mathfrak{U}}_n(X) = \cup_{k \leq n}\mathfrak{U}_k(X)$. Множество $\mathfrak{U}_n(X)$ превращается в метрическое пространство, если расстояние $\rho(f', f'')$ между двумя уравнениями определить по формуле

$$\rho(f', f'') = \sup_{x \in X} \left(\sum_{k=1}^{n} |a'_k(x) - a''_k(x)|^2 \right)^{1/2},$$

где a'_k — коэффициенты уравнения f', а a''_k – коэффициенты уравнения f''. Под полной разрешимостью уравнения (4) понимается наличие по крайней мере n (где n — степень уравнения) строго различных непрерывных решений; при этом два решения считаются строго различными, если они не совпадают ни в одной точке $x \in X$. Полная разрешимость уравнения без кратных корней равносильна возможности разложения левой его части на линейные по λ и непрерывные по x множители.

Необходимое условие разрешимости всякого уравнения класса $\overline{\mathfrak{U}}_n(X)$ состоит в том, что разрешимы все двучленные уравнения $\lambda^k - a(x) = 0$, где $a(x) \neq 0$ при $x \in X$, а $k \leq n$; иными словами, нужно, чтобы из всякой не обращающейся в нуль комплексной непрерывной функции на X можно было извлечь непрерывный корень любой степени $k \leq n$. Можно показать, что последнее условие носит чисто топологический характер и равносильно возможности деления на $n!$ в группе $H^1(X, \mathbb{Z})$ одномерных целочисленных спектральных когомологий компакта X. В некоторых случаях это условие оказывается и достаточным. Однако в общем случае ситуация не столь проста. Разумеется, из разрешимости двучленных уравнений сразу следует полная разрешимость квадратного и кубического уравнения. Вместе с тем, существует метризуемый связный двумерный компакт X с безгранично делимой группой $H^1(X, \mathbb{Z})$, на котором некоторое уравнение четвертой степени не имеет ни одного непрерывного решения.

Если X — связный конечный клеточный комплекс, то для изучения проблемы разрешимости алгебраических уравнений на X привлекается топологическая техника, связанная с фундаментальной группой $\pi_1(X)$. В случае такого комплекса группа $H^1(X, \mathbb{Z})$ естественно изоморфна группе $\mathrm{Hom}(\pi_1(X), \mathbb{Z})$. Также в работе [11] установлено, что полная разрешимость всех уравнений класса $\overline{\mathfrak{U}}_n(X)$ в точности эквивалентна отсутствию нетривиальных гомоморфизмов группы $\pi_1(X)$ в артинову группу кос B_n. Тем самым, задача редуцирована к чисто теоретико-групповой: может ли конечноопределенная группа G иметь нетривиальные гомоморфизмы в группу кос B_n, если известно, что $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$? Оказывается, что при $n \leq 4$ условие $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{Z}) = 0$ в точности равносильно отсутствию нетривиальных гомоморфизмов группы G в группу B_n, а при $n > 4$ первое условие существенно слабее второго. Иными словами, если X — конечный клеточный комплекс, то условие $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$ не только необходимо, но и достаточно для полной разрешимости на X всех уравнений степени $n \leq 4$; если же $n > 4$, то это условие, оставаясь необходимым, перестает быть достаточным. Отметим, что для конечного клеточного комплекса $H^1(X, \mathbb{Z})$ – свободная абелева группа с конечным числом порождающих, а потому, если в ней возможно деление на какое-нибудь целое число, отличное от 1, то она тривиальна. Применение группы кос в этих исследованиях кажется загадочным лишь на первый взгляд. На самом деле, связь здесь более глубокая: фундаментальная группа пространства комплексных полиномов степени n без кратных корней изоморфна группе кос B_n.

Изучение полной разрешимости уравнений (4) напоминает положение дел в классической теории Галуа, но не сводится к ней. Теория Галуа оперирует с подгруппами симметрической группы S_n, тогда как рассматриваемая здесь задача требует изучения подгрупп более широкой группы — бесконечной группы B_n, для которой S_n служит естественной фактор-группой. Вместе с тем возможно построение теории, аналогичной теории Галуа; при этом основное поле заменяется алгеброй непрерывных функций на X, расширения — алгебрами непрерывных функций на некоторых накрытиях комплекса X, а группа Галуа — группой автоморфизмов этих более широких алгебр, при которых исходная алгебра $C(X)$ остается на месте (поэлементно).

Неразрешимость уравнений выше четвертой степени в общем случае заставляет искать дополнительные условия, которые вместе с условием $H^1(X, \mathbb{Z}) = 0$

обеспечивают разрешимость. Простейшим из таких условий является конечность группы $\pi_1(X)$.

Известно (см. например, [12], стр.102), что из разрешимости уравнений без кратных корней с непрерывными на компакте X коэффициентами вытекает разрешимость таких уравнений в любой коммутативной банаховой алгебре с пространством максимальных идеалов X.

5. Об обратимости аналитических отображений

Напомним некоторые факты обратимости аналитических отображений (см. [12]).

Хорошо известно разложение Лагранжа:

$$F(z(\zeta)) = F(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\zeta^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[F'(z)\Psi^k(z)\right]_{z=z_0},$$

выражающее функцию $F(z)$ через переменную ζ, связанную с z уравнением $z = z_0 + \zeta\Psi(z)$, если $F(z)$ и $\Psi(z)$ – голоморфные функции в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Из этой формулы, в частности, получается ряд Бюрмана-Лагранжа, позволяющий представить одну голоморфную функцию $\Phi(z)$ в виде ряда по степеням другой голоморфной функции

$$w = f(z) = (z - z_0)\Psi(z), \quad \Psi(z_0) \neq 0,$$

в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$:

$$\Phi(z) = \Phi(z_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{\Phi'(z)}{\Psi^k(z)}\right]_{z=z_0}.$$

При $\Phi(z) \equiv z$ этот ряд дает обращение голоморфной функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0:

$$z = z_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^k(z)}{k!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[\frac{(z-z_0)^k}{f^k(z)}\right]_{z=z_0}.$$

Существует обобщение разложения Лагранжа на системы произвольных неявных функций. Пусть

$$\Phi(w, z), \quad F_j(w, z), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

– голоморфные функции переменных $w = (w_1, w_2, \ldots, w_m)$, $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^{m+n}$,

$$F_j(0,0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(0,0)} = \left.\frac{\partial(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{\partial(z_1, z_2, \ldots, z_n)}\right|_{(0,0)} \neq 0.$$

По теореме о неявных функциях система уравнений

$$F_j(w, z) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{5}$$

в окрестности точки $(0, 0) \in \mathbb{C}^{m+n}$ однозначно определяет систему функций

$$z_j = \varphi_j(w), \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (z = \varphi(w)), \tag{6}$$

голоморфных в окрестности точки $0 \in \mathbb{C}^m$.

Возникает задача о нахождении явного представления функции $\Phi(w, \varphi(w))$ и, в частности (при $\Phi(w, z) \equiv z_j$) обратных функций $z = \varphi(w)$.

Не теряя общности, можно предполагать, что

$$F_j(0,0)=0, \quad \frac{\partial F_j(0,0)}{\partial z_k}=\delta_{jk}, \quad j,k=1,2,\ldots,n.$$

В противном случае заменим систему (5) эквивалентной ей системой

$$\left\|\frac{\partial F_j(0,0)}{\partial z_k}\right\|^{-1}\cdot F(w,z)=0.$$

Справедливо

Предложение 3 ([13], предложение 20.3). *Коэффициенты разложения Тейлора*

$$\Phi(w,\varphi(w))=\sum_{\alpha\geq 0}c_\alpha w^\alpha, \quad \alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m),$$

определяются формулой

$$c_\alpha=\sum_{|\beta|\leq 2|\alpha|}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!}D^{\alpha,\beta}_{w,z}\left[\Phi(w,z)g^\beta(w,z)\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{(0,0)},$$

где

$$g^\beta=g_1^{\beta_1}g_2^{\beta_2}\ldots g_n^{\beta_n}, \quad g_j(w,z)=F_j(w,z)-z_j, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

Рассмотрим теперь следующую частную задачу. Пусть в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$ заданы голоморфные отображения

(7) $$w_j=f_j(z), \quad j=1,2,\ldots,n \quad (w=f(z)),$$

удовлетворяющие условию

$$f_j(0)=0, \quad \frac{\partial f_j(0)}{\partial z_k}=\delta_{jk}, \quad j,k=1,2,\ldots,n,$$

и голоморфная функция $\Phi(z)$. Требуется выразить функцию $\Phi(z)$ через переменные $w=(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ и, в частности, найти отображение

$$z_j=\varphi_j(w), \quad j=1,2,\ldots,n \quad (z=\varphi(w)),$$

обратное отображению (7) в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$.

Теорема 4 (Перкус, [13] теорема 20.5). *При сделанных предположениях в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$ имеет место разложение*

(8) $$\Phi(\varphi(w))=\sum_{\beta\geq 0}\frac{(-1)^{|\beta|}}{\beta!}D^\beta\left[\Phi(z)\theta^\beta(z)\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{z=w},$$

где

$$\theta^\beta=\theta_1^{\beta_1}\theta_2^{\beta_2}\ldots\theta_n^{\beta_n}, \quad \theta_j(z)=f_j(z)-z_j, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

При $\Phi(z)\equiv z_j$, $j=1,2,\ldots,n$, ряд (8) *дает формулу обращения голоморфного отображения* (7).

При этом коэффициенты разложения функции $\Phi(z)$ в ряд по функциям (7):

(9) $$\Phi(z)=\sum_{\alpha\geq 0}c_\alpha f^\alpha(z), \quad \Phi(\varphi(w))=\sum_{\alpha\geq 0}c_\alpha w^\alpha,$$

выражаются формулой

$$c_\alpha = \sum_{|\beta|\le|\alpha|} \frac{(-1)^{|\beta|}}{\alpha!\beta!} D^{\alpha+\beta}\left[\Phi(z)\theta^\beta(z)\frac{\partial f}{\partial z}\right]_{z=0}, \tag{10}$$

Ряды (8)–(10) можно рассматривать как многомерные аналоги ряда Бюрмана-Лагранжа. Для специального случая функций (7) получается более точный аналог ряда Бюрмана-Лагранжа

Теорема 5 ([13] теорема 20.7)**.** *Если компоненты отображения* (7) *имеют вид*

$$w_j = f_j(z) = z_j\Psi_j(z), \quad \Psi_j(0)\ne 0, \quad j=1,2,\dots,n,$$

то имеет место разложение

$$\Phi(\varphi(w)) = \sum_{\alpha\ge 0}\frac{w^\alpha}{\alpha!}D^\alpha\left[\frac{\Phi(z)}{\Psi^{\alpha+1}(z)}\det\left|\delta_{jk}+\frac{z_j}{\Psi_j(z)}\frac{\partial\Psi_j}{\partial z_k}\right|\right]_{z=0}.$$

Если функция задается степенными рядами, то справедлива

Теорема 6 (Кэли–Сильвестр–Сакк, [13], теорема 20.10)**.** *Пусть функции заданы степенными рядами*

$$w_j = f_j(z) = z_j + \sum_{|\alpha|\ge 2} a_{j\alpha}z^\alpha, \quad j=1,2,\dots,n, \tag{11}$$

$$\Phi(z) = \sum_{\alpha\ge 0} b_\alpha z^\alpha. \tag{12}$$

Тогда коэффициенты ряда Тейлора

$$\Phi(\varphi(w)) = \sum_{\alpha\ge 0} c_\alpha w^\alpha$$

функции $\Phi(\varphi(w))$, *где* $z=\varphi(w)$ *– обращение системы* (11), *выражается через коэффициенты степенных рядов* (12) *формулой*

$$c_\alpha = \sum_{\tau,S}(-1)^{|\rho(S)|}b_\tau\Delta(S)\prod_{j=1}^n\frac{[\rho(S_j)+\alpha_j-1]!}{\alpha_j!}\prod_{|\nu|\ge 2}\frac{1}{s_{j\nu}!}(a_{j\nu})^{s_{j\nu}}, \tag{13}$$

где

$$S=(S_1,S_2,\dots,S_n), \quad S_j=\{s_{j\nu}\}_{|\nu|\ge 2}, \quad \rho(S)=(\rho(S_1),\rho(S_2),\dots,\rho(S_n)),$$

$$\rho(S_j)=\sum_{|\nu|\ge 2}s_{j\nu}, \quad \Delta(S)=\det|\delta_{kj}[\alpha_j+\rho(S_j)]+\sigma_k(S_j)|, \quad \sigma_k(S_j)=\sum_{|\nu|\ge 2}\nu_k s_{j\nu};$$

суммирование в $\sum_{\tau,S}$ *ведется по всевозможным мультииндексам* $\tau = (\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n), |\tau|\ge 0$, *и наборам* S, $\rho(S)\ge 0$, *удовлетворяющим условиям*

$$\tau_k + \sum_{j=1}^n\sigma_k(S_j) = \alpha_k+\rho(S_k), \quad k=1,2,\dots,n.$$

При этом если $\rho(S_j)+\alpha_j=0$, *то вместо* $[\rho(S_j)+\alpha_j-1]!$ *следует взять 1, а вместо* $\delta_{kj}[\alpha_j+\rho(S_j)]-\sigma_k(S_j)$ *поставить* δ_{kj}.

При $\Phi(w,z)=z_q$, $q=1,2,\dots,n$, предыдущие формулы дают формулы обращения системы степенных рядов (11). В частности, при $n=1$ получается формула обращения степенного ряда.

Теорема 7 (Сильвестр, [13], теорема 20.11)**.** *Пусть дан степенной ряд*

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k, \quad a_1 \neq 0.$$

Тогда коэффициенты обратного ряда

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w^n$$

выражаются формулой

$$c_n = \frac{1}{n a_1^n} \sum_{k_1,\dots,k_n} \frac{(n + k_2 + \ldots + k_n - 1)!}{k_2! \ldots k_n!} \left(-\frac{a_2}{a_1}\right)^{k_2} \ldots \left(-\frac{a_n}{a_1}\right)^{k_n},$$

где суммирование ведется по всевозможным наборам целых чисел $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$, …, $k_n \geq 0$, удовлетворяющим равенству

$$k_2 + 2k_3 + \ldots + (n-1)k_n = n - 1.$$

Использование результатов обращения аналитических отображений в обратных задачах можно найти в [14, 15]

6. Общие и конкретные примеры обратных задач, связанных с отображениями

Хорошо известно, что обратные задачи приводят к операторным уравнениям 1-го рода [16]. Рассмотрим операторное уравнение 1-го рода, когда область определения оператора — некоторый класс функций $\lambda(y) \in \{\lambda\}$, а значения оператора также класс функций $\tau(x) \in \{\tau\}$, то есть

$$A\lambda = \tau(x), \ \lambda(y) \in \{\lambda\}, \ \tau(x) \in \{\tau\}. \tag{14}$$

Здесь A — нелинейный оператор. Если $\lambda(y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k(y)$, где $e_k(y)$ — базис в $\{\lambda\}$, то при $x = x_j$, $j = 1, ..., m$ из (14) получается система нелинейных уравнений относительно $\lambda_1, ..., \lambda_m$

$$v_j(\lambda_1, ..., \lambda_m) \equiv A(x_j, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k(y)) = \tau(x_j), \ \ j = 1, ..., m.$$

Таким образом, проблема поиска решения $\lambda(y)$ в данном случае сводится к обращению отображения

$$v : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m, \ \ v_j(\lambda_1, ..., \lambda_m) = \tau_j, \ \ j = 1, ..., m.$$

Разумеется, можно и другими способами получать из операторного уравнения $A\lambda = \tau$ конечномерные отображения евклидовых пространств.

В качестве примера рассмотрим нелинейное интегральное уравнение 1-го рода

$$\tau(x) = \int_a^b K(x, y, \lambda(y)) dy,$$

где $K(x, y, z)$ — заданная, скажем непрерывная функция, $c \leq x \leq d$, $a \leq y \leq b$, $z \in \mathbb{R}$. Если $\lambda(y) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k e_k(y)$ и $\tau_j = \tau(x_j)$, то возникает система нелинейных уравнений относительно $\lambda_1, ..., \lambda_m$

$$\int\limits_a^b K(x_j, y, \sum_{k=1}^{m} \lambda_k e_k(y))dy = \tau_j, \ \ j = 1, ..., m.$$

С обратимостью отображений также связано общее понятие квазимонотонного оператора [2],[17]–[19].

Приведем определение.

Пусть E — множество элементов x, $\{\lambda\}$ — некоторое множество вещественных функций, заданных на множестве E, $\{\tau\}$ — произвольное множество и

$$A\lambda = \tau, \quad \lambda(x) \in \{\lambda\}, \quad \tau \in \{\tau\}$$

оператор, определённый на множестве $\{\lambda\}$ функций $\lambda(x)$ со значением в множестве $\{\tau\}$.

Под покрытием множества E понимается совокупность $\{\omega\}$ множеств $\omega \subset E$, объединение которых равно E.

Определение 1. *Оператор A называется квазимонотонным, если из неравенства $\lambda_1(x) > \lambda_2(x)$, выполненного для всех x, принадлежащих по крайней мере одному непустому множеству $\omega \in \{\omega\}$, следует, что $A\lambda_1 \neq A\lambda_2$.*

Приложения квазимонотонности к вопросам единственности решения линейных и нелинейных некорректно-поставленных задач математической физики можно найти в упомянутых работах [2], [17]–[19].

Рассмотрим пример из экономики.

Пусть вещественная функция $\lambda(x)$, $x \in E$ из некоторого класса $\{\lambda\}$ характеризует ресурс, зависящий от переменной x, например времени.

Если обозначить продукцию, которую можно изготовить из ресурса $\lambda(x)$ через $\tau \in \{\tau\}$, где $\{\tau\}$ — некоторое множество, возможно набор постоянных вектор-функций и прочее, то производственный оператор A как зависимость между ресурсом и продукцией можно представить в виде

$$A\lambda = \tau, \quad \lambda \in \{\lambda\}, \quad \tau \in \{\tau\}.$$

Квазимонотонность оператора A в данном случае означает, что если два ресурса $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ удовлетворяют оценке $\lambda_1(x) > \lambda_2(x)$, $\forall x \in \omega \subset E$, $\omega \in \{\omega\}$, то продукции $\tau_1 = A\lambda_1$, $\tau_2 = A\lambda_2$ — разные, то есть $\tau_1 \neq \tau_2$ как элементы множества $\{\tau\}$.

С обращением отображений также связана проблема пересчета данных одной обратной задачи на данные другой.

Пусть A и B некоторые обратимые отображения множества M во множество M_1, и A^{-1}, B^{-1} — отображения, обратные к ним. Если элемент $\lambda \in M$ является решением двух операторных уравнений первого рода

$$A\lambda = \varphi \quad B\lambda = \psi$$

с фиксированными элементами $\varphi \in M_1$, $\psi \in M_1$, то данные φ, ψ оказываются связанными естественными соотношениями $\varphi = AB^{-1}\psi$, $\psi = BA^{-1}\varphi$.

Данное обстоятельство позволяет в некоторых случаях переходить от исследования одной обратной задачи к другой, быть может более удобной.

Следующий пример содержится в книге [16, с.18].

Пример 5. Измеряется функция $\tau(x)$:

$$\tau(x) = \frac{\rho}{2\pi} \int_a^b \ln \left[\frac{(x-y)^2 + H^2}{(x-y)^2 + (H - \lambda(y))^2} \right] dy.$$

Требуется найти функцию $\lambda(y)$. В задачах гравиметрии функция $\lambda(y)$ описывает профиль рудного тела.

Пусть $\lambda(y) = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k y^k$, где $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$ — неизвестные постоянные коэффициенты. Выберем некоторые значения $x = x_0, \ldots, x_m$ и подставим в интеграл. Получим систему нелинейных уравнений порядка $m+1$

$$\tau_j = \Phi_j(\lambda_0, \ldots, \lambda_m), \quad j = 0, \ldots, m$$

относительно $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Возникает вопрос об обращении этой системы.

Вместо степеней $1, y, ..., y^m$ можно использовать другую систему базисных функций: $e_0(y), ..., e_m(y)$.

Полученный результат очевидно можно обобщить на случай более общего нелинейного интегрального уравнения

$$\tau(x) = \int_a^b K(x, y, \lambda(y)) dy.$$

Пример 6. Задача, связанная с ростом народонаселения.

Используя обращение конкретного отображения, найдем уравнение для модели роста населения в модели С.П. Капицы [20]–[22].

В проблеме роста населения Земли С.П. Капица предложил рассматривать уравнение

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C}{(t_1 - t)^2 + \tau^2}.$$

Здесь параметр τ — средний возраст жителя земли, $\tau \approx 42$, $t_1 = 2000$.

Отсюда следует формула для решения

$$w(t) = \frac{C}{\tau} \operatorname{arcctg} \frac{t_1 - t}{\tau}.$$

Возникает вопрос: какое уравнение

$$\frac{dw}{dt} = \lambda(w)$$

имеет решение $w(t) = \dfrac{C}{\tau} \operatorname{arcctg} \dfrac{t_1 - t}{\tau}$? Это можно найти, используя обратимость функции arcctg. Имеем

$$\frac{dw}{dt} = \frac{C}{\tau^2 \left[\left(\dfrac{t_1 - t}{\tau} \right)^2 + 1 \right]} = \frac{C}{\tau^2 \left[\operatorname{ctg}^2 \left(\frac{w\tau}{C} \right) + 1 \right]} = \frac{C}{\tau^2} \sin^2 \left(\frac{w\tau}{C} \right).$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = \lambda(w) \equiv \frac{C}{\tau^2} \sin^2 \left(\frac{w\tau}{C} \right).$$

Это уравнение представляется любопытным и может быть дополнением для теории С.П. Капицы.

Пример 7. Остановимся коротко на связях вопросов суперпозиций с обращением отображений. Рассмотрим суперпозицию гладких отображений $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$

$$f(\varphi(x)) = A(x),\ \ x \in \mathbb{R}^n,\ \ \varphi(x) \in \mathbb{R}^n,\ \ y \in \mathbb{R}^n,\ \ f(y) \in \mathbb{R}^n.$$

Предположим сначала, что отображения $\varphi(x)$ и $A(x)$ известны, а отображение $f(y)$ — искомое. Тогда ясно, что поиск отображения $f(y)$ непосредственно связан с обращением отображения $y = \varphi(x)$. Действительно, если $y = \varphi(x)$ и $x = \varphi^{-1}(y)$ — обратное к φ отображение, то имеет место формула

$$f(y) = A(\varphi^{-1}(y)).$$

При этом, как и в предыдущих случаях, неоднозначности отображения $f(y)$ связаны с неоднозначностью обратного отображения $x = \varphi^{-1}(y)$, в частности, с особенностями отображения $y = \varphi(x)$. В случае же, если $f(y)$ и $A(x)$ априори известны, а $\varphi(x)$ — искомое отображение, то

$$\varphi(x) = f^{-1}(A(x))$$

и поэтому в данном случае задача поиска $\varphi(x)$ сводится к нахождению обратных отображений f^{-1}.

В специальных случаях, скажем при условии аналитичности отображений f, φ, A, представляется интересным вопрос одновременного поиска двух отображений f, φ при заданном отображении A. Данная проблематика естественно связана с представлением функций или отображений в виде суперпозиции возможно меньшего числа переменных как, например, в известной теореме Колмогорова о представлении непрерывной функции в виде суперпозиций функций одного переменного и операции сложения. В заключение заметим, что рассматриваемые здесь проблемы суперпозиций естественно, как это показано выше, связаны с обратными задачами.

7. Представления решений и коэффициентов систем эволюционных уравнений и отображения

В данном параграфе приводятся представления решений и коэффициентов нелинейных многомерных систем эволюционных уравнений [23]. Такие представления могут служить основой моделирования и идентификации многих практических линейных и нелинейных многомерных задач. При этом, важным элементом является возможность широкого использования достижений теории и приложений одномерных дифференциальных уравнений, в частности, обыкновенных, так как в приводимых здесь представлениях решений и коэффициентов многомерных эволюционных уравнений участвуют решения одномерных уравнений. Данная проблематика является продолжением исследований работ [15], [24]–[26] и связана с отображениями решений одномерных уравнений на многомерные.

Кроме того, здесь изучается связь нелинейных задач идентификации с обращением начального состояния, проблемами теории особенностей отображений, теории катастроф и другими вопросами.

Пусть вектор-функция $F = F(y,t)$, $y \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $m \geq 1$ является решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a(y,F)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b(y,F)\frac{\partial F}{\partial y} + c(y,F), \tag{15}$$

где $a(y,z)$, $b(y,z)$ — квадратные матрицы порядка m, $c(y,z)$ — вектор-функции, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^m$. В дальнейшем I — единичная матрица порядка m, а $v(x,t)$ — функция класса C^2, $|\mathrm{grad}_x v| \neq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t_0 < t < t_1$. Здесь D — область вещественного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

Лемма 1. *Вектор-функция $w(x,t) = F(v(x,t),t)$ является решением системы многомерных нелинейных эволюционных уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a(v(x,t),w)}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Delta w - \\ - \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[\frac{\Delta v}{|\mathrm{grad}_x v|^2} a(v(x,t),w) - b((v(x,t),w)) - \frac{\partial v}{\partial t} I\right] \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \\ + c(v(x,t),w). \end{aligned}$$

Следствие 1. *Если $b = 0$, $\Delta v = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$, то имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a(v(x),w)}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Delta w + c(v(x),w).$$

Следствие 2. *Если $a = 0$, то имеет место тождество*

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[b((v(x,t),w)) + \frac{\partial v}{\partial t} I\right] \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} + c(v(x,t),w)$$

и $w = F(v(x,t),t)$, где $F(y,t)$ — решение системы уравнений первого порядка

$$\frac{\partial F}{\partial t} = b(y,F)\frac{\partial F}{\partial y} + c(y,F).$$

Пусть вектор-функция $F = F(y,t)$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $m \geq 1$, $y \in \mathbb{R}$, $t_0 < t < t_1$ является решением системы нелинейных дифференциальных уравнений

$$\alpha\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial F}{\partial t} = a(y,F)\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + b(y,F)\frac{\partial F}{\partial y} + c(y,F), \tag{16}$$

где α, β — постоянные, не равные одновременно нулю, $a(y,z)$, $b(y,z)$, $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^m$ квадратные матрицы порядка m, состоящие из функций $a_{ij}(y,z)$, $b_{ij}(y,z)$, $i,j = 1,2,\dots,m$. Обозначим через $v(x)$, произвольную дважды непрерывно дифференцируемую функцию, не зависящую от t, $|\mathrm{grad} v| \neq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Лемма 2. *Вектор-функция* $w(x,t) = F(v(x),t)$ *является решением системы многомерных нелинейных эволюционных уравнений*

$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} = \\ = \frac{a(v(x),w)}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Delta w - \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[\frac{a(v(x),w)\Delta v}{|\mathrm{grad}_x v|^2} - b((v(x),w))\right]\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \\ + c(v(x),w).$$

Следствие 3. *Если* $b = 0$, $\Delta v = 0$, *то*

$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{a(v(x),w)}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Delta w + c(v(x),w).$$

Пусть вектор-функция $F = F(y)$, $F = (F_1, F_2, \dots, F_m)$, $m \geq 1$, $y \in \mathbb{R}$ является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$a(y,F)F'' + b(y,F)F'(y) + c(y,F) = 0, \tag{17}$$

где $a(y,z)$, $b(y,z)$ — квадратные матрицы порядка m, $c(y,z)$ — m-мерный вектор, а $v(x,t)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $t_0 < t < t_1$ — произвольная функция класса C^2, такая, что $|\mathrm{grad}_x v| \neq 0$, $x \in D$, $t_0 < t < t_1$, α, β — постоянные, не равные одновременно нулю.

Лемма 3. *Вектор-функция* $w(x,t) = F(v(x,t))$ *является решением системы нелинейных многомерных эволюционных уравнений*

$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} = \\ = \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[\alpha v_t^2 I + a(v(x,t),w)\right]\Delta w + \\ + \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[b((v(x,t),w)) - \frac{\Delta v}{|\mathrm{grad}_x v|^2}(\alpha v_t^2 I + a(v(x,t),w)) + (\alpha v_{tt} + \beta v_t)I\right] \times \\ \times \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \\ + c(v(x,t),w).$$

Пример 8. Если в уравнении (17) положить $m = 1$, $a = y(1-y)$, $b = (\gamma - (p + q + 1))$, $c = -pq$, где γ, p, q — постоянные, то уравнение (17) превращается в гипергеометрическое и имеет решение в виде ряда Гаусса.

$$F(y) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(p)\Gamma(q)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(p+k)\Gamma(q+k)}{\Gamma(\gamma+k)}\frac{y^k}{k!}, \quad |y| < 1.$$

В данном случае функция $w(x,t) = F(v(x,t))$, $|v| < 1$, является решением линейного уравнения

(18)
$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Bigg[(\alpha v_t^2 + v(1-v))\Delta w + (\gamma - (p+q+1))v - \\ - \frac{\Delta v}{|\mathrm{grad}_x v|^2}(\alpha v_t^2 + v(1-v)) + \alpha v_{tt} + \beta v_t\Bigg]\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j} - pqw$$

с произволом выбора и использования параметров γ, p, q, α, β и функции $v(x,t)$.

При этом в силу линейности гипергеометрического уравнения функция $w(x,t) = F(v(x,t)) + \Phi(v(x,t)) + \widetilde{w}(x,t)$ также решение уравнения (18), где $\Phi(y)$ — другое линейно независимое решение гипергеометрического уравнения, $\widetilde{w}(x,t)$ — любое решение (18) с коэффициентами, определенными постоянными γ, α, β, p, q и функцией $v(x,t)$.

Следствие 4. *Если $m = 1$, $a = b = c = 0$, то для любой $F(y) \in C^2$ и любой $v(x,t)$ имеет место равенство для $w(x,t) = F(v(x,t))$*

$$\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta\frac{\partial w}{\partial t} = \\ = \frac{\alpha v_t^2}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\Delta w - \frac{1}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\left[\frac{\Delta v}{|\mathrm{grad}_x v|^2}\alpha v_t^2 - \alpha v_{tt} - \beta v_t\right]\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_j}\frac{\partial w}{\partial x_j}.$$

Замечание 2. В уравнениях лемм 2, 3 присутствуют коэффициенты $\dfrac{1}{|\mathrm{grad}_x v(x)|^2}$, $\dfrac{v_t^2}{|\mathrm{grad}_x v(x)|^2}$. Хорошо известно (см., например, [27]), что данные коэффициенты имеют физический смысл, а именно, пусть $v(x,t) = 0$ движущаяся со временем t поверхность в $\mathbb{R}^n$, например $v(x) = t$, где $v(x,t)$ — дифференцируемая функция. Тогда скорость $c(x,t)$ движения данной поверхности по направлению ее нормали равна [27]

$$c(x,t) = -\frac{\dfrac{\partial v}{\partial t}}{|\mathrm{grad}_x v|},$$

а при $v(x,t) = v(x) - t$, скорость $c(x) = \dfrac{1}{|\mathrm{grad}_x v(x)|}$ не зависит от t и при этом $-\dfrac{\partial v}{\partial t} = \omega$ называют фазой, $\mathrm{grad}_x v = k$ — волновым вектором и уравнение $c(x,t)|k| = \omega$ — дисперсионным соотношением.

Замечание 3. Решения систем уравнений (15)–(17) могут соответствовать как прямым, так и обратным задачам при наличии или отсутствии начально-краевых условий. При этом, если имеется начально-краевая информация для $F(y,t)$, то в силу формулы $w(x,t) = F(v(x,t),t)$ получаются начально-краевые условия и для $w(x,t)$ с ограничениями на $v(x,t)$, что важно для приложений.

В дальнейшем иногда целесообразно производить расширение полученных соотношений общим стандартным образом типа $w(q,t) = u(q)F(v(\varphi(q)),t)$ где $\varphi(q)$ отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, $u(q)$ — матрица или в соответствии с результатами

[15, 24, 25, 26] – при наличии начальных и краевых условий с основной целью — получением наиболее общего представления решения и коэффициентов систем уравнений. Ограничимся одним результатом такого расширения, используя соотношения приведенные в [15], см. также параграф 8 данной статьи.

Пусть $V = V(y)$ — некоторое отображение пространства $\mathbb{R}^n$ в себя, $y = (y^1, ..., y^n)$, $p \in \mathbb{R}^n$ — постоянный ненулевой вектор, $t \in \mathbb{R}$ и V^{-1} — отображение обратное к V. Тогда вектор-функция $F(t, y) = V^{-1}(tp + V(y))$ удовлетворяет системам дифференциальных уравнений первого порядка [15]

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = A\left(F(t,y)\right), \tag{19}$$

$$\frac{\partial F(t,y)}{\partial t} = \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} A(y), \tag{20}$$

где

$$A(y) = \left.\frac{\partial F(t,y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot p.$$

Рассмотрим функцию

$$w(t,x) = U(x) F(t, \varphi(x)), \tag{21}$$

где $U(x)$ — квадратная матрица порядка n, $\varphi(x)$ — вектор-столбец, $x = (x^1, ..., x^n)$, и найдем соответствующие (19), (20) уравнения для $w(x,t)$ с большим произволом.

Из равенства (21) дифференцированием по переменным t, $x = (x^1, ..., x^n)$ получаем соотношения

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = U(x) \frac{\partial F(t, \varphi(x))}{\partial t}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(x)}{\partial x} F(t, \varphi(x)) + U(x) \left.\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}. \tag{23}$$

Из равенств (21)–(23) находим F, $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$:

$$F(t, \varphi(x)) = U^{-1}(x) w(t,x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = U^{-1}(x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = U^{-1}(x) \frac{\partial w(t,x)}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1} - U^{-1}(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x} U^{-1}(x) w(t,x) \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}$$

и подставляем в (19), (20). Таким образом, имеет место

Лемма 4. *Отображение $w(t,x) = U(x)F(t, \varphi(x))$, где $F(t,y) = V^{-1}(tp + V(y))$ удовлетворяет системам уравнений*

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = U(x) A\left(U^{-1}(x) w(t,x)\right), \tag{24}$$

(25)
$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = \left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x} U^{-1}(x) w(t,x)\right) \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1} \left.\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^{-1}\right|_{y=\varphi(x)} \cdot p.$$

Приведем теперь систему уравнений второго порядка.

В [15] показано, что вектор-функция $F(t,y) = V^{-1}(tp+V(y))$ удовлетворяет также системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{\partial^2 F(t,y)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,y)}{\partial y^2}\,(A(y)) + \frac{\partial F(t,y)}{\partial y} B(y), \tag{26}$$

где $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\,(A(y))$ — второй дифференциал функции $F(t,y)$ по переменным y примененный к вектору $A(y)$ и

$$B(y) = -\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2}\left(\left(\frac{\partial V(y)}{\partial y}\right)^{-1}\cdot p\right).$$

Найдем для функции $w(t,x) = U(x)F(t,\varphi(x))$ соответствующее более общее уравнение второго порядка. Дифференцируем равенство (21) по переменным t, $x = (x^1,...,x^n)$, получим соотношения:

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial t} = U(x)\frac{\partial F(t,\varphi(x))}{\partial t}, \tag{27}$$

$$\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} = U(x)\frac{\partial^2 F(t,\varphi(x))}{\partial t^2}, \tag{28}$$

$$\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial U(x)}{\partial x} F(t,\varphi(x)) + U(x)\left.\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} F(t,\varphi(x)) + 2\frac{\partial U(x)}{\partial x}\left.\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} + \\ &\quad + U(x)\left.\frac{\partial^2 F(t,y)}{\partial y^2}\right|_{y=\varphi(x)}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^2 + \\ &\quad + U(x)\left.\frac{\partial F(t,y)}{\partial y}\right|_{y=\varphi(x)} \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}.\end{aligned} \tag{30}$$

Из равенств (21), (27)–(30) выражаем F, $\dfrac{\partial F}{\partial t}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$:

$$F(t,\varphi(x)) = U^{-1}(x)w(t,x),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = U^{-1}(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = U^{-1}(x)\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = U^{-1}(x)\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\right)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = U^{-1}(x)\left[\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}U^{-1}(x)w(t,x) - \right.$$
$$- 2\frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)\left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\right) -$$
$$\left. - \left(\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} - \frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\right)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}\right]\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}$$

и подставляем в (26).

Лемма 5. *Отображение $w(t,x) = U(x)F(t,\varphi(x))$, где $F(t,y) = V^{-1}(tp+V(y))$ удовлетворяет системе уравнений второго порядка*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} \quad = \quad & \frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}(A(\varphi)) + \frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}B(\varphi) - \\
& - \left(2\frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)\frac{\partial w(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial w(t,x)}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}\right)\times \\
& \times\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}(A(\varphi)) - \\
& - \frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}B(\varphi) - \\
& - \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2}U^{-1}(x)w(t,x)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}(A(\varphi)) + \\
& + 2\frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)\frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}(A(\varphi)) + \\
& + \frac{\partial U(x)}{\partial x}U^{-1}(x)w(t,x)\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}\right)^{-2}(A(\varphi)).
\end{aligned} \tag{31}$$

Представляют определенный интерес и координатные формы записи полученных систем уравнений, что ниже и делается.

Обозначим

$$F = \begin{pmatrix} F^1 \\ \vdots \\ F^n \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} V^1 \\ \vdots \\ V^n \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix},\ p = \begin{pmatrix} p^1 \\ \vdots \\ p^n \end{pmatrix},$$

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} U_1^1 & \dots & U_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ U_1^n & \dots & U_n^n \end{pmatrix}.$$

Пусть $V = V(y)$ и $y = y(V)$ — взаимно обратные отображения.

Тогда уравнение (24) в координатной форме имеет вид

$$\frac{\partial w^k(t,x)}{\partial t} = U_l^k(x)\left.\frac{\partial y^l}{\partial V^s}\right|_{V=V(\widetilde{U}w(t,x))}\cdot p^s. \tag{24'}$$

Здесь $\widetilde{U}(x)$ — матрица обратная матрице $U(x)$.

А уравнение (25) в координатной форме имеет следующий вид.

$$(25') \quad \frac{\partial w^k(t,x)}{\partial t} = \left(\frac{\partial w^k(t,x)}{\partial x^l} - \frac{\partial U^k_\alpha(x)}{\partial x^l} \widetilde{U}^\alpha_\beta(x) w^\beta(t,x) \right) \frac{\partial x^l}{\partial \varphi^s} \left. \frac{\partial y^s}{\partial V^r} \right|_{V=V(\varphi)} \cdot p^r.$$

Уравнение (31) в координатной форме имеет вид

$$(31') \quad \frac{\partial^2 w^k}{\partial t^2} = \Bigg[\frac{\partial^2 w^k}{\partial x^l \partial x^m} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial x^m}{\partial \varphi^\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\beta}{\partial V^\eta} - \frac{\partial w^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi^\alpha} \frac{\partial y^\alpha}{\partial V^s} \frac{\partial^2 V^s}{\partial y^\beta \partial y^\gamma} \frac{\partial y^\beta}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\gamma}{\partial V^\eta} -$$
$$- 2 \frac{\partial U^k_l}{\partial x^\alpha} \widetilde{U}^l_r \frac{\partial w^r}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi^\delta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\delta}{\partial V^\eta} - \frac{\partial w^k}{\partial x^l} \frac{\partial x^l}{\partial \varphi^m} \frac{\partial^2 \varphi^m}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi^\delta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\delta}{\partial V^\eta} +$$
$$+ \frac{\partial U^k_l}{\partial x^\alpha} \widetilde{U}^l_r w^r \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial y^\gamma}{\partial V^s} \frac{\partial^2 V^s}{\partial y^\beta \partial y^\delta} \frac{\partial y^\beta}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\delta}{\partial V^\eta} + 2 \frac{\partial U^k_l}{\partial x^\alpha} \widetilde{U}^l_m \frac{\partial U^m_r}{\partial x^\beta} \widetilde{U}^r_s w^s \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial \varphi^\delta} \frac{\partial y^\gamma}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^\delta}{\partial V^\eta} +$$
$$+ \frac{\partial U^k_l}{\partial x^\alpha} \widetilde{U}^l_m w^m \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi^\beta} \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial x^\gamma \partial x^\delta} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \varphi^r} \frac{\partial x^\delta}{\partial \varphi^s} \frac{\partial y^r}{\partial V^\sigma} \frac{\partial y^s}{\partial V^\eta} \Bigg]_{V=V(y),\, y=\varphi(x)} \cdot p^\sigma p^\eta.$$

Таким образом получено решение систем эволюционных уравнений в виде векторной волны со значительным произволом вида

$$w(x,t) = U(x) \left[V^{-1}(pt + v(\varphi(x))) \right],$$

где $U(x)$ — матрица, $V(x)$, $\varphi(x)$ — отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

В леммах 4, 5 конкретизация $U(x)$, $V(x)$, $\varphi(x)$, приводит к конкретизации не только решения, но и коэффициентов эволюционных уравнений в соответствии с выписанными выше формулами. Как отмечалось выше, аналогичные расширения решений и коэффициентов можно получить и для результатов лемм 1, 2, 3.

Далее рассмотрим проблему поиска моделей с использованием данных предшествующего времени и приведем результаты.

Сначала отметим, что Форрестер и другие математики при создании математической модели мировой экономики в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений подбирали параметры модели так, чтобы динамика системы по возможности совпадала с реальной мировой динамикой от 1900 года до 1970 года. Более подробную информацию и ссылки по данному вопросу можно найти в статье [28].

С учетом пространственной или другой неоднородности в работе [29] (приведены эволюционные нелинейные уравнения типа реакции-диффузии. Здесь реализуется математически данная идея определения параметров модели по предшествующим по времени данным в случае пространственно неоднородных эволюционных уравнений общего вида при поиске нелинейностей (реакций).

Рассмотрим общее эволюционное уравнение [1]

$$(32) \qquad \frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \lambda(w)$$

с неизвестной вектор-функцией

$$w = w(x,t) = (w_1, \ldots, w_n), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1, \ \ t \geq 0$$

и вектор-функцией

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

которая также подлежит определению, где A – некоторый оператор, линейный или нелинейный, действующий по переменным x, не зависящий от t.

Предположим, что заданы начальные условия

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x).$$

Заметим, что нам нужны лишь такие данные, а не решение $w(x,t)$ для $-T \leq t \leq 0$. Из (32) при $t = 0$ получается равенство

$$w_1(x) = Aw_0(x) + \lambda(w_0(x)).$$

Отсюда

$$\lambda(w_0(x)) = \underbrace{w_1(x) - Aw_0(x)}_{\text{известная функция от } x}.$$

Чтобы найти λ, обозначим $w_0(x) = z$, $z = (z_1, ..., z_n)$. Если нам удастся найти обратную функцию $w_0^{-1}(z)$, то полагая $x = w_0^{-1}(z)$, получаем формулу для коэффициента $\lambda(z)$:

$$\lambda(z) = [w_1(x) - Aw_0(x)]_{x=w_0^{-1}(z)}$$

и таким образом система уравнений (32) становится определенной.

При этом обратное отображение $x = w_0^{-1}(z)$ может быть неоднозначным, либо существовать лишь в некоторой области и т.п.

Заметим, что независимо от того известна функция $w_1(x) = \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0}$ или нет неоднозначность определения $\lambda(z)$ существенно зависит от неоднозначности отображения $z = w_0(x)$ (см.[1]).

Аналогичная задача обращения отображения возникает и при изучении весьма популярных дифференциально-разностных уравнений

$$(33) \qquad w(t+h,x) = Aw(t,x) + \lambda(w(t,x)), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1,$$

с неизвестной вектор-функцией

$$w = (w_1, \ldots, w_n)$$

и вектор-функцией

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n).$$

Оператор A также действует по переменным x.

Если предположить, что заданы функции

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad w|_{t=h} = w_h(x),$$

то при $t = 0$ из уравнения (33) получаем формулу для коэффициента $\lambda(z)$:

$$\lambda(z) = [w_h(x) - Aw_0(x)]_{x=w_0^{-1}(z)}.$$

И здесь возникает задача обращения отображения $z = w_0(x)$.

Пример 9. Рассмотрим уравнение Колмогорова-Петровского-Пискунова (уравнение нелинейной диффузии)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda(w)$$

$k = \mathrm{const}$, $a \leq x \leq b$, $t \geq 0$. Наряду с решением $w = w(x,t)$, неизвестной является и нелинейность $\lambda(z)$.

Будем искать решения, удовлетворяющее начальным условиям:

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w_1(x).$$

В соответствии с общей схемой, найдем $\lambda(z)$. Подставим в уравнение $t = 0$

$$w_1(x) = kw_0''(x) + \lambda(w_0),$$

положим $w_0(x) = z$, $x = w_0^{-1}(z)$ и придем к формуле

$$\lambda(z) = [w_1(x) - kw_0''(x)]|_{x=w_0^{-1}(z)}.$$

Ясно, что сколько корней у уравнения $w_0(x) = z$, столько и функций λ. Это обстоятельство определяет различные сценарии развития событий.

Рассмотрим конкретные начальные данные

$$w|_{t=0} = w_0(x) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} bx + \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = w_1(x) = \frac{\alpha}{\pi(1+b^2x^2)}.$$

Отметим, что при $b \longrightarrow \infty$ функция $w_0(x)$ стремится к функции Хевисайда

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Положим $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} bx + \frac{1}{2} = z$, тогда $\frac{1}{b}\operatorname{tg}(\pi z - \frac{\pi}{2}) = x$. Из начальных условий находим

$$w_0' = \frac{1}{\pi}\frac{b}{1+b^2x^2}, \quad w_0'' = -\frac{1}{\pi}\frac{2b^3x}{(1+b^2x^2)^2}.$$

Следовательно, при $t = 0$ уравнение примет вид

$$\frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{1+b^2x^2} = -\frac{k}{\pi}\left.\frac{2b^3x}{(1+b^2x^2)^2}\right|_{x=\frac{1}{b}\operatorname{tg}(\pi z-\frac{\pi}{2})} + \lambda(z).$$

Отсюда находим

$$\lambda(z) = \frac{1}{\pi}\sin^2(\pi z)\left(\alpha - b^2k\sin 2\pi z\right).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция

$$w(x,t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(bx + \alpha t) + \frac{1}{2}$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\pi}\sin^2(\pi w)\left(\alpha - b^2k\sin 2\pi w\right),$$

с начальными условиями

$$w|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} bx + \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{1}{\pi}\frac{\alpha}{1+b^2x^2}.$$

При этом еще раз обращаем внимание на важность проблем, связанных с обращением начального состояния неоднородной по пространству субстанции, при поиске нелинейных зависимостей, определяющих эволюционный процесс.

В этой связи возникает вопрос: каковы могут быть неопределенности при обращении отображения $z = w_0(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$ в общем "типичном"случае.

Этот вопрос связан, как известно, с особенностью дифференцируемых отображений, в частности, с теоремой Уитни [30].

Приведем некоторые известные результаты в удобной для нас форме.

Пусть $z=\varphi(x)$ гладкий диффеоморфизм окрестности нуля на себя в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $\varphi(0)=0$.

По теореме Уитни почти всякое гладкое отображение из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$, является одним из следующих отображений:

$$\begin{cases} z_1=\varphi_1(x), \\ z_2=\varphi_2(x); \end{cases} \quad \begin{cases} z_1=\varphi_1(x), \\ z_2=\varphi_2^2(x); \end{cases} \quad \begin{cases} z_1=\varphi_1(x), \\ z_2=\varphi_2^3(x)+\varphi_1(x)\varphi_2(x). \end{cases}$$

Почти всякое гладкое отображение из $\mathbb{R}^3$ в $\mathbb{R}^3$ является одним из следующих отображений:

$$1)\begin{cases} z_1=\varphi_1(x), \\ z_2=\varphi_2(x), \\ z_3=\varphi_3(x); \end{cases} \quad 2)\begin{cases} z_1=\varphi_1^2(x), \\ z_2=\varphi_2(x), \\ z_3=\varphi_3(x); \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} z_1=\varphi_1^3(x)+\varphi_1(x)\varphi_2(x), \\ z_2=\varphi_2(x), \\ z_3=\varphi_3(x); \end{cases} \quad 4)\begin{cases} z_1=\varphi_1^4(x)+\varphi_1(x)\varphi_2(x)+\varphi_2(x)\varphi_3(x), \\ z_2=\varphi_2(x), \\ z_3=\varphi_3(x); \end{cases}$$

Если рассмотреть отображения из $\mathbb{R}^4$ в $\mathbb{R}^4$, то, помимо перечисленных, возникает еще отображение

$$\begin{cases} z_1=\varphi_1^2(x)\pm\varphi_2^2(x)+\varphi_1(x)\varphi_3(x)+\varphi_2(x)\varphi_4(x), \\ z_2=\varphi_1(x)\varphi_2(x), \\ z_3=\varphi_3(x), \\ z_4=\varphi_4(x). \end{cases}$$

В данных случаях неоднозначности отображения $z=w_0(x)$ связаны с конечной неоднозначностью поиска отображения $z=\varphi(x)$ с последующим взаимнооднозначным обращением $x=\varphi^{-1}(z)$, что представляется важным для приложений.

8. Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи

Изложим более подробно связь конечномерных отображений с ветвящимися процессами и обратными задачами.

Производящая функция $F(t,x)$ однородного по времени ветвящегося процесса с условием ветвления удовлетворяет соотношениям [31]

$$F(t+s,x)=F(t,F(s,x)),\ \ F(0,x)=x. \tag{34}$$

Данное полугрупповое свойство присуще и другим эволюционным явлениям с обобщением по размерности F и x и находит приложения [4].

В настоящем параграфе приводится формула для решения $F(t,x)$, содержащая произвольное отображение, которое используется для решения обратных задач.

Лемма 6. *Пусть $V=V(x)$ — некоторое аналитическое отображение пространства $\mathbb{C}^n$ в себя, $p\in\mathbb{C}^n$ — постоянный ненулевой вектор. Тогда вектор-функция*

$$F(t,x)=V^{-1}(t\cdot p+V(x)) \tag{35}$$

удовлетворяет уравнению

$$F(t+s,x)=F(t,F(s,x))$$

и условию

$$F(0,x)=x.$$

Здесь t, $s \in \mathbb{C}$ и V^{-1} — отображение обратное к V.

Доказательство этой и последующих лемм проводится непосредственными вычислениями и поэтому опускаются.

Замечание 1. Обратных отображений к отображению $V = V(x)$ может быть несколько (например, $V(x) = x^2$ для $n = 1$).

Лемма 7. *Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет соотношениям* (34) *Тогда $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} A(x), \tag{36}$$

где

$$A(x) = \left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0}, \quad \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_j(t,x)}{\partial x_i}\right). \tag{37}$$

Лемма 8. *Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет соотношениям* (34) *и отображение $A(x)$ определено формулой* (37). *Тогда $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} = A\left(F(t,x)\right). \tag{38}$$

Следствие 5. *Из* (36) *и* (38) *получаем, что $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial F(t,x)}{\partial x} A(x) = A\left(F(t,x)\right). \tag{39}$$

Лемма 9. *Пусть $F(t,x)$ удовлетворяет соотношениям* (34), *отображение $A(x)$ определено формулой* (37), *а отображение $B(x)$ определено формулой*

$$B(x) = \left.\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0}. \tag{40}$$

Тогда $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}\left(A(x)\right) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} B(x), \tag{41}$$

Здесь и ниже $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(A(x)\right)$ — второй дифференциал функции $F(t,x)$ по переменным x примененный к вектору $A(x)$.

Отметим, что уравнение (41) при $n = 1$ имеет вид уравнения акустики.

Лемма 10. *В случае, когда $F(t,x)$ задается в виде*

$$F(t,x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x))$$

имеют место формулы

$$\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = A(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p, \tag{42}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = B(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p\right). \tag{43}$$

Пусть $x = (x_{ij})$ — квадратная матрица переменных x_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, и

$$f(x) = sx + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m, \ \ a_m \in \mathbb{C},$$

сходящийся степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, $0 < |s| < 1$ — некоторое комплексное число.

Рассмотрим **обратную задачу**:

Найти $F(t, x) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ такую, что

$$F(t, x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x)), \tag{44}$$

$$F(0, x) = x, \ \ F(T, x) = f(x) = sx + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m, \ \ a_m \in \mathbb{C}, \tag{45}$$

и $f(x)$ — известное отображение.

В данном случае нужно найти $V(x)$, если $V(f(x)) = Tp + V(x)$.

Мы называем поиск $F(t, x)$ обратной задачей потому, что в силу лемм 7–9 определяются не только решения уравнений но и коэффициенты.

Теорема 8. *Пусть отображение* $V : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ *определено равенством*

$$\exp\left(V(x)\right) = \eta \lim_{m \longrightarrow \infty} s^{-m} f^n(x),$$

где $\eta \neq 0$ *— некоторое комплексное число,* $f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$, $f^1(x) = f(x)$*;* $T > 0$ *— некоторое вещественное число,* $p = \dfrac{\ln s}{T} E$ *— скалярная матрица* $n \times n$, $0 < |s| < 1$*. Тогда*

$$F(t, x) = V^{-1}(t \cdot p + V(x)), \tag{46}$$

$$A(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p, \tag{47}$$

$$B(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot p\right) \tag{48}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \left(A(x)\right) + \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} B(x) \tag{49}$$

и условиям

$$F(T, x) = f(x), \ \ F(0, x) = x. \tag{50}$$

Отметим связь рассматриваемой в теореме задачи с функциональными уравнениями. Рассмотрим уравнение Шрёдера

$$W(f(x)) = sW(x).$$

Согласно [32] оно имеет единственное однопараметрическое семейство решений

$$W(x) = \eta \lim_{m \longrightarrow \infty} s^{-m} f^m(x),$$

где $\eta \neq 0$ — некоторое комплексное число, $f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$, $f^1(x) = f(x)$. Положим

$$\exp \circ V(x) = W(x), \ \ F(t, x) = V^{-1}(Tp + V(x)).$$

Тогда

$$V(f(x)) = Tp + V(x)$$

— функциональное уравнение Абеля. Согласно лемме 10 отображения (46)–(48) удовлетворяют системе (49) и

$$F(T, x) = f(x), \quad F(0, x) = x.$$

Аналогично аддитивному процессу (34) рассмотрим мультипликативный

$$F(t \cdot s, x) = F(t, F(s, x)), \quad F(1, x) = x, \tag{34$'$}$$

и приведем утверждения имеющие место в этом случае. Отметим, что переменные t, s в равенстве (34′) мы считаем одномерными, но их можно рассматривать как квадратные переменные матрицы порядка $n \times n$ и все дальнейшие утверждения могут быть сформулированы и в этом случае.

Лемма 6′. *Пусть $V = V(x)$ — некоторое отображение пространства $\mathbb{C}^n$ в себя. Тогда вектор-функция*

$$F(t, x) = V^{-1}(t \cdot V(x)) \tag{35$'$}$$

удовлетворяет уравнению

$$F(t \cdot s, x) = F(t, F(s, x))$$

и условию

$$F(1, x) = x.$$

Здесь t, $s \in \mathbb{C}$ и V^{-1} — отображение обратное к V.

Лемма 7′. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (34′). Тогда $F(t, x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$t \cdot \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} A(x), \tag{36$'$}$$

где

$$A(x) = \left. \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} \right|_{t=1}, \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F_j(t, x)}{\partial x_i} \right). \tag{37$'$}$$

Лемма 8′. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (34′) и отображение $A(x)$ определено формулой (37′). Тогда $F(t, x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$t \cdot \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = A\left(F(t, x)\right). \tag{38$'$}$$

Следствие 6. *Из (36′) и (38′) получаем, что $F(t, x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial x} A(x) = A\left(F(t, x)\right). \tag{39$'$}$$

Лемма 9′. *Пусть $F(t, x)$ удовлетворяет соотношениям (34′), отображение $A(x)$ определено формулой (37′), а отображение $B(x)$ определено формулой*

$$B(x) = \left. \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2} \right|_{t=1}. \tag{40$'$}$$

Тогда $F(t,x)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$t^2 \cdot \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}(A(x)) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} B(x). \tag{41'}$$

Лемма 10′. *В случае, когда $F(t,x)$ задается в виде*

$$F(t,x) = V^{-1}(t \cdot V(x))$$

имеют место формулы

$$\left.\frac{\partial F(t,x)}{\partial t}\right|_{t=1} = A(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot V(x), \tag{42'}$$

$$\left.\frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2}\right|_{t=1} = B(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot V(x)\right). \tag{43'}$$

Пусть $x = (x_{ij})$ — квадратная матрица переменных x_{ij}, $i,j = 1,...,n$, и

$$f(x) = sx + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m, \quad a_m \in \mathbb{C},$$

сходящийся степенной ряд в окрестности точки $x = 0$, $0 < |s| < 1$ — некоторое комплексное число.

Рассмотрим **обратную задачу**:

Найти $F(t,x) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ такую, что

$$F(t,x) = V^{-1}(t \cdot V(x)) \tag{44'}$$

$$F(1,x) = x, \;\; F(T,x) = f(x) = sx + \sum_{m=2}^{\infty} a_m x^m, \quad a_m \in \mathbb{C}, \tag{45'}$$

и $f(x)$ — известное отображение.

Отметим, что в силу лемм 7′–9′, также как и выше, определяются не только решения уравнений, но и коэффициенты.

Теорема 8′. *Пусть отображение $V : \mathbb{C}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ определено равенством*

$$V(x) = \eta \lim_{m \longrightarrow \infty} s^{-m} f^m(x),$$

где s, $\eta \neq 0$ — некоторые комплексные числа, $0 < |s| < 1$, $f^{m+1}(x) = f(f^m(x))$, $f^1(x) = f(x)$; $T > 0$ — некоторое вещественное число. Тогда

$$F(t,x) = V^{-1}(t \cdot V(x)), \tag{46'}$$

$$A(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot V(x), \tag{47'}$$

$$B(x) = -\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2}\left(\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^{-1} \cdot V(x)\right) \tag{48'}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$t^2 \cdot \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2}(A(x)) + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} B(x) \tag{49'}$$

и условиям

$$F(T,x) = f(x), \;\; F(1,x) = x. \tag{50'}$$

9. Отображения и преобразования дифференциальных уравнений

В задачах идентификации для решений динамических систем предпочтительно иметь явные формулы, содержащие параметры, которые и нужно конкретизировать [33]. Для многомерных обратных задач также желательно иметь формулы, представления решений и коэффициентов дифференциальных уравнений, которые содержали бы достаточно широкий произвол, в виде функций одного или многих переменных с целью дальнейшей их конкретизации. Здесь приводятся формулы для решений и коэффициентов, которые содержат отображения и обратные.

Заметим также, что дальнейшее расширение полученных формул возможно, в частности, путем одновременного преобразования координат и решений [5, 3].

Лемма 11. *Пусть заданы*

1) *область $D \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\gamma = \partial D$, ν — единичный вектор нормали границы γ;*

2) *вектор-функция $v(x)$, осуществляющая диффеоморфное отображение области D на свой образ $v(D) \subset \mathbb{R}^n$;*

3) *матричнозначная функция $u(x) = (u_{ij}(x))$, $i, j = 1, \dots, m$, $m \geq 1$, $x \in D$, имеющая обратную $u^{-1}(x)$ (в смысле умножения матриц);*

4) *вектор-функция $G(z)$, $z = (z_1, \dots, z_m)$, осуществляющая диффеоморфное отображение пространства $\mathbb{R}^m$ на себя;*

5) *некоторая вектор-функция $w_0(x) = (w_{01}(x), \dots, w_{0m}(x))$.*

Предположим, что вектор-функция $F(y,t) = (F_1, \dots, F_m)$ является решением эволюционного уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = L(F), \;\; y \in D \subset \mathbb{R}^n, \;\; t \geq 0,$$

и удовлетворяет начальному условию

$$F|_{t=0} = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))), \;\; y \in D.$$

Здесь L — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор.

Тогда неявное решение $w(x,t)$ уравнения

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t) \tag{51}$$

удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$$

и начальному условию

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in D,$$

где оператор B_G определяется формулой

$$B_G(w) = \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^{-1} u(x) L(u^{-1}(x)G(w))$$

($\dfrac{\partial G}{\partial w}$ — *матрица Якоби отображения* $G(w)$). *При этом, если*

$$w|_\gamma = \alpha(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\gamma = \beta(s,t),$$

$$u|_\gamma = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\gamma = 0, \tag{52}$$

$$v|_\gamma = x, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\gamma = \nu,$$

то

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)), \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \nu}\right|_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\beta(s,t).$$

Если $G(z) = z$, то краевые данные $\alpha(s,t)$, $\beta(s,t)$ для $w(x,t)$ и $F(y,t)$ совпадают, что важно для применений и кроме того, если к оператору B_G предъявляются дополнительные требования самосопряженности в главной части или обращения в нуль коэффициентов при младших производных, то на $u(x)$ и $y = v(x)$ возникают дифференциальные уравнения.

В качестве первого примера приведем преобразованную формулу Пуассона, содержащую отображения, которые можно использовать в обратных и других задачах.

Пример 10. Пусть $m = 1$ в лемме 1 и функция $F(y,t)$ — решение параболического уравнения $\dfrac{\partial F}{\partial t} = \Delta F$. Тогда имеют место формулы

$$\widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

$$a_{ij}(x) = \left.\sum_{k=1}^n \frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k}\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\right|_{y=V(x)},$$

$$a_j(x) = \frac{1}{\widetilde{u}(y)}\left.\left[\sum_{k=1}^n 2\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_k}\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k} + \widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1}\right]\right|_{y=V(x)}, \tag{53}$$

$$a(x) = \left.\frac{1}{\widetilde{u}(y)}\Delta\widetilde{u}\right|_{y=V(x)},$$

$$w(x,t) = G^{-1}\left(\frac{u(x)}{\pi^{n/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{G(w_0(V^{-1}(V(x)+2\xi\alpha\sqrt{t})))}{u(V^{-1}(V(x)+2\xi\alpha\sqrt{t}))}e^{-\xi^2}d\xi\right),$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\frac{G''(w)}{G'(w)} + \sum_{j=1}^n a_j(x)\frac{\partial w}{\partial x_j} + a(x)\frac{G(w)}{G'(w)},$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

При $u(x) = 1$, $G(z) = z$, $V(x) = x$, разумеется, получается формула Пуассона. Обращаем внимание на интересные на наш взгляд сочетания прямых и обратных отображений в формуле для решения $w(x,t)$.

Замечание 4. Если априори известно, что $a_j(x) = 0$, $a(x) = 0$, то на отображение $V(x)$ и функцию $u(x)$ в соответствии с (53) возникают дифференциальные соотношения

$$\Delta\widetilde{u}(y) = 0, \ \ \widetilde{u}(y) = \frac{1}{u(V^{-1}(y))}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

$$2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial\widetilde{u}}{\partial y_k}\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k} + \widetilde{u}(y)\Delta V_j^{-1} = 0, \ \ j = 1,\ldots,n,$$

$$a_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial V_i^{-1}}{\partial y_k}\frac{\partial V_j^{-1}}{\partial y_k}\bigg|_{y=V(x)},$$

что может быть использовано для вычисления коэффициентов $a_{ij}(x)$ в конкретных обратных задачах, возможно с использованием соотношений (55).

Для эволюционных уравнений второго порядка по переменной t имеет место

Лемма 12. *Пусть заданы*

1) *область $D \subset \mathbb{R}^n$ с гладкой границей $\gamma = \partial D$, ν — единичный вектор нормали границы γ;*

2) *вектор-функция $v(x)$, осуществляющая диффеоморфное отображение области D на свой образ $v(D) \subset \mathbb{R}^n$;*

3) *матричнозначная функция $u(x) = (u_{ij}(x))$, $i, j = 1,\ldots,m$, $m \geq 1$, $x \in D$, имеющая обратную $u^{-1}(x)$ (в смысле умножения матриц);*

4) *вектор-функция $G(z)$, $z = (z_1,\ldots,z_m)$, осуществляющая диффеоморфное пространства $\mathbb{R}^m$ на себя;*

5) *некоторые вектор-функции $w_k(x) = (w_{k1}(x),\ldots,w_{km}(x))$, $k = 0, 1$.*

Предположим, что вектор-функция $F(y,t) = (F_1,\ldots,F_m)$ является решением эволюционного уравнения

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = L(F), \ \ y \in D \subset \mathbb{R}^n, \ \ t \geq 0,$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$F|_{t=0} = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))),$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u^{-1}(v^{-1}(y))\frac{\partial G}{\partial w}(w_0(v^{-1}(y)))w_1(v^{-1}(y)), \quad y \in D.$$

Здесь L — некоторый, вообще говоря, нелинейный оператор.

Тогда неявное решение $w(x,t)$ уравнения

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t)$$

удовлетворяет эволюционному уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = B_G(w), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0,$$

и начальным условиям

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in D,$$

где оператор B_G определяется формулой

$$B_G(w) = \left(\frac{\partial G}{\partial w}\right)^{-1} \left(u(x)L(u^{-1}(x)G(w)) - d_w^2 G(w)\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}\right\rangle\right), \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

($d_w^2 G(w)\left\langle \frac{\partial w}{\partial t}\right\rangle$ — *второй дифференциал функции $G(w)$, вычисленный на векторе* $\frac{\partial w}{\partial t}$.)

При этом, если

$$w|_\gamma = \alpha(s,t), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial \nu}\right|_\gamma = \beta(s,t),$$
$$u|_\gamma = 1, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\gamma = 0,$$
$$v|_\gamma = x, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\gamma = \nu,$$

то

$$F|_\gamma = G(\alpha(s,t)), \quad \left.\frac{\partial F}{\partial \nu}\right|_\gamma = \frac{\partial G}{\partial \alpha}\beta(s,t).$$

Замечание 5. Пусть выполнены условия леммы 11 или 12 и пусть $G(z) = z$. Тогда краевые условия для w и F одинаковы и равны α и β соответственно, что важно для приложений.

Пример 11. Пусть $m = 1$ в лемме 12 и функция $F(y,t)$ — решение волнового уравнения $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F$. Тогда функция $w(x,t)$, определенная формулой

$$w(x,t) = G^{-1}\left(\frac{u(x)}{4\pi}\int\limits_{|y|=1} \frac{G(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y + t\int\limits_{|y|=1} \frac{G'(w_0(V^{-1}(V(x)+ty)))w_1(V^{-1}(V(x)+ty))}{u(V^{-1}(V(x)+ty))}\,ds_y\right),$$

удовлетворяет гиперболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{3} a_j(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_j} + \frac{G''(w)}{G'(w)}\left[\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}(x)\,\frac{\partial w}{\partial x_i}\,\frac{\partial w}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right] + a(x)\frac{G(w)}{G'(w)}$$

и данным Коши

$$w|_{t=0} = w_0(x), \quad \left.\frac{\partial w}{\partial t}\right|_{t=0} = w_1(x), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

где коэффициенты $a_{ij}(x)$, $a_i(x)$, $a(x)$ определены соотношениями (53).

При $u(x) = 1$, $G(z) = z$, $V(x) = x$ получается формула Кирхгофа.

Интересный пример общей вышеприведенной схемы леммы 11 получается при использовании формулы для решения задачи Коши параболического уравнения с переменными коэффициентами.

Пример 12. Следуя [34], рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_\mu F,$$

где $F = F(y,t)$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, Δ_μ — дифференциальный оператор второго порядка, определенный формулой

$$\Delta_\mu = \frac{1-|y|^2}{4}\left((1-|y|^2)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2} - 2\mu\sum_{j=1}^{n} y_j\frac{\partial}{\partial y_j} + \mu(2-n-\mu)\right).$$

Здесь $|y|^2 = y_1^2+...+y_n^2$. Если $\mu = 2-n$, то Δ_{2-n} — оператор Лапласа-Бельтрами, связанный с метрикой $\dfrac{4|dy|^2}{(1-|y|^2)^2}$, где $|dy|^2 = dy_1^2 + ... + dy_n^2$.

Напомним, что гипергеометрическая функция Гаусса определяется формулой

$${}_2F_1(a,b,c,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a)_k(b)_k s^k}{(c)_k k!},$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_k = a(a+1)...(a+k-1)$, $k \geq 1$. Определим функции

$$\Phi_\lambda(y) = (1-|y|^2)^{\frac{1-\mu+i\lambda}{2}}{}_2F_1\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}, \frac{1-i\lambda}{2}, \frac{n}{2}, |y|^2\right),$$

$$C(\lambda) = \frac{2^{1-\mu-i\lambda}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(i\lambda\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1+i\lambda}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+i\lambda}{2}\right)},$$

$$C_{n,\mu} = \begin{cases} 1, \text{ если } n \in (2-n, 0), \\ \\ \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma(1-\mu)}{\Gamma\left(\frac{2-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\mu}{2}\right)}, \end{cases}$$

$$p(t,q) = C_{n,\mu}\int_0^\infty \exp\left(-t\frac{(1-\mu)^2+\lambda^2}{4}\right)\Phi_\lambda(q)\left|C(\lambda)\right|^{-2}d\lambda.$$

Тогда функция

$$F(y,t) = \int_{\mathbb{R}^n} p(t, y-z)F_0(z)dz$$

является решением уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \Delta_\mu F$$

и удовлетворяет начальному условию

$$F|_{t=0} = F_0(y).$$

В соответствии с Леммой 11, если функцию $F_0(y)$ взять в виде

$$F_0(y) = u^{-1}(v^{-1}(y))G(w_0(v^{-1}(y))),$$

то функция $w(x,t)$, определенная соотношением

$$G(w(x,t)) = u(x)F(v(x),t),$$

является решением преобразованного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B_G(w)$$

и удовлетворяет начальным условиям

$$w|_{t=0} = w_0(x).$$

Полученный произвол $G(y)$, $u(x)$, $v(x)$ можно использовать в различных, в том числе и обратных, задачах.

10. Обратная задача для уравнения Гамильтона-Якоби и градиентные отображения

С поисками нелинейностей и обращением градиентных отображений связана также обратная задача кинематики волн [1, 4].

Волновые пакеты, как известно, характеризуются фазовой функцией $w(x,t)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \le t \le T$, а волновой вектор $k(x,t)$ и частота $\omega(x,t)$ определяются формулами

$$k = \operatorname{grad}_x w, \qquad \omega = -\frac{\partial w}{\partial t}.$$

Кроме того существует функциональная зависимость между частотой ω и волновым вектором k, которая имеет вид

$$\omega = H(x,k)$$

и называется дисперсионным соотношением. Здесь $H(x,y)$ — некоторая дифференцируемая функция, x, $y \in \mathbb{R}^n$. При подстановке в дисперсионное соотношение выражений для k и ω, получается уравнение Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + H(x, \operatorname{grad} w) = 0.$$

В задачах кинематики волн представляет интерес задача поиска дисперсионного соотношения $\omega = H(x,k)$, если задана начально-краевая информация относительно фазовой функции $w(x,t)$, т.е. фактически задача поиска уравнения Гамильтона-Якоби.

Приведем здесь достаточные условия существования и единственности решения данной задачи в случае, когда фазовая функция $w(x,t)$ известна при $t=0$ и при $t=T$. Эта обратная задача рассматривается здесь при известных первых интегралах и в двух случаях — для области евклидова пространства и для замкнутого многообразия призависимости функции $H(x,k)$ не только от k но и от x [6].

(I) Для уравнения Гамильтона-Якоби

$$w_t + H(x, \operatorname{grad}_x w) = 0 \tag{54}$$

с неизвестным гамильтонианом $H(x,p)$ и при условиях

$$w(x,0) = a(x); \qquad w(x,T) = b(x), \tag{55}$$

где $a(x)$ и $b(x)$ предполагаются известными и гладкими, мы рассматриваем обратную задачу нахождения двух функций: $w = w(x,t)$ и $H = H(x,p)$, определенных на $G \times [0,T]$ и на $G \times G_1$ соответственно. Здесь $G \subseteq \mathbb{R}^m$ и $G_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытые выпуклые области.

Очевидно, что в таком виде эта задача недоопределена. Сформулируем несколько дополнительных условий так, чтобы имела место единственность решения.

(A). Пусть неизвестный гамильтониан $H(x,p)$ имеет набор из m независимых интегралов $f^1, f^2, \dots f^m$, $f^i = f^i(x,p)$, находящихся в инволюции. Будем предполагать, что функции $f^i(x,p)$ известны. Тогда

$$\dot{x}^i = H_{p_i}, \qquad \dot{p}_i = -H_{x^i}. \tag{56}$$

Подобные системы возникают, например, при описании волновых процессов [35, 2].

(B). Существует каноническое преобразование области $G \times G_1 \longrightarrow G \times G_1$ фазового пространства

$$C : (x,p) \Longrightarrow (g,f),$$

при котором 2-форма $\Omega = dx \wedge dp$ остается инвариантной

$$dx^1 \wedge dp_1 + \ldots + dx^m \wedge dp_m = df^1 \wedge dg_1 + \ldots + df^m \wedge dg_m.$$

Здесь f^i — описанные выше интегралы.

(C). Начально-конечные данные являются согласованными, т.е. существует диффеоморфизм $\psi : G \longrightarrow G$ такой, что

$$f^i(x, \operatorname{grad}_x a(x)) = f^i(\psi(x), \operatorname{grad}_x b(\psi(x))), \quad i = 1, \dots m.$$

Поскольку преобразование $C : (x,p) \Longrightarrow (g,f)$ является каноническим, уравнение (54) и начально-конечные условия (55) в новых координатах (g,f) имеют вид

$$w_t + H(x(g,f), \operatorname{grad}_x w) = 0,$$
$$w(x(g,f),0) = a(x(g,f)), \quad w(x(g,f),T) = b(x(g,f)).$$

В таких координатах система Гамильтона (56) имеет более простой вид:

$$\dot{g}_i = -H_{f^i}, \qquad \dot{f}^i = H_{g_i} = 0, \tag{57}$$

поскольку функции f^i являются интегралами **(A)**. Следовательно, гамильтониан H не зависит от переменных g_i, двойственных к этим интегралам f^i и такая система несложным образом интегрируется в полученных переменных “действие-угол”, как это описано в [36].

Точки фазового пространства $G \times G_1$

$$(g(x, \operatorname{grad}_x a(x)), f(x, \operatorname{grad}_x a(x)))$$

и

$$(g(\psi(x), \operatorname{grad}_x b(\psi(x))), f(\psi(x), \operatorname{grad}_x b(\psi(x))))$$

принадлежат одной и той же траектории гамильтоновой системы (57) при любом $x \in G$. Значит, на каждой такой траектории $H_{f^i} = const$ координаты g_i зависят от t линейно:

$$g(\psi(x), \operatorname{grad}_x b(\psi(x))) - g(x, \operatorname{grad}_x a(x)) = T \cdot \operatorname{grad}_f H.$$

Отсюда вытекают явные формулы для групповой скорости $\operatorname{grad}_f H$, позволяющие выразить отображение $g(x,p)$ в терминах t на каждой траектории системы (57):

$$g(x,p) = (1 - \frac{t}{T}) \cdot g(x, \operatorname{grad}_x a(x)) + \frac{t}{T} \cdot g(\psi(x), \operatorname{grad}_x b(\psi(x))). \tag{58}$$

(D). Уравнение (58) определяет невырожденное преобразование координат в области $G \times G_1$ при всех $t \in [0, T]$.

Теорема 9. *При выполнении условий* **(A)**–**(D)** *обратная задача* (54)–(55) *имеет единственное решение* $w(x,t), H(x,p)$.

Приведем некоторые следствия из теоремы 9. С этой целью мы сформулируем несколько иные условия, из которых вытекают условия **(B)**, **(C)** этой теоремы.

(E). Гамильтониан H не зависит от пространственных переменных x, и градиенты $\operatorname{grad}_x a$, $\operatorname{grad}_x b : G \longrightarrow G_1$ осуществляют диффеоморфные преобразования.

Гамильтоновы системы с подобными гамильтонианами описывают распространение нелинейных волн в однородной среде [37]. Поэтому такие гамильтонианы обычно называют однородными. Здесь $H_{x^i} = -\dot{p}^i = 0$, то есть градиент функции w, волновой вектор и групповая скорость H_{p^i}, задающая направление потока энергии, постоянны вдоль траекторий системы (56). В таком случае эти траектории являются прямыми линиями, и каноническое преобразование тождественно.

Если условие **(E)** выполнено, то из теоремы 9 следует, что

$$\operatorname{grad}_x w(x^1 \dots x^m, t) = A[x - t \cdot \operatorname{grad}_p H],$$

где аргументы градиента функции Гамильтона H имеют вид $p = \operatorname{grad}_x w$, т.е. $p_i = w_{x^i}$, и вектор-функция A определяется из $A(y^1, \dots y^m) = \operatorname{grad}_y a(y^1, \dots y^m)$. Аналогичным образом мы определяем вектор-функцию $B(y^1, \dots y^m) = \operatorname{grad}_y b(y^1, \dots y^m)$.

Из уравнения (58) следует, что

$$\operatorname{grad}_p H(p_1, \dots p_m) = \frac{1}{T}[B^{-1}(p_1, \dots p_m) - A^{-1}(p_1, \dots p_m)].$$

Согласно хорошо известной формуле деления отрезка в заданном отношении, перепишем уравнение (58) в более симметричном виде:

$$x = (1 - \tau) \cdot A^{-1}(\operatorname{grad}_x w) + \tau \cdot B^{-1}(\operatorname{grad}_x w) = F(p), \tag{59}$$

и проверим условие **(D)**, т.е. имеет ли уравнение (59) единственное решение вида $\operatorname{grad}_x w = \Phi(x,t)$. Здесь $\tau = t/T$, $0 \le \tau \le 1$.

Рассмотрим для начала простой случай, в котором $a(x)$ и $b(x)$ — квадратичные функции, определенные на всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Их градиентами являются линейные вектор-функции $\operatorname{grad}_x a = A \cdot x$ и $\operatorname{grad}_x b = B \cdot x$; здесь через A и B обозначены соответствующие матрицы размера $m \times m$.

Умножая уравнение (59) на A, получаем

$$A \cdot x = [(1 - \tau) \cdot E + \tau \cdot A \cdot B^{-1}](\operatorname{grad}_x w). \tag{60}$$

Здесь через E обозначена единичная матрица размера $m \times m$. Полученное уравнение можно разрешить относительно $\operatorname{grad}_x w$ при любом $\tau \in [0, 1]$ тогда и только тогда, когда в правой части (60) градиент $\operatorname{grad}_x w$ умножается на невырожденную матрицу.

Следствие 7. *Если в обратной задаче* (54)–(55) *гамильтониан* $H(x,p)$ *однороден и удовлетворяет условию* **(E)** *при* $G = G_1 = \mathbb{R}^m$, *то функции* $w(x,t)$

и $H(x,p)$ однозначно определяются в $\mathbb{R}^m \times [0,T]$ и, соответственно, в $\mathbb{R}^{2m}$, тогда и только тогда, когда матрица $A \cdot B^{-1}$ не имеет отрицательных собственных значений.

Аналогичным образом условия разрешимости уравнения (59) могут быть описаны и в случае, когда квадратичные функции a и b определены в открытом полупространстве $G \subset \mathbb{R}^m$, ограниченном гиперплоскостью, ортогональной общему собственному вектору матриц A и B, соответствующему их положительным собственным числам.

Пусть теперь $a(x)$ и $b(x)$ — произвольные функции, у которых градиенты определяют диффеоморфизмы $\mathrm{grad}_x\, a$, $\mathrm{grad}_x\, b : G \longrightarrow G_1$.

Предположим, что уравнение (59) имеет несколько решений, т.е. $F(p_1) = F(p_2)$ при некоторых $p_1 \neq p_2$. Обозначим через $J_A^{-1}(p)$ и $J_B^{-1}(p)$ матрицы Якоби диффеоморфизмов $\mathrm{grad}_x\, a$ и $\mathrm{grad}_x\, b$, соответственно. Введем обозначение $l = p_1 - p_2 \neq 0$, и определим с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$A^{-1}(p_1) - A^{-1}(p_2) = \int\limits_0^1 J_A^{-1}(p_2 + l \cdot t) \cdot l dt = T_A(p_2, l) \cdot l,$$

$$B^{-1}(p_1) - B^{-1}(p_2) = \int\limits_0^1 J_B^{-1}(p_2 + l \cdot t) \cdot l dt = T_A(p_2, l) \cdot l$$

операторы $T_A(p_2, l)$ и $T_B(p_2, l)$. Здесь через $J^{-1} \cdot l$ обозначено произведение матрицы J^{-1} на вектор l.

Поскольку $F(p_1) = F(p_2)$,

$$[(1-\tau) \cdot T_A(p_2, l) + \tau \cdot T_B(p_2, l)] \cdot l = 0, \tag{61}$$

или, если $0 \neq \tau \neq 1$, то

$$[E + \frac{\tau}{1-\tau}(T_A^{-1}(p_2, l) \cdot T_B(p_2, l))] \cdot l = 0.$$

Следовательно, если оператор $T_A^{-1}(p_2, l) \cdot T_B(p_2, l)$ существует и не имеет отрицательных собственных значений, то градиент $\mathrm{grad}_x\, w$ однозначно определяется из уравнения (59).

В частности, если $a(x)$ и $b(x)$ строго выпуклы и определены на всем пространстве $\mathbb{R}^m$, то матрицы $J_A^{-1}(p)$ и $J_B^{-1}(p)$ положительно определены, поскольку они являются обратными к матрицам Гессе начальных и конечных значений $a(x)$ и $b(x)$ функции $w(x,t)$.

Умножим скалярно уравнение (61) на вектор l:

$$(1-\tau) \cdot \langle T_A(p_2, l) \cdot l, l \rangle + \tau \cdot \langle T_B(p_2, l) \cdot l, l \rangle = 0.$$

С другой стороны

$$\langle T_A(p_2, l) \cdot l, l \rangle = \int\limits_0^1 \langle J_A^{-1}(p_2 + l \cdot t) \cdot l, l \rangle dt > 0,$$

$$\langle T_B(p_2, l) \cdot l, l \rangle = \int\limits_0^1 \langle J_B^{-1}(p_2 + l \cdot t) \cdot l, l \rangle dt > 0.$$

В наших рассмотрениях τ и $(1-\tau)$ положительны, J_A^{-1} и J_B^{-1} положительно определены, значит эти два неравенства приводят к противоречию, и мы получаем

Следствие 8. *Если в обратной задаче* (54)–(55) *гамильтониан* $H(x,p)$ *однороден, а функции* a *и* b *выпуклы и удовлетворяют условию* **(E)** *при* $G = G_1 = \mathbb{R}^m$, *то функции* w *и* H *однозначно определяются в* $\mathbb{R}^m \times [0,T]$ *и* $\mathbb{R}^{2m}$, *соответственно.*

(II). Рассмотрим теперь обратную задачу (54), (55) в случае, когда функция $w(x,t)$ и гамильтониан определены на замкнутом многообразии.

Именно, пусть M^m — замкнутое компактное связное, односвязное гладкое m-мерное многообразие с фиксированной ориентацией. Пусть $\pi : T^*M^m \longrightarrow M^m$ — его кокасательное расслоение, снабженное канонической симплектической 2-формой $\Omega = dp \wedge dx$. Рассмотрим обратную задачу нахождения двух неизвестных функций $w(x,t)$ и $H(x,p)$, определенных на цилиндре $M^m \times [0,1]$, и, соответственно в некоторой области фазового пространства T^*M^m, если фазовая функция $w(x,t)$ волнового процесса является решением уравнения Гамильтона-Якоби (54) с неизвестным гамильтонианом $H(x,p)$ и удовлетворяет начально-конечным условиям (55), в которых $a(x)$ и $b(x)$ являются известными гладкими функциями на многообразии M^m.

Ясно, что задача (54)–(55) сильно недоопределена так же, как и в случае, когда задача рассматривается в открытой области евклидова пространства. Действительно, обычно невозможно однозначно определить функцию $m+1$ переменных и функцию, зависящую от $2m$ переменных по двум известным функциям m переменных. Как и выше, мы сформулируем несколько дополнительных условий, чтобы минимизировать эту неединственность.

Обозначим через $s_a, s_b : M^m \longrightarrow T^*M^m$ градиентные сечения кокасательного расслоения T^*M^m, которые сопоставляют каждой точке $x \in M^m$ значения градиентов $\operatorname{grad}_x a(x)$ и $\operatorname{grad}_x b(x)$, соответственно, и обозначим через

$$\Gamma_a = \{(x,p) \mid \operatorname{grad}_x a = p\}, \quad \Gamma_b = \{(x,p) \mid \operatorname{grad}_x b = p\}$$

графики этих градиентов.

(F). Пусть неизвестный гамильтониан $H(x,p)$ имеет набор из m независимых интегралов $f^1, f^2, \dots f^m$, $f^i = f^i(x,p)$, находящихся в инволюции, и пусть соответствующее отображение момента

$$\Phi = (f^1, \dots f^m) : T^*M^m \longrightarrow R^m,$$

определенное этим набором интегралов, является собственным, то есть отображает некомпактное множество в некомпактное.

Согласно теореме Лиувилля (см., например, [36]), связная компонента прообразов регулярных значений Φ диффеоморфны m-мерному тору T^m и косые градиенты $\operatorname{sgrad} f^1, \dots, \operatorname{sgrad} f^m$ этих интегралов определяют параллелизацию этих торов, называемых невырожденными торами Лиувилля.

(G). Следуя [38], будем предполагать, что все критические точки отображения Φ невырождены, т.е. множество C_Φ этих критических точек разлагается в объединение подмногообразий и в каждой точке $x \in C_\Phi$ дифференциал $d\Phi$

невырожден в направлениях трансверсальных к C_Φ в точке x, и во всех критических точках отображения Φ выполняется соотношение $\operatorname{corank} d\Phi > 1$.

Если условия **(F), (G)** выполняются, то, используя косые градиенты интегралов, сопоставим отображению Φ действие тора T^m, рассматриваемого как абелеву группу, на фазовом пространстве T^*M^m :

$$\mu : T^m \times T^*M^m \longrightarrow T^*M^m.$$

В этом случае связные компоненты прообразов нерегулярных значений отображения Φ диффеоморфны торам $T^{(m-k)}$, $m \geq k > 0$ меньших размерностей, полученных факторизацией m-мерного тора по стабилизаторам критических точек, образующих эти вырожденные торы $T^{(m-k)}$.

Наши дальнейшие построения будут проводиться в T^m-инвариантной ограниченной области $D \subset T^*M$, которая содержит графики Γ_a и Γ_b.

(H). Будем предполагать, что начально-конечные условия (55) находятся в общем положении с отображением момента и согласованы, т.е.

(i) графики Γ_a и Γ_b и множество критических значений отображения Φ находятся в общем положении;

(ii) для каждого вырожденного или невырожденного тора T его пересечение с графиками Γ_a и Γ_b получаются друг из друга при параллельном переносе $g(T)$ относительно угловых координат этих торов.

В частности, условие (ii) выполнено, если все такие пересечения либо состоят из одной точки либо пусты. Из условия (i) следует, что размерности пересечений Γ_a и Γ_b с множеством критических точек отображения Φ не превосходят $(m-3)$ и, следовательно, их дополнения в Γ_a и Γ_b односвязны, (см. [39, 40]). Поэтому любые два лиувиллева тора пересекающие Γ_a и Γ_b могут быть соединены гладким однопараметрическим семейством невырожденных торов, которые пересекают также графики градиентов функций a и b. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем рассматривать только такие торы, которые имеют с этими графиками непустые пересечения.

Отметим, что при таких предположениях значения неизвестного гамильтониана $H(x,p)$ можно реконструировать только на объединении этих торов, которые являются μ-орбитами точек Γ_a и Γ_b. Для определения $H(x,p)$ вне этого объединения у нас нет никакой информации.

Собственное отображение момента Φ допускает распространение до отображения одноточечной компактификации:

$$\phi : MT^*M^m \longrightarrow S^m.$$

Здесь пространство Тома кокасательного расслоения над M^m отображается в m-мерную сферу. Обозначим $\phi^*(1)$ через $kU \in H^m(MT^*M^m)$, где U — целочисленный класс Тома кокасательного расслоения, $1 \in H^m(S^m)$ — образующий целочисленной группы когомологий, а k — целое число. Как было показано в [41],

$$kU \cup kU = \phi^*(1 \cup 1) = 0 \in H^{2m}(MT^*M^m) \approx \mathbb{Z}.$$

Значит, если $k \neq 0$ то произведение $U \cup U$ и эйлерова характеристика многообразия M^m обращается в нуль, и наоборот, если $U \cup U \neq 0$, то коэффициент k обращается в нуль. Поэтому произведение $kU \cup U$ обращается в нуль в любом случае, и, таким образом, двойственные классы когомологий, т.е. каждое интегральное многообразие (лиувиллев тор T) и каждый цикл гомологичный сечению (графику градиента гладкой функции) имеют нулевой индекс пересечения. Следовательно, типичные непустые пересечения $\Gamma_a \cap T$ и $\Gamma_b \cap T$ состоят из четных наборов точек, у которых суммарный индекс пересечения равен нулю.

Выберем на невырожденном торе T_0 касательное векторное поле $v(T_0)$, имеющее постоянные угловые координаты, и такое, что его траектории реализуют параллельный перенос $g(T_0)$ из $\Gamma_a \cap T_0$ в $\Gamma_b \cap T_0$ при изменении t от 0 до 1. Очевидным образом все такие векторные поля классифицируются фундаментальной группой m-мерного тора T_0. Согласно теореме Лиувилля, это векторное поле $v(T_0)$ может быть распространено на некоторую окрестность тора T_0 так, что его ограничение $v(T)$ на любой другой невырожденный тор T (который также пересекается с Γ_a и с Γ_b) постоянно в угловых координатах на T, и также, как и на $v(T_0)$, касательно к траекториям параллельного переноса $g(T)$.

Из компактности замыкания D следует, что D содержит не более чем конечное количество критических многообразий отображения момента Φ, и что μ-орбиты точек этих многообразий образуют вырожденные торы, диффеоморфные $T^{(m-k)} = T^m/T^k$. Поэтому на объединении всех невырожденных торов, пересекающих графики градиентов начально-конечных данных a and b можно построить векторное поле v, которое при ограничении на любой такой невырожденный тор T совпадает с $v(T)$, а при ограничении на вырожденный тор задает параллельный перенос, указанный в условии (ii). Из связности и односвязности множества вырожденных торов следует, что предельные значения поля v на этих вырожденных торах определяются корректно.

Ведем обозначения: для $x \in M^m$ обозначим μ-орбиту точки $s_a(x) = (x, \operatorname{grad}_x a(x))$ через $T(x) \subset T^*M$, а через $\gamma(x,t)$ — точку на траектории векторного поля $v(T(x))$, начинающейся в $s_a(x)$. Пусть отображение $\gamma_t : M^m \longrightarrow T^*M^m$ таково, что $\gamma_t(x) = \gamma(x,t)$ и $0 \le t \le 1$. Очевидно, что для всех t, построенное таким образом отображение γ_t, является вложением. Пусть $\psi_t(x) = \pi \circ \gamma_t(x)$ — проекция траектории $\gamma(x,t)$ на конфигурационное многообразие M^m. По определению, имеем $\psi_0(x) = x$ и $\psi_1(x) = \pi \circ g(T(x)) \circ s_a(x)$.

Лемма 13. *При всех $t \in [0,1]$ образ $\gamma_t(M)$ является лагранжевым подмногообразием фазового пространства и отображение $\psi_t : M \longrightarrow M$ имеет степень один.*

Для всех $t \in [0,1]$ эти лагранжевы многообразия $\gamma_t(M)$ являются графиками градиентов $\operatorname{grad}_x w$ некоторой (вообще говоря, многозначной и имеющей особенности) функции $w(x,t)$, являющейся решением обратной задачи (54)–(55). Отсюда вытекает следующая

Теорема 10. *Если условия* **(F)–(H)** *выполнены, то обратная задача* (54)–(55) *имеет решения в классе многозначных функций с особенностями, и эти решения классифицируются фундаментальной группой m-мерного тора.*

Теория многозначных функций исследовалась во многих публикациях, (см., например, [42]). Нас интересуют условия, при которых функция $w(x,t)$ является однозначной и не имеет особенностей, а указанные выше многообразия $\gamma_t(M)$ при всех t проектируются на конфигурационное многообразие M^m диффеоморфно. В этом случае, зная градиент $\operatorname{grad}_x w$, мы можем найти функцию w с точностью до слагаемого, зависящего только от t. Поскольку начально-конечные данные (55) однозначно определяют это слагаемое.

Теорема 11. *Если в условиях теоремы 10 дифференциал отображения $\psi_t : M^m \longrightarrow M^m$ невырожден при всех $t \in [0,1]$ и при всех $x \in M$, то обратная задача* (54)–(55) *имеет гладкое однозначное решение без особенностей.*

Для доказательства достаточно проверить, что в условиях невырожденности дифференциала $d\psi_t$ Лагранжево многообразие $\gamma_t(M)$ проектируется на M^m диффеоморфно.

В самом деле, как было показано в лемме 13, степень отображения ψ_t равна единице. Пусть отображение ψ_t переводит две различные точки в точку x_0 при некотором t. Согласно теореме Сарда, без ограничения общности можно предполагать, что x_0 является регулярным значением отображения ψ_t. Поскольку сумма индексов ψ_t по всем прообразам x_0 равна единице, существуют такие прообразы x_+ и x_- этой точки x_0, в которых степени отображения ψ_t равны $+1$ и -1 соответственно. Поскольку многообразие связно, на любой кривой, соединяющей эти точки x_+ и x_- найдется точка, в которой дифференциал вырождается, что противоречит условиям теоремы.

Из приведенных рассуждений видно, что условие невырожденности дифференциала $d\psi_t$ может быть ослаблено. Здесь можно допустить вырождение этого дифференциала в дискретном множестве точек. В таких точках однозначное решение исходной обратной задачи будет иметь особенности.

Как следует из теории некоммутативного интегрирования гамильтоновых систем [43], теоремы 10 и 11 остаются справедливыми при соответствующих поправках на размерности, если интегралы $f^1, f^2, \ldots$ не находятся в инволюции, а образуют относительно скобки Пуассона максимальную конечномерную алгебру на T^*M^m.

11. Об одной задаче распознавания образов

В данном разделе рассматривается новая проблема поиска решения, символа оператора эволюционного уравнения и функции специального источника, если известны четыре измерения решения в разные моменты времени.

Другими словами — априори неизвестно ни эволюционное уравнение, ни функция источника, а требуется по четырем измерениям найти и решение, и уравнение, и возмущающий источник.

Такого рода задачи характерны для распознавания образов и они связаны с обратимостью отображений, теорией неявных функций.

Элементы такого направления исследований можно найти в [44]–[50].

Здесь, предполагая известной на некотором интервале временную часть источника, удается получить определяющие соотношения для искомых функций и сформулировать результаты.

Пусть L — линейное пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $w(x,t)$, $x \in D \subset \mathbb{R}$, $a \le t \le b$; A — линейный оператор из L в L, имеющий символ $\hat{A}(\xi)$, $\xi \in \mathbb{R}$, $A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} = \hat{A}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}$ и $\hat{A}(\xi)$ — целая функция, $\xi \in \mathbb{R}$

Постановка задачи

Рассматривается обратная задача: найти бесконечно-дифференцируемые функции $w(x,t)$, $\hat{A}(\xi)$, $\lambda(x)$, $\alpha(t)$, $x \in \mathbb{R}$, $a \le t \le b$, $\xi \in \mathbb{R}$, если

1)

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \lambda(x) f(t); \tag{62}$$

2) выполнено одно из трех соотношений

$$f(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in (a,c), \\ f_0(t), & t \in (c,b), \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in (a,c), \\ \alpha(t), & t \in (c,d), \\ f_1(t), & t \in (d,b), \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} f_0(t), & t \in (a,d), \\ \alpha(t), & t \in (d,b), \end{cases}$$

где $a < c < d < b$, $x \in \mathbb{R}$ и $f_0(t)$, $f_1(t)$ — заданные бесконечно-дифференцируемые функции;

3) известны функции для $x \in \mathbb{R}$

$$w_a(x) = w(x,t)\big|_{t=a}, \quad w_c(x) = w(x,t)\big|_{t=c},$$
$$w_d(x) = w(x,t)\big|_{t=d}, \quad w_b(x) = w(x,t)\big|_{t=b}.$$

В дальнейшем предполагаем, что функции $w_a(x)$, $w_b(x)$, $w_c(x)$, $w_d(x)$ допускают представления

$$w_a(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}_a(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \quad w_b(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{w}_b(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$
$$w_c(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}_c(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \quad w_d(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{w}_d(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.$$

Для решения задачи имеют место нижеследующие формальные результаты:

Лемма 14. *Если*

$$f(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in (a,c), \\ f_0(t), & t \in (c,b), \end{cases}$$

то для искомых $w(x,t)$, $\hat{A}(\xi)$, $\alpha(t)$, $\lambda(x)$ обратной задачи имеют место уравнения и формулы

$$F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0,$$

$$\psi(\xi) \int_a^c \alpha(p) \mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p} dp = \varphi(\xi), \tag{63}$$

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{w}_a(\xi) \int_t^b \mathrm{e}^{(t-a-p)\hat{A}(\xi)} f(p) dp + \widehat{w}_b(\xi) \int_a^t \mathrm{e}^{(t-b-p)\hat{A}(\xi)} f(p) dp}{\int_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)} f(p) dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \tag{64}$$

$$\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-b\hat{A}(\xi)} \widehat{w}_b(\xi) - \mathrm{e}^{-a\hat{A}(\xi)} \widehat{w}_a(\xi)}{\int_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)} f(p) dp} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \tag{65}$$

где $x \in \mathbb{R}$,

$$F(\xi, z) = \widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-zd}\int\limits_c^b f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp - \widehat{w}_c\mathrm{e}^{-zc}\int\limits_d^b f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp-$$

$$- \widehat{w}_b\mathrm{e}^{-zb}\int\limits_c^d f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp,$$

$$\varphi(\xi) = (\widehat{w}_a(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)a} - \widehat{w}_c(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)c})\int\limits_c^b f_0(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp,$$

$$\psi(\xi) = \widehat{w}_c(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)c} - \widehat{w}_b(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)b}.$$

Доказательство. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что формулы для $w(x,t)$ и $\lambda(x)$ дают решения уравнения (62) и данные $w_a(x) = w(x,t)|_{t=a}$, $w_b(x) = w(x,t)|_{t=b}$.

Подставляя последовательно в (64) $t = c$ и $t = d$, получим два уравнения относительно $\hat{A}(\xi)$ и $\int\limits_a^c \alpha(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp$, что приводит к уравнениям $F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0$, $\psi(\xi)\int\limits_a^c \alpha(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp = \varphi(\xi)$. □

Теорема 12. *Пусть выполнены условия Леммы 14 и для функции* $F(\xi, z)$ *выполнено* $F(\xi_0, z_0) = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z}(\xi_0, z_0) \quad &= \quad -\widehat{w}_d(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0 d}\int\limits_c^b f_0(p)(d+p)\mathrm{e}^{-z_0 p}dp + \\ &\quad +\widehat{w}_c(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0 c}\int\limits_d^b f_0(p)(c+p)\mathrm{e}^{-z_0 p}dp + \\ &\quad +\widehat{w}_b(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0 b}\int\limits_c^d f_0(p)(b+p)\mathrm{e}^{-z_0 p}dp \neq 0.\end{aligned}$$

Тогда $\hat{A}(\xi)$ *— неявная функция, определенная в окрестности* $\xi = \xi_0$ *равенством* $F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0$, *а функция* $\alpha(\xi)$ *определяется как решение линейного интегрального уравнения I-го рода* (63).

Лемма 15. *Если*

$$f(t,x) = \begin{cases} f_0(t,x), & t \in (a,c), \\ \alpha(t,x), & t \in (c,d), \\ f_1(t,x), & t \in (d,b), \end{cases}$$

то для искомых $w(x,t)$, $\hat{A}(\xi)$, $\alpha(t)$, $\lambda(x)$ *обратной задачи имеют место соотношения*

$$F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0$$

$$\psi(\xi)\int\limits_c^d \alpha(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp=\varphi(\xi), \tag{66}$$

$$w(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\widehat{w}_a(\xi)\int\limits_t^b \mathrm{e}^{(t-a-p)\hat{A}(\xi)}f(p)dp+\widehat{w}_b(\xi)\int\limits_a^t \mathrm{e}^{(t-b-p)\hat{A}(\xi)}\hat{f}(p)dp}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi,$$

$$\lambda(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-b\hat{A}(\xi)}\widehat{w}_b(\xi)-\mathrm{e}^{-a\hat{A}(\xi)}\widehat{w}_a(\xi)}{\int\limits_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi,$$

$$F(\xi,z)=(\widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-zd}-\widehat{w}_b(\xi)\mathrm{e}^{-zb})\int\limits_a^c f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp-(\widehat{w}_a\mathrm{e}^{-za}-$$

$$-\widehat{w}_c\mathrm{e}^{-zc})\int\limits_d^b f_1(p)\mathrm{e}^{-zp}dp,$$

$$\varphi(\xi)=(\widehat{w}_c(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)c}-\widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)d})\int\limits_a^c f_0(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp,$$

$$\psi(\xi)=\widehat{w}_a(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)a}-\widehat{w}_c(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)c}.$$

Теорема 13. *Пусть выполнены условия Леммы 15 и для функции $F(\xi,z)$ выполнено $F(\xi_0,z_0)=0$,*

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial z}(\xi_0,z_0) \quad = \quad & -(\widehat{w}_d(\xi_0)d\mathrm{e}^{-z_0d}-\widehat{w}_b(\xi_0)b\mathrm{e}^{-z_0b})\int\limits_a^c f_0(p)dp-\\ & -(\widehat{w}_d(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0d}-\widehat{w}_b(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0b})\int\limits_a^c f_0(p)p\,dp+\\ & +(\widehat{w}_a(\xi_0)a\mathrm{e}^{-z_0a}-\widehat{w}_c(\xi_0)c\mathrm{e}^{-z_0c})\int\limits_d^b f_1(p)dp+\\ & +(\widehat{w}_a(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0a}-\widehat{w}_c(\xi_0)\mathrm{e}^{-z_0c})\int\limits_d^b f_1(p)p\,dp\neq 0.\end{aligned}$$

Тогда $\hat{A}(\xi)$ — неявная функция, определенная в окрестности $\xi=\xi_0$ равенством $F(\xi,\hat{A}(\xi))=0$, а функция $\alpha(t)$ определяется как решение линейного интегрального уравнения I-го рода (66).

Лемма 16. *Если*

$$f(t,x)=\begin{cases} f_0(t), & t\in(a,d),\\ \alpha(t), & t\in(d,b),\end{cases}$$

то для искомых $w(x,t)$, $\hat{A}(\xi)$, $\alpha(t)$, $\lambda(x)$ *обратной задачи имеют место соотношения*

$$F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0,$$

$$\psi(\xi)\int_d^b \alpha(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp = \varphi(\xi) \tag{67}$$

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{w}_a(\xi)\int_t^b \mathrm{e}^{(t-a-p)\hat{A}(\xi)}f(p)dp + \widehat{w}_b(\xi)\int_a^t \mathrm{e}^{(t-b-p)\hat{A}(\xi)}f(p)dp}{\int_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi,$$

$$\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-b\hat{A}(\xi)}\widehat{w}_b(\xi) - \mathrm{e}^{-a\hat{A}(\xi)}\widehat{w}_a(\xi)}{\int_a^b \mathrm{e}^{-p\hat{A}(\xi)}f(p)dp}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x}d\xi,$$

$$F(\xi,z) = \widehat{w}_c(\xi)\mathrm{e}^{-zc}\int_a^d f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp - \widehat{w}_a(\xi)\mathrm{e}^{-za}\int_c^d f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp -$$

$$- \widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-zd}\int_a^c f_0(p)\mathrm{e}^{-zp}dp,$$

$$\varphi(\xi) = (\widehat{w}_b(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)b} - \widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)d})\int_a^d f_0(p)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)p}dp,$$

$$\psi(\xi) = \widehat{w}_d(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)d} - \widehat{w}_a(\xi)\mathrm{e}^{-\hat{A}(\xi)a}.$$

Теорема 14. *Пусть выполнены условия Леммы 16 и для функции* $F(\xi,z)$ *выполнено* $F(\xi_0, z_0) = 0$,

$$\frac{\partial F}{\partial z}(\xi_0, z_0) = -\widehat{w}_c(\xi_0)\int_a^d f_0(p)(c+p)dp +$$

$$+ \widehat{w}_a(\xi_0)\int_c^d f_0(p)(a+p)dp + \widehat{w}_d(\xi_0)\int_a^c f_0(p)(d+p)dp \neq 0.$$

Тогда $\hat{A}(\xi)$ — *неявная функция, определенная в окрестности* $\xi = \xi_0$ *равенством* $F(\xi, \hat{A}(\xi)) = 0$, *а функция* $\alpha(t)$ *определяется как решение линейного интегрального уравнения I-го рода* (66).

Пример 13.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \lambda(x)f(t),$$

$$f(t) = \begin{cases} \alpha(t), & t \in [0;1], \\ 1, & t \in (1;3], \end{cases}$$

$$w(x,0) = \frac{2\sin x}{x},$$

$$w(x,1) = -\frac{2\sin x}{x} + \frac{2\sin(x+1)}{x+1} + 2\int\limits_{x}^{x+1} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi,$$

$$w(x,2) = -\frac{4\sin x}{x} + \frac{2\sin(x+2)}{x+2} + 2\int\limits_{x+1}^{2+x} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi,$$

$$w(x,3) = -\frac{6\sin x}{x} + \frac{2\sin(x+3)}{x+3} + 2\int\limits_{x+2}^{3+x} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi.$$

Данные допускают представления

$$w(x,0) = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,1) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}(1-\frac{\mathrm{i}}{\xi}) + 1 + \frac{\mathrm{i}}{\xi}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,2) = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\xi} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\xi}\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1)}{\xi}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,3) = \int\limits_{-1}^{1} \left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\xi} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\xi}\mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1)}{\xi}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.$$

$$F(\xi,z) = \frac{\mathrm{e}^{-3z}(1-\mathrm{e}^{-z})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\xi}(\xi + \mathrm{i}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}-1))(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}-1)(\mathrm{e}^{-z}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi})}{z\,\xi} = 0, \qquad \xi \neq 0, \quad z \neq 0.$$

Получаем решение $A(\xi) = -\mathrm{i}\xi$.

Функция $\alpha(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\xi^2 \int\limits_{0}^{1} \alpha(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi p} dp = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}(1-\mathrm{i}\xi) - 1, \quad \xi \in [-1,1].$$

По теореме Пэли-Винера [51] функция $\int\limits_{0}^{1} \alpha(p)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi p} dp$ является целой функцией экспоненциального типа и функцию $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}(1-\mathrm{i}\xi)-1}{\xi^2}$ можно аналитически продолжить на всю числовую ось. Решая интегральное уравнение, получаем $\alpha(t) = t$.

Определение $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\xi}(1 + \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi} + \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - 1)}{\xi}) - \right.$$

$$\left. -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi} + \frac{\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi} - 1)}{\xi}) \right] \frac{\mathrm{i}\xi}{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\xi} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{i}\xi \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi = \frac{2x\cos x - 2\sin x}{x^2}.$$

Определение $w(x,t)$

$$w(x,t) = -\frac{2t\sin x}{x} + \frac{2\sin(x+t)}{x+t} + 2\int\limits_{x}^{x+t} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi, \quad t \in [0,1],$$

$$w(x,t) = -\frac{2t\sin x}{x} + \frac{2\sin(x+t)}{x+t} + 2\int\limits_{t+x-1}^{t+x} \frac{\sin\xi}{\xi} d\xi, \quad t \in (1,3].$$

Пример 14.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = Aw + \lambda(x) f(t),$$

$$f(t,x) = \begin{cases} 1, & t \in (0,2), \\ \alpha(t), & t \in (2,3), \end{cases}$$

$$w(x,0) = \frac{2\sin x}{x} = \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,1) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{i}}{\xi} + (1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi})\mathrm{e}^{-\xi^2} \right) e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,2) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{i}}{\xi} + (1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi})\mathrm{e}^{-2\xi^2} \right) e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi,$$

$$w(x,3) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{i}}{\xi} + (1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi})\mathrm{e}^{-3\xi^2} \right) e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi.$$

$$F(\xi, z) = \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z}(1 - \mathrm{e}^{-z}) \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi} \right) (1 - \mathrm{e}^{-\xi^2})(\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{-z} - 1) = 0, \quad \xi \neq 0, \quad z \neq 0.$$

Получаем решение $A(\xi) = -\xi^2$.

Функция $\alpha(t)$ является решением интегрального уравнения

$$\xi^2 \int\limits_{2}^{3} \alpha(p) \mathrm{e}^{\xi^2 p} dp = \mathrm{e}^{3\xi^2} - \mathrm{e}^{2\xi^2}, \quad \xi \in [-1,1],$$

решая интегральное уравнение, получаем $\alpha(p) = 1$.

Определение $\lambda(x)$

$$\lambda(x) = \int\limits_{-1}^{1} \left[\mathrm{e}^{2\xi^2} \left(\frac{\mathrm{i}}{\xi} + \mathrm{e}^{-2\xi^2} \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi} \right) \right) - 1 \right] \frac{\xi^2}{\mathrm{e}^{2\xi^2} - 1} e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi$$

$$= \int\limits_{-1}^{1} \mathrm{i}\xi e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi = \frac{2x \cos x - 2 \sin x}{x^2}.$$

Определение $w(x,t)$

$$w(x,t) = \int\limits_{-1}^{1} \left(\frac{\mathrm{i}}{\xi} + (1 - \frac{\mathrm{i}}{\xi}) \mathrm{e}^{-t\xi^2} \right) e^{\mathrm{i}\xi x} d\xi, \quad t \in [1,3].$$

Список литературы

[1] Ю.Е.Аниконов, *Обратные задачи для нелинейных уравнений и синергетика*, ДАН, **315** (1990), 355–388. MR1099720

[2] Yu.E.Anikonov, *Multidimensional Inverse and Ill-Posed Problems for Differential Equations*, VSP, Utrecht, 1995. MR1374785

[3] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Аналитические представления решений ряда обратных задач математической физики*, Препринт N 218, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2009.

[4] Yu.E.Anikonov, *Formulas in Inverse and Ill-Posed Problems*, VSP, Utrecht, 1997. MR1451620

[5] Ю.Е.Аниконов, Н.Б.Аюпова, Формулы для решений и коэффициентов дифференциальных уравнений 2-го порядка и обратные задачи. Препринт N 165, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2005, 58 с.

[6] V.P.Golubyatnikov, *Uniqueness Questions in Reconstruction of Multidimensional Objects from Tomography-Type Projection Data*, VSP, Utrecht, 2000.

[7] van den Essen A., *Seven lectures on polynomial automorphisms. Automorphisms of affine spaces*, Kluwer academic publishers, 1995. MR1352688

[8] У.У.Умирбаев, И.П.Шестаков, *Подалгебры и автоморфизмы колец многочленов*, ДАН, **386** (2002), 745–748. MR2004473

[9] А. И. Кострикин, *Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учеб. для вузов*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2004.

[10] Э. Б. Винберг, *Линейные представления групп*, Наука, М., 1985. MR0810402

[11] Е.А.Горин, В.Я. Лин, *Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос*, Матем. сб., **78** (1969), 579–610. MR0251712

[12] Л.Хермандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, М., 1968. MR0239112

[13] Л.А. Айзенберг, А.П.Южаков, *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе*, Наука, Новосибирск, 1979. MR056639

[14] Ю.Е.Аниконов, Ю.В.Кривцов, М.В.Нещадим, *Конструктивные методы в нелинейных задачах теории управления*, Сиб.журнал индустриальной математики, **XIII**, (2010), 29-45. MR2839597

[15] Ю.Е. Аниконов, М.В.Нещадим, *Ветвящиеся процессы, отображения и обратные задачи*, Препринт 247, ИМ СО РАН, 2010.

[16] А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974. MR0455366

[17] Ю.Е. Аниконов, *Некоторые методы исследования многомерных обратных задач для дифференциальных уравнений*, Наука, Новосибирск, 1978. MR0504333

[18] Ю.Е. Аниконов, *О геометрических методах исследования обратных задач I*, Математические проблемы геофизики. Выпуск II, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1971, 7–53.

[19] Ю.Е. Аниконов, *Теорема единственности для операторного уравнения*, Математические проблемы геофизики. Выпуск II, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1971, 54-56.

[20] С.П.Капица, *Математическая модель роста населения мира*, Мат. моделирование, **4** (1992), 56–79.

[21] С.П.Капица, *Сколько людей жило, живет и будет жить на Земле*, Наука, М., 1999.

[22] А.С.Малков, А.В.Коротаев, Д.А.Халтурина, *Математическая модель роста населения Земли, экономики, технологии и образования*, ВНовое в синергетике. Новая реальность. Новые проблемы. Новое поколение. Наука, М., 2007, 148–185.

[23] Ю.Е.Аниконов, Н.Б.Аюпова, М.В.Нещадим, *Представления решений и коэффициентов систем эволюционных уравнений*, Препринт N 276, ИМ СО РАН, Новосибирск, 2012.

[24] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для параболических уравнений*, Вестник НГУ. **11** (2011), 3–15. Zbl pre06055329

[25] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. I*, Сибирский журнал индустриальной математики, **14** (2011), 27–39. Zbl 1240.35573

[26] Ю.Е.Аниконов, М.В.Нещадим, *Об аналитических методах в теории обратных задач для гиперболических уравнений. II*, Сибирский журнал индустриальной математики., **14** (2011), 28–33. Zbl pre06004787

[27] М.А.Лаврентьев, Б.В.Шабат, *Проблемы гидродинамики и их математические модели*, Наука, М., 1977. MR0459198

[28] С.А.Махов, *Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера*, Новое в синергетике. Новая реальность. Новые проблемы. Новое поколение. Наука, М., 2007.

[29] А.С.Малков, Г.Г.Малинецкий, Д.С.Чернавский, *Моделирование развития аграрных обществ с позиций нелинейной динамики*, Новое в синергетике. Новая реальность. Новые проблемы. Новое поколение. Наука, М., 2007.

[30] В.И. Арнольд, А.И.Варченко, С.М.Гусейн-Заде, *Особенности дифференцируемых отображений*, Наука, М., 1982. MR0685918

[31] Б.А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы*, Наука М.„ 1971. MR0345229

[32] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Warszawa, 1968. MR0228862

[33] Л.Льюнг, *Идентификация систем. Теория для пользователя*, Наука, М., 1991. MR1157156

[34] Congwen Liu, Lizhong Peng, *Generalized Helgason-Fourier transforms associated to variants of the Laplace-Beltrami operators on the unit ball in* $\mathbb{R}^n$, Indiana University Math. Journal, **58** (2009), 1457–1491. MR2542095

[35] M.I.Lighthill, G.B.Witham, *On kinematic waves*, Proc. of Royal Society, **A229** (1955), 281–293. MR0072605

[36] В.И.Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1979. MR0542447

[37] *Nonlinear waves* (Eds. S.Leibovich, A.R.Seebass) Cornell university press, Ithaca-London, 1974. MR0355283

[38] R.Bott, *Nondegenerate critical manifolds*, Annals of math., **60** (1954), 248–261. MR0064399

[39] D.Montgomery, H.Samelson, L.Zippin, *Singular points of a compact transformation group*, Annals of math. **63** (1956), 1–9. MR0074773

[40] V.Guillemin, S.Sternberg, *Convexity properties of the moment mappings*, Inventions Mathematicae, **67** (1982), 491–513. MR0664117

[41] В.П.Голубятников, *Некоторые когомотопические свойства пространств Тома*, Сиб.мат. журнал, **27** (1986), 201–205. MR0890317

[42] С.П.Новиков, *Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса*, УМН, **37** (1982), 3–49. MR0672377

[43] А.С.Мищенко, А.Т.Фоменко, *Интегрирование гамильтоновых систем с некоммутативными симметриями*, Труды семинара по векторному и тензорному анализу, МГУ, **20** (1981), 5–54. MR0622006

[44] Ю.Е.Аниконов, *Формулы для решений некоторых обратных задач для эволюционных уравнений*, ДАН СССР, **319** (1991), 1117–1119. MR1152896

[45] Ю.Е.Аниконов, *Формулы в многомерной обратной задаче для эволюционного уравнения*, ДАН РАН, **334** (1994), 263–265. MR1275436

[46] Ю.Е.Аниконов, М.П.Вишневский, *Редукция многомерных обратных задач к начально-краевым задачам в пространствах Гильберта*, Сиб.мат. журнал, **35** (1994), 495–514. MR1292210

[47] Ю.Е.Аниконов, М.П.Вишневский, *Формулы в обратных задачах для эволюционного уравнения*, Сиб.мат. журнал, **37** (1996), 963–976. MR1643238

[48] N.B. Ayupova and V.P.Golubyatnikov, *Inverse problems for evolution equations and matrix Fourier transform*, Journal of Inverse and Ill-posed Problems, **5** (1997), 401–409. MR1604489

[49] N.B.Ayupova and V.P.Golubyatnikov, *On formal solutions to multidimensional evolution equations*, Sib.Advances in Mathematics, **8** (1998), 21–40. MR1666263

[50] Ю.Е.Аниконов, *Формулы в одной задаче поиска символа линейного оператора, Сибирские электронные математические известия*, **8** (2011), 163–167. MR2876539

[51] Л.И.Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М., 1971. MR0588524

Юрий Евгеньевич Аниконов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: anikon@math.nsc.ru

Наталья Борисовна Аюпова
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: ayupova@math.nsc.ru

Валерий Георгиевич Бардаков
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: bardakov@math.nsc.ru

Владимир Петрович Голубятников
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: glbtn@math.nsc.ru

Михаил Владимирович Нещадим
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. академика Коптюга 4,
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова 2,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: neshch@math.nsc.ru