S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 9, стр. 439–444 (2012) УДК 512.54
MSC 13A99

О ЛЕММЕ НОЙМАНА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СИЛЬВЕСТРА

А.А. Шлепкин

Abstract. We got another proof of famous B. Neumann's result about groups covered by finite many cosets.

Keywords: coset, Neumann's lemma, Sylvester sequence.

1. Введение

В 1954 году Б. Нойман [1] опубликовал доказательство своей знаменитой леммы о том, что если группа покрывается конечным числом смежных классов по нескольким подгруппам, то индекс одной из этих подгрупп конечен. Несмотря на простоту, лемма Ноймана оказала заметное влияние на развитие теории групп с различными условиями конечности. В частности, она играет ощутимую роль в коротком доказательстве В.В. Беляева [3] обобщения теоремы Шункова [4] о локальной конечности периодической группы содержащей инволюцию с конечным централизатором.

В том же году Нойман вернулся к изучению групп, покрываемых конечным числом n смежных классов [2]. Он показал, что в случае, когда покрытие является несократимым, все участвующие в нем подгруппы имеют конечные индексы, и ограничил сверху эти индексы функцией, зависящей только от n.

В данной работе дается другое доказательство этого результата Ноймана. В нем оценки индексов напрямую связываются с последовательностью Сильвестра.

Напомним, что последовательностью Сильвестра называется последовательность $v_1, v_2, ..., v_n, ...$, где $v_1 = 2$, а $v_n = v_{n-1}^2 - v_{n-1} + 1 = v_{n-1}(v_{n-1} - 1) + 1$ при $n > 1$.

Shlyopkin, A.A., On Neumann's lemma and Sylvester sequence.

Поступила 11 сентября 2012 г., опубликована 23 сентября 2012 г.

2. Основной результат

Теорема 1. *Пусть группа G представима в виде объединения конечного числа смежных классов по подгруппам $H_1, \cdots, H_n$,*

$$G = a_1H_1 \bigcup a_2H_2 \bigcup \cdots \bigcup a_nH_n = \bigcup_{i=1}^{n} a_iH_i$$

и

$$G_j = \bigcup_{\substack{i=1,\\ i\neq j}}^{n} a_iH_i \neq G$$

для любого j.

Тогда

(а) Существует такой i, что

$$|G : H_i| \leq n$$

(б) Для любого i

$$|G : H_i| \leq v_n - 1,$$

где v_n - n-й член последовательности Сильвестра.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть группа G представима в виде*

$$G = a_1H_1 \bigcup a_2H_2 \bigcup \cdots \bigcup a_nH_n,$$

где $a_i \in G$, H_i, $i = 1, ..., n$ – подгруппы G . Тогда для некоторого i

$$|G : H_i| \leq v_n - 1,$$

где v_n - член последовательности Сильвестра с номером n.

Доказательство.

При $n = 1$ доказательство очевидно. Приведем рассуждение для $n = 2, 3$, так как эти частные случаи хорошо иллюстрирует общую идею доказательства.

Пусть $n = 2$. Тогда $G = a_1H_1 \cup a_2H_2$, и либо $G = a_1H_1$ и все доказано, либо существует элемент $a_3 \in G$, что $a_3H_1 \cap a_1H_1 = \varnothing$ и $H_1 \subseteq a_3^{-1}a_2H_2$, следовательно, $G = dH_2 \cup a_2H_2$. Отсюда видно, что для $n = 2$, $|G : H_i| \leq 2 = v_2 - 1$, для любого $i \in 1, 2$

Пусть $n = 3$: Тогда:

$$G = a_1H_1 \bigcup a_2H_2 \bigcup a_3H_3$$

и либо $G = a_1H_1$ и все доказано, либо существуют такой элемент $a_4 \in G$, что $a_4H_1 \subseteq a_2H_2 \bigcup a_3H_3$, следовательно, $H_1 \subseteq a_4^{-1}a_2H_2 \bigcup a_4^{-1}a_3H_3$ и

$$G = b_1H_2 \bigcup b_2H_2 \bigcup b_3H_3 \bigcup b_4H_3,$$

где $b_1 = a_1a_4^{-1}a_2,\ b_2 = a_1a_4^{-1}a_3,\ b_3 = a_2, b_4 = a_3$. Проведя аналогичную цепочку рассуждений, избавимся от смежных классов по подгруппе H_2. Получим:

$$G = c_1H_3 \bigcup c_2H_3 \bigcup c_3H_3 \bigcup c_4H_3 \bigcup c_5H_3 \bigcup c_6H_3$$

для некоторых c_i, где $i = 1, \cdots, 6$. Отсюда видно, что для $n = 3$, $|G : H_i| \leq 6 = v_3 - 1$.

Пусть теперь

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} a_iH_i. \tag{1}$$

Далее будем последовательно избавляться от смежных классов по подгруппам $H_1 ... H_{n-1}$, в разложении (1), действуя, как в частных случаях, $n = 2, 3$, рассмотренных выше. Покажем, что число смежных классов после выбрасывания k подгрупп будет равняться

$$(v_{k+1} - 1)(n - k) \tag{2}$$

Построим базу индукции для $k = 1$. Перепишем разложение (1) в виде:

$$G = a_1 H_1 \cup \left[\bigcup_{i=2}^{n} a_i H_i \right] \tag{3}$$

Тогда либо $G = a_1 H_1$ и все доказано , либо найдется такой смежный класс $a_1^* H_1$, что $a_1^* H_1 \cap a_1 H_1 = \oslash$. Следовательно, имеет место включение

$$a_1^* H_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n} a_i H_i \tag{4}$$

Домножив (4) слева на $(a_1^*)^{-1}$, получим включение

$$H_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{n} (a_1^*)^{-1} a_i H_i. \tag{5}$$

Заменим в разложении (3) H_1 на правую часть включения (5):

$$G = \left[\bigcup_{i=2}^{n} a_i^2 H_i \right] \cup \left[\bigcup_{i=2}^{n} a_i^1 H_i \right] = \bigcup_{j=1}^{2} \left[\bigcup_{i=2}^{n} a_i^j H_i \right] \tag{6}$$

Легко видеть, что число смежных классов на первом шаге (соответствующем $k = 1$) равно $2(n-1)$ или $(v_2 - 1)(n-1)$, и в этом случае формула (2) доказана. Предположим теперь, что (6) верно при $k \geq 1$. Тогда:

$$G = \bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} \left[\bigcup_{i=k+1}^{n} a_i^j H_i \right] \tag{7}$$

и число смежных классов в разложении (7) равно $(v_{k+1} - 1)(n - k)$, то есть имеет место формула (2).

Выполним $k+1$ шаг индукции, удалив из разложения (7) все смежные классы по подгруппе H_{k+1}. Представим разложение (7) в виде:

$$G = \left[\bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} a_{k+1}^j H_k \right] \cup \left[\bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} \left[\bigcup_{i=k+2}^{n} a_i^j H_i \right] \right] \tag{8}$$

Теперь либо

$$G = \bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} a_{k+1}^j H_k$$

и тогда все доказано, поскольку $|G : H_{k+1}| = v_{k+1} - 1$, либо

$$G \neq \bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} a_{k+1}^j H_k.$$

В последнем случае найдется такой смежный класс bH_{k+1}, что имеет место включение

$$bH_{k+1} \subseteq \bigcup_{l=1}^{v_{k+1}-1} \left[\bigcup_{i=k+2}^{n} a_i^l H_i \right] \tag{9}$$

Домножив левую и правую часть (9) слева на b^{-1}, получаем:

$$H_k \subseteq \bigcup_{l=1}^{v_{k+1}-1} \left[\bigcup_{i=k+2}^{n} b^{-1} a_i^l H_i \right] \tag{10}$$

Заменив в (8) подгруппы H_{k+1} на правую часть включения (10), получим разложение:

$$G = \bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} a_{k+1}^{j} \left[\bigcup_{i=1}^{v_{k+1}-1} \bigcup_{i=k+2}^{n} b^{-1} a_i^j H_i \right] \bigcup$$
$$\bigcup \left[\bigcup_{j=1}^{v_{k+1}-1} \bigcup_{i=k+2}^{n} a_i^j H_i \right] \tag{11}$$

Число смежных классов в разложении (11) равно

$$\left[(v_{k+1}-1)^2 + (v_{k+1}-1)\right](n-(k+1)) =$$
$$= \left[v_{k+1}^2 - 2v_{k+1} + 1 + v_{k+1} - 1\right](n-(k+1)) =$$
$$= (v_{k+2}-1)(n-(k+1))$$

и формула (2) доказана.

Так как максимально возможное значение k равно $n-1$, то для некоторой подгруппы H_i

$$|G : H_i| \leq (v_{(n-1)+1}+1)(n-(n-1)) = (v_n - 1)$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть конечная группа G представима в виде*

$$G = a_1 H_1 \bigcup a_2 H_2 \bigcup \cdots \bigcup a_n H_n,$$

где $a_i \in G$, H_i - подгруппы G . Тогда $\mid G : H_i \mid \leq n$ для некоторого i.

Доказательство

Предположим обратное, что $|G : H_i| > n$ для любого i. По теореме Лагранжа:

$$|G| = |G : H_i||H_i|.$$

Тогда для для любого i:

$$\frac{|G|}{|G : H_i|} = |H_i| < \frac{|G|}{n} \tag{12}$$

Так как $|a_i H_i| = |H_i|$, то

$$|G| = |\bigcup_{i=1}^{n} a_i H_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i H_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |H_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G : H_i|} \tag{13}$$

Из (12), (13) вытекает, что:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|G : H_i|} < 1,$$

Следовательно,

$$|G| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{|G|}{|G : H_i|} \leqslant |G| \sum_{i=1}^{n} \frac{|1|}{|G : H_i|} < |G|$$

Противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3. *Для любого* $i \in 1, \cdots, n$

$$|G : H_i| < \infty$$

Доказательство

Предположим обратное. Тогда в силу леммы 1 имеет место разложение:

$$G = \left[\bigcup_{j=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}H_j\right] \cup \left[\bigcup_{j=m+1}^{n}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}^{i}H_j\right] \tag{14}$$

где $|G:H_i| < \infty \ \forall j = 1,...,m;\ |G:H_j| = \infty \ \forall j = m+1,...,n, \quad 1 \le n,\ \sum n_j = n$
Так как в силу нашего предположения $G \ne \bigcup\limits_{i=1}^{n_1} a_{1i}H_1$ то найдется $b_1 \in G$ такой, что

$$b_1 H_1 \subset \left[\bigcup_{j=2}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}H_i\right] \cup \left]\bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}H_j\right].$$

Домножив обе части этого включения на b_1^{-1}, получим включение

$$H_1 \subset \left[\bigcup_{j=2}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} b^{-1}a_{ij}H_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{n_j} b^{-1}a_{ji}H_i\right] \tag{15}$$

Заменяя в разложении (14) группу H_1 на правую часть включения (15), получим разложение

$$G = \left[\bigcup_{i=1}^{n_j} H_1 a_{ij}\right] \cup \left[\bigcup_{j=2}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}H_i\right] \cup \left[\bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{n_j} a_{ij}H_i\right] =$$

$$\left[\bigcup_{i=1}^{n_1} a_{1j}\left[\left(\bigcup_{j=2}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} b_1^{-1}a_{ji}H_i\right) \cup \left(\bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{n_j} b^{-1}a_{ji}H_i\right)\right]\right] \cup$$

$$\cup \left[\bigcup_{j=2}^{m}\bigcup_{i=1}^{n_j} b_1 a_{ij}H_j\right] \cup \left[\bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{n} b^{-1}a_{ij}H_j\right] \tag{16}$$

Таким образом, в разложении (16) присутствуют уже $k-1$ различных групп. Приводя разложение (16) к виду (14) и повторяя приведенные выше рассуждения, мы исключаем последовательно группы $H_2, ..., H_m$ из разложения (14). Следовательно,

$$G = \bigcup_{j=m+1}^{k}\bigcup_{i=1}^{r_j} d_{ij}H_i \tag{17}$$

для некоторых $d_{ij} \in G$. В разложении (17) все H_j удовлетворяют условию $|G:H_j| = \infty$. Однако, по лемме 1 $|G:H_j| < \infty$ для некоторого j. Противоречие. Лемма доказана.

Доказательство пункта a) теоремы.

Из леммы 3 вытекает существование подгруппы $N \subseteq G$ со следующими свойствами

1. $N \lhd G$.
2. $N \subseteq H_j$ для любого $j \in 1, ..., n$.
3. $|G:N| < \infty$.

Рассмотрим фактор-группу $\overline{G} = G/N$. Ей соответствует разложение

$$\overline{G} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{a_i}\,\overline{H_i}.$$

Так как $\overline{G}$ – конечная группа, то $|\overline{G}:\overline{H_j}| \le n$ для некоторого j (лемма 2). Так как $N \le H_j$, то $|G:H_j| \le n$.

Доказательство пункта б). По лемме 3 все H_i имеют конечный индекс. Исключая из приведенного разложения все группы за исключением фиксированного H_i (как в доказательстве леммы 1), получим $|G : H_i| \leq v_n - 1$.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] B.H. Neumann, *Groups covered by permutable subsets,* J. London Math. Soc. **29** (1954), 236–248. MR 0062122

[2] B.H. Neumann, *Groups covered by finitely many cosets,* Publl. Math. Debrecen, **3** (1954), 227–242. MR 0072138

[3] В.В. Беляев, *Группы с почти регулярной инволюцией*, Алгебра и логика, **5** (1987), 531–535. Zbl 0652.20039

[4] В.П. Шунков, *О периодических группах с почти регулярной инволюцией.*, Алгебра и логика, **4** (1972), 470–494.

Алексей Анатольевич Шлепкин
Сибирский Федеральный Университет,
пр. Свободный 79,
660041, Красноярск, Россия
E-mail address: shlyopkin@gmail.com